انتشارات مدرسه

مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱

سال اول، زمستان ۱۳۷۰ بها ۵۰۰ ریال



چاپ پنجم

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن
۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آن
۴ ـ طرح معماهای ریاضی
۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و...)

مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

□ نشانی : خیابان ایرانشهرشمالی ، پلاک ۲۶۸ ، ساختمان شمارهٔ ۴ وزارت آموزش و پرورش تلفن : ۸۲۶۰۰۷

مطالب این شماره

● سخن سردبیر	۲
● مبحث تقارن محمد عابدی	۳
● شماهم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید پرویز شهریاری	۲۰
● نظریه اعداد وکامپیوتر غلامرضا یاسی‌پور و سیدحسین سید موسوی	۲۴
● لگاریتم احمد قندهاری	۲۶
● تاریخچه مختصر پیدایش هندسه محمد هاشم رستمی	۳۵
● منطق قدیم و ریاضیات غلامرضا یاسی پور	۳۸
● گروه، پیدایش وکاربرد نظریه‌گروهها حمید رضا امیری	۴۸
● بخش پذیری در چند جمله‌ایها سیدمحمد رضا هاشمی موسوی	۵۸
● مسائل مسابقه‌ای محمد هاشم رستمی	۶۷
● مسائل برای حل	۶۸

سخن سردبیر

عزیزان سلام

مدتی بود که با جمعی از دوستان در گروه ریاضی انتشارات مدرسه، که همگی از دبیران و اساتید با تجربهٔ ریاضیات هستند مشغول مذاکره و مشاوره بودیم تا بلکه باعنایت خداوند گرهی از گره‌های فراوان دانش‌آموزان و معلمین را در امر آموزش و فهم ریاضیات ، بازکنیم.

دوستی می‌گفت : متأسفانه توزیع معلمین کارآمد و پرتجربه و امکانات آموزشی در مناطق مختلف کشور و حتّی در مناطق مختلف تهران عادلانه نیست و چون بسیاری از مطالب کتابهای درسی نیاز به توضیح و تفصیل دارند و در روش تدریس ریاضیات هم میان معلمین هماهنگی وجود ندارد؛ بچه‌ها برای جبران کمبودهای درسشان به آموزشگاههای تضمینیِ خصوصی و کتابهای کمک درسی و کمک آموزشی رو می‌آورند. آموزشگاههایِ تضمینیِ خصوصی مانند قرص مسکّن فقط تا لب امتحان دانش آموز را می‌رساند و با تمام شدن امتحانات اثرات این قرصها هم از بین می‌رود (یعنی علم و دانش هیچ). کتابهای کمک آموزشی هم اکثراً پیش دانشگاهی است و تازه همینها هم غالباً از مرزهای تهران خارج نمی‌شود.

دوست دیگری می‌گفت: «البته ما چند مجلهٔ ریاضی هم در کشور داریم ولی متأسفانه هیچکدامشان دانش آموزی نیست. در این میان دانش آموزانی که بنیهٔ علمی متوسطی دارند عملاً در نشریات و کتابهای کمک آموزشی فراموش شده‌اند. خلاصه، بحثهای فراوانی شد تا بالاخره به اینجا رسیدیم که با یاری دوستان همدل، دست به تولید یک مجلهٔ ریاضی دانش آموزی بزنیم و به این ترتیب به راهی پر پیچ و خم قدم گذاشتیم که امیدواریم به لطف خدا قدمهایمان نلغزد.

در این مجله که با استمداد از قرآن مجید[1] نام برهان به آن داده‌ایم، سعی شده علاوه برمقالات درسی که در سطح دانش آموزان اول تا چهارم متوسطه است، مقالات عمومی قابل استفاده‌ای برای معلمین و دانش آموزان علاقه‌مند نیز گنجانده شود. حتی‌-الامکان مقالات دنباله‌دار نخواهیم داشت، و هر مقاله را (ان‌شاءا...) در همان شمارهٔ مجله تمام خواهیم کرد. البته فعلاً تنها بخش دنباله‌دار مجله (بنابر ضرورت)، بخش «مسائل برای حل» و «مسائل مسابقه‌ای» خواهد بود. صورت مسائل هر دو قسمت در این شماره چاپ می‌شود و حل مسائل در شماره بعد چاپ خواهد شد. در بخش «مسائل مسابقه‌ای» خوانندگان عزیز حل مسائل را حداکثر تا یکماه به آدرس مجله پست خواهند کرد و مابرای کسانی که جواب درست فرستاده باشند جوایزی ارسال خواهیم کرد و اسامی آنها را نیز در مجله چاپ خواهیم کرد. «مسائل برای حل» طوری طراحی شده‌اند که هم زمان با پیشرفت درسهای کتابهای ریاضی و هماهنگ با مطالب آنها باشد. همچنین بخشهای متنوع دیگری با عناوین «ادب ریاضی» و «تفریح اندیشه» در لابه لای مقالات گنجانده شده که امیدواریم مورد توجه و استفادهٔ شما عزیزان واقع شود. البته قسمتی از مجله را نیز از شمارهٔ بعد به مقالات و نظرات شما و جواب نامه‌هایتان اختصاص خواهیم داد. مجلهٔ برهان فعلاً به صورت فصلنامه منتشر می‌شود که امیدواریم ـ به خواست خداوند ـ بتوانیم آن را ماهانه منتشر کنیم و بالاخره از آنجا که هیچ کلامی جز کلام خدا و معصومین(ع) خالی از خطا و اشتباه نیست، از همهٔ اساتید محترم، معلمین گرامی و دانش آموزان عزیز تقاضا می‌کنیم که ما را از نظرات، انتقادات و پیشنهادات خود بهره‌مند کنند و این مجله را مجلهٔ خودشان بدانند.

سردبیر

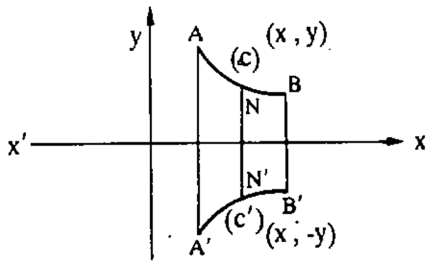
۱ـ کلمهٔ برهان و مشتقات آن ۸ بار در قرآن آمده است از جمله آیهٔ : یٰاأَیُّهاالنّاسُ قَدْجاءَکُمْ بُرْهانٌ مِن رَبِّکُم «سورهٔ نساء آیهٔ ۱۷۴»

مبحث تقارن

(مورد استفاده دانش آموزان سال چهارم ریاضی)

● محمد عابدی

۱: تقارن منحنی نسبت به محور x ها: برای به‌دست آوردن قرینه نقطه A نسبت به محور x ها از نقطه A عمود AH را بر محور x ها فرود آورده، AH را به اندازه خود امتداد داده تا نقطه A' به‌دست آید در این صورت نقطه A' را قرینه نقطه A نسبت به محور x نامیده و محور x ها را محور تقارن می‌نامند. اگر قرینه هر نقطه منحنی (C) را نسبت به محور x ها به‌دست آوریم و این نقاط را به هم وصل نماییم شکل (C') را قرینه منحنی (C) نسبت به محور x ها می‌نامند.



شکل ۱

اگر مختصات نقطه A را (x , y) فرض نماییم مختصات نقطه A' به صورت $(x\ ,\ -y)$ می‌باشد اگر معادله منحنی (C) به صورت $y=f(x)$ باشد برای به دست آوردن معادله منحنی C' بایستی در معادله منحنی (C)، x را تغییر نداده و y را به $-y$ تبدیل نماییم.(شکل ۱)

مثال ۱ : مختصات قرینه نقطه $A(۲,۳)$ را نسبت به محور x ها بیابید.

حل : کافی است y را به $-y$ یعنی ۳ را به ۳− تبدیل نماییم، داریم : $A'(۲\ ,\ -۳)$.

مثال ۲ : اگر نقاط $A(m+۴\ ,\ n+۶)$ و $A'(-m\ ,\ ۲n)$ نسبت به محور x ها قرینه باشند m و n کدام است؟

حل :

$$x_A = x_{A'} \Rightarrow -m = m + ۴ \Rightarrow -۲m = ۴ \Rightarrow \boxed{m=-۲}$$

و

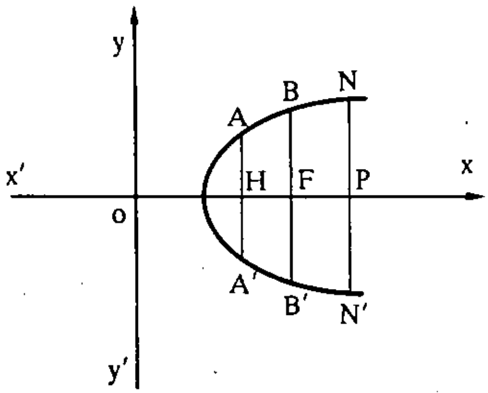
$$y_A = -y_{A'} \Rightarrow n+۶ = -۲n \Rightarrow ۳n = -۶ \Rightarrow \boxed{n=-۲}$$

$$\Rightarrow A(-۲+۴, -۲+۶) \Rightarrow A(۲,۴) \text{ و } A'(۲,-۴)$$

مثال ۳ : معادله قرینه خط به معادله $y = x+۲$ را نسبت به محور x ها بیابید.

حل : $y \to -y \Rightarrow -y = x+۲ \Rightarrow \boxed{y=-x-۲}$

تبصره ۱ : محور x ها را محور تقارن یک منحنی گویند اگر قرینه هر نقطه منحنی نسبت به محور x ها روی خود منحنی باشد. (شکل ۲)



شکل ۲

$AH = HA'$ و $BF = FB'$ و $NP = PN'$

مثال ۴ : محور تقارن منحنی به معادله $y^۲=x$ کدام است؟

حل : اگر y را به $-y$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین محور تقارن منحنی محور x ها می‌باشد.

مثال ۵ : اگر محور تقارن منحنی به معادله $y^۴-(m-۱)y^۳+۲=x$ محور x ها باشد m کدام است؟

حل : اگر y را به $-y$ تبدیل نماییم باید معادله تغییر نکند.

$$(-y)^۴-(m-۱)(-y)^۳+۲=x \Rightarrow y^۴+(m-۱)y^۳+۲=x$$

با مقایسه معادله اخیر با معادله منحنی داریم :

$$-(m-۱) = m-۱ \Rightarrow ۲(m-۱) = ۰ \Rightarrow \boxed{m=۱}$$

یا می‌توانیم بگوییم با تبدیل y به $-y$ ، $y^۳$ تغییر می‌کند پس باید $y^۳$ وجود نداشته باشد و این در صورتی است که ضریب $y^۳$ یعنی

$-(m-۱) = ۰$ یا $\boxed{m = ۱}$ باشد.

مثال ۶: محور تقارن منحنی $|y| = x^۲ - x$ کدام است؟

حل: اگر y را به $-y$ تبدیل کنیم چون $|-y| = |y|$ می‌باشد پس معادله $|-y| = x^۲ - x$ همان معادله داده شده می‌باشد بنابراین چون معادله تغییر نمی‌کند لذا محور تقارن منحنی محور x ها می‌باشد.

تبصره ۲: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله $y = \pm f(x)\sqrt{g(x)}$ محور x ها می‌باشد.

حل: اگر طرفین معادله را به توان (۲) برسانیم معادله به‌صورت $y^۲ = f^۲(x)\,g(x)$ در آمده اگر در این معادله y را به $-y$ تبدیل نماییم معادله تغییر نمی‌کند پس محور تقارن منحنی محور x ها می‌باشد مثلاً محور تقارن $y = \pm x\sqrt{x^۲ + ۱}$ محور x ها است.

مثال ۷: اگر محور تقارن منحنی به‌معادله $y = m - ۲ \pm x\sqrt{x - ۲}$ محور x ها باشد m کدام است؟

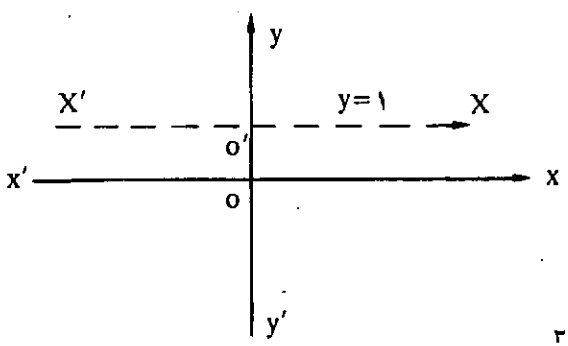
حل: اگر $m - ۲ = ۰$ یا $\boxed{m = ۲}$ باشد معادله به‌صورت $y = \pm x\sqrt{x - ۲}$ درآمده پس محور تقارن منحنی محور x ها خواهد بود.

مثال ۸: نشان دهید محور تقارن منحنی به‌معادله $y^۲ - ۲y - x = ۰$ خط $y = ۱$ می‌باشد.

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha = ۰ , \beta = ۱)$ انتقال داده، معادله منحنی را در دستگاه جدید می‌نویسیم:

$$x = X + \alpha \Rightarrow x = X + ۰ = X , y = Y + \beta = Y + ۱$$

به جای x در معادله X و به جای y در معادله $Y + ۱$ قرار داده داریم:



شکل ۳

$$(Y+۱)^۲ - ۲(Y+۱) - X = ۰ \Rightarrow Y^۲ + ۲Y + ۱ - ۲Y - ۲ - X = ۰ \Rightarrow Y^۲ - X - ۱ = ۰$$

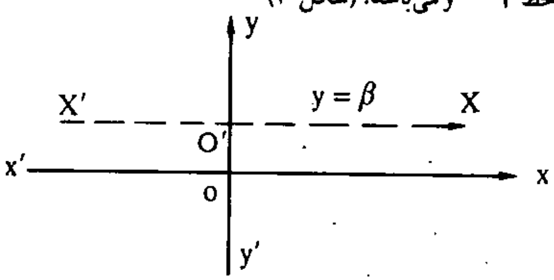
اگر در این معادله Y را به $-Y$ تبدیل نماییم معادله تغییر نمی‌کند پس محور تقارن محور x های جدید یعنی خط $y = ۱$ محور تقارن منحنی می‌باشد. (شکل ۳)

مثال ۹: اگر محور تقارن منحنی به معادله $y^۲ - ۲y - x = ۰$ خطی موازی محور x ها باشد معادله محور تقارن را بیابید.

حل: مطابق فرض خط $y = \beta$ محور تقارن منحنی بوده مبدأ مختصات را به نقطه $O'(۰ , \beta)$ انتقال داده داریم:

$$x = X + ۰ = X , y = Y + \beta , (Y+\beta)^۲ - ۲(Y+\beta) - X = ۰ \Rightarrow Y^۲ + ۲\beta Y + \beta^۲ - ۲Y - ۲\beta - X = ۰ \Rightarrow Y^۲ + ۲Y(\beta - ۱) - X + \beta^۲ - ۲\beta = ۰$$

اگر در معادله اخیر Y را به $-Y$ تبدیل نماییم معادله نباید تغییر کند و این درصورتی است که $\beta - ۱ = ۰$ یا $\beta = ۱$ پس محور تقارن منحنی خط $y = ۱$ می‌باشد. (شکل ۴)

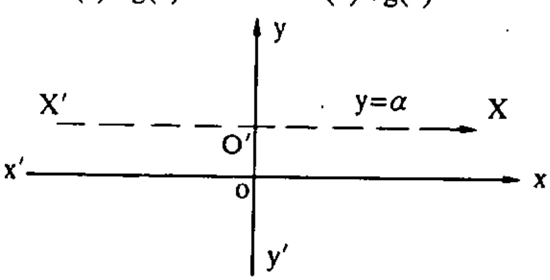


شکل ۴

تبصره ۳: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله $y = a \pm f(x)\sqrt{g(x)}$ خط $y = a$ می‌باشد.

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha = ۰ , \beta = a)$ انتقال داده داریم:

$$x = X + ۰ = X , y = Y + \beta = Y + a , Y + a = a \pm f(x)\sqrt{g(x)} \Rightarrow Y = \pm f(x)\sqrt{g(x)}$$



شکل ۵

یعنی محور x های جدید یا خط $y = a$ محور تقارن است. (شکل ۵)

مثال ۱۰: اگر خط $y = 1$ معادله محور تقارن منحنی $y = m - 1 \pm x\sqrt{x}$ باشد m کدام است؟

حل: با توجه به تبصره (۳) خط $y = m - 1 = 1$ محور تقارن بوده پس $\boxed{m = 2}$ می‌باشد.

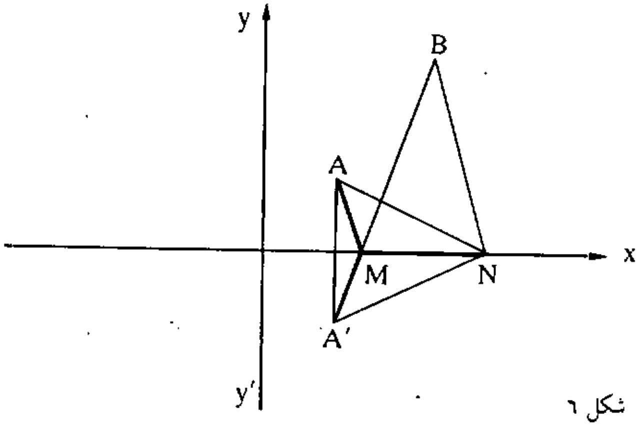
مثال ۱۱: نقطه‌ای روی محور x ها بیابید که مجموع فواصل آن نقطه از نقاط $B(2, 3)$ و $A(1, 1)$ می‌نیمم باشد.

حل: قرینه نقطه A را نسبت به محور x ها به‌دست آورده آن‌را نقطه A' می‌نامیم نقطه A' را به B وصل نموده تا محور x ها را در نقطه M قطع نماید نقطه M جواب مسأله است زیرا اگر نقطه دیگری مانند N روی محور x ها در نظر بگیریم نشان خواهیم داد که $NA + NB > MA + MB$ می‌باشد. چون نقاط N و M روی عمود منصف AA' می‌باشند پس $NA = NA'$ و $MA = MA'$ (هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط فاصله‌اش از دو سر آن پاره خط به یک اندازه می‌باشد) و در مثلث $NA'B$ داریم:

$$A'B < NA' + NB \Rightarrow A'M + MB < NA' + NB \Rightarrow$$

$$\boxed{MA + MB < NA + NB}$$

برای به‌دست آوردن نقطه M معادله خط $A'B$ را نوشته در این معادله به جای y صفر قرار داده طول نقطه M به‌دست می‌آید.



شکل ٦

$A'(x_1 = 1, y_1 = -1)$ و $B(x_2 = 2, y_2 = 3)$، $A'B \overset{\text{به‌معادله}}{\equiv}$

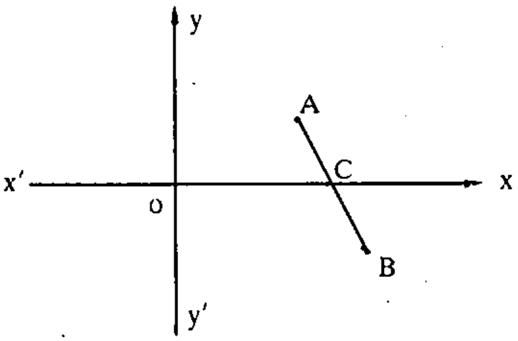
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = \frac{3+1}{2-1} \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = 4,$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 4 \Rightarrow 4x - 4 = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{4},$$

$$\boxed{M(\frac{5}{4}, 0)}$$

مثال ۱۲: نقطه‌ای روی محور x ها بیابید که مجموع فواصل آن از دو نقطه $B(2, -1)$ و $A(1, 1)$ می‌نیمم باشد.

حل: چون دو نقطه B و A در طرفین محور x ها قرار دارند جواب مسأله نقطه برخورد خط AB با محور x ها یعنی نقطه C است.



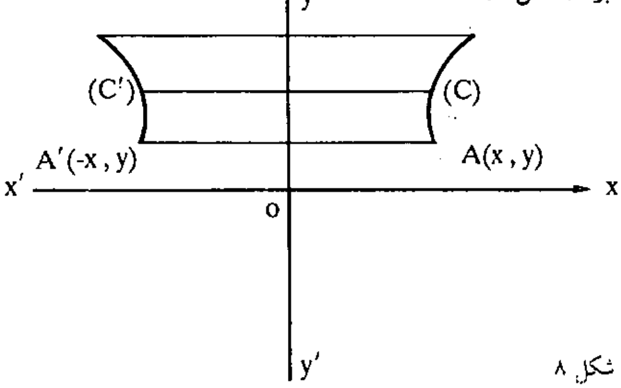
شکل ۷

$A(x_1 = 1, y_1 = 1)$ و $B(x_2 = 2, y_2 = -1)$، $AB \overset{\text{به‌معادله}}{\equiv}$

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{-1-1}{2-1} = -2 \text{ و } y_c = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x-1} = -2 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 2 \Rightarrow$$

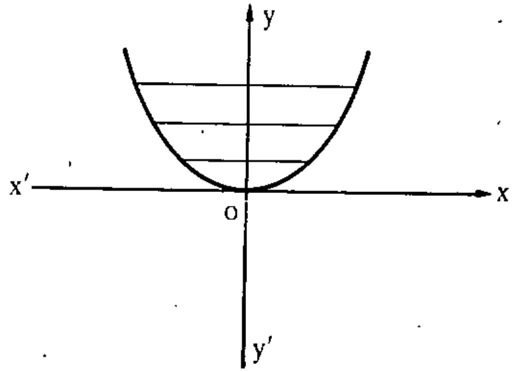
$$2x - 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{C(\frac{3}{2}, 0)}$$

۲: تقارن منحنی نسبت به محور y ها: برای به‌دست آوردن قرینه منحنی (C) نسبت به محور y ها قرینه هر نقطه منحنی را نسبت به محور y ها به‌دست آورده این نقاط را به هم وصل نموده شکل به دست آمده یعنی (C') قرینه منحنی نسبت به محور y ها خواهد بود. (شکل ۸)



شکل ۸

به خصوص اگر قرینه هر نقطه منحنی نسبت به محور y ها روی خود منحنی باشد در این صورت می‌گوییم محور y ها محور تقارن منحنی است. (شکل ۹)



شکل ۹

برای به‌دست آوردن قرینه نقطه $A(x , y)$ نسبت به محور y ها کافی است x را به $-x$ تبدیل نماییم یعنی نقطه $A'(-x , y)$ قرینه نقطه A می‌باشد. و برای به دست آوردن معادله منحنی (C') در معادله منحنی (C) بایستی x را به $-x$ تبدیل نماییم و y را تغییر ندهیم.

مثال ۱: مختصات قرینه نقطه $A(۲ , ۳)$ نسبت به محور y ها کدام است؟

حل: کافی است x نقطه A را به $-x$ یعنی ۲ را به -۲ تبدیل نماییم پس قرینه نقطه A نقطه $A'(-۲ , ۳)$ می‌باشد.

مثال ۲: اگر دو نقطه $A(a + ۲ , ۳)$ و $A'(۲ , ۳)$ قرینه یکدیگر باشند مقدار a کدام است؟

حل:
$$x_{A'} = -x_A \Rightarrow ۲ = -a-۲ \Rightarrow \boxed{a= -۴}$$

مثال ۳: معادله قرینه پاره خط AB که در آن $B(۲ , ۳)$ و $A(۱ , ۱)$ می‌باشد نسبت به محور y ها کدام است؟

حل: $A(x_۱ = ۱ , y_۱ = ۱)$ و $B(x_۲ = ۲ , y_۲ = ۳)$,

$$AB \overset{\text{به‌معادله}}{\equiv} \frac{y-۱}{x-۱} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲$$

کافی است در این معادله x را به $-x$ تبدیل نماییم داریم:

$$\frac{y-۱}{-x-۱} = ۲ \Rightarrow y-۱= -۲x-۲ \Rightarrow \boxed{y= -۲x-۱}$$

مثال ۴: محور تقارن شکل به معادله $y = |x|$ کدام است؟

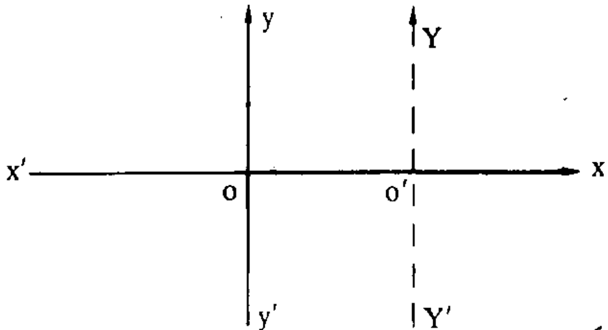
حل: اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم $y = |-x| = |x|$ چون معادله تغییر نکرد لذا محور y ها محور تقارن است.

مثال ۵: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله $y = x^۲-۴x+۱$ خط $x = ۲$ می‌باشد.

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha=۲ , \beta=۰)$ انتقال داده داریم:

$$x = X+\alpha = X+۲ , y = Y+\beta = Y+۰= Y , Y =(X+۲)^۲-۴(X+۲)+۱ \Rightarrow Y= X^۲+۴X+۴-۴X -۸+۱ \Rightarrow Y = X^۲-۳$$

اگر در این معادله X را به $-X$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند لذا محور تقارن منحنی محور y های جدید یعنی خط $x = ۲$ می‌باشد. (شکل ۱۰)

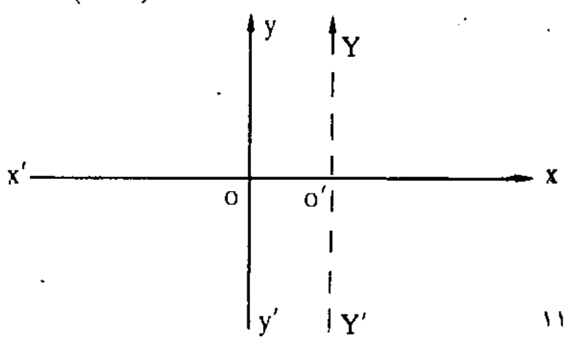


شکل ۱۰

مثال ۶: اگر محور تقارن منحنی $y = \frac{x^۲-۲x+۳}{x^۲-۲x+۶}$ موازی y ها باشد معادله این محور تقارن کدام است؟

حل: محور تقارن را خط $x = \alpha$ فرض کرده مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha , ۰)$ انتقال داده داریم:

$$x = X+\alpha , y = Y+۰= Y \Rightarrow Y = \frac{X^۲+۲\alpha X+\alpha^۲-۲X-۲\alpha+۳}{X^۲+۲\alpha X+\alpha^۲-۲X-۲\alpha+۶} = \frac{X^۲+۲(\alpha-۱)X+\alpha^۲-۲\alpha+۳}{X^۲+۲(\alpha-۱)X+\alpha^۲-۲\alpha+۶}$$



شکل ۱۱

اگر در معادله اخیر X را به X− تبدیل نماییم معادله نباید تغیر کند و این در صورتی است که $۰ = ۱-\alpha$ یا $۱ = \alpha$ پس $x = ۱$ محور تقارن منحنی می‌باشد. (شکل ۱۱)

تبصره ۴: شرط آنکه منحنی به معادله $y=\frac{aX^۲+bX+c}{a'X^۲+b'X+c'}$ فقط دارای یک محور تقارن موازی y ها باشد چیست؟ و معادله محور تقارن را بیابید.

حل: محور تقارن را خط $X=\alpha$ فرض نموده مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha , ۰)$ انتقال داده داریم:

$$X=X+\alpha , y=Y+۰=Y \Rightarrow Y=$$

$$\frac{a(X+\alpha)^۲+b(X+\alpha)+c}{a'(X+\alpha)^۲+b'(X+\alpha)+c'}=$$

$$\frac{aX^۲+۲a\alpha X+a\alpha^۲+bX+b\alpha+c}{a'X^۲+۲a'\alpha X+a'\alpha^۲+b'X+b'\alpha+c'}=$$

$$\frac{aX^۲+(۲a\alpha+b)X+a\alpha^۲+b\alpha+c}{a'x^۲+(۲a'\alpha+b')X+\alpha'\alpha^۲+b'\alpha+c'}$$

اگر X را به X− تبدیل نماییم باید معادله تغییر نکند و این در صورتی است که

$۲a\alpha+b=۰ \Rightarrow \alpha=\frac{-b}{۲a}$ و $۲a'\alpha+b'=۰ \Rightarrow \alpha=-\frac{b'}{۲a'} \Rightarrow$

$$\frac{-b}{۲a}=\frac{-b'}{۲a'} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'} \Rightarrow \frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$$

اگر چنانچه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=K$ باشد در این صورت .

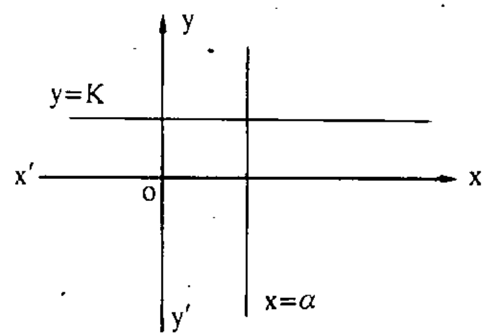
$$a=a'K , b=b'K , c=c'K ,$$

$$y=\frac{a'Kx^۲+b'Kx+c'K}{a'x^۲+b'x+c'}=$$

$$\frac{K(a'x^۲+b'x+c')}{a'X^۲+b'x+c'}=K \Rightarrow y=K$$

زیرا خط $y=K$ دارای بی‌شمار محور تقارن موازی y ها دارد.

در شکل (۱۲) اگر مثلاً خط دلخواه $x=\alpha$ را در نظر بگیریم قرینه هر نقطه خط $y=K$ نسبت به خط $x=\alpha$ روی خط $y=K$ قرار خواهد گرفت. لذا بایستی $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد و معادله محور تقارن



شکل ۱۲

خط $x=\alpha=\frac{-b}{۲a}=\frac{-b'}{۲a'}$ است.

مثال ۷: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x^۲-(\alpha-۱)x+۲}{۳x^۲+۲x+۱}$ کدام است؟

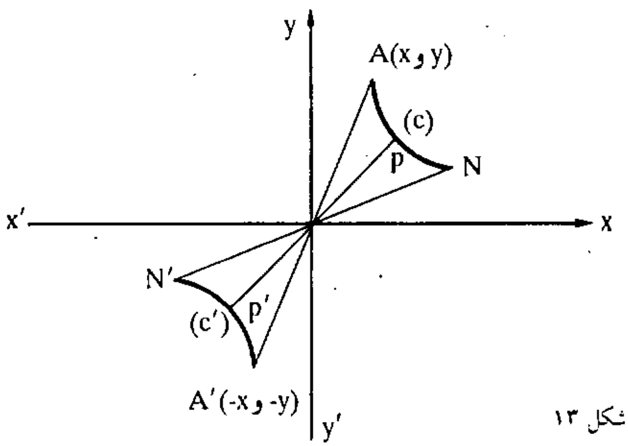
حل:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \text{ و } \frac{۱}{۳}=\frac{-\alpha+۱}{۲}\neq\frac{۲}{۱} \Rightarrow$$

$$۲=-۳\alpha+۳ \Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۳} \text{ و } x=-\frac{b}{۲a}=\frac{\alpha-۱}{۲}=\frac{\frac{۱}{۳}-۱}{۲}=-\frac{۱}{۳}$$

یا $x=-\frac{b'}{۲a'}=-\frac{۲}{۶}=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{۱}{۳}}$

۳: تقارن منحنی نسبت به مبدأ مختصات: برای به‌دست آوردن قرینه نقطه A نسبت به مبدأ O از نقطه A به O وصل کرده، OA را به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا A' به‌دست آید نقطه A' را قرینه نقطه A نسبت به مبدأ O نامیده و نقطه O را مرکز تقارن



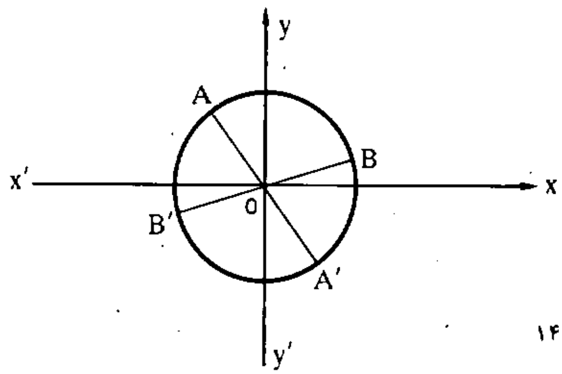
شکل ۱۳

می‌نامند و برای به‌دست آوردن قرینه مرکزی منحنی (c) نسبت به مبدأ O قرینه‌های مرکزی هر یک از نقاط منحنی (c) را به‌دست آورده این نقاط را به هم وصل می‌نماییم منحنی (c′) قرینه منحنی (c) نسبت به مبدأ O می‌باشد. (شکل ۱۳)

$$OA=OA' ,\ OP=OP' ,\ ON=ON'$$

بخصوص اگر قرینه هرنقطه از منحنی (c) نسبت به‌مبدأ O بر خود منحنی (c) منطبق باشد مبدأ O را مرکز تقارن منحنی نامند. (شکل ۱۴)

$OA = OA'$ و $OB = OB'$



شکل ۱۴

و نیز اگر نقطه $A(x,y)$ باشد مختصات نقطه A' قرینه نقطه A به صورت $A'(-x\ ,\ -y)$ است. یعنی برای به‌دست آوردن مختصات قرینه نقطه A نسبت به مبدأ O بایستی x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نماییم و برای به‌دست آوردن معادله منحنی (c′) در معادله منحنی (c) بایستی x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نماییم.

مثال ۱ : مختصات قرینه نقطه $A(2,3)$ نسبت به مبدأ O کدام است؟

حل : x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل می‌نماییم قرینه نقطه A نقطه $A'(-2,-3)$ می‌باشد.

مثال ۲ : اگر نقاط $A(a+b,2a-b)$ و $B(3,3)$ نسبت به مبدأ O قرینه باشند a و b کدام است؟

حل :

$$\begin{cases} x_A=-x_B \\ y_A=-y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-3 \\ 2a-b=-3 \end{cases} \Rightarrow \quad 3a=-6 \quad \Rightarrow$$

$\boxed{a=-2}$ و $\boxed{b=-1}$

مثال ۳ : مرکز تقارن شکل به معادله $|x| = |y|$ کدام است؟

حل : x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کرده داریم :

$$|-y| = |-x| \Rightarrow |y| = |x|$$

چون معادله تغییر نکرد پس مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

مثال ۴ :اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی

$$y=x^3-(a+b-2)x^2+x+2a-b+3 \qquad (1)$$

باشد a و b کدام است؟

حل : x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نموده معادله نباید تغییر کند.

$$-y=-x^3-(a+b-2)x^2-x+2a-b+3$$

طرفین معادله را در منها ضرب کرده‌داریم:

$$y=x^3+(a+b-2)x^2+x-2a+b-3 \qquad (2)$$

با مقایسه معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} -(a+b-2)=a+b-2 \\ 2a-b+3=-2a+b-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a+b-2)=0 \\ 2(2a-b+3)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b-2=0 \\ 2a-b+3=0 \end{cases} \Rightarrow 3a+1=0 \qquad \Rightarrow$$

$\boxed{a=-\frac{1}{3}}$ و $\frac{-1}{3}+b-2=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{7}{3}}$

یا می‌توانیم بگوییم جملاتی که تغییر می‌کنند باید وجودنداشته باشند یعنی بایستی ضرایب آنها صفر باشد.

مثال ۵ : معادله قرینه منحنی به معادله $y = x^3-x$ نسبت به مبدأ O کدام است؟

حل : x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نموده داریم :

$$-y = -x^3+x \Rightarrow \boxed{y = x^3-x}$$

چون معادله به دست آمده همان معادله اولیه می‌باشد لذا مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است.

مثال ٦ : نشان دهید نقطه $O'(1\ ,\ 1)$ مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \frac{x+1}{x-1}$ می‌باشد.

حل : مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha = 1\ ,\ \beta = 1)$ انتقال داده داریم :

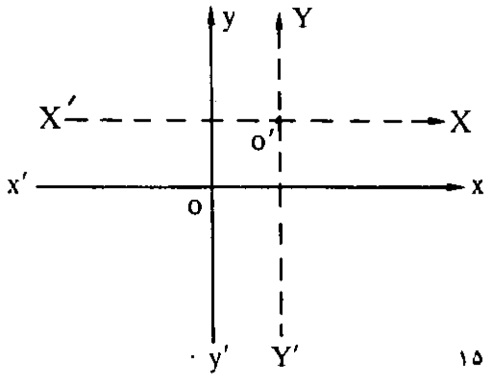
$$x=X+\alpha=X+1 \text{ و } y=Y+\beta=Y+\beta \text{ و } Y+1=\frac{X+1+1}{X+1-1}$$

$$\Rightarrow Y=\frac{X+2}{X}-1=1+\frac{2}{X}-1 \Rightarrow Y=\frac{2}{X}$$

اگر در این معادله X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل کنیم معادله نباید تغییر کند داریم:

$$-Y=-\frac{1}{X} \Rightarrow Y=\frac{1}{X}$$

لذا مبدأ جدید یعنی $O'(1\ ,\ 1)$ مرکز تقارن منحنی می‌باشد. (شکل ۱۵)



شکل ۱۵

مثال ۷: مطلوب است مرکز تقارن منحنی به‌معادله $y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$.

حل: فرض می‌کنیم نقطه $O'(\alpha\ ,\ \beta)$ مرکز تقارن منحنی باشد مبدأ مختصات را به نقطه O' انتقال داده داریم:

$$x=X+\alpha, y=Y+\beta, Y+\beta=\frac{X^2+2\alpha X+\alpha^2-X-\alpha+2}{X+\alpha-1}$$

$$\Rightarrow Y=\frac{X^2+2\alpha X+\alpha^2-X-\alpha+2}{X+\alpha-1}-\beta \Rightarrow$$

$$Y=\frac{X^2+2\alpha X+\alpha^2-X-\alpha+2-\beta X-\alpha\beta+\beta}{X+\alpha-1} \Rightarrow$$

$$Y=\frac{X^2+(2\alpha-\beta-1)X+\alpha^2-\alpha\beta+\beta-\alpha+2}{X+\alpha-1} \qquad (1)$$

X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل نموده سپس طرفین معادله را در منها ضرب می‌کنیم باید معادله تغییر نکند.

$$-Y=\frac{X^2-(2\alpha-\beta-1)X+\alpha^2-\alpha\beta+\beta-\alpha+2}{-X+\alpha-1} \Rightarrow$$

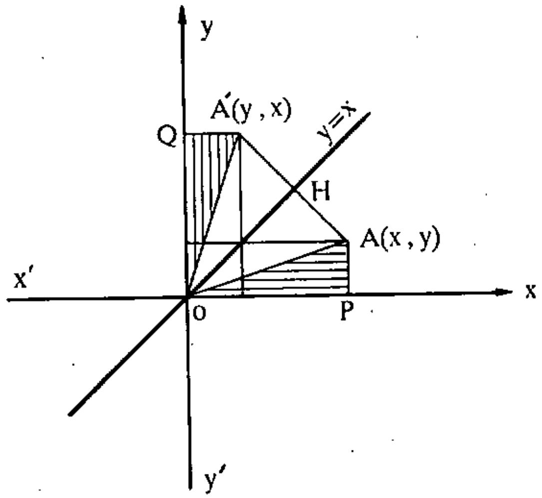
$$Y=\frac{X^2-(2\alpha-\beta-1)X+\alpha^2-\alpha\beta+\beta-\alpha+2}{X-\alpha+1} \qquad (2)$$

با توجه به معادلات (۱) و (۲) جملاتی که تغییر می‌کنند ضرایب آنها را صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}2\alpha-\beta-1=0\\ \alpha-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=1\\ \alpha=1\end{cases} \Rightarrow O'(1,1)$$

۴: تقارن منحنی نسبت به نیمسازهای y=x و y=−x: قرینه نقطه A را نسبت به خط y=x نقطه A' می‌نامیم چون خط y=x عمود منصف AA' می‌باشد پس

$$OA=OA' \text{ و نیز } A\hat{O}H=A'\hat{O}H$$



شکل ۱۶

و چون $P\hat{O}H=Q\hat{O}H$ بنابراین داریم:

$$P\hat{O}H-A\hat{O}H=Q\hat{O}H-A'\hat{O}H \Rightarrow P\hat{O}A=Q\hat{O}A'$$

دو مثلث قائم‌الزاویه AOP و $A'OQ$ بنا به حالت تساوی وتر و یک زاویه حاده برابر بوده داریم:

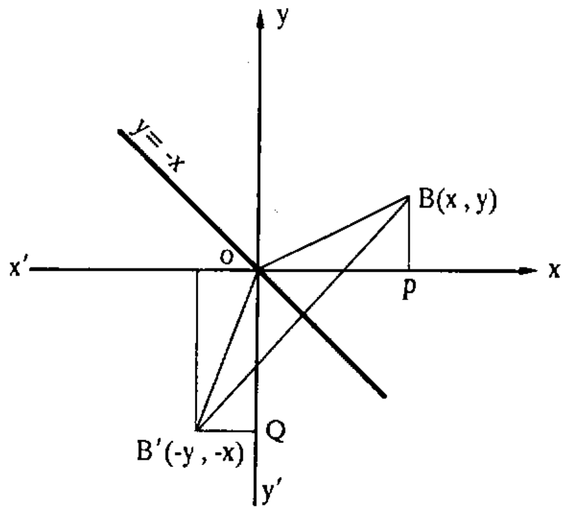
$\overline{OP}=\overline{OQ}$ و $\overline{PA}=\overline{QA'} \Rightarrow x_A=y_{A'}$ و $y_A=x_{A'}$

یعنی قرینه نقطه $A(x\ ,\ y)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نقطه $A'(y,x)$ می‌باشد. (شکل ۱۶)

و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط y=x

در معادله منحنی x را به y و y را به x تبدیل می‌نماییم.

قرینه نقطه $B(x,y)$ را نسبت به خط $y=-x$ نقطه B' می‌نامیم مانند قسمت قبل ثابت می‌شود دو مثلث قائم الزاویه OBP و $OB'Q$ برابرند بنابراین $x_{B'}=-y_B$, $y_{B'}=-x_B$ یعنی قرینه نقطه $B(x,y)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم نقطه $B'(-y,-x)$ می‌باشد.



شکل ۱۷

و برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=-x$ در معادله منحنی x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل می‌نماییم.

مثال ۱ : مختصات قرینه‌های نقطه $A(-۲ , ۳)$ را نسبت به نیمسازهای ربع اول و دوم بیابید.

حل : قرینه نقطه A را نسبت به نیمساز ربع اول نقطه A' و نسبت به نیمساز ربع دوم نقطه A'' نامیده داریم:

$$x_{A'}=y_A=۳ , y_{A'}=x_A=-۲ \Rightarrow \boxed{A'(۳, -۲)}$$ و

$$x_{A''}=-y_A=-۳ \text{ و } y_{A''}=-x_A=-(-۲)=۲ \Rightarrow$$

$$\boxed{A''(-۳, ۲)}$$

مثال ۲ : اگر دو نقطه $A(a+b , a-b)$ و $A'(-۲ , ۳)$ نسبت به نیمساز ربع دوم قرینه باشند a و b کدام است؟

حل :

$$\begin{cases} x_A=-y_{A'} \\ y_A=-x_{A'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۳ \\ a-b=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲a=-۱ \Rightarrow$$

$$\boxed{a=-\frac{۱}{۲} \text{ و } b=-\frac{۵}{۲}}$$

مثال ۳ : محورهای تقارن منحنی به معادله $x^۲+y^۲=۴$ را بیابید.

حل : اگر در معادله منحنی x را به $-x$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین محور y ها یعنی خط $x=۰$ محور تقارن است. اگر در معادله منحنی y را به $-y$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین محور x ها یعنی خط $y=۰$ محور تقارن است. اگر در معادله منحنی x را به y و y را به x تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین خط $y=x$ محور تقارن است. و اگر در معادله منحنی x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین خط $y=-x$ محور تقارن است.

مثال ۴ : معادله قرینه منحنی به معادله $y=x^۲-x$ را نسبت به نیمساز ربع دوم بیابید.

حل : در معادله داده شده x رابه $-y$ و y رابه $-x$ تبدیل نموده داریم:

$$-x=y^۲-y \Rightarrow \boxed{x=y-y^۲}$$

۵ : طریقه به‌دست آوردن مرکز تقارن منحنیهای درجه دوم یعنی منحنیهایی که معادله آنها شامل $x^۲$ یا $y^۲$ یا xy بوده و به‌صورت $ax^۲+۲bxy+cy^۲+۲dx+۲ey+۲f=۰$ می‌باشد.

حل: نقطه $O'(\alpha , \beta)$ را مرکز تقارن فرض نموده مبدأ مختصات را به این نقطه انتقال داده‌داریم:

$$X=X+\alpha, y=Y+\beta \Rightarrow a(X+\alpha)^۲+۲b(X+\alpha)(Y+\beta)+ c(Y+\beta)^۲+۲d(X+\alpha)+۲e(Y+\beta)+۲f=۰ \Rightarrow aX^۲+ ۲a\alpha X+a\alpha^۲+۲bXY+۲b\beta X+۲b\alpha Y+۲b\alpha\beta+cY^۲+ ۲c\beta Y+c\beta^۲+۲dX+۲d\alpha+۲eY+۲e\beta+۲f=۰ \Rightarrow aX^۲+۲bXY+cY^۲+(۲a\alpha+۲b\beta+۲d)X+ (۲b\alpha+۲c\beta+۲e)Y+k=۰$$

مجموع اعداد معلوم را k فرض نمودیم اگر در این معادله X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل کنیم معادله نباید تغییر کند لذا ضرایب

را که تغییر می‌نمایند صفر قرارمی‌دهیم داریم:

$$\begin{cases} 2a\alpha+2b\beta+2d=0 & (1) \\ 2b\alpha+2c\beta+2e=0 & (2) \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن معادلات (۱) و (۲) در معادله اصلی y را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر x از معادله منحنی مشتق می‌گیریم و نیز x را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر y از معادله منحنی مشتق می‌گیریم به جای x و y به ترتیب α و β قرارداده معادلات (۱) و (۲) به‌دست می‌آیند،پس:

$$\begin{array}{l} y=\text{ثابت} \Rightarrow \\ x=\text{ثابت} \Rightarrow \end{array}\begin{cases} 2ax+2by+2d=0 \\ 2bx+2cy+2e=0 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا مختصات مرکز تقارن به‌دست می‌آید.

تبصره ۵: اگر معادله منحنی از درجه دوم ولی شامل xy نباشد برای به‌دست آوردن محور یا محورهای تقارن y را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر x از معادله منحنی مشتق می‌گیریم و نیز x را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر y از معادله منحنی مشتق می‌گیریم از حل معادلات به‌دست آمده معادله‌های محورهای تقارن منحنی به‌دست می‌آید.روش استدلال مشابه قسمت (۵) می‌باشد.

مثال ۱: مرکز تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x+1}{x-1}$ کدام است؟

حل:

$$y=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow yx-y=x+1 \text{ ، } x=\text{ثابت} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x=1} \quad y=\text{ثابت} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

بنابراین $O'(1,1)$ مرکز تقارن تابع هموگرافیک بالا می‌باشد.

مثال ۲: اگر مرکز تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x^2-bx+2}{x-a}$ نقطه $O'(1,1)$ باشد a و b کدام است؟

حل:

$$y=\frac{x^2-bx+2}{x-a} \Rightarrow x^2-bx+2=yx-ay \text{ , } x=\text{ثابت} \Rightarrow$$

$$x-a=0 \text{ , } y=\text{ثابت} \Rightarrow 2x-b=y \text{ ,}$$

$$\begin{cases} x-a=0 \\ 2x-b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ 2-b=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1} \quad \text{و} \quad \boxed{b=1}$$

مثال ۳: مرکز تقارن منحنی به معادله $y=x-1\pm\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

حل:

$$y=x-1\pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y-x+1=\pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow (y-x+1)^2= 4-x^2 \Rightarrow y^2+x^2+1-2yx+2y-2x=4-x^2 \Rightarrow 2x^2-2yx+y^2+2y-2x-3=0$$

$$\begin{array}{l} y=\text{ثابت} \Rightarrow \\ x=\text{ثابت} \Rightarrow \end{array}\begin{cases} 4x-2y-2=0 \\ -2x+2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \text{ ,}$$

$$y=-1 \Rightarrow \boxed{O'(0,-1)}$$

مثال ۴: محور تقارن منحنی به معادله $y=ax^2+bx+c$ کدام است؟

حل:

$$y=\text{ثابت} \Rightarrow 0=2ax+b \Rightarrow \boxed{x=-\frac{b}{2a}} \quad \text{و}$$

$$x=\text{ثابت} \Rightarrow 1=0 \quad \text{امکان ندارد}$$

مثال ۵: اگر محور تقارن منحنی به معادله $x=y^2-ay+2$ خط $y=1$ باشد a کدام است؟

حل:

$$x=\text{ثابت} \Rightarrow 0=2y-a \Rightarrow y=\frac{a}{2}=1 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

مثال ۶: معادلات محورهای تقارن منحنی به معادله $2x^2+3y^2-6x-8y=0$ را بیابید.

حل:

$$y=\text{ثابت} \Rightarrow 4x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}} \quad \text{و}$$

$$x=\text{ثابت} \Rightarrow 6y-8=0 \Rightarrow y=\frac{8}{6} \Rightarrow \boxed{y=\frac{4}{3}}$$

۶: طریقه به‌دست آوردن مرکز تقارن منحنی تابع هموگرافیک به معادله $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$

حل:

$$y=\frac{ax+b}{a'x+b'} \Rightarrow a'xy+b'y=ax+b \text{ ,}$$

$y=$ ثابت $\Rightarrow a'y=a \Rightarrow y=\frac{a}{a'}$, $x=$ ثابت $\Rightarrow a'x+b'=0$

$$\Rightarrow x=-\frac{b'}{a'} \Rightarrow O'\left(\frac{-b'}{a'},\frac{a}{a'}\right)$$

اگر x به سمت ∞ میل کند خط $y=\frac{a}{a'}$ مجانب افقی و اگر y به سمت ∞ میل کند خط $x=\frac{-b'}{a'}$ مجانب قائم است همان‌طور که ملاحظه می‌شود محل برخورد مجانبهای مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

مثال: معادله مکان هندسی مرکز تقارن منحنی به معادله $y=\frac{(m-1)x+2}{x-2m}$ را وقتی m تغییر می‌کند بیابید.

حل:

$x\to\infty \Rightarrow y=m-1$, $y\to\infty \Rightarrow x-2m=0\Rightarrow x=2m \Rightarrow$
$o'(x=2m\,,\, y=m-1)$

برای به‌دست آوردن معادله مکان نقطه O' بین x و y پارامتر m را حذف می‌کنیم.

$$m=\frac{x}{2}\Rightarrow y=m-1=\frac{x}{2}-1\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x-1}$$

تبصره ٦: به‌طور کلی می‌توان بررسی کرد اگر معادله منحنی از درجه دوم یعنی شامل x^2 یا y^2 یا xy باشد و دارای دو مجانب باشد نقطه محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی است مانند تابع هموگرافیک مثال بالا.

تبصره ۷: اگر در تابع کسری درجه صورت کسر از مخرج کسر یک درجه بیشتر باشد در مبحث مجانبها ثابت می‌کنند برای به‌دست آوردن معادله مجانب مایل صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم نموده تابع خارج قسمت معادله مجانب مایل است و نیز ثابت می‌کنند

معادله مجانب منحنی به معادله $y=g(x)+\frac{p(x)}{h(x)}$ اگر

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{h(x)}=0$، باشد به‌صورت $Y=g(x)$ و معادله مجانب‌های منحنی $y=mx+h+\sqrt{ax^2+bx+c}$ که در آن $a>0$ است به‌صورت $Y=mx+h+\left|\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right|$ اگر $x\to+\infty$ معادله مجانب به صورت $Y=mx+h+\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ و اگر $x\to-\infty$ معادله مجانب به صورت $Y=mx+h-\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}$ می‌باشد.

مثال ۱: مرکز تقارن منحنی $y=\frac{x^2+2x+5}{x-3}$ را بیابید.

حل:

$y=\frac{x^2+2x+5}{x-3}\Rightarrow yx-3y=x^2+2x+5$, $x=$ ثابت $\Rightarrow$
$x-3=0 \Rightarrow x=3,\ y=$ ثابت $\Rightarrow y=2x+2 \Rightarrow$
$y=2\times3+2=8 \Rightarrow O'(3,8)$

و یا آنکه می‌توانیم بگوییم چون معادله منحنی پس از طرفین وسطین نمودن از درجه دوم است و دارای دو مجانب می‌باشد محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی است $y\to\infty \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$$y\to\infty \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+5 & x-3 \\ \underline{-x^2+3x} & x+5 \\ 5x+5 & \\ \underline{-5x+15} & \\ 20 & \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=x+5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{O'(3,8)}$$

مثال ۲: اگر مرکز تقارن منحنی $y=x+b+\frac{20}{x+a}$ نقطه $O'(3,8)$ باشد a و b کدام است؟

حل:

$y\to\infty \Rightarrow x+a=0 \Rightarrow x=-a$ معادله مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20}{x+a}=0 \Rightarrow Y=x+b$ ، معادله مجانب مایل

$$\begin{cases} x=-a \\ y=x+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=-a \\ 8=3+b \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-3\,,\, b=5}$$

مثال ۳: مرکز تقارن منحنی به معادله $y=x+1\pm\sqrt{x^2+4x+1}$ کدام است؟

حل: معادله مجانبها به‌صورت $Y=x+1+|x+2|$

$$x\to+\infty \Rightarrow Y=x+1+(x+2)=2x+3$$
$$x\to-\infty \Rightarrow Y=x+1+(-x-2)=-1$$

توجه داشته باشید معادلات مجانبها با رادیکال مثبت و رادیکال منفی معادلات بالا می‌باشد.

$y=x+1\pm\sqrt{x^2+4x+1} \Rightarrow y-x-1=\pm\sqrt{x^2+4x+1} \Rightarrow$
$(y-x-1)^2=x^2+4x+1$

چون معادله بالا از درجه دوم است محل برخورد مجانبهای مرکز

تقارن منحنی می‌باشد

$$\begin{cases} Y=2x+3 \\ Y=-1 \end{cases} \Rightarrow -1=2x+3 \Rightarrow$$

$$x=-2 \Rightarrow \boxed{O'(-2,-1)}$$

۷: مرکز تقارن منحنی به معادله $y=ax^3+bx^2+cx+d$ نقطه عطف منحنی می‌باشد

اثبات: نقطه $o'(\alpha,\beta)$ را مرکز تقارن منحنی فرض‌نموده داریم:

$$X=X+\alpha, y=Y+\beta \Rightarrow Y+\beta=a(X+\alpha)^3+b(X+\alpha)^2+c(X+\alpha)+d \Rightarrow Y+\beta=a(X^3+3X^2\alpha+3\alpha^2X+\alpha^3)+b(X^2+2\alpha X+\alpha^2)+c(X+\alpha)+d \Rightarrow Y=aX^3+(3a\alpha+b)X^2+(3a\alpha^2+2b\alpha+c)X+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d-\beta \quad (1)$$

$$X\to -X, Y\to -Y \Rightarrow -Y=aX^3+X^2(3a\alpha+b)-x(3a\alpha^2+2b\alpha+c)+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d-\beta$$

طرفین را در منها ضرب کنید $Y=aX^3-(3a\alpha+b)-X$

$$+(3a\alpha^2+2b\alpha+c)X-a\alpha^3-b\alpha^2-c\alpha-d+\beta \qquad (2)$$

با مقایسه معادلات (۱) و (۲) جملاتی را که تغییر می‌کنند ضرایب آنها را صفر قرار می‌دهیم داریم.

$$3a\alpha+b=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=-\frac{b}{3a}} \text{ و } a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d-\beta=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\beta=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}$$

حال طول نقطه عطف را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow y''=6ax+2b=0 \Rightarrow x=-\frac{2b}{6a} \Rightarrow x=-\frac{b}{3a}=\alpha, y=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=\beta$$

یعنی نقطه عطف منحنی تابع درجه سوم همان مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

مثال ۱: مرکز تقارن منحنی $y=x^3-3x^2+2$ را بیابید.

حل: چون تابع درجه سوم می‌باشد مرکز تقارن منحنی همان نقطه عطف منحنی می‌باشد پس:

$$y'=3x^2-6x \Rightarrow y''=6x-6=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1-3+2=0 \Rightarrow o'(1,0)$$

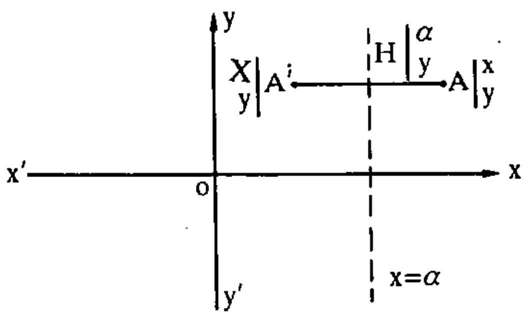
مثال ۲: در تابع $y=x^3-3x^2+bx+2$، b را چنان بیابید که مرکز تقارن منحنی روی محور x ها باشد.

حل: $y'=3x^2-6x+b \Rightarrow y''=6x-6=0 \Rightarrow x=1$

چون مرکز تقارن منحنی روی محور x ها می‌باشد عرض آن صفر است پس $o'(1,0)$ و چون مرکز تقارن نقطه عطف است لذا مختصات آن در معادله منحنی صدق می‌کند یعنی

$$0=1^3-3\times1^2+b\times1+2 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

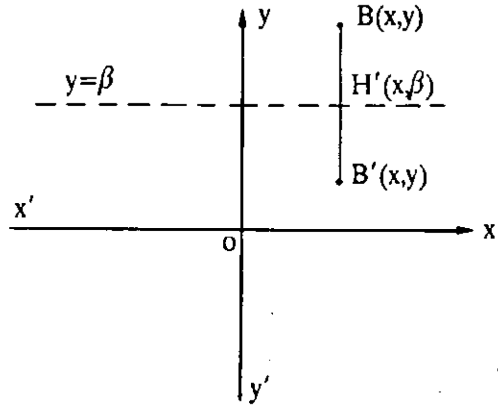
۸: طریقه به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $x=\alpha$ و خط $y=\beta$ و نقطه $o'(\alpha,\beta)$



شکل ۱۸

قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط $x=\alpha$ نقطه $A'(x,y)$ می‌باشد و نقطه $H(\alpha,y)$ وسط پاره خط AA' است پس $\alpha=\frac{x+X}{2}$ یا $x=2\alpha-X$ بنابراین برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $x=\alpha$ کافی است در معادله منحنی x را به 2α-x تبدیل نموده و y را تغییر ندهیم. (شکل ۱۸)

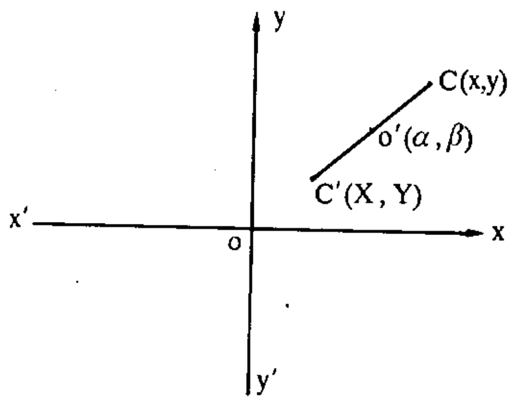
و قرینه نقطه $B(x,y)$ نسبت به خط $y=\beta$ نقطه $B'(x,y)$ می‌باشد و نقطه $H'(x,\beta)$ وسط پاره خط BB' است، پس: $\beta=\frac{y+Y}{2}$ یا $y=2\beta-Y$ یعنی برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=\beta$ کافی است در معادله منحنی y را به 2β-Y تبدیل



شکل ۱۹

نماییم و x را تغییر ندهیم. (شکل ۱۹)

و قرینه نقطه $C(x,y)$ نسبت به نقطه $o'(\alpha , \beta)$ نقطه $c'(x , y)$ می‌باشد.



شکل ۲۰

و نقطه $o'(\alpha , \beta)$ وسط پاره خط CC' است پس:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{x+X}{2}\\ \beta=\dfrac{y+Y}{2}\end{cases}$$

یا $y=2\beta-Y$ و $x=2\alpha-X$ یعنی برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نقطه $o'(\alpha , \beta)$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha-X$ و y را به $2\beta-Y$ تبدیل نماییم.(شکل ۲۰)

مثال ۱ : معادله قرینه منحنی به معادله $y=x^2-2x$ را نسبت به خط $x=1$ بیابید.

حل : به‌جای x در معادله منحنی $2\alpha-X=2-X$ قرار می‌دهیم:

$$y=(2-X)^2-2(2-X)\Rightarrow y=4-4X+X^2-4+2X\Rightarrow$$
$$y=X^2-2X$$

چون معادله به‌دست آمده همان معادله اولیه می‌باشد پس خط $x=1$ محور تقارن معادله است. از ابتداء هم می‌توانستیم بگوییم در معادله $y=ax^2+bx+c$ محور تقارن خط $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1$ بوده بنابراین قرینه منحنی نسبت به محور تقارن آن یعنی نسبت به خط $x=1$ همان خود منحنی می‌باشد یعنی معادله قرینه همان معادله $y=x^2-2x$ است.

مثال ۲ : معادله قرینه منحنی $y=x^2-x$ رانسبت به‌نقطه $o'(1,1)$ بیابید.

حل: کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha-X=2\times1-X=2-X$ و y را به $2\beta-Y=2\times1-Y=2-Y$ تبدیل نماییم پس :

$$2-Y=(2-X)^2-(2-Y)\Rightarrow 2-Y=$$
$$4-4X+X^2-2+Y\Rightarrow -2Y=X^2-4X\Rightarrow$$

$$\boxed{Y=-\frac{1}{2}X^2+2X}$$

مثال ۳ : معادله قرینه منحنی $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ را نسبت به نقطه $o'(2,1)$ بیابید.

حل : می‌دانیم در تابع هموگرافیک محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی است پس:

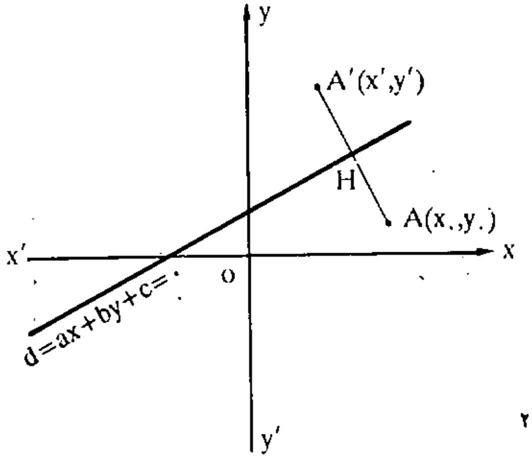
$$x\to\infty\Rightarrow y=\frac{a}{a'}=\frac{1}{1}=1 \text{ و }$$
$$y\to\infty\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow o'(2,1)$$

چون نقطه o' مرکز تقارن منحنی می‌باشد بنابراین معادله قرینه منحنی نسبت به نقطه o' به‌صورت $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ می‌باشد.

۹ : طریقه به‌دست آوردن مختصات قرینه نقطه $A(x_0,y_0)$ نسبت به خط $ax+by+c=0$

حل : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط مزبور نقطه $A'(x',y')$ بوده ونقطه H روی خط فوق (خط d) وسط AA' است داریم:

$$m_d = \text{ضریب زاویه خط } d = -\frac{a}{b}\Rightarrow m_{AA'}=-\frac{1}{m_d}=\frac{b}{a},$$



شکل ۲۱

$$AA' \stackrel{\text{به معادله}}{\equiv} y-y_. = \frac{b}{a}(x-x_.) \Rightarrow \frac{y-y_.}{b} = \frac{x-x_.}{a} = k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = x_. + ak \\ y_H = y_. + bk \end{cases}$$

این مختصات را در معادله خط (d) قرارداده داریم:

$$a(x_.+ak)+b(y_.+bk)+c=0 \Rightarrow$$

$$k(a^2+b^2) = -ax_. - by_. - c \Rightarrow$$

$$\boxed{k = -\frac{ax_.+by_.+c}{a^2+b^2}}, x_H = \frac{x'+x_.}{2} \Rightarrow x' = 2x_H - x_. = 2$$

$$(x_.+ak)-x_. \Rightarrow \boxed{x' = x_. + 2ak}, \; y_H = \frac{y'+y_.}{2} \Rightarrow$$

$$y' = 2y_H - y_. = 2(y_.+bk)-y_. \Rightarrow \boxed{y' = y_. + 2bk}$$

مثال: مختصات قرینه خط $A(2,3)$ را نسبت به خط $y=x+2$ بیابید.

حل: $A(x_.=2, y_.=3), x-y+2=0,$

$$k = -\frac{ax_.+by_.+c}{a^2+b^2} = -\frac{2-3+2}{4+9} = -\frac{1}{13},$$

$$x' = x_. + 2ak = 2 + 2\times 1 \times -\frac{1}{13} =$$

$$2 - \frac{2}{13} = \boxed{\frac{24}{13}} \text{ و } y' = y_. + 2bk = 3 + 2x - 1x - \frac{1}{13} =$$

$$3 + \frac{2}{13} = \boxed{\frac{41}{13}} \Rightarrow \boxed{A'\left(\frac{24}{13}, \frac{41}{13}\right)}$$

۱۰: محورهای تقارن منحنی‌های به‌معادله

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'} \quad \text{و} \quad y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

با استفاده از ماتریسهای تعامد می‌توان ثابت کرد معادله‌های محورهای تقارن تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ به صورت $y=-x+\frac{a-a'}{a'}$ و $y=x+\frac{a+b'}{a'}$ و نیز محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ خطوط نیمسازهای مجانبهای قائم و مایل منحنی می‌باشد اثبات مطالب بالا مورد نیاز نمی‌باشد فقط از نظر اطلاع بیشتر دانش‌آموزان مطالب فوق را مطرح نمودم معذالک برای دست یافتن به اثبات آنها می‌توانید به کتاب متمم جبر و آنالیز تألیف محمدعابدی در بخش (۱۲) مبحث تقارن صفحه (۹۰) مراجعه نمایید.

مثال ۱: معادله محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x+2}{4x+3}$ را بیابید.

حل:

$$y = x + \frac{a+b'}{a'} = x + \frac{1+3}{4} \Rightarrow \boxed{y = x+1} \text{ و}$$

$$y = -x + \frac{a-a'}{a'} = -x + \frac{1-4}{4} \Rightarrow \boxed{y = -x - \frac{3}{4}}$$

مثال ۲: معادلات محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$ را بیابید.

حل: و معادله مجانب‌قائم $y \to \infty \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

$$y=\frac{x(x+2)+4}{x+2} \Rightarrow y=x+\frac{4}{x+2}$$ و

معادله مجانب مایل $Y=x$ $\quad \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x+2}=0 \Rightarrow Y=x$

می‌دانیم معادلات نیمسازهای خطوط

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

به‌صورت

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

$$\begin{cases} Y-x=0 \\ x+2=0 \end{cases} \text{ و } \frac{Y-x}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}}=\pm\frac{x+2}{\sqrt{(1)^2+(0)^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{Y-x}{\sqrt{2}}=\pm(x+2) \Rightarrow Y=x\pm\sqrt{2}(x+2) \Rightarrow$$

$$\boxed{Y=(\sqrt{2}+1)x+2\sqrt{2}} \text{ و } \boxed{Y=(1-\sqrt{2})x-2\sqrt{2}}$$

۱۱ : خلاصه مطالب مربوط به مبحث تقارن که می‌تواند مورد استفاده تستهای کنکور در این مبحث قرارگیرد

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند یادگیری مطالب زیر به شرطی مفید می‌باشد که خواننده قبلاً کلیه مطالب مربوط به تقارن را مطالعه کرده‌باشد.

۱ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به محور x ها نقطه $A'(x,-y)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به محور x ها کافی است در معادله منحنی y را به $-y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله به‌دست‌آمده تغییر نکند محور x ها محور تقارن منحنی می‌باشد.

۲ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به محور y ها نقطه $A'(-x,y)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به محور y ها کافی است در معادله منحنی x را به $-x$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله به‌دست آمده تغییر نکند محور y ها محور تقارن منحنی می‌باشد.

۳ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به مبدأ o نقطه $A'(-x,-y)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نقطه o کافی است در معادله منحنی x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله به‌دست آمده تغییر نکند مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

۴ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط $y=x$ نقطه $A'(y,x)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=x$ کافی است در معادله منحنی x را به y و y را به x تبدیل نماییم اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $y=x$ محور تقارن منحنی می‌باشد.

۵ : قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط $y=-x$ نقطه $A'(-y,-x)$ می‌باشد و برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=-x$ کافی است در معادله منحنی x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $y=-x$ محور تقارن منحنی می‌باشد.

۶ : برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $x=\alpha$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha-X$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $x=\alpha$ محور تقارن منحنی می‌باشد.

۷ : برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=\beta$ کافی است در معادله منحنی y را به $2\beta-Y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $y=\beta$ محور تقارن منحنی می‌باشد.

۸ : برای به‌دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نقطه $o'(\alpha\ ,\ \beta)$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha-X$ و y را به $2\beta-Y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند نقطه o' مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

۹ : معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\pm f(x)\sqrt{g(x)}$ محور x ها می‌باشد.

۱۰ : معادله محورتقارن منحنی به معادله $y=a\pm f(x)\sqrt{g(x)}$ خط $y=a$ می‌باشد.

۱۱ : برای به‌دست آوردن مرکز تقارن منحنی درجه‌دوم به‌معادله $f(x,y)=0$ که $f(x,y)$ شامل x^2 یا y^2 یا xy است y را ثابت نگاه داشته از معادله منحنی نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم یعنی $f'_x(x,y)=0$ و نیز x را ثابت نگاه داشته از معادله منحنی نسبت به متغیر y مشتق می‌گیریم یعنی $f'_y(x,y)=0$ از حل دستگاه

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

مختصات مرکز تقارن منحنی به‌دست می‌آید و نیز اگر معادله منحنی از درجه دوم ولی جمله شامل xy نداشته باشد معادلات $f'_x(x,y)=0$ و $f'_y(x,y)=0$ معادله محورهای تقارن را در صورت وجود مشخص می‌نمایند و به‌خصوص محور تقارن منحنی به معادله $y=ax^2+bx+c$ خط $x=-\frac{b}{2a}$ و محور تقارن منحنی به‌معادله $x=ay^2+by+c$ خط $x=-\frac{b}{2a}$ می‌باشد.

۱۲ : مرکز تقارن منحنی به معادله $y=ax^3+bx^2+cx+d$ نقطه عطف آن که طول آن $x=-\frac{b}{3a}$ بوده و برای به‌دست آوردن عرض آن $x=-\frac{b}{3a}$ را در معادله قرار داده عرض نقطه عطف به‌دست می‌آید.

۱۳ : اگر معادله یک منحنی پس از طرفین وسطین نمودن از درجه دوم یعنی شامل x^2 یا y^2 یا xy باشد و دارای دو مجانب باشد نقطه محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی می‌باشد و اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج یک درجه بیشتر باشد برای به‌دست آوردن معادله مجانب مایل صورت کسر را برمخرج کسر تقسیم نموده تابع خارج قسمت معادله مجانب مایل می‌باشد و به خصوص اگر معادله منحنی به‌صورت $y=f(x)+\frac{p(x)}{h(x)}$ باشد به‌طوری که $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{h(x)}=0$، باشد معادله $Y=f(x)$ معادله مجانب منحنی می‌باشد.

۱۴ : مختصات قرینه نقطه $A(x_0,y_0)$ نسبت به خط $ax+by+c=0$ نقطه $A'(x',y')$ است که $y'=y_0+2bk$ و $x'=x_0+2ak$ و $k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$ می‌باشد.

۱۵ : معادله محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ به صورت $y=-x+\frac{a-a'}{a'}$ و $y=x+\frac{a+a'}{a'}$ بوده و نیز معادله محورهای تقارن منحنی به معادله $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ نیمسازهای بین مجانبهای قائم و مایل منحنی می‌باشد.

تمرینهای مربوط به تقارن

۱ : قرینه نقطه $A(2,3)$ را نسبت به محور yها نقطه A' فرض کرده و قرینه نقطه A' را نسبت به محور xها نقطه A'' گرفته مختصات نقطه A'' کدام است؟

الف) $A''(-2,3)$ ب) $A''(-2,-3)$

ج) $A''(2,-3)$ د) $A''(-2,-3)$

۲ : قرینه نقطه $A(-1,-3)$ را نسبت به نقطه $C(3,1)$ نقطه A' گرفته و قرینه نقطه A' را نسبت به نقطه $C'(-1,-2)$ نقطه A'' فرض نموده طول پاره خط AA'' کدام است؟

الف) ۵ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۹

۳ : قرینه نقطه $A(-2,-3)$ را نسبت به نیمساز ربع سوم نقطه A' فرض نموده و قرینه نقطه A' را نسبت به نیمساز ربع دوم نقطه A'' گرفته مختصات نقطه A'' کدام است؟

الف) $A''(3,2)$ ب) $A''(-3,-2)$

ج) $A''(2,-3)$ د) $A''(2,3)$

۴ : اگر قرینه نقطه $A(2,4)$ نسبت به خط (d) نقطه $A'(4,2)$ باشد معادله عمود منصف پاره خط AA' کدام است؟

الف) $y=-x$ ب) $y=x$ ج) $y=x+1$ د) $y=-x+2$

۵ : اگر قرینه نقطه $A(2,3)$ نسبت به خط d نقطه $A'(-2,1)$ باشد معادله عمود منصف پاره خط AA' کدام است؟

الف) $y=-2x+2$ ب) $y=x+2$

ج) $y=-x+2$ د) $y=-2x+1$

۶ : مختصات قرینه نقطه $A(1,2)$ را نسبت به خط $y=x+1$ نقطه A' فرض نموده مختصات نقطه A' کدام است؟

الف) $A'(1,2)$ ب) $A'(-1,2)$

ج) $A'(2,1)$ د) $A'(-2,1)$

۷ : قرینه نقطه $A(1,0)$ را نسبت به خط $y=x+1$ نقطه A' فرض نموده مختصات نقطه A' کدام است؟

الف) $A'(-1,4)$ ب) $A'(-1,2)$

ج) $A'(-2,2)$ د) $A'(2,2)$

۸ : قرینه نقطه $A(1,2)$ را نسبت به خط $y=2x-1$ نقطه A' گرفته مختصات نقطه A' کدام است؟

الف) $A'(\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ ب) $A'(\frac{6}{5},\frac{9}{5})$

ج) $A'(\frac{9}{5},\frac{9}{5})$ د) $A'(\frac{9}{5},\frac{8}{5})$

۹ : اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی

$$(2a-1)x^2+(b+2)xy-(a+b)y^2+(a+b+2)x+(4a-8)y=2$$

باشد a و b کدام است؟

الف) $b=4$ و $a=-2$ ب) $b=-2$ و $a=\frac{1}{2}$

ج) $b=-2$ و $a=2$ د) $b=-4$ و $a=2$

۱۰ : کدام گزینه زیر درمورد منحنی به معادله

$$\begin{cases} x=\sec\alpha \\ y=tg\alpha \end{cases}$$

درست می‌باشد؟

الف) منحنی یک محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد، ب) منحنی یک مرکز تقارن و دو محور تقارن دارد، ج) فقط یک محور تقارن دارد، د) مرکز تقارن ندارد

۱۱ : معادله محور تقارن منحنی $xy=4$ کدام است؟

الف) $y=x$ ب) $y=-x$ ج) محور x ها د) الف و ب

۱۲ : محور تقارن منحنی به معادله $y=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$ کدام است؟

الف) محور x ها ب) محور y ها ج) $y=x$ د) $y=-x$

۱۳ : شکل به معادله $|x|+|y|=2$ دارای چند محورتقارن می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) هیچ د) ۴

۱۴ : شکل به معادله $|x-1|+|y+2|=4$ دارای چند محور تقارن می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۴ ج) هیچ د) ۳

۱۵ : مختصات مرکز تقارن منحنی به معادله

$$\begin{cases} x=1+2\sin\alpha \\ y=2+4\cos\alpha \end{cases}$$

کدام است؟

الف) $o'(-1,2)$ ب) $o'(1,-2)$

ج) $o'(-1,-2)$ د) $o'(1,2)$

۱۶ : منحنی به معادله

$$\begin{cases} x=1+\sin\alpha \\ y=2+\cos\alpha \end{cases}$$

دارای چند محور تقارن می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) بی‌شمار د) هیچ

۱۷ : کدام‌گزینه زیردرمورد منحنی به‌معادله $y=x\pm\sqrt{4-x^2}$ درست می‌باشد؟

الف) محور تقارن محور x ها است، ب) محور تقارن محور y ها است، ج) مبدأ مختصات مرکز تقارن است، د) هیچ نوع تقارنی ندارد

۱۸ : کدام گزینه زیر در مورد منحنی به معادله $y=\log(\sqrt{x^2+1}-x)$ درست می‌باشد؟

الف) محور تقارن محور x ها است، ب) محور تقارن محور y ها است، ج) مرکز تقارن مبدأ مختصات است، د) هیچ نوع تقارنی ندارد

۱۹ : منحنی به معادله $y=1\pm\sqrt{-x^2+2x}$ دارای چند محور تقارن می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) بی‌شمار د) هیچ

۲۰ : محور تقارن منحنی به معادله

$$\begin{cases} x=\cos 2\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$$

کدام است؟

الف) محور x ها ب) محور y ها

ج) نیمساز ربع اول د) نیمساز ربع دوّم

۲۱ : منحنی به معادله $(x-y)^2+x^2y^2=1$ دارای چند محور تقارن است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) هیچ

۲۲ : معادله قرینه منحنی $y=2x^3-x+2$ نسبت به نقطه $o'(0,2)$ کدام است؟

الف) $y=2x^3-x+2$ ب) $y=x^3-2x^2+1$

ج) $y=x^3+x-2$ د) $y=x^3-x-2$

۲۳ : معادله قرینه منحنی $y=2x^2-8x+1$ نسبت به خط $x=2$ کدام است؟

الف) $y=x^2-4x+2$ ب) $y=2x^2-8x-1$

ج) $y=2x^2+8x-1$ د) $y=2x^2-8x+1$

۲۴: اگر معادله قرینه منحنی $y=\frac{1}{x}$ نسبت به خط $y=\beta$ به‌صورت $Y=\frac{2x-1}{x}$ باشد β کدام است؟

الف) $\beta=2$ ب) $\beta=-1$ ج) $\beta=1$ د) $\beta=\frac{3}{2}$

۲۵: اگر معادله قرینه منحنی به‌معادله $y=\frac{1}{x}$ نسبت به‌نقطه $O'(\alpha,\beta)$ به‌صورت $Y=\frac{2x-3}{x-2}$ باشد مختصات نقطه O' کدام است؟

الف) $O'(-1,-1)$ ب) $O'(1,-1)$ ج) $O'(1,1)$ د) $O'(-1,1)$

۲۶: معادله محور تقارن منحنی $y=\frac{(m-3)x^2-2x+3}{2mx^2-x+4}$ کدام است؟

الف) $x=\frac{1}{4}$ ب) $x=\frac{-1}{4}$ ج) $x=\frac{1}{2}$ د) $x=\frac{-1}{2}$

۲۷: اگر نقطه $O'(0,1)$ مرکز تقارن منحنی $y=\frac{x^2+mx+1}{x}$ باشد m کدام است؟

الف) $m=1$ ب) $m=-1$ ج) $m=2$ د) $m=-2$

۲۸: اگر مرکز تقارن منحنی به‌معادله $y=\frac{x^2-2x+5}{x-3}$ روی خط $y=x+m$ باشد m کدام است؟

الف) $m=1$ ب) $m=2$ ج) $m=-2$ د) $m=-1$

۲۹: اگر مرکز تقارن منحنی به معادله $y=x+1\pm\sqrt{x^2-2mx+1}$ نقطه $O'(1,2)$ باشد m کدام است؟

الف) $m=-1$ ب) $m=1$ ج) $m=\frac{1}{2}$ د) $m=\frac{-1}{2}$

۳۰: مختصات مرکز تقارن منحنی به‌معادله $y=\operatorname{tg}x$ کدام است؟

الف) $O'(k\pi,0)$ ب) $O'(\frac{k\pi}{2},0)$ ج) $O'(2k\pi,0)$ د) $O'((2k+1)\frac{\pi}{2},0)$

۳۱: منحنی به معادله $y=\operatorname{tg}x$ دارای چند محور تقارن موازی y ها می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) بی شمار د) هیچ

۳۲: مختصات مرکز تقارن منحنی به‌معادله $y=\sin x$ کدام است؟

الف) $O'(\frac{k\pi}{2},0)$ ب) $O'(k\pi,0)$ ج) $O'(2k\pi,0)$ د) $O'((2k+1)\pi,0)$

۳۳: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\sin x$ در فاصله $[0,2\pi]$ کدام است؟

الف) $x=\frac{\pi}{2}$ ب) $x=\frac{3\pi}{2}$ ج) $x=\pi$ د) الف و ب

۳۴: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\cos(ax+b)$ کدام است؟

الف) $x=\frac{b}{a}$ ب) $x=\frac{-b}{a}$ ج) $x=\frac{a}{b}$ د) $x=\frac{-b}{2a}$

۳۵: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y=\cos x$ کدام است؟

الف) $x=\frac{k\pi}{2}$ ب) $x=k\pi$ ج) $x=2k\pi$ د) $x=(2k-1)\frac{\pi}{2}$

۳۶: کدام نقطه زیر روی محور y ها وجود دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطه $B(3,2)$ و $A(2,1)$ می‌نیمم باشد؟

الف) $M(\frac{7}{5},0)$ ب) $M(\frac{8}{5},0)$ ج) $M(\frac{6}{5},0)$ د) $M(\frac{9}{5},0)$

۳۷: اگر قرینه محور y ها را نسبت به خط (d) خط به معادله $y=\frac{4}{3}x$ باشد معادله خط (d) کدام است؟

الف) $y=\frac{-1}{3}x$ ب) $y=3x$ ج) $y=\frac{1}{3}x$ د) الف و ب

۳۸: نقاط $A(1,2)$ و $B(2,3)$ و $C(-3,1)$ رؤس مثلث ABC می‌باشند مختصات قرینه محل برخورد میانه‌های مثلث نسبت به نقطه A کدام است؟

الف) $G'(2,1)$ ب) $G'(2,2)$ ج) $G'(1,3)$ د) $G'(3,2)$

۳۹: تابع $y=\frac{x+m}{x-a}$ مفروض است اگر خط $x=2$ مجانب و خط به معادله $y=x-1$ محور تقارن منحنی باشد m کدام است؟

الف) $m=1$ ب) $m=-1$ ج) دلخواه د) $m=0$

۴۰: فاصله مرکز تقارن منحنی به معادله $y=\frac{x-1}{x+1}$ از محور تقارن منحنی $y=\frac{2x+3}{x-1}$ که موازی نیمساز ربع دوم می‌باشد کدام است؟

الف) $2\sqrt{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $3\sqrt{2}$ د) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید

> نا آمدگان، اگر بدانند که ما
> از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر
> گر علم بُدی به کارها، در گردون
> کی خاطر اهل علم، رنجیده بُدی

اندکی به گذشته برگردیم، به گذشته کشور خودمان. فرض کنیم در دویست، سیصد سال پیش زندگی می‌کنیم. مدرسه‌ای به سبک امروزی وجود ندارد؛ از کتاب درسی خبری نیست؛ به سختی می‌توان کسی را پیدا کرد که، در راه کسب دانش، ما را راهنمایی کند؛ بیشتر کتاب‌های موجود، خطی و کمیاب است؛ نوشته‌ها پیچیده و غیر قابل فهم‌اند؛ فرهنگ یا واژه نامه‌ای هم وجود ندارد که بتوان، به یاری آنها، گره این پیچیدگی‌ها را باز کرد؛ کشور ناامن است؛ حتی هستند افراد با نفوذی که کار علمی، و به خصوص کار ریاضی را، ناپسند می‌دانند و مردم را از نزدیک شدن به آن منع می‌کنند و...

از زبان حکیم عمر خیام، ریاضی دان، اخترشناس و شاعر نامدار بشنویم. او در مقدمه کتاب معروف «جبر» خود می‌نویسد:

«... دچار زمانه‌ای شده‌ایم که اهل علم از کار افتاده و جز عدهٔ کمی باقی نمانده‌اند تا از فرصت، برای بحث و تحقیق علمی استفاده کنند. برعکس حکیم نمایان دورهٔ ما، همه دست اندرکارند که حق را با باطل بیامیزند، جز ریا و تدلیس کاری ندارند؛ اگر دانش و معرفتی نیز دارند؛ صرف اغراض پست جسمی می‌کنند؛ اگر با انسانی روبه‌رو شوند که در جست و جوی حقیقت راسخ و صادق است و روی از باطل و زور می‌گرداند، او را استهزا و تحقیر می‌کنند...»

و هم اوست که، همهٔ این دردها را، در بیتی زیبا خلاصه می‌کند:

> نا آمدگان، اگر بدانند که ما
> از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر

و یا

> گر علم بُدی به کارها، در گردون
> کی خاطر اهل علم، رنجیده بُدی

پس چگونه است که، در چنین دوره‌هایی و با وجود چنین دشواری‌هایی، باز هم ریاضی‌دانان بزرگی همچون خوارزمی، بیرونی، فارابی، ابن سینا، خیام، جمشید کاشانی داشته‌ایم؟ ریاضی‌دانانی که، سهمی عظیم در ساختمان دانش ریاضی جهان داشته‌اند و نوشته‌ها و آثار آنها، هنوز هم، بعد از گذشت سده‌های بسیار، قابل استفاده و منبع الهام علاقه‌مندان است؟

و آیا امروز، وقتی که بسیاری از این دردها وجود ندارد، باید به بهانه‌جویی برخی از جوانان که، ناکامی خود را در درس‌های ریاضی (و البته، نه تنها ریاضی)، ناشی از نارساییهای کتب درسی و معلم و محیط مدرسه، و نداشتن «معلم خصوصی» می‌دانند، تسلیم شد؟

□

ریاضیات، تکیه براندیشه و عقل آدمی دارد و سروکارش با استدلال منطقی است و هر انسانی، ولو با استعدادی نه چندان درخشان، می‌تواند با یاری جستن از اندیشه، عقل و استدلال خود، به ریاضیات دست یابد و آن را فرابگیرد. در مرحلهٔ کنونی، کسی از دانش آموزان ما نمی‌خواهد، ریاضی‌دان باشند و نایافته‌های ریاضی را بیابند (گرچه، رسیدن به چنین مرحله‌ای هم، ناممکن نیست). از ما می‌خواهند، چیزهایی را یاد بگیریم که صدها سال پیش پیدا شده و در طول سده‌های متوالی سوهان خورده و به صورتی شفاف و قابل درک به ما رسیده‌اند. شاید، شعر گفتن کار ساده‌ای نباشد، ولی هر کسی می‌تواند یادبگیرد، شعر حاضر و آمادهٔ دیگران را، چگونه بخواند: در کجاها مکث کند، روی چه واژه‌هایی تکیه کند، کجا صدای خود را اندکی بالا ببرد و کجا اندکی پایین بیاورد و البته، به شرطی می‌تواند غزل حافظ و یا رباعی خیام را، درست و بی‌عیب بخواند که معنای آن را به خوبی درک کرده باشد. و این، کار دشواری نیست: همت و غیرت می‌خواهد و اندکی صرف وقت. تجربه نشان

● پرویز شهریاری

داده است که هرکسی (به شرطی که، به مفهوم واقعی کلمه، عقب افتادگی ذهنی نداشته باشد)، می‌تواند ریاضیات دبیرستانی را به خوبی فرابگیرد و برجنبه‌های مختلف آن مسلط شود و تنها شرط رسیدن به چنین موفقیتی «خواستن» است.

دو نمونه از تجربهٔ معلمی خودم را، برایتان روایت می‌کنم.

سالها پیش، درس هندسهٔ یکی از کلاسهای دبیرستان به عهدهٔ من بود. در آغاز سال، وقتی برای نخستین بار، به این کلاس می‌رفتم، مدیر دبیرستان، که مردی آزموده و شایسته بود، نام دانش‌آموزی را برد و به من توصیه کرد، مراقب باشم که سربه‌سر او نگذارم، چراکه «بی‌ادب» است و، اغلب، به معلمان خود بی‌احترامی می‌کند. پرسیدم: «درس ریاضی او چطور است؟» مدیر دبیرستان، با نگاه معنی دار خود، به من فهماند که «چودانی و پرسی، سؤالت خطاست».

می‌خواستم با این دانش آموز آشنا شوم. ضمن حضور و غیاب، وقتی به نام او رسیدم، دلم فرو ریخت. به او نگاه کردم؛ آرام برخاست و، مثل دیگران، گفت «حاضر». چه خوب! هیچ اتفاقی نیفتاد. لحن کلام و رفتار او، با دیگران، تفاوت چندانی نداشت... پس این، همان شاگردی است که باید از او بیم داشته‌باشم؟ ولی، چرا هیچ پرخاشی نکرد؟ در آن زمان، دانشجو بودم و تفاوت سنی چندانی با او نداشتم و حتی در زورآزمایی بدنی هم، می‌توانست از عهدهٔ من برآید... متوجه سکوت طولانی خود شدم، به خود آمدم و «حضور و غیاب» را ادامه دادم.

دانش آموزی را پای تخته سیاه فرستادم و مسأله‌ای را، برای حل، پیشنهاد کردم. هرجا در کار خود می‌ماند، از دیگران کمک می‌خواستم و، به ندرت، خودم هم راهنمایی می‌کردم. بحث دربارهٔ مسأله، به جای مناسبی رسیده بود، پرسشی ساده در ذهن خود طرح کردم و از «او» خواستم به آن پاسخ دهد. پرسش ساده بود و هر کسی می‌توانست پاسخ درست را بدهد. «او» هم به درستی پاسخ داد. آرام، ولی جدی، او را تشویق کردم: «بسیار خوب! کاملاً درست است! تو باید استعداد ریاضی خوبی داشته باشی»... شگفت زده به دور و بر خود نگاه کرد. باور نمی‌کرد، کسی با این لحن تشویق آمیز با او صحبت کند. ولی قیافهٔ من جدی بود و هیچ نشانه‌ای از شوخی یا تمسخر در آن دیده نمی‌شد... سرش را پایین انداخت و نشست.

همین صحنه را در جلسهٔ بعد و جلسه‌های بعد تکرار کردم. هر بار از او می‌پرسیدم، ولی همیشه، به نحوی که مطمئن باشم، پاسخ درست را می‌داند...

یک روز، وقتی از راهرو ساختمان مدرسه می‌گذشتم، «او» را دیدم که سراغ یکی از هم کلاسیهای خود رفته و التماس می‌کند: «من فقط پیش همین معلم هندسه آبرو دارم، به من کمک کن تا آبرویم نرود»..

تیرم به هدف خورده بود و، البته، من هرگز نگذاشتم آبروی او برود. همیشه و مرتب از او می‌پرسیدم، ولی هربار، به صورتی که موجب تشویق او بشود... سه ماههٔ اول، نتیجهٔ امتحانش، چندان درخشان نبود. او را خواستم و قیافه‌ای متعجب و شماتت بار گرفتم: «مگر موقع امتحان حالت بد بود؟ چه شد، با این همه انتظاری که از تو داشتم، این ورقه رابه من داده‌ای؟» از چهره‌اش فهمیدم که می‌خواهد عصیان کند و «حقیقت» را بگوید، ولی من فرصت حرف زدن به او ندادم: «نمرات را به دفتر نمی‌دهم. نمرهٔ سه ماهه دوم را، برای سه ماهه اول به حساب می‌آورم. نمی‌گذارم، با این درک و استعدادی که داری، سابقه‌ات خراب شود»... و از او جدا شدم.

و «او»، به تدریج، یکی از شاگردان خوب کلاس، در درس هندسه شد، به نحوی که حتی به دیگران هم کمک می‌کرد. در سه ماهه دوم، نمرهٔ قابل قبولی داشت.

در یکی از روزهای نیمهٔ دوم اسفند ماه، پدرش به دیدن من آمد. می‌خواست بداند، با پسر او چه کرده‌ام که، این قدر، به هندسه علاقه‌مند شده است. می‌گفت: «هنوز پسرم، همان بی‌شعور سابق است، ولی حتی ضمن خوردن غذا، روی مسألهٔ هندسه کار می‌کند». و من، در پاسخ او، تنها یک حرف داشتم: «پسر شما بی‌شعور نیست و من، این را، به او فهماندم. منتهی اگر می‌خواستم این حرف را به طور مستقیم و نصیحت وار به او بگویم، باور نمی‌کرد، چراکه همه، و حتی پدرش، او را «بی‌شعور» می‌دانستند. چگونه می‌توانست، حرف

یک نفر را، در برابر ده‌ها نفر بپذیرد؟... در عمل و به طور غیر مستقیم، به او فهماندم که، تو هم مثل دیگران شعور داری و می‌توانی هندسه را یادبگیری»...

و او، هندسه را یاد گرفت؛ نمرهٔ سه ماههٔ سوم او، درخشان بود، با وجود این، آن سال در آن کلاس مردود شد... به خاطر درسهای دیگرش.

اما، روایت دوم. در یکی از دبیرستانهای تهران، دانش‌آموزی داشتم که هندسه را دوست نداشت و گمان می‌کرد، استعداد فراگیری هندسه را ندارد. سه سال آخر دبیرستان را، با کلاس او بودم. در این سه سال ، تقریباً همه درسهای ریاضی آن‌ها، با من بود. این دانش‌آموز، در همهٔ درس‌های ریاضی برجسته بود، ولی هندسه را، با نمره‌ای پایین و حتی گاهی به صورت «تک درس» می‌گذراند. در سال آخر دبیرستان (نظام قدیم)، درسی داشتند با عنوان «هندسه و مخروطات». بخش مخروطات این درس، هم به هندسهٔ مسطحه مربوط می‌شد و هم به هندسهٔ فضائی. کسی می‌توانست به خوبی از عهدهٔ آن برآید که، کم و بیش، بر هندسه دوسال قبل مسلط باشد. عادت من این بود که، گاهی، تدریس فصلی از کتاب درسی را، به عهدهٔ یکی از دانش آموزان می‌گذاشتم و، دانش آموز مورد بحث، همیشه داوطلب تدریس «جبر» و «مثلثات» و «حساب استدلالی» بود ولی من، «مخروطات» را به او پیشنهاد کردم. در ضمن، به او گفتم: «نمرهٔ تدریس تو، نه تنها نمرهٔ امتحانی «مخروطات»، بلکه نمرهٔ امتحانی «جبر» و «مثلثات» تو هم خواهد بود». او وحشت زده اعتراض کرد : «من هندسه نمی‌دانم. از هندسه متنفرم. نمرهٔ مخروطات به نمرهٔ جبر چه ربطی دارد؟» پاسخی ندادم و از او جدا شدم.

او به جنب و جوش افتاده بود. یکی دو هفته بعد، به من مراجعه کرد که : «آقا، مجبورم هندسهٔ سالهای قبل را هم بخوانم!» پاسخ من کوتاه بود : «همان کاری را بکن که لازم است»...

لزومی ندارد، از همهٔ نگرانیها و آشفتگیهای او، در سه ماهی که به آغاز تدریس او مانده بود، یاد کنم. در آغاز، هر کسی را که می‌توانست واسطه قرار داد تا مرا از تصمیم خود منصرف کند، ولی من پایداری کردم. سرانجام، روز موعود فرا رسید و او، به عنوان معلم، پای تخته سیاه رفت. همین قدر بگویم که، تدریس او، به هیچ وجه از تدریس یک معلم خوب، بدتر نبود. با روشنی و دقت، قضیه‌ها را ثابت می‌کرد، مثال می‌زد، تمرین نمونه حل می‌کرد و، بعد، دربارهٔ نکته‌های ظریفی که در درس وجود داشت، از دانش آموزان، و منجمله از من (که به عنوان دانش آموز، در کنار دیگران نشسته بودم) می‌پرسید... هندسه را یادگرفته بود و... خیلی خوب!

گمان می‌کنم، همین دو روایت، به اندازهٔ کافی قانع کننده باشند:

هر کسی می‌تواند ریاضیات را یادبگیرد، به شرطی که بخواهد.

چرا باید ریاضیات را یاد گرفت؟ فرو رفتن در مسأله‌هایی دور از ذهن، که شاید هرگز در زندگی به کارمان نخورد، چه فایده‌ای دارد؟ این همه صرف وقت و انرژی، برای اثبات قضیه‌هایی، که برخی از آن‌ها بدون اثبات هم واضح‌اند، برای چیست؟ آیا همهٔ این‌ها، تنها برای موفقیت در امتحان است؟ و مگر موفقیت در امتحان، می‌تواند دلیل قانع کننده‌ای باشد؟ مگر دشواریهای انسان امروزی را می‌توان با تکیه بر این گونه «موفقیت‌ها» حل کرد؟ برخی می‌گویند، ریاضیات، برای تقویت و شکوفائی اندیشه و ذهن آدمی سودمند است. مگر نمی‌شود، اندیشه و ذهن را، با کار روی موضوعهایی تقویت کرد که، در ضمن، برای زندگی و برای جامعهٔ انسانی هم مفید باشد؟... و اگر به ناچار قبول کنیم که، به دلیلی مجهول، باید ریاضیات را یاد گرفت، چگونه و از کجا باید آغاز کرد؟ چه باید کرد که، استدلالهای ریاضی ما، درست و قانع کننده باشد؟ چه باید کرد که بتوانیم از عهدهٔ حل مسأله‌های ریاضی برآییم؟ آیا کسی که در درس‌های ریاضی خود ناموفق است، به دلیل بی‌استعدادی اوست یا به خاطر این که «بی‌راهه» می‌رود؟ راه اصلی در کجاست؟ کدام مسیر، ما را به «راه» اصلی می‌رساند؟... آیا هرکسی می‌تواند ریاضی‌دان بشود و به مرزهای ناشناختهٔ ریاضی دست یابد؟ و اگر پاسخ به این پرسش مثبت است، چگونه و از کجا آغاز کنیم؟...

به همهٔ این پرسشها و پرسشهای فراوان دیگری که دربارهٔ ریاضیات وجود دارد، پاسخ خواهیم داد. ولی ابتدا و قبل از هر چیز، باید به یک توصیه عمل کنید، نه تنها کسانی که با ریاضیات سروکار دارند، بلکه هر کسی که می‌خواهد در زندگی علمی و اجتماعی خود موفق باشد. این، یک توصیهٔ عام است و برای هر دانش آموزی، در هر رشته‌ای، در هر سطحی و با هر استعدادی، سودمند است. آزمایش آن را، از همین امروز آغاز کنید؛ خیلی زود، اثر آن را در زندگی فرهنگی و معرفتی خود خواهید دید.

دفتری انتخاب کنید و در صفحهٔ اول آن بنویسید : «دفتر خاطره‌های علمی و فرهنگی» و، بعد، هر وقت به مطلب تازه و جالبی برخوردید (هرچه و درهر زمینه‌ای) در آن ثبت کنید.

ساعتها و روزهای متوالی، روی مسأله‌ای (و مثلاً، یک مسألهٔ ریاضی) اندیشیده‌اید، راه‌ها و روشهای مختلف را آزمایش کرده‌اید، با مراجعهٔ به کتاب‌های مختلف درسی و غیر درسی، برای رفع مشکل خود به جست و جو پرداخته‌اید،... ولی مسأله تسلیم نمی‌شود. شاید یک معماست و یا شاید، با طرح آن، خواسته‌اند شما را دست بیندازند... ولی یکبار، و اغلب ناگهانی، اندیشه‌ای به ذهنتان می‌رسد، اندیشه‌ای تازه... قلم را روی کاغذ می‌گذارید و آزمایش می‌کنید، مسأله حل می‌شود... ممکن است هرگز چنین اندیشه‌ای (که منجر به حل مسأله بشود) به ذهن شما نرسد، ولی از زبان معلم، یا در یک کتاب آشنا ویا به طریق دیگری، با راه حل آن آشنا شوید... عجب، پس این طور! پس راه حل آن، چنین بود. چقدر جالب!... این، یک خاطرهٔ علمی است و باید در دفتر خود یادداشت کنید. اول تاریخ بگذارید و بعد تمام ماجرا را شرح دهید. صورت مسأله چیست؟ چه کسی آن را به شما داده و یا در کدام کتاب دیده‌اید؟ چند ساعت یا چند روز با آن مشغول بوده‌اید؟... و سرانجام راه حل رابیاورید و، در ضمن، یاد آوری کنید که این راه حل را، چگونه و از کجا به‌دست آورده‌اید.

کتابی می‌خوانید (مجموعهٔ شعر، داستان، تاریخ، ریاضی، زندگی جانوران یا هر چیز دیگری) به نکته‌ای یا مطلبی بر می‌خورید که برای شما تازگی دارد، شگفت انگیز است، دل شما را می‌لرزاند و یا، خیلی ساده نظر شما را جلب می‌کند... این، یک خاطرهٔ علمی است. تاریخ بگذارید و آن را یادداشت کنید (باذکر منبع) و، در آخر نظر خود را (مثبت یا منفی) دربارهٔ آن بنویسید؛ اگر استدلالی هم، برای نظر خود دارید، ذکر کنید.

تلویزیون را تماشا یا رادیو را گوش می‌کنید، سر کلاس نشسته‌اید یا در جمع دوستان و آشنایان حضور دارید، هر کسی حرفی می‌زند و... ناگهان، مطلبی می‌شنوید که برای شما فوق العاده جالب است... این، یک خاطرهٔ علمی است و فراموش نکنید که، ضمن یادداشت آن، تاریخچهٔ خاطره را بنویسید : در کجا پیش آمد؟ چه کسی آن را مطرح کرد؟ نظر شما دربارهٔ آن چیست؟

پیاده روی می‌کنید، در اتوبوس نشسته‌اید، به سفر رفته‌اید، برای لذت بردن از مسابقهٔ فوتبال، به ورزشگاه آمده‌اید، از تماشای تابلوهای نقاشی در یک نمایشگاه یا از گوش دادن به یک کنسرت موسیقی لذت می‌برید،... چشم و گوش خود را باز کنید، به همه چیز دقت کنید، از هیچ چیز سرسری نگذرید، شاید حادثه‌ای، منظره‌ای، صحبتی یا ساختمانی باشد که جاذبه‌ای در شما ایجاد کند و برای ثبت در دفتر شما مفید باشد.

امروز با یکی از دوستان بحث داشته‌اید (دربارهٔ یک مسألهٔ ریاضی، دربارهٔ مسابقهٔ والیبال دو تیم مورد علاقه‌تان، دربارهٔ یک موضوع اجتماعی یا سیاسی...) و، در دل خود، به نظرتان می‌رسد، ضمن این بحث از جادهٔ انصاف خارج شده‌اید. به جای این که با دقت به حرفها و استدلالهای او گوش کنید، دائماً در این فکر بوده‌اید که چگونه او را از میدان در کنید یا، برعکس، او به چنین شیوهٔ نادرستی متوسل شده است. این، یک خاطرهٔ علمی است و ارزش یادداشت دارد.

... دفتر یادداشت خاطره‌ها، برای خودتان است، بنابراین می‌توانید همه چیز را صادقانه و همان طور که می‌اندیشید، در آن ثبت کنید. این دفتر، معرف زندگی فکری و معرفتی شماست و، در عین حال، رشد ذهنی و عقلی شما را، در طول زمان، نشان می‌دهد. هر وقت آن را ورق بزنید، همچون یک آینه، گذشتهٔ علمی و فکری شما را جلوتان می‌گذارد. در آن، به خوبی می‌بینید که چگونه پیش رفته‌اید، چه اشتباهایی داشته‌اید و چه کُمبودهایی! و چگونه می‌توانید، با تجربه از گذشته، راه آیندهٔ خود را انتخاب کنید. ضمن یادداشت مطالب در دفتر خود، دقیقاً مواظب باشید، نوشتهٔ شما، تا جایی که می‌توانید، خوانا و روشن باشد، به موقع نقطه‌گذاری کنید، به موقع سرسطر بروید، تاریخ و محل حادثه را فراموش نکنید، از به کار بردن واژه‌ای که معنای آن را نمی‌دانید پرهیز کنید، اگر مطلبی را از جایی نقل می‌کنید، منبع آن را بیاورید...

دفتر خاطره‌های علمی، اگر با پی‌گیری و دقت و به طور مستمر ادامه پیدا کند، می‌تواند برای شما آینده‌ساز باشد، چرا که شما را وامی‌دارد، ضمن خواندن کتاب یا گوش دادن به سخن دیگران و یا تماشای چشم اندازهای جلو خود، دقیق و کنجکاو باشید، شما را وامی‌دارد، دربارهٔ هر موضوعی بیندیشید، دربارهٔ هر مطلبی، ذهن و استعداد خود را بیازمایید و، سخن کوتاه، همهٔ شرطهایی را به دست آورید که یک اندیشمند و پژوهشگر باید داشته باشد.

تا بعد

نظریهٔ اعداد و کامپیوتر

● ترجمهٔ: غلامرضا یاسی پور و سید حسین سیدموسوی

نظریهٔ اعداد موضوعی است که توجه بشر را برای هزاران سال به خود جلب کرده‌است. در این مقاله بررسی مختصری از نظریهٔ اعداد، باتشریح اینکه چرا این موضوع مجذوب کننده و مهم است به دست می‌دهیم.

نظریهٔ اعداد، در کلی‌ترین مفهوم خود، مطالعهٔ اعداد و خواص آنهاست. در این نظریه، ابتداً به اعداد صحیح، ۰، ۱ ±، ۲ ±، ... پرداخته می‌شود، و خواص جالب بسیاری از این اعداد و روابط بین آنها مورد بحث قرارمی‌گیرد. در این مقاله، موارد استعمال نظریهٔ اعداد، به‌خصوص آنها راکه متوجه دانش کامپیوترند، بررسی می‌کنیم. گسترش دانش و تکنولوژی جدید به گسترش روشهای باکفایت در ارائهٔ اعداد صحیح و حساب اعداد صحیح ورزیدن وابسته است. از ۵۰۰۰ سال پیش به این طرف، روشهای متفاوتی، با به کار گرفتن اعداد صحیح مختلفی به‌عنوان مبنا، در نمایش اعداد صحیح مطرح شده‌است. بابلیهای باستان ۶۰ را به‌عنوان مبنای دستگاه عددیشان به کار برده‌اند، و مایائیهای باستان ۲۰ را. روش مرسوم ما در بیان اعداد، یعنی، دستگاه اعشاری به کار برندهٔ ۱۰ به‌عنوان مبنا، ابتدا در هندوستان و در حدود شش قرن پیش مطرح شد. امروزه، دستگاه دوتایی، که ۲ را به‌عنوان مبنا اختیار می‌کند، به طرز وسیعی در ماشینهای محاسب به‌کار رفته‌است.

هنگامی که طریقی در ارائهٔ اعداد صحیح مطرح می‌شود، به روشهایی برای حساب ورزیدن، بااستفاده از این نمایشها، نیاز است. در واقع عبارت آلگوریتم[1] که امروزه به هر روش مربوط به حل کردن یک مسألهٔ کلی اشاره دارد، در اصل و به طور خاص به چنین روشهایی اشاره داشته‌است. طرح روشهای کارا برای حساب، از هنگامی که کامپیوترها به طور افزایش یابنده‌ای با اعداد بزرگتر سروکار پیدا کرده‌اند، از اهمیت بسیار زیادی برخوردار شده‌است. نظریهٔ اعداد به طرق بسیار در طرح آلگوریتمهای کارا برای حساب کامپیوتری کارا به‌کار رفته است. و در این زمینه، نتایج اساسی جدیدی در دههٔ گذشته کشف شده‌اند.

یونانیان باستان، ۲۵۰۰ سال پیش، در مکتب فیثاغورس، بین **اعداد اول**[2] و **اعداد مرکب**[3] تمایز قائل می‌شدند. **عدد اول** عدد صحیح مثبتی است که عاملی جز یک و خودش ندارد. مسائل مربوط به اعداد اول نظر ریاضیدانها را از عهد عتیق تا زمان حاضر به خود جلب کرده‌است. شاید اولین سؤالی که در مورد اعداد اول به ذهن خطور کرده این سؤال که آیا بی‌نهایت اعداد اول وجود دارد یا خیر، باشد. در مقدمات[4] اقلیدس، ریاضیدان یونان باستان می‌توان برهانی، در مورد این که بی‌نهایت عدد اول موجود است، یافت. سؤال دیگری که در این مورد مطرح می‌شود این است که: آیا فرمولی که اعداد اول را تولید کند وجود دارد؟ پی‌یرفرما، نظریهٔ اعداد پرداز بزرگ فرانسوی قرن هفدهم، تصور می‌کرد که جمیع اعداد صحیح به صورت $2^{2^n}+1$ اولند، اما دروغ بودن این مطلب، یک قرن بعد از آنکه فرما چنین ادعایی کرد، توسط لئونارداولر، ریاضیدان مشهور سوئیسی، که مبرهن ساخت که ۶۴۱ عامل $2^{2^5}+1$ است، به اثبات رسید.

مسألهٔ متمایز کردن اعداد اول از اعداد مرکب به طور وسیعی مورد بررسی قرارگرفته است. این مسأله، گرچه در ابتدا تنها به خاطر کنجکاویهای روشنفکرانه مورد بررسی قرار گرفت، امروزه مسألهٔ بسیار مهمی در رمز شناسی است. اراتستن دانشمند یونان باستان روشی، که امروزه **غربال اراتستن**[5] نامیده می‌شود، و جمیع اعداد اول کمتر از حد مشخصی را به دست می‌دهد، اختراع کرد. این روش ابتدا جمیع اعداد صحیح زوج را حذف می‌کند، بعد اعداد صحیح باقیماندهٔ قابل قسمت به سه را حذف می‌کند، سپس به حذف اعداد صحیح

باقیماندهٔ بخش‌پذیر بر پنج می‌پردازد، و همینطور ادامه می‌دهد، و هنگامی که اعداد صحیح بخش‌پذیر بر بزرگترین عدد اول نامتجاوز از جذر حد زبرین دنبالهٔ مورد بحث حذف شده باشند، از کار می‌ایستد. در این صورت جمیع اعداد صحیح مانده، به جز ۱، اول اند.

گاهی نیاز به تعیین اول بودن عدد صحیح خاصی داریم. متأسفانه استفاده از غربال اراتستن در تشخیص اینکه عدد صحیح خاصی اول است یا نه، بی‌فایده است، بنابراین ریاضیدانها به جستجوی روشهای دیگری در تعیین اول بودن یک عدد صحیح رفته‌اند. ریاضیدانهای چین باستان تصور می‌کردند که اعداد اول دقیقاً آن اعداد صحیح مثبت n اند که $2^n - 2$ را عاد می‌کنند. فرما نشان داد که اگر n اول باشد، در این صورت $2^n - 2$ را عاد می‌کنند. اما در اوایل قرن نوزدهم، معلوم شد که اعداد صحیح مرکب n ی، چون n=۳۴۱، چنانکه n، $2^n - 2$ را عاد کند، موجودند. اعداد مرکب مزبور به شبه اول[6] موسومند. از آنجا که اغلب اعداد صحیح مرکب شبه‌اول نیستند، امکان طرح تستهای اول بودن برمبنای اندیشهٔ چینی اولیه، همراه با ملاحظاتی اضافی، موجود می‌شود. و اکنون یافتن اعداد اول به کارایی امکان می‌یابد؛ در واقع، اعداد اولی با ۲۰۰ رقم اعشاری را می‌توان با چند دقیقه کار کامپیوتر به‌دست آورد. در حال حاضر قسمت عظیمی از تحقیقات جاری به نشان دادن اعداد صحیحی که اولند اختصاص یافته‌اند.

قضیهٔ اساسی حساب[7]، معروف یونانیان باستان، براین است که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به‌طور منحصر به فردی به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت. این تجزیه را می‌توان با آزمایش تقسیم آن عدد بر اولهای کمتر از جذر آن به‌دست آورد؛ اما این روش، متأسفانه، بسیار وقت‌گیر است. فرما، اولر، و بسیاری از ریاضیدانهای دیگر، در این مورد، روشهای تجزیهٔ ابتکاری ای ارائه داده‌اند. اما، تجزیهٔ عدد صحیحی با ۲۰۰ رقم اعشار، بااستفاده از کاراترین تکنیکی که تاکنون به وجود آمده، می‌تواند به بلیونها سال وقت کامپیوتر نیاز داشته‌باشد. به همین جهت است که امروزه برای یافتن راههایی تازه در تجزیهٔ سریع اعداد صحیح بزرگ، تلاشهای وسیعی در دست اقدام است.

کارل فریدریش گوس ریاضیدان آلمانی، که یکی از بزرگترین ریاضیدانهای تمام اعصار به حساب می‌آید، **لسان هم نهشتیها**[8] را در اوائل قرن نوزدهم مطرح کرد. در این صورت هنگام انجام محاسبات معینی، بااستفاده از لسان هم نهشتیها، به‌جای اعداد، می‌توان باقیمانده‌های آنها را، چون بر عدد معینی تقسیم شوند، قرار داد. با استفاده از مفهوم هم نهشتی می‌توان مسائل بسیاری را، که بدون این اصطلاح تنها می‌توانند به صورت پیچیده و ناهنجاری بیان شوند، به گونه‌ای ظریف و موجز به عبارت آورد. هم نهشتیها کاربردهای متعددی در دانش کامپیوتر، از جمله کاربردهایی در فایل * حافظهٔ کامپیوتری، حساب با اعداد صحیح بزرگ، و ایجاد اعداد شبه **تصادفی**[9] دارند.

یکی از مهمترین کاربردهای نظریهٔ اعداد در دانش کامپیوتر حوزهٔ رمزنگاری است. از هم نهشتیها می‌توان برای مطرح کردن انواع گوناگون رمزها استفاده کرد. اخیراً نوع جدیدی از سیستمهای رمزی، موسوم به **سیستم رمزی عام ـ کلید** ارائه شده است. در این صورت چون رمز عام ـ کلیدی به کار رود، هر فرد یک کلید رمز بندی عام و یک کلید رمزگشایی خاص دارد. پیغامها با استفاده از کلید عمومی گیرنده رمز بندی می‌شوند. گذشته از این، تنها گیرنده می‌تواند پیغام مورد بحث را رمزگشایی کند، زیرا رمزگشایی، هنگامی که تنها کلید رمز بندی معلوم است، به مقدار بسیار زیادی زمان کامپیوتری نیاز دارد. سیستم رمزی عام ـ کلید بیش از همه به کار رفتهٔ فوق بر تفاوت کلی زمان کامپیوتری مورد نیاز برای یافتن اعداد اول بزرگ و تجزیهٔ اعداد صحیح بزرگ متکی است. در حالت خاص، در تهیهٔ یک کلید رمز بندی به این نیاز است که دو عدد اول بزرگ پیدا و سپس در هم ضرب شوند؛ و این کار را می‌توان در چند دقیقه بر کامپیوتر انجام داد. در این صورت کلید رمزگشایی مورد نظر، چون اولهای بزرگ مزبور مشخص شوند، می‌تواند به سرعت به دست آید. اما یافتن کلید رمزگشایی از کلید رمزبندی نیاز به این دارد که یک عدد بزرگ، یعنی حاصل‌ضرب اعداد اول بزرگ مزبور تجزیه شود، و این کار ممکن است بلیونها سال طول بکشد.

۱ـ Algorithm
۲ـ Primes
۳ـ Composite
۴ـ Elements
۵ـ Sieve of Erathosthense
۶ـ Pseudoprime
۷ـ Fundamental theorem of arithmetic
۸ـ Congruences
۹ـ Pseudo - random numbers

*پرونده

● احمد قندهاری

لگاریتم

(مورد استفاده دانش‌آموزان سال دوم، سوم و چهارم دبیرستان)

جان نپر[1] ریاضی‌دان اسکاتلندی درسال ۱۶۱۴ میلادی کتابی به‌زبان لاتین تحت عنوان «شرح جدول شگفت‌انگیز لگاریتمها» منتشر کرد که فوق‌العاده مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفت.

جدول این کتاب بعدها به‌جدول لگاریتم معروف شد.

«نپر» برای محاسبات ایـن کتاب حدود بیست سال زحمت کشیده بود. مبنای لگاریتم «نپر» عدد «e» است که مقدار آن از سری

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

به‌دست می‌آید (مقدار تقریبی این عدد (۲/۷۱۸۲) است). به‌همین‌علت لگاریتم ابداعی یا اختراعی «نپر» را لگاریتم «نپری» یـا «نپرین» گویند و آن را بـه‌صورت *log* یا Ln نشان می‌دهند.

یك سال پس از انتشار کتاب «نپر» یك معلم ریاضی در انگلستان به‌نام «بریگز[2]» دست از کار خود کشید و به‌اسکاتلند نزد «نپر» رفت، ضمن تشویق وقدردانی، از او خواست کـه جدول لگاریتمی برمبنای (۱۰) بنویسد. نپر از این پیشنهاد استقبال کرد ولی عمرش کفاف نداد که آن را به‌پایان برساند.

«بریگز» کار نیمه‌تمام «نپر» را ادامه داد تـا درسال ۱۶۲۴ میلادی جدول لگاریتم دهگانی را به‌پایان رسانـد و منتشر کرد. این جدول بعدها به‌وسیلهٔ دیگران تکمیل شد.

بخش اول: تعریف لگاریتم وفرمولهای آن

کلیه اعدادی که در این مقالـه مطرح می‌شود اعداد حقیقی است.

۱. تعریف لگاریتم:

فرض می‌کنیم عدد (a) مثبت ومخالف یك باشد. اگر اعدادی مانند (N) و (x) داشته‌باشیم، به‌طوری که: $N=a^x$ ، دراین‌صورت بنا به‌تعریف می‌گوییم لگاریتم N درمبنای (a) مساوی (x) است:

$$N=a^x \Longleftrightarrow \log_a^N=x$$

عدد (x) را لگاریتم وعدد (a) را مبنا وعـدد (N) را آنتی لگاریتم یاعدد مابه‌ازاء گویند.

چون a عددی مثبت است وعدد مثبت به‌هر توان که برسد، مثبت است، پس a^x ودر نتیجه N همواره مثبت است. به‌همین علت است که می‌گوییم اعداد منفی وصفر، لگاریتم ندارد.

مثال ۱ : ازتساوی $\log_{\sqrt[4]{5}} 5\sqrt{5}=x$ مقدار x را بیابید.

حل : بنا به‌تعریف می‌توان نوشت:

$$5\sqrt{5}=(\sqrt[4]{5})^x$$

طرفین تساوی را به‌توان (۴) می‌رسانیم

$$5^4\times5^2=5^x$$

$$5^6=5^x \Longrightarrow \boxed{x=6}$$

مثال ۲ : ازتساوی $\log_{a^2\sqrt[4]{a}} N=\frac{9}{14}$ مقـدار N را بیابید.

حل :

$$N=(a^2\sqrt[4]{a})^{\frac{9}{14}}=(a^{18}a^{3})^{\frac{1}{14}}=(a^{21})^{\frac{1}{14}}=a^{\frac{3}{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{N=a\sqrt{a}}$$

۱_ Neper یا Nepier

۲_ Briggs

مثال ۳ : از تساوی $\log_a(2+\sqrt{3}) = -1$، مقدار a را بیابید.

حل :

$$(2+\sqrt{3})=a^{-1} \Rightarrow \frac{1}{a}=2+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a=2-\sqrt{3}}$$

II. فرمولهای لگاریتم:

هرعددی که درمبنای لگاریتم قرار می‌گیرد شرط مثبت ومخالف یک‌بودن را دارا هست.

$$1=a^0 \Rightarrow \boxed{\log_a 1 = 0} \quad (1)$$

$$a=a^1 \Rightarrow \boxed{\log_a a = 1} \quad (2)$$

اگر $M=a^x$ و $N=a^y$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\log N_a = y \;,\; \log M_a = x$$

$$M\cdot N=a^x\cdot a^y \Rightarrow MN=a^{x+y}$$

$$\Rightarrow \log_a MN = x+y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a MN=\log_a H+\log_a N} \quad (3)$$

تعمیم:

$$\log aM.\,N\,.\,K\dots=\log_a M+\log_a N+\log aK+\dots$$

مثال :

$$\log_4 5\times 11\times 17=\log_4 5+\log_4 11+\log_4 17$$

می‌توان نوشت

اگر $M=a^x \Rightarrow \log_a M = x$

اگر $N=a^y \Rightarrow \log_a N = y$

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}\Rightarrow \frac{M}{N}=a^{x-y}$$

$$\Rightarrow \log_a\frac{M}{N}=x-y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N} \quad (4)$$

مثال : $\log_4\frac{625}{11}=\log_4 625-\log_4 11$

نتیجه‌ای ازفرمول (۵)

$$\log_a\frac{1}{N}=\log_a 1-\log_a N \Rightarrow \boxed{\log_a\frac{1}{N}=-\log_a N}$$

اگر $N=a^x \Rightarrow \log_a N = x$

$x\neq 0$ یا $N\neq 1$

فرض می‌کنیم $\log_{a^p} N^m = kx$ ، می‌خواهیم k را بیابیم.

$$\log_{a^p} N^m=kx \Rightarrow N^m=(a^p)^{kx} \Rightarrow N^m=a^{pkx}$$

$$\Rightarrow (a^x)^m=a^{pkx} \Rightarrow a^{mx}=a^{pkx}$$

$$\Rightarrow mx=pkx \Rightarrow m=pk \Rightarrow \boxed{k=\frac{m}{p}}$$

$$\Rightarrow \log_{a^p} N^m=kx \Rightarrow \log_{a^p} N^m=\frac{m}{p}x$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_{a^p} N^m=\frac{m}{p}\log_a N} \quad (6)$$

مثال:

$$\log_{128} 64 = \log_{2^7} 2^6 = \frac{6}{7}\log_2 2 = \frac{6}{7}$$

نتایج فرمول (۶)

I) $\log_a N^m = m\log_a N$

II) $\log_{a^p} N = \frac{1}{p}\log_a N$

III) $\log_{a^m} N^m = \log_a N$

مثال :

$$\log_a N = \log_{a^2} N^2 = \log_{a^3} N^3 = \dots = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{N} = \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[3]{N} = \dots$$

IV) $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{N} = \log_{a^{-1}} N^{-1} = \log_a N$

V) $\log_{\sqrt[p]{a}} \sqrt[m]{N} = \log_{a^{\frac{1}{p}}} N^{\frac{1}{m}} = \frac{p}{m}\log_a N$

اگر $\log_b a = x$, $\log_a b = y$

آنگاه : $a = b^x$, $b = a^y \Longrightarrow a = (a^y)^x \Longrightarrow a = a^{xy}$

$$\Longrightarrow xy = 1 \Longrightarrow \boxed{\log_b a \times \log_a b = 1} \quad (۷)$$

نتایج فرمول (۷)

I) $\log_b a \cdot \log_a b = 1 \Longrightarrow \boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$ (۸)

II) $\log_{MN} a = \frac{1}{\log_a MN} = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_{MN} a = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}} \quad (۹)$$

مثال : ثابت کنید:

$$\log_{\sqrt{24}}\sqrt{2} = \frac{1}{3+\log_2 3}$$

حل :

$$\log_{\sqrt{24}}\sqrt{2} = \log_{24} 2 = \frac{1}{\log_2 24} = \frac{1}{\log_2 2^3\times 3} = \frac{1}{3\log_2 2+\log_2 3} = \frac{1}{3+\log_2 3}$$

فرض می‌کنیم:

$\log_b a = x$, $\log_c b = y$, $\log_c a = z$

$\Longrightarrow a = b^x$, $b=c^y$, $a=c^z$ (۱)

$$\begin{cases} a=b^x \\ b=c^y \end{cases} \Longrightarrow a=(c^y)^x \Longrightarrow a=c^{xy} \quad (۲)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$c^{xy}=c^z \Longrightarrow xy=z$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_b a\times \log_c b = \log_c a} \quad (۱۰)$$

تعمیم $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c\times\dots\times\log_n k = \log_n a$

مثال :

$$\log_{10} 25 \times \log_5 10 = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2$$

نتیجه‌ای از دستور (۱۰)

$$\log_b a\times\log_c b = \log_c a \Longrightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

اگر به‌جای c عدد (۱۰) را قراردهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log a}{\log b}} \quad (۱۱)$$

توجه: اگرمبنا عدد (۱۰) باشدآن را نمی‌نویسند.

مثال :

$$\log_{1000}10000 = \frac{\log 10000}{\log 1000} = \frac{\log 10^4}{\log 10^3}$$

$$= \frac{4\log 10}{3\log 10} = \frac{4}{3}$$

اگر $\log_c x = k \Longrightarrow x = c^k$

اگر $\log_b k = p \Longrightarrow k = b^p$ $\Bigg\} \Longrightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}}$

اگر $\log_a p = m \Longrightarrow p = a^m$

$\Longrightarrow \log_a p = \log_a(\log_b k) = \log_a(\log_b(\log_c x))$

داشتیم $\log_a p = m$

$$\Longrightarrow \boxed{\log_a(\log_b(\log_c x)) = m \Longrightarrow x = c^{b^{a^m}}} \quad (۱۲)$$

مثال :

$$\log_{\sqrt{۲}}\left(\log_{\frac{۲}{\sqrt{۴}}} \log_{\frac{۴}{\sqrt{۸}}} x\right) = ۲$$

$$\Longrightarrow x = \sqrt{۸}^{\sqrt[۴]{۴}^{\sqrt{۲}^{۲}}} \qquad \Longrightarrow \boxed{x = ۸}$$

اگر $\log_a N = p \ , \ p = \log_a N$

$$\Longrightarrow N = a^p \Longrightarrow \boxed{N = (a)^{\log_a^N}} \quad (۱۳)$$

به طور کلی داریم :

$$\boxed{(x)^{\log_a^y} = (y)^{\log_a^x}} \quad (۱۴)$$

زیرا اگر از طرفین درمبنای a لگاریتم بگیریم خواهیم داشت: $\log_a^y \cdot \log_a^x = \log_a^x \cdot \log_a^y$

مثال : $(۵)^{\log x} = (x)^{\log ۵}$

مثال : $(۱۰)^{\log x} = x$

فرض می‌کنیم $a > ۱$ ، با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$\text{I)} \quad \log_a^N > ۰ \Longrightarrow N > a^۰ \Longrightarrow N > ۱$

$\text{II)} \quad \log_a^N < ۰ \Longrightarrow ۰ < N < a^۰ \Longrightarrow ۰ < N < ۱$

$\text{III)} \quad \log_a^N > ۱ \Longrightarrow N > a$

$\text{IV)} \quad \log_a^N < ۱ \Longrightarrow ۰ < N < a$

$\text{V)} \quad \log_a^N > -۱ \Longrightarrow N > a^{-۱} \Longrightarrow N > \frac{۱}{a}$

$\text{VI)} \quad \log_a^N < -۱ \Longrightarrow ۰ < N < a^{-۱} \Longrightarrow ۰ < N < \frac{۱}{a}$

حال فرض می‌کنیم $۰ < a < ۱$ ومی‌دانیم $\log a$ عددی است منفی، دراین‌صورت خواهیم داشت:

$(\text{I})' \quad \log_a^N > ۰ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۰ \Longrightarrow \log N < ۰ \Longrightarrow ۰ < N < ۱$

$(\text{II})' \quad \log_a^N < ۰ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۰ \Longrightarrow \log N > ۰ \Longrightarrow N > ۱$

$(\text{III})' \quad \log_a^N > ۱ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} > ۱ \Longrightarrow \log N < \log a \Longrightarrow ۰ < N < a$

$(\text{IV})' \quad \log_a^N < ۱ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} < ۱ \Longrightarrow \log N > \log a \Longrightarrow N > a$

$(\text{V})' \quad \log_a^N > -۱ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} > -۱$

$\Longrightarrow \log N < -\log a \Longrightarrow \log N < \log a^{-۱}$

$\Longrightarrow \log N < \log \frac{۱}{a} \Longrightarrow ۰ < N < \frac{۱}{a}$

$(\text{VI})' \quad \log_a^N < -۱ \Longrightarrow \frac{\log N}{\log a} < -۱$

$\Longrightarrow \log N > -\log a \Longrightarrow \log N > \log a^{-۱}$

$\Longrightarrow \log N < \log \frac{۱}{a} \Longrightarrow N > \frac{۱}{a}$

مثال ۱ : حدود x را بیابید. $\log(۲x-۳) < ۰$

بنا به‌نتیجه (II) صفحهٔ (۲۹)

$۰ < ۲x - ۳ < ۱ \Longrightarrow ۳ < ۲x < ۴$

$\Longrightarrow \frac{۳}{۲} < x < ۲$

مثال ۲: $\log_{\frac{1}{4}}(2x-3)>0$

بنا به‌نتیجه $(I)'$ صفحهٔ (۲۹)

$$\Rightarrow 0<2x-3<1 \Rightarrow 3<2x<4 \Rightarrow \frac{3}{2}<x<2$$

مثال ۳: $\log_{\frac{1}{6}}(4x-6)<-1$

بنا به‌نتیجه $(VI)'$ صفحهٔ (۲۹)

$$\Rightarrow 4x-6>\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$$

$$4x-6>6 \Rightarrow 4x>12 \Rightarrow x>3$$

مثال ۴: $\log_{\frac{1}{8}}(2x-8)>-1$

بنا به نتیجهٔ $(V)'$ صفحهٔ (۸)

$$0<2x-8<\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} \Rightarrow 0<2x-8<8$$

$$8<2x<16 \Rightarrow 4<x<8$$

بخش دوم: می‌دانیم:

$$100=10^2 \Rightarrow \log 100=2$$

$$1000=10^3 \Rightarrow \log 1000=3$$

اگر عددی بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ باشد، مسلماً لگاریتم آن بین ۲ و ۳ است.

مثلاً: $\log 200 = 2/30103$

عدد (۲) مفسر وعدد اعشاری ۰/۳۰۱۰۳ را مانتیس یا قسمت اعشاری گویندکه ازجدول لگاریتم به‌دست می‌آید.

مفسر ازلحاظ علامت مثبت یا منفی است، ممکن است صفر هم باشد ولی مانتیس همواره مثبت است.

اگر مبنای لگاریتم(۱۰) باشد، به‌طوری‌که قبلاً گفته شد مبنارا نمی‌نویسند واین لگاریتم‌را لگاریتم اعشاری یا لگاریتم دهگانی گویند.

دربحث زیرمبنای لگاریتم ۱۰ و $N>1$ است.

مفسر: اگرمفسر مثبت یاصفر باشد، چنانچه یك‌واحد به آن اضافه‌کنیم تعداد ارقام عدد آنتی لگاریتم به دست می‌آید.

اگر مفسر منفی‌باشد، قدر مطلق آن نشان‌دهندهٔ تعداد صفرهای سمت‌چپ عدد است. با احتساب‌صفر ممیز.

مثال:

N عددبست پنج رقمی $\Longleftarrow$ $\log N = 4/251$ اگر

درسمت‌چپ‌عددNبااحتساب صفرممیز سه صفروجود دارد $\Longleftarrow$ $\log N=\bar{3}/251$ اگر

مثال:

$$\log 0/1 = -1$$

$$\log 0/01 = -2$$

$$\log 0/001 = -3$$

کلگاریتم: لگاریتم $\frac{1}{N}$ را کلگاریتم N گویندپس

$$-\log N = \text{colog}\, N \quad , \quad -\text{colog}\, N = \log N$$

طرز تعیین $\text{colog}\, N$ از روی $\log N$:

(۱+) رابه مفسر $\log N$ اضافه می‌کنیم پس از جمع جبری علامت آن‌را عوض‌می‌کنیم. درمورد قسمت اعشاری: اولین‌رقم بامعنای سمت‌راست قسمت اعشاری را از (۱۰) و بقیه‌را از (۹) کم می‌کنیم.

مثال: $\log N = \bar{2}/21450 \quad , \quad \text{colog}\, N = ?$

$\text{colog}\, N = 1/7855$

سؤال: اگر $\text{colog}\, N$ را داشته‌باشیم، $\log N$ چگونه به‌دست می‌آید.

پاسخ: به‌همان طریقی‌که از روی $\log N$، $\text{colog}\, N$ را به دست آوردیم:

مثال: $\text{colog}\, N = 4/2160 \Longrightarrow \log N = \bar{5}/784$

---

۱. جمع لگاریتمها:

برای‌جمع چندلگاریتم، مانتیس‌آنها را با هم جمع

می‌کنیم، سپس واحدهای صحیحی که به‌دست می‌آید با مفسرها جمع جبری می‌کنیم.

مثال :

$$\left.\begin{array}{l}\log x = ۲/۸۵۱۲\\ \log y = \bar{۵}/۹۳۲۰\end{array}\right. \Longrightarrow \log x + \log y =$$

$$۲/۸۵۱۲ + \bar{۵}/۹۳۲۰ = \bar{۲}/۷۸۳۲$$

۲. تفریق لگاریتمها :

برای تفریق لگاریتمها، مفروق را به کلگاریتم تبدیل می‌کنیم سپس به‌جای عمل تفریق عمل جمع‌را انجام می‌دهیم.

مثال :

$$\left\{\begin{array}{l}\log x = \bar{۴}/۶۳۹۲\\ \log y = ۲/۱۸۶۰\end{array}\right. \Longrightarrow \log x - \log y =$$

$$\log x + \operatorname{colog} y = \bar{۴}/۶۳۹۲ + \bar{۳}/۸۱۴۰ = \bar{۶}/۴۵۳۲$$

۳. ضرب عدد m در log x

الف: اگر m مثبت باشد، عمل ضرب معمولی انجام می‌گیرد، با توجه به‌اینکه مانتیس همواره مثبت است.

مثال:

$$\log x = \bar{۲}/۸۱۴۰ \Longrightarrow ۵\log x = ?$$

$$۵\log x = ۵(\bar{۲}/۸۱۴۰) = ۵(-۲ + ۰/۸۱۴۰)$$

$$= -۱۰ + ۴/۰۷ = \bar{۶}/۰۷$$

ب: اگر عدد m منفی باشد، در این صورت $\operatorname{colog} x$ را در $|m|$ ضرب می‌کنیم.

مثال:

$$\log x = ۱/۱۲۴۳ \Longrightarrow -۵\log x = ?$$

$$-۵\log x = ۵(\operatorname{colog} x) = ۵(\bar{۲}/۸۷۵۷)$$

$$= ۵(-۲ + ۰/۸۷۵۷) = -۱۰ + ۴/۳۷۸۵$$

$$= \bar{۶}/۳۷۸۵$$

۴. تقسیم log x برعدد k

الف: اگر k مثبت و مفسر، $\log x$ ، مثبت باشد، در این‌صورت با تقسیم معمولی اعشاری جواب به‌دست می‌آید.

مثال:

$$\log x = ۲/۱۲۴۵ \Longrightarrow$$

$$\frac{\log x}{۳} = \frac{۲/۱۲۴۵}{۳} = ۰/۷۰۸۱۶$$

ب: اگر k مثبت ومفسر، $\log x$ منفی باشد، ولی عدد مفسر به‌عدد k بخش‌پذیر باشد بازهم تقسیم به‌صورت‌معمولی انجام می‌شود.

مثال:

$$\log x = \bar{۶}/۸۱۴۱ \Longrightarrow$$

$$\frac{\log x}{۳} = \frac{\bar{۶}/۸۱۴۱}{۳} = \bar{۲}/۲۷۱۳$$

ج: اگر k مثبت ومفسر $\log x$ منفی باشد ولی عدد مفسر بر k بخش‌پذیر نباشد دراین‌صورت بزرگترین‌عددمنفی را به مفسر اضافه می‌کنیم تا برعدد k بخش‌پذیر شود و در عین‌حال همان‌عدد باعلامت‌مثبت‌را به مانتیس اضافه‌می‌کنیم، سپس‌عمل تقسیم‌را انجام می‌دهیم:

مثال:

$$\log x = \bar{۲}/۱۲۲۵ \Longrightarrow \frac{\log x}{۵} = \frac{\bar{۲}/۱۲۲۵}{۵}$$

$$= \frac{-۲ + ۰/۱۲۲۵}{۵} = \frac{-۲ - ۳ + ۳ + ۰/۱۲۲۵}{۵}$$

$$= \frac{-۵ + ۳/۱۲۲۵}{۵} = -۱ + ۰/۶۲۴۵$$

$$= \bar{۱}/۶۲۴۵$$

د : اگر k منفی باشد، دراین صورت به‌جای تقسیم $\log x$ برعدد منفی k ، $\operatorname{colog} x$ را بر $|k|$ تقسیم می‌کنیم ، که دراین وضعیت‌عملیات به‌حالتهای گفته‌شده تبدیل‌می‌شود.

مثال:

$$\log x = ۲/۲۳۸۶ \Longrightarrow \frac{\log x}{-۳} = \frac{-\log x}{۳}$$
$$= \frac{\operatorname{colog} x}{۳} = \frac{\bar{۳}/۷۶۱۴}{۳} = \bar{۱}/۲۵۳۸$$

---

۵. ضرب یا تقسیم دو لگاریتم

الف: اگر مفسرهای هردو لگاریتم مثبت باشند، اعمال ضرب یا تقسیم، همان اعمال ضرب یا تقسیم دو عدد اعشاری در یکدیگر یا بر یکدیگر است.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = ۲/۲۳۴۵\\ \log y = ۳/۰۱۲۴\end{cases} \Longrightarrow$$
$$\log x \cdot \log y = ۲/۲۳۴۵ \times ۳/۰۱۲۴ = ۶/۷۳۱۲$$

ب: اگر مفسرهای هردو لگاریتم منفی باشد، کلگاریتمهای آنها را درهم ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = \bar{۱}/۴۱۲۳\\ \log y = \bar{۴}/۲۱۴۵\end{cases} \Longrightarrow \log x \times \log y$$
$$= \operatorname{colog} x \times \operatorname{colog} y = (۰/۵۸۷۷)(۳/۷۸۵۵)$$
$$= ۲/۲۲۴۷$$

ج: اگر یکی از مفسرها مثبت و دیگری منفی باشد، به جای آنکه مفسرش منفی است کلگاریتم آن را قرار می دهیم، سپس از حاصل ضرب یا تقسیم، کلگاریتم می گیریم.

مثال:

$$\begin{cases}\log x = ۲/۲۱۴۵\\ \log y = \bar{۳}/۴۱۲۲\end{cases} \Longrightarrow \log x \cdot \log y$$
$$= -(\log x)(\operatorname{colog} x) = -(۲/۲۱۴۵)(۲/۵۸۷۸)$$
$$= -(۵/۷۳۰۷) = \bar{۶}/۲۶۹۳$$

توجه: $\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲$

$$\Longrightarrow \log ۵ = ۱ - \log ۲ \quad \text{یا} \quad \log ۲ = ۱ - \log ۵$$

مسائل

مسأله ۱ - اگر $x \neq y$ و داشته باشیم $\log_y^x = \log_x^y$، ثابت کنید $xy = ۱$.

حل: $\log_y^x = \log_x^y \Longrightarrow \log_y^x = \frac{۱}{\log_y^x} \Longrightarrow (\log_y^x)^۲ = ۱$

$$\Longrightarrow \log_y^x = \pm ۱ \Longrightarrow x = y^{\pm ۱} \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} x = y & \text{غ ق ق}\\ x = y^{-۱} \Longrightarrow x = \frac{۱}{y} \Longrightarrow \boxed{xy = ۱}\end{cases}$$

مسأله ۲ - اگر $۳\log x = ۲$، x بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

$$۳\log x = ۲ \Longrightarrow \log x^۳ = \log ۱۰۰$$
$$\Longrightarrow x^۳ = ۱۰۰ \Longrightarrow ۴ < x < ۵$$

مسأله ۳ - از رابطه $x \times ۵^{\log a} = a$ مقدار (x) را بیابید.

$$x = \frac{a}{۵^{\log a}} = \frac{a}{a^{\log ۵}} = a^{۱-\log ۵} = a^{\log ۲} \Longrightarrow$$
$$x = a^{\log ۲}$$

مسأله ۴ - مقدار عددی $(۱۰)^{(۲\log \sqrt[۴]{۶} - \log ۲)}$ را حساب کنید.

$$(۱۰)^{(۲\log \sqrt[۴]{۶} - \log ۲)} = (۱۰)^{\log \sqrt{۶} - \log \sqrt{۴}} =$$
$$(۱۰)^{\log \frac{\sqrt{۶}}{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

مسأله ۵ - حدود $|x|$ را بیابید. اگر

$$\log_{\frac{۱}{۵}}(x^۲ - ۴) \geqslant -۱$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2-4) \geqslant -1 \Longrightarrow 0<x^2-4\leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$$
$$\Longrightarrow 0<x^2-4\leqslant 5 \Longrightarrow 4<x^2\leqslant 9$$
$$\Longrightarrow 2<|x|\leqslant 3$$

مسأله ۶ - بازاء چه‌مقادیر a معادله:

$$x^2-2(1+\log a)x+1-\log^2 a=0$$

دو ریشه مختلف‌العلامه دارد؟

$$\frac{c}{a}<0 \Longrightarrow \frac{1-\log^2 a}{1}<0 \Longrightarrow$$

$$1-\log^2 a<0 \Longrightarrow \log^2 a>1 \Longrightarrow \begin{cases}\log a>1\\ \text{یا}\\ \log a<-1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}a>10\\ \text{یا}\\ 0<a<\frac{1}{10}\end{cases}$$

مسأله ۷ - اگر $\log_9 8=a$ ، عبارت

$$\log_{27}16\times\log_3 2=?$$

$$\log_9 8=a \Longrightarrow \log_{3^2}2^3=a \Longrightarrow \frac{3}{2}\log_3 2=a$$

$$\Longrightarrow \log_3 2=\frac{2}{3}a$$

$$\log_{27}16\times\log_3 2=\log_{3^3}2^4\times\log_3 2=\frac{4}{3}\log_3 2$$

$$\times\log_3 2=\frac{4}{3}(\log_3 2)^2=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{4}{3}\times\frac{4}{9}a^2$$

$$=\frac{16}{27}a^2$$

مسأله ۸ - اگر $\log 2=0/30103$ ، درسمت‌چپ عدد $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ چندصفر با احتساب‌صفر ممیز وجود دارد.

$$\Longrightarrow \operatorname{colog} 2=\bar{1}/69897$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=(2^{-2})^{10}=2^{-20}$$

$$\log 2^{-20}=-20\log 2=20(-\log 2)$$
$$=20(\bar{1}/69897)=20(-1+0/69897)$$
$$=-20+13/9794=\bar{7}/9794$$

پس‌در سمت‌چپ $(4)^{-10}$ ، با احتساب‌صفر ممیز هفت‌صفر وجود دارد.

مسأله ۹ - معادله‌زیر را حل کنید.

$$25^{\log x}=5+4(x^{\log 5})$$

$5^{2\log x}=5+4(5^{\log x})$ فرض می‌کنیم $5^{\log x}=y$

$$y^2=5+4y \Longrightarrow y^2-4y-5=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}y=-1 & \text{غ ق ق}\\ y=+5\end{cases}$$

$$5^{\log x}=5 \Longrightarrow \log x=1 \Longrightarrow \boxed{x=10}$$

مسأله ۱۰ - اگر

$$(3)^{\frac{1+2+3+4+\dots+n}{n}}=(4)^{\log_4 9}$$

مقدار n را بیابید.

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Longrightarrow (3)^{\frac{n(n+1)}{2n}}=(4)^{\log_4 81} \Longrightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=81$$

$$\Longrightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=3^4 \Longrightarrow \frac{n+1}{2}=4 \Longrightarrow \boxed{n=7}$$

مسأله ۱۱ - اگر $\log 2=0/30103$ ، عدد $(625)^{10}$ چندرقمی است

$$(625)^{10}=(5^4)^{10}=5^{40}=\left(\frac{10}{2}\right)^{40}$$

$$\log\left(\frac{10}{2}\right)^{40}=40\left(\log\frac{10}{2}\right)=40(1-\log 2)$$
$$=40(1+\operatorname{colog} 2)=40(1+\bar{1}/69897)$$
$$=40(0/69897)=27/9588$$

چون مفسر (۲۷) است پس‌عدد $(625)^{10}$ عددی‌است بیست وهشت رقمی.

مسأله ۱۲- حدود تغییرات x را در تابع:

$$y=\log_a(\log_a(\log_a x))$$

را با شرط $0<a<1$ بیابید.

$$\log_a(\log_a x)>0 \Rightarrow 0<\log_a x<1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\log_a x<1 \Rightarrow x>a \\ \log_a x>0 \Rightarrow 0<x<1\end{cases} \Rightarrow 1<x<a$$

مسأله ۱۳- معادله $x+(24)^{\log x}=(26)^{\log x}$ را حل کنید.

$$x=10^{\log x}$$

طرفین معادله‌را بر $(26)^{\log x}$ تقسیم می‌کنیم.

$$(10)^{\log x}+(24)^{\log x}=(26)^{\log x}$$

$$\left(\frac{10}{26}\right)^{\log x}+\left(\frac{24}{26}\right)^{\log x}=1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log x}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log x}=1$$

اعداد $\frac{5}{13}$ و $\frac{12}{13}$ را درنظر می‌گیریم. چون

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{2}+\left(\frac{12}{13}\right)^{2}=1$$

پس $\log x=2$ درنتیجه $\boxed{x=100}$

مسأله ۱۴- بیشترین مقدار $(\log_3 2)^{\sin\alpha}$ چیست؟

$$0<\log_3 2<1\ ,\ -1\leqslant \sin\alpha\leqslant +1 \Rightarrow$$

$$\mathrm{Max}(\log_3 2)^{\sin\alpha}=(\log_3 2)^{-1}=\frac{1}{\log_3 2}=\log_2 3$$

ادب ریاضی

گوشه‌ای از تاریخ ریاضیدانها

(از: کاشانی نامه، ابوالقاسم قربانی)

از نامه غیاث الدین جمشید کاشانی به پدرش

غرض که چون بنده همچنین جایی درآمد و هر کس چشم و گوش برگماشتند که معلوم کنند که این کس در چه نصاب است، هر چند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی در حلقهٔ درس حاضر می‌شود و چون حاضر شد درس ریاضیات مقدم می‌دارند و این بنده هم حاضر شد. یکی از امتحان طلبه این است که هر کس به حلقهٔ درسی درآید غافل است از آن که چه مسأله در میان خواهد بود و اصحاب مدرسه آن را به تجدید مطالعه بلیغ کرده‌اند، چون آغاز بحث می‌شد هر بار به عنایة اللّٰه تعالی و یمن همت آن خداوندی این بنده دخل کاملی کرده چنانکه چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده گفته و اعتراضات وارده بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیف بیرون آورده که همه حیران مانده‌اند. پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و در میان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است. مثلا خواسته‌اند که اسطرلابی که یک گز قطر آن باشد بسازند... همهٔ مستخرجان فرمودند که به اتفاق عمل کنند... و درمانده بودند. ریاضی دانان را اشارت فرموده بودند که به قوت قوانین هندسی تحقیق و تصحیح آن بکنند. هیچ کس نتوانسته است که تحقیق آن بکند... هر چند عمل می‌کرده‌اند و فکر در آن می‌نموده‌اند راست نمی‌آمده. چون این بنده رسید در روز این مسأله در حضرت سلطنت پناهی پیش آورده‌اند و این بنده در فور و هم در مجلس تصحیح یکی از آن کرده و منشأ غلط ایشان بیان کرده و تطبیق کلام زیج بر این بیان کرد.

تاریخچه مختصر پیدایش هندسه

● محمّد هاشم رستمی

زمان دقیق پیدایش هندسه به درستی مشخص نیست. امّا مسلم است که پس از گذشت قرنها از عمر آدمی، درک مفهومهای هندسی میسر گردیده است.

ژئومتری (هندسه) از دو کلمه یونانی ژئو به معنی زمین و متراین به معنی اندازه‌گیری آمده‌است. زیرا گفته می‌شود که هندسه در اصل علم اندازه‌گیری زمین بوده است.

هرودت مورخ یونانی (سده پنجم قبل از میلاد)، پدیدآورندگان هندسه را مساحان مصری می‌داند که مجبور بوده‌اند هر سال پس از طغیان رودخانه نیل محدودهٔ زمینها را مجدداً مشخص سازند. اما تمدنهای کهن دیگر مانند بابلی، هندی و چینی هم اطلاعات هندسی زیادی داشته‌اند. از آن جمله بابلیان قضیهٔ فیثاغورث راکه در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازهٔ وتر مساوی مجموع مربعین اندازه‌های دوضلع دیگر است، خیلی پیش از آن که فیثاغورث به دنیا بیاید می‌دانسته‌اند.

هندسه زمان باستان موضوعی تجربی بود که نتایج تقریبی به‌دست آمدهٔ آن برای مقاصد عملی آن زمان کافی بودند مثلاً بابلیان سالهای ۲۰۰۰ تا ۱۶۰۰ ق. م. عدد π را مساوی ۳ اختیار می‌کردند یعنی محیط دایره را سه برابر قطرش در نظر می‌گرفتند و در نوشته‌های چینی نیز همین مقدار پیدا شده است و این همان مقداری است که ویترووبوس [۱] معمار رومی نیز به آن داده بود. مصریان سال ۱۸۰۰ قبل از میلاد طبق نوشته‌های پاپیروس رایند که از یکی کهنترین اسناد ریاضیات مصر باستان است π را مساوی $۳/۱۶۰۴ \simeq (\frac{۱۶}{۹})^۲$ می‌گرفته‌اند که این مقدار با توجه به آن زمان، از دقت جالبی برخوردار است.

خلاصه، هندسهٔ پیشینیان مجموعه‌ای بود از قواعدی که از طریق آزمایش، بررسی شباهتها و حدسها به‌دست آمده بود امّا این قواعد هیچ‌گونه ارتباطی به یکدیگر نداشتند و هیچ‌کس حتی حدس هم نمی‌توانست بزند که مجموعهٔ این قواعد را از عّده کمی قاعده (اصول) بتوان نتیجه گرفت. بنابراین هندسه در مصر و بابل به معنی واقعی کلمه علم نبود بلکه انبانی بود پر از قواعد محاسبه. تا آنکه حدود هفت سده ق. م. درهای علم برروی بابلیان و مصریان مسدود گردید و مشعل دانش به‌دست یونانیان سپرده شد. یونانیان و بیش از همه تالس (۶۲۵ - ۵۴۵ق. م.) اصرار داشتند که احکام هندسی نه از راه آزمایش و خطا بلکه از راه استدلال قیاسی باید ثابت گردند. (تالس خورشید گرفتگی سال ۵۸۵ ق. م. رانیز پیش‌بینی کرد و بدین سبب نیز مشهور است.)

تالس با اطلاع از محاسبات ریاضیات مصری و بابلی ضمن تلاش برای مشخص ساختن نتایج درست از نادرست نخستین هندسهٔ منطقی را بنا نهاد.

نظم بخشیدن به هندسه و تابع اصول سازی آن که با تالس شروع گردید توسط فیثاغورث و شاگردانش به مدت دو قرن ادامه یافت. فیثاغورث (۵۶۹ - ۵۰۰ ق. م.) خود مدتها در مصر بسر برد و در خدمت کاهنان مصری به شاگردی پرداخت و اطلاعات و معتقدات بسیاری کسب کرد و از آنجا روانهٔ بابل شد و دوران شاگردی را از نو آغاز نمود. آنگاه به وطن بازگشت و در جزیرهٔ کروتون [۲] در ایتالیای جنوبی مکتب اخوتی دایر نمود تا بتواند مسائل عالی ریاضیات و نظریه‌های فیزیکی و اخلاقی را تدریس کند و پیشرفت دهد. چنانکه مشهور است بین اروپاییان فیثاغورث نخستین کسی بود که در این نکته اصرار ورزید که در هندسه باید ابتدا اصول (متعارفی و موضوع) را معین کرد و آنگاه به اتکای آنها روش استنتاج متوالی را پیش گرفت و با این روشن استدلال پیشرفت نمود (مثل زمان حاضر). بدین ترتیب اروپاییان فیثاغورث رانخستین کسی می‌دانند که استدلال را وارد ریاضیات کرد.

سقراط ریاضی‌دان (با طبیبی به همین نام اشتباه نشود) که از

پیروان مکتب فیثاغورث بود در حدود سال ۴۰۰ ق. م. پی ریزی منظم هندسه مسطحه را در کتابی به نام اصول به انجام رسانید که طبق بررسیهای انجام شده مطالب این کتاب قسمت اعظم مطالب کتابهای اول تا چهارم اقلیدس را که یک قرن بعد منتشر گردید در برداشته است.

بدین ترتیب استخراج منظم قضایا از راه اثبات از مشخصات ریاضیات یونانی و کاملاً تازه بوده‌است گو اینکه طبق بررسیهایی که اخیراً به عمل آمده مشخص گردیده است که بابلیان نخستین کسانی بوده‌اند که لزوم استدلال در ریاضیات را حس نموده‌اند و این موضوع خود یکی از بزرگترین ترقیاتی است که در ریاضیات انجام گرفته است. امّا یونانیان دربارهٔ پیشگامان خود سخاوت بخرج نداده و در این مورد نامی از آنان نبرده‌اند.

«هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود» جمله‌ای است نوشته شده بر سر در آکادمی علوم و فلسفه افلاطون بزرگترین مرکز آموزش ریاضی آن زمان که در حدود سال ۳۸۷ ق. م. بنا نهاده شد، که این جمله خود اهمیت ریاضیات و به خصوص هندسه را نزد یونانیان باستان بخوبی نشان می‌دهد.

افلاطون در کتاب جمهوری خود می‌نویسد «مطالعه ریاضیات دستگاهی ذهنی را توسعه می‌دهد و به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است زیرا که درک حقیقت فقط از راه ریاضی میّسر است.» با وجودی که افلاطون شخصاً ریاضیدان نبود امّا او را ایجاد ـ کنندهٔ ریاضی‌دانان نامیده‌اند زیرا وی بسیاری از ریاضیدانانی را که هزاران بار از نظر ریاضی بر او تقدّم فضل داشتند وادار به ابداعات ریاضی واقعی کرد. تأثیر افلاطون بر ریاضی‌دانان مشکلاتی هم برای ریاضیات و به‌خصوص هندسه به‌وجودآورد زیرا بنابه نوشتهٔ دکتر اریک‌تمپل‌بل نویسنده کتاب ریاضی‌دانان نامی که خود از ریاضی‌دانان بزرگ است، حکومت مستبدانه افلاطون برهندسه بیش‌از بیست قرن طول کشید و تنها ۱۹۸۵ سال بعداز مرگ افلاطون بااختراع هندسهٔ تحلیلی توسط دکارت، هندسه توانست از زیر این بارگران شانه خالی کند. البته دانشمندانی چون ارشمیدس (۲۱۲ تا ۲۸۷ ق. م.) هم بودند که دنبال افکار استبدادی افلاطون نرفتند (ارشمیدس اندکی بعد از آن که اقلیدس در دانشگاه اسکندریه به تدریس پرداخت برای تحصیل به آنجا رفت و پس از تحصیل به سراکیرز بازگشت) و بدین علت شاهکارهای زیادی در ریاضی به وجودآوردند. ارشمیدس دانشمندی به معنی واقعی کلمه متجدد بود به طوری که ۲۰۰۰ سال قبل از نیوتن و لایب‌نیتز موفق به اختراع حساب انتگرال شد و حتی می‌توان او را از پیشقدمان فکر ایجاد حساب دیفرانسیل دانست. اگر ریاضیدانان و دانشمندان یونانی بجای تبعیت از اقلیدس و افلاطون و ارسطو، از روش ارشمیدس پیروی می‌کردند به آسانی می‌توانستند دوران جدید ریاضیات را که همراه با دکارت (۱۶۵۰ ـ ۱۵۹۶ م) و نیوتن در قرن هفدهم شروع می‌شود و عصر فیزیک جدید را که گالیله ۱۶۴۲ ـ ۱۵۶۴ م) واضع آن است لااقل دو هزار سال جلو بیندازند.

اقلیدس (۳۵۰ ـ ۲۷۶ ق .م.) که شاگرد مکتب افلاطون بود، روش قاطع هندسه یونانی و نظریه اعداد را در کتاب اصول[۳] که در سیزده جلد تدوین شده‌بود منتشر ساخت که در قرن پانزدهم وقتی ماشین چاپ اختراع گردید، جزو اولین کتابهایی بود که به چاپ رسید. شاهکاراقلیدس مدون ساختن و تنظیم کردن هندسه بود. پیش از اقلیدس ریاضیدانان برجسته‌ای چون تالس و فیثاغورث دربارهٔ هندسه کارهای زیادی انجام داده‌بودند امّا آن را مدّون نساخته‌بودند. اقلیدس کارهای پیشینیان راگردهم آورد و خود به آن مطالبی افزود و همه را برمبنای اصول (اصول متعارفی و اصول موضوع) چنان مرتب و منظم کرد که قرنها بهترین نمونهٔ کار علمی بود. وی تجارب فیثاغورسیان را در کتابهای اول تا چهارم و هفتم و نهم، نتایج کارهای آرکیتاس (۴۲۸ ــ ۳۴۷ ق. م.) را در کتاب هشتم، کارهای اثودوکس (۴۰۸ ــ ۳۵۵ ق.م.) را در کتابهای پنجم و ششم و دوازدهم و کارهای تئه‌تتوس را در کتابهای دهم و سیزدهم گردآورده‌است.

آرکیتاس، اهل تارانت، ریاضیدان، منجم، فیلسوف و... بود و تمام علوم و فنون زمان خود را می‌دانست. وی دست به اختراعات زیادی زده‌بود. آرکیتاس در سال ۴۳۸ ق.م. طی حادثه‌ای در دریا غرق شد. اثودوکس[۴] ـ اهل کیند، طبیب، منجم، قانونگذار، ریاضیدان برجسته‌ای بود که افکار علمی او چند قرن جلوتر از معاصرانش بود. وی مانند گالیله و نیوتن هرگونه بحث و اظهار نظر را در مورد جهان خارجی که به‌وسیله مشاهده و تجربه قابل تحقیق نبود بیهوده می‌دانست و از آنها اجتناب می‌کرد. اثودوکس دوست صمیمی افلاطون بود.

کتاب اصول اقلیدس آنچنان به طور کامل جایگزین تلاشهای پیشینیان در شناسانیدن هندسه گردید که کمتر نشانه‌ای از آن کوششها

به‌جای ماند. روش اصل موضوعی که اقلیدس به‌کار برد الگویی است برای آنچه که ما امروز ریاضیات محض می‌نامیم و این روش او متجاوز از ۲۰۰۰ سال برهندسه مسلط بود. محض به معنی اندیشه محض است، هیچ تجربه عینی برای تحقیق درستی احکام لازم نیست تنها باید مراقب استدلال در اثبات قضایا بود.

کاربزرگ اقلیدس آن بود که با انتخاب چند اصل ساده که بدون هیچ توجیهی پذیرفتنی بودند توانست ۴۶۵ گزاره را که بسیاری از این گزاره‌ها پیچیده هم بودند و به طور شهودی مسلم و بدیهی نبودند نتیجه بگیرد. مفروضاتی را که اقلیدس به‌عنوان اصول هندسه خویش پذیرفت مدتها بود که صورت حقایق مسلم و غیرقابل انکاری را پیداکرده بودند که آدمی توانسته‌بود به اتکاء هوش فوق‌العاده خود آنها را به‌عنوان جوهر واقعی تمام اشیای مادی کشف کند.

یک دلیل برزیبایی کار اقلیدس این است که توانست این همه را از آن اندک نتیجه بگیرد.

یکی دیگر از یونانیانی که آثارشان در ریاضیات بعد از قرن هفدهم مؤثر واقع شد آپولونیوس (۲۶۰ - ۲۰۰ ق.م.) است. آپولونیوس هندسه را به مفهومی که اقلیدس در نظر می‌گرفت تا جایی پیش برد که قابل قیاس با آنچه اقلیدس باقی گذارده بود نیست. آپولونیوس بین هندسه‌دانان نوع خویش در اطلاع برهندسه خالص نظیری نیافت مگر در قرن نوزدهم که اشتاینر (۱۸۶۳ - ۱۷۸۶) را می‌توان با وی مقایسه کرد. (آثار اشتاینر باوجود همه زیبایی و لطفی که دارند به علت تعصب وی که می‌خواست هندسه را به کلی از آنالیز جداسازد فراموش شده‌اند.)

پس از اقلیدس حدود ۲۰۰۰ سال در زمینهٔ هندسهٔ اقلیدسی کاری چندان مهم وجدی انجام نگرفت. یکی از کارهای انجام شده شرحی است که پروکلوس (۴۸۵ - ۴۱۰ م) برکتاب اصول اقلیدس نوشته‌است که قسمت اعظم اطلاعات کنونی ما در مورد هندسه از این کتاب است. تا آنکه باکشف هندسهٔ نااقلیدسی در اوایل قرن نوزدهم توسط گائوس (۱۸۵۵ ــ ۱۷۷۷) و یانوش بویوئی (۱۸۶۰ - ۱۸۰۲) و لوباچفسکی (۱۸۵۶ - ۱۷۹۳) بیست سال آخر قرن نوزدهم بسیاری از ریاضیدانان احساس نمودند که لازم است استخوان بندی منطقی استدلالهای هندسه اقلیدسی را روشن و واضح سازند و آنها را از قید و بند توجه به الهام و اشراق و بدیهیات فارغ سازند امّا پیش از هیلبرت هیچکس موفق به اجرای این برنامه آن هم با این همه دقت و روشنی نشده بود. داوید هیلبرت (۱۹۴۳ - ۱۸۶۲) در کتابش به‌نام مبانی هندسه که در سال ۱۸۹۹ منتشر شد تعاریف هندسه اقلیدسی را روشن ساخت و شکافهای موجود دربرخی از استدلالهای اقلیدس را پرکرد و اصول جدیدی به آن افزود و هندسهٔ اقلیدسی زمان حاضر را تدوین نمود. البته در برخی موارد تغییراتی در این هندسه نیز داده‌شده و اصلاحاتی صورت گرفته است.

علاوه برهیلبرت لازم است از مورتیس پاش، م. پیری، هـ - ورونز، اُ. وبلن، ربینسون، ا. و. هنتیگتن و فوردر که تلاش نموده‌اند تا بنیاد محکمی برای هندسه اقلیدس بریزند نیز نام ببریم.

منابع

۱ـ ریاضیدانان نامی. اریک تمپل بل. ترجمه حسن صفاری

۲ـ هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین - جی‌گرینبرگ. ترجمه م ـ هـ ـ شفیعیها

۳ـ کتب هندسهٔ دبیرستان ـ وزارت آموزش و پرورش

۱ـ Vitruvius ۲ـ Crotone ۳ـ Elements ۴ـ Eudoxe

ادب ریاضی

از نامهٔ ژاکوبی به لژاندر

با مسرت گزارش آقای پواسون را راجع به اثرم خواندم و تصور می‌کنم از آن بسیار راضیم... اما آقای پواسون نمی‌باید عبارت نسبتاً خام آقای فوریه را، که آبل و مرا برای نپرداختن به کار جریان حرارت مورد سرزنش قرار داده، تکرار می‌کرد. راست است که آقای فوریه چنین اندیشیده که هدف اصلی ریاضیات منفعت عام و فایده‌اش توضیح پدیده‌های طبیعی است. اما فیلسوفی چون او باید دانسته باشد که تنها هدف علم تجلیل روح بشری است. و از این لحاظ موضوعی در نظریهٔ اعداد، به ارزش مسأله‌ای در مورد دستگاه جهان است.

(Collected Works of Jaccobi vol. 1.p. 454)

منطق قدیم و ریاضیات

● غلامرضا یاسی‌پور

همچنان که موضوع جمال شناسی را «زیبایی» و موضوع اخلاق را «خیر» معین می‌کند موضوع منطق را «صدق» مشخص می‌نماید. «فرگه»

شیخ الرئیس ابوعلی سینا در کتاب اشارات و تنبیهات خود در فصل مربوط به قول شارح و معرف در نهج اول در غرض از منطق چیزی شبیه به این مضمون می‌گوید که :

آنچه از منطق اراده می‌شود این است که منطق آلت قانونی‌ای است که مراعات آن آدمی را از گمراهی در فکر ممانعت می‌کند.[1]

و قطب الدین شیرازی در کتاب درّة التاج چنین می‌گوید که :

علم منطق شناختن معنیهایی است که از آن معانی رسیدن به انواع علوم مکتسب ممکن باشد.

و در جای دیگر چنین که :

اما علم منطق که حکیم ارسطاطالیس[2] آن را مدون کرده است و از قوت به فعل آورده، مقصور است بردانستن کیفیت دانستن چیزها، و طریق اکتساب مجهولات.

شیخ اشراق در حکمة الاشراق خود در فایدهٔ منطق چنین مقرر می‌کند که :

من خود به آنچه یافته‌ام باور دارم واز لحاظ خود نیازی به برهان و استدلال ندارم و اگر استدلال و برهانی اقامه کرده‌ام، درمقام تعلیم کرده‌ام.

در فرهنگ «اخوان الصفا» منطق با ریاضیات پیوسته است، چه همان گونه که ریاضیات آدمی را از محسوس به معقول رهنمون است، منطق نیز نقش واسطه را میان طبیعیات و مابعدالطبیعه ایفا می‌کند.

در تاریخ منطق برآنند که هندیان و یونانیان نخستین کسانی بوده‌اند که نظریه‌های منطقی را خلق کرده‌اند. ارسطو در اواخر اثری که امروزه ابطالهای سوفسطایی[3] نامیده می‌شود ظاهراً ادعا می‌کند که موضوع منطق را او به وجود آورده است. اما به نظر نمی‌رسد که این مطلب یک باره درست باشد، چه فی‌المثل افلاطون در کتاب جمهور[4] چنین می‌گوید که :

یک چیز در یک زمان، نسبت به جزء خودش، و در رابطه با همان چیز، نمی‌تواند به دو طریق متقابل عمل کند یا برآن عمل شود، یا دو چیز متقابل باشد.

و ارسطو ادعا می‌کند که محقق ترین تمام اصول عبارت از این است که :

یک صفت ثابت نمی‌تواند در یک زمان و از لحاظ یکسان به یک شیء هم متعلق باشد هم نباشد.

اصل اخیر، شکل ارسطویی قانون عدم تناقض[5] است و آدمی را وسوسه می‌کند که بگوید که ارسطو نه تنها این قانون بلکه بسیاری از نظریاتش در منطق را از پیشینیانش دریافت کرده است. با وجود این، شخص باید در مقابل این وسوسه ایستادگی کند زیرا افلاطون این نکته

را به طور گذرا بیان کرده و مدرکی در دست نیست که او، یا شخص دیگری قبل از ارسطو، کوشش در تنظیم قواعد استنتاج صحیح کرده باشد. بنابراین می‌توانیم ادعای ارسطو را بپذیریم و این سؤال را مطرح کنیم که چه چیزی او را به «خلق» منطق رهنمون شده است.

ارسطو در جملهٔ آغازگر و معروف کتاب مابعدالطبیعهٔ[۶] خود چنین می‌گوید که :

تمام انسانها بالطبیعه مایل به دانستن‌اند.

و در رابطه با همین دانستن بود که دو فصل مهم ریاضیات وسفسطه در کتاب دانش بشری نوشته شد، و نیاز به تدوین منطق هم در رابطه با این دو فصل احساس شد.

یونانیان قدیم به هندسه اهمیت بسیار می‌دادند و مشهور است که بر سر در آکادمی افلاطون به زبان یونانی نوشته شده بود که : «هرکس هندسه نمی‌داند داخل نشود.» نیز همو می‌گوید :

خداوند همواره به کار هندسه مشغول است.

اما ادعای ارسطو در مورد به وجود آورندهٔ منطق، بر این مبنا قرار دارد که او اولین کسی بوده که قوانین موجود منطق را به طور دقیق تنظیم کرده است. در حقیقت ارسطو نظریهٔ قیاس[۷] را، که امروزه می‌دانیم که تنها قسمت کوچکی از منطق است، تنظیم کرده، گرچه بسیاری از فلاسفهٔ شیفتهٔ آن چنین پنداشته‌اند که این نظریه قسمت اعظم (یا حتی تمام) منطق است.

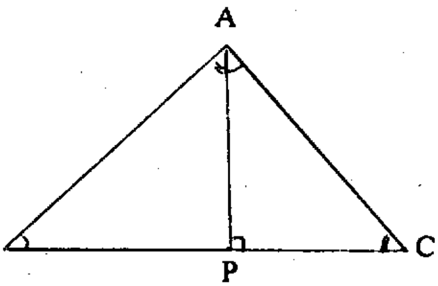
همان طور که قبلاً نیز اشاره شد یکی از انگیزه‌های مهم بررسی منطق احتمالاً از میل غلبه به پارادوکسها[۸] و نمودن فساد مغالطه یا سفسطه‌ها به وجود آمده است، چه در آن زمانها تعداد زیادی پارادوکس و مغالطه کشف شده بود که بعضی از آنها مشکلاتی بودند که از استعمال (یا بد به کار بردن) زبان به وجود آمده بودند و بعضی از آنها با مشکلاتی بیشتر ریاضی سروکار داشتند. ارسطو مانند افلاطون سفسطه را دانشی توصیف می‌کند که نه واقعی بلکه ظاهری است، و همچنان که طلا می‌تواند حقیقی یا تقلبی باشد، براهین نیز می‌توانند حقیقی یا کاذب باشند. ابوعلی در رسالهٔ منطق دانشنامهٔ علایی خود در بخشی با عنوان : «وصیتها که از مغالطات ایمنی دهند» چنین می‌گوید که :

« وصیت می‌کنیم به اصلی چند، تا از غلط اندر قیاس ایمنی افتد، و حاجت نیاید به درازا کشیدن سخن، و بیاد کردن همهٔ اسباب مغالطه»

مقالهٔ سوم کتاب حکمة‌الاشراق سهروردی نیز در باب مغالطات است.

اما پارادوکس به یک معنی راست کج نما و مدح شبیه به ذم یا نادرستی که هنوز نادرستی‌اش به درستی معلوم نشده، است. در این مورد به ذکر دومثال مشهور رو می‌آوریم.

مثال ۱ : هر دانش‌آموزی در ایام تحصیلش با قضیه‌ای که نام فیثاغورس را دارد، یعنی این قضیه که مجموع مربعات اضلاع کوچکتر هر مثلث قائم الزاویه برابر مربع وتر آن است، برخورد می‌کند. گرچه ممکن است که اولین کسی که این قضیه را بیان کرده فیثاغورس، ۵۶۶ ـ ۴۹۷ ق. م ، نبوده باشد، اما تصور می‌رود که او اولین کسی بوده که با استفاده از مثلثهای متشابه آن را ثابت کرده است.



درشکل فوق ABC مثلثی قائم الزاویه در A، و AP عمودی از A بر BC است. از زوایای مساوی نشان داده شده در شکل،نتیجه می‌شود که مثلثهای ABC ، PBA و PAC متشابه‌اند. دراین صورت

$$\frac{AC}{CP} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CP$$

$$\frac{AB}{BP} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BP$$

اکنون با جمع این دو رابطه داریم

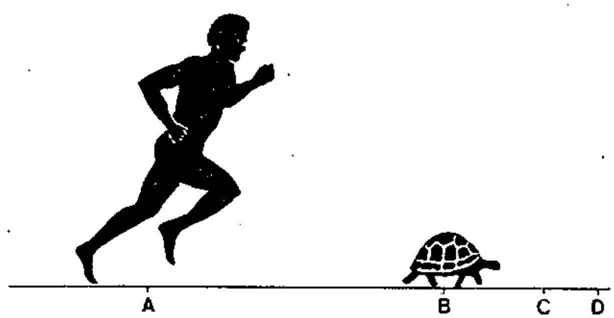
$$AB^2 + AC^2 = BC\,(BP + CP) = BC^2$$

در وهلهٔ اول جمیع این اعمال بی‌عیب به نظر می‌رسند، اما اشکال از این جا ناشی می‌شود که قضایای مربوط به مثلثهای متشابه به نوبهٔ خود با تقسیم اضلاع به اجزاء، به طوری که m جزء از یک ضلع برابر n

جزء از ضلع دیگر باشد، ثابت شده بودند، و در این مورد فرض مأخذ این است که هر طول برحسب نسبت دو عدد صحیح قابل بیان است.

این کشف که قطر یک مربع واحد را نمی‌توان بدین سان بیان کرد پارادوکسی بود که مکتب فیثاغورسی را در هم ریخت، زیرا این پارادوکس نه تنها اثباتهای قضایای هندسی پذیرفته شده‌شان را بی‌بنیان می‌کرد بلکه این عقیده‌شان به عدد به عنوان اصل متحدکنندهٔ حساب و هندسه رانیز باطل می‌نمود. به همین مناسبت مبهوت و حیران از این پارادوکس و ترسان از این که مبادا بر ملا شود سوگند خوردند که هرگز این راز را آشکار نکنند.

مثال ۲ : پارادوکس دیگری که به وجود آمد در مورد آشیل[۹]، دوندهٔ سریع، و لاک پشت بود. استدلال در این مورد چیزی شبیه زیر است: اگر آشیل از نقطهٔ A، که به فاصلهٔ معینی در عقب لاک پشت، که در نقطهٔ B قرار دارد، شروع به حرکت کند، و هر دو در یک مسیر و یک زمان و با ماکزیمم سرعتهای مربوط به خودشان حرکت کنند، زمانی که آشیل به B می‌رسد لاک پشت به C رسیده است. سپس، زمانی که آشیل به C برسد، لاک پشت به D رسیده است. در هر حالت فاصلهٔ لاک پشت از آشیل کمتر می‌شود، اما استدلال می‌تواند برای همیشه روی فواصل کوچکتر و کوچکتر ادامه یابد. بنابراین آشیل هرگز به لاک پشت نمی‌رسد، که نتیجه‌ای واضحاً دروغ است.



پارادوکسهای دیگری از مفهوم یونانی بی‌نهایت به وجود آمد، و این مطلب واضح شد که مشکلات ناشی از چنین پارادوکسهایی نیاز به توضیح طبیعت استدلال و بررسی مجدد مفروضاتی را که استدلالات موجود بر پایهٔ آنها بنا شده بودند، ایجاب می‌کند. نظریهٔ قیاس ارسطویی مبنایی برای استدلال به دست می‌داد که به مدت بیست قرن تنها با تغییرات نسبتاً جزیی[۱۰] باقی ماند، گرچه این نظریه از حل بسیاری از پارادوکسهایی که در آن زمان شناخته شده بودند ناتوان بود.

اساس این نظریه براین فرض است که تمام استدلالات صحیح را می‌توان در گزاره‌هایی از یک صورت بخصوص، که آن را قضیهٔ موضوع ـ محمولی[۱۱] می‌نامیم، تحلیل کرد. مثالهای این قضیه عبارتند از :

تمام انسانها میرا هستند.
هیچ ماهی‌ای پرنده نیست.
بعضی یونانیها شریرند.
بعضی زنها مادر نیستند.

در هر حالت، و در جملهٔ مربوطه، موضوعی[۱۲] وجود دارد که برای تعیین این که تمام اعضای یک طبقه یا صرفاً بعضی از اعضای یک طبقه، توسط فعلی به محمولی[۱۳] مربوط شده‌اند، مسوّر شده است. اگر موضوع و محمول را به ترتیب با S و P نمایش دهیم، امکانات زیر را خواهیم داشت :

تمام S ها P اند.
هیچ S ی P نیست.
بعضی S ها P اند.
بعضی S ها P نیستند.

این امکانات با چهار مثال قبل‌مان متناظرانـد، و به ترتیب : موجبهٔ کلیه[۱۴]، سالبهٔ کلیه[۱۵]، موجبهٔ جزئیه[۱۶]، سالبهٔ جزئیه[۱۷]، و به طور کلی قضایای محصوره یا مسوّره نامیده می‌شوند.

ابوعلی در دانشنامه در مورد قضایای محصوره چنین می‌گوید که :

یا پیدا کرده بود چندیِ حکم، و این را محصور خوانند، و لفظ پیداگرِ چندی را سور[۱۸] خوانند. و محصور چهار گونه است :

یکی آن است که حکم بر همه کرده بود به اثبات، چنان که گویی: هر چه مردم بُوَد حیوان بُوَد، یاگویی : هر مردمی حیوان است، و این راکلّیِ موجب خوانند، و سور وی لفظ هرچه و هر بود.

و دیگر آن است که حکم بر همه کرده باشد به سلب و نفی؛ چنان که گویی : هیچ مردم جاودانه نیست، و این راکلّی سالب خوانند و سور وی لفظ هیچ بود.

و سوم آن است که حکم بر برخی کرده باشد به اثبات و هستی؛ چنان که گویی : برخی مردم دبیر است، و این را جزویِ موجب

خوانند و سور وی لفظ برخی بود.

و چهارم آن است که حکم بر برخی کرده باشد به نفی و نیستی؛ چنان که گویی : نیست برخی مردم دبیر، و این را جزوی سالب خوانند، و سور وی لفظ **نیست برخی** بود.

برای ارسطو هر **استدلال**[۱۹] مجموعه‌ای از چنین قضایایی، که به طریق معینی با هم مربوط شده‌اند، است. از این گذشته، ارسطو براین فرض بود که یک استدلال درست را می‌توان به استدلالات اساسی متوالی‌ای که هر یک تنها از سه قضیه ترکیب شده، و به **قیاسات**[۲۰] موسوم‌اند، تجزیه کرد. در هر قیاس، دوقضیه، **مقدمات**[۲۱]، و سومی **نتیجه**[۲۲] را تشکیل می‌دهند.

دراین مورد در دانشنامه چنین آمده که :

قیاس بر دوگونه است یکی را **اقترانی** خوانند و یکی را **استثنایی**.[۲۳]

مثالی از قیاس اقترانی یا به طور ساده قیاس می‌آوریم:

اگر تمام انسانها میراباشند.
و تمام یونانیها انسان باشند.
در این صورت تمام یونانیها میراهستند.

با به‌کار بردن S و P برای موضوع و محمول نتیجه، یعنی، «تمام یونانیها میرا هستند»، توجه می‌کنیم که مقدمهٔ اول شامل P و مقدمهٔ دوم شامل S است. P و S به ترتیب به **حد کبری یا اکبر**[۲۴] و **حد صغری یا اصغر**[۲۵]، و بنابراین، مقدمهٔ شامل P به **مقدمهٔ کبری**[۲۶]، یا به طور خلاصه کبری، و مقدمهٔ شامل S به **مقدمهٔ صغری**[۲۷]، یا به طور خلاصه صغری، معروف‌اند. حد[۲۸] «انسان» که در هریک از مقدمات ظاهر می‌شود اما در نتیجه ظاهر نمی‌شود به **حد وسط یا اوسط**[۲۹] موسوم است، و آن را با M نمایش می‌دهیم. به این ترتیب استدلال مورد بحث به صورت زیر درمی‌آید :

اگر تمام M ها P باشند.
و تمام S ها M باشند.
در این صورت تمام S ها P اند.

کار مهم و اصلی ارسطو تحقیق در تمام صورتهای ممکن منطق بود، تعداد این صورتها بسیار است، گرچه تنها، بعضی از آنها به صورتهای درست منجر می‌شوند. صورت درست را **منتج**[۳۰] و صورت نادرست را **عقیم**[۳۱] می‌گویند.

به‌عنوان مثال، قیاسی که هم اکنون مورد بحث قرار گرفت دارای صورت زیر است :

MP
SM
SP.

ابتدا، S و P می‌توانند در مقدمات مربوط به خودشان یا به عنوان موضوع یا به عنوان محمول ظاهر شوند، در حالی که حد وسط متناظر با جزء دیگر مقدمه است. (به خاطر داشته باشید که S و P به ترتیب موضوع و محمول نتیجه‌اند.) این مطلب چهار ترکیب، که به **چهار شکل قیاس**[۳۲] یا **اشکال اربعه**[۳۳] موسوم‌اند، را به دست می‌دهد :

شکل	I	II	III	IV
مقدمهٔ کبری	MP	PM	MP	PM
مقدمهٔ صغری	SM	SM	MS	MS
نتیجه	SP	SP	SP	SP

در هر یک از این اشکال، قضایا می‌توانند کلیه یا جزئیه، موجبه یا سالبه باشند. به این ترتیب ۲۵۶ $(= 4 \times 4 \times 4 \times 4)$ قیاس ممکن وجود دارد، گرچه بسیاری از آنها استدلالات نادرستی هستند که در آنها نتیجه از مقدمات به‌دست نمی‌آید. در شکل I، مثالی از چنین قیاسات نادرستی عبارت است از :

اگر هیچ M ی P نباشد،
و تمام S ها M باشند،
در این صورت بعضی S ها P اند.

به طور کلی شرایط عمومی انتاج اشکال عبارت از : سالبه نبودن هر دو مقدمه و جزئیه نبودن هر دو مقدمه است و شرایط خاص هر شکل را باید در کتب مفصل منطق پی گرفت.

به علت این که قیاس ارسطویی ارتباط کمی با استدلال ریاضی دارد آن را در مطالب مربوط به ریاضیات پی‌نمی‌گیریم، اما اهمیت دارد که به خاطر داشته باشیم که عمل دسته بندی کردن تمام صورتهای درست قیاس، آن قدر مهم بود که ادعای ارسطو را راجع به این که

مؤسس علم منطق است به حق توجیه کند.

اما پیش از آن که کار ارسطو را ترک کنیم، باید به ذکر مربع تقابل[۳۴] که ارتباطی با اثبات در ریاضیات دارد بپردازیم. با معلوم بودن چهار نوع قضیهٔ:

موجبهٔ کلیه	(تمام S ها P اند)
سالبهٔ کلیه	(هیچ S ی P نیست)
موجبهٔ جزئیه	(بعضی S ها P اند)
سالبهٔ جزئیه	(بعضی S ها P نیستند)

و درنظر گرفتن یک S و P در سراسر عملیات، واضح می‌شود که این قضایا در روابط بخصوصی با یکدیگر قرار می‌گیرند، اما دربارهٔ این روابط چه می‌توان گفت؟

دو قضیه را **متناقضان**[۳۵] می‌گویند اگر چون یکی از آن دو راست باشد دیگری دروغ باشد و برعکس. دراین مورد تفتازانی در **تهذیب‌المنطق** چنین می‌گوید که:

تناقض، اختلاف دو قضیه و چنان است که از صدق یکی از آنها کذب دیگری ذاتاً لازم شود، و برعکس[۳۶].

به‌عنوان مثال، قضایای زیر را در نظر می‌گیریم:

تمام انسانها دروغگویند. (موجبهٔ کلیه)

بعضی انسانها دروغگو نیستند. (سالبهٔ جزئیه)

در این صورت اگر قضیهٔ اول راست باشد، قضیهٔ دوم باید دروغ باشد و برعکس. نیز اگر قضیهٔ اول دروغ باشد، قضیهٔ دوم باید راست باشد، و برعکس. به این ترتیب این قضیه‌ها متناقضند.

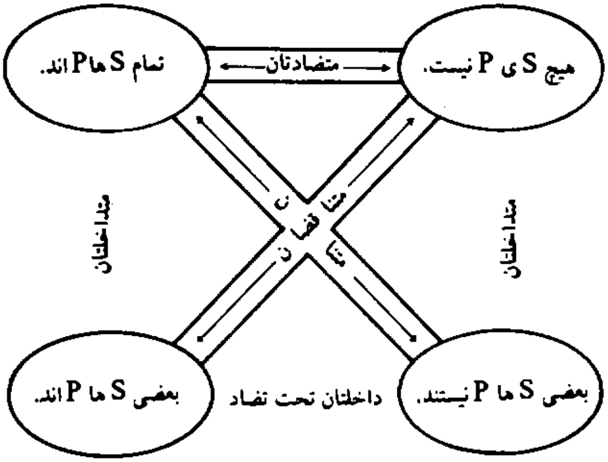
دو قضیه را **متضادتان**[۳۷] می‌گویند اگر هر دو نتوانند راست باشند، اما ممکن باشد که هر دو دروغ باشند. به این ترتیب قضیهٔ متضاد:

تمام انسانها دروغگویند (موجبهٔ کلیه)

قضیهٔ:

هیچ انسانی دروغگو نیست (سالبهٔ کلیه)

است، چه این دو قضیه نمی‌توانند هر دو راست باشند، اما در صورتی که بپذیریم که بعضی، اما نه تمام، انسانها دروغگویند، هر دو دروغند. این روابط را می‌توانیم توسط نموداری نمایش دهیم، گرچه (تا آنجا که می‌دانیم) ارسطو چنین نکرده است.



ضلع بالای «مربع» متضادها و اقطار آن متناقضها را نشان می‌دهند، و اضلاع باقی ماندهٔ آن روابط بین:

تمام S ها P اند. و بعضی S ها P اند.

هیچ S ی P نیست. و بعضی S ها P نیستند.

بعضی S ها P اند. و بعضی S ها P نیستند.

را بیان می‌کنند. ارسطو چنین فرض کرده که در دو حالت اول فوق، قضیهٔ دوم (قضیه‌های پایین نمودار) را می‌توان از قضیهٔ اول، استنتاج کرد، و بعدها، منطقیون نام متداخلتان[۳۸] را به این رابطه دادند. اما، ممکن است به این فرض، باتوجه به‌این مطلب که «مجموعهٔ تمام S ها» ممکن است تهی باشد، اعتراض کرد. نیز ارسطو مطرح کرده که از رابطهٔ بین

بعضی S ها P اند. و بعضی S ها P نیستند.

که بعداً به **داخلتان تحت تضاد**[۳۹] معروف شده، آگاه است.

در اینجا سؤال دیگری مطرح می‌شود و آن این است که: معمولاً چه وقت مجاز است که در یک قضیه S و P را با یکدیگر تعویض

کنیم؟ عکس یا عکس مستوی[۴۰] قضیه‌ای به صورت SP همان قضیه است که درآن P و S باهم عوض شده‌اند، و این تعویض در حالت کلی، تنها در قضیه‌ای که به‌یکی از دو صورت زیر باشد مجاز است:

هیچ S ی P نیست. (سالبهٔ کلیه)
بعضی S ها P اند. (موجبهٔ جزئیه)

در این مورد منطقیون اسلامی و فی‌المثل تفتازانی در تهذیب، عکس مستوی راتعویض طرفین قضیه بابقای صدق وکیف تعریف کرده‌اند[۴۱] به این ترتیب عکس موجبهٔ کلیه را موجبهٔ جزئیه و عکس موجبهٔ جزئیه را موجبهٔ جزئیه و عکس سالبهٔ کلیه را سالبهٔ کلیه دانسته‌اند و برآنند که سالبهٔ جزئیه عکس لازم الصّدق ندارد و در این‌باره این مثال را می‌آورند که عکس: «بعضی انسانها ریاضیدان نیستند»، «بعضی ریاضیدانها انسان نیستند» می‌شود که صد البته ناراست است.

در مورد دو صورت مجاز مذکور در فوق، فی‌المثل، اگر راست باشد که:

هیچ پرنده‌ای پستاندار نیست.

در این صورت این نیز راست است که:

هیچ پستانداری پرنده نیست.

نیز، اگر

بعضی یونانیها دروغگو باشند.

در این صورت

بعضی دروغگوها یونانی‌اند.

و در مورد صور دیگر، مثلاً، در حالت موجبهٔ کلیه، فی‌المثل،

تمام انسانها حیوان هستند.

ممکن نیست که جای انسان و حیوان را با هم عوض کنیم و قضیه‌ای راست به‌دست آوریم، و همین مطلب در مورد حالت سالبهٔ جزئیه برقرار است. البته این حرف بدین‌معنی نیست که هیچ گاه ممکن نیست که در یک موجبهٔ کلیه جای S و P را تعویض کنیم ــ فی‌المثل، تمام S ها S اند را بررسی کنید ــ اما نمی‌توانیم این عمل را خود به خود، آن گونه که در حالت سالبهٔ کلیه یا موجبهٔ جزئیه برقرار است، انجام دهیم.

درمقابل عکس مستوی عکس نقیض[۴۲] را داریم که در مورد آن، بنا به قول تفتازانی، «تبدیل نقیض طرفین قضیه با بقای صدق و کذب[۴۳]» می‌کنیم.

اهمیت دارد که به این موضوع توجه کنیم که نظریهٔ قیاس ارسطویی اساساً منطق طبقات[۴۴] است که در آن شخص باید به جای «متغیرهای» S و P طبقات اشیایی چون تمام انسانها، بعضی یونانیها، دروغگوها، پستاندارها، و غیره، یا گاهی، یک شیء منحصر به فرد (که آن را به‌عنوان طبقه‌ای که یک عضو دارد در نظر می‌گیریم) را قرار دهد. امامعروف است که منطقی باستانی یا منطق رواقیونی[۴۵]، که توسط زنون[۴۶]، ۴۹۵ ـ ۴۳۵ قبل از میلاد، تأسیس شده، وجود داشته که اساساً منطق قضایا[۴۷] بوده و، چنان که، می‌تواند مقدم حقیقی منطق امروزی به شمار رود.

منطق رواقی از منطق مکتب مگاری[۴۸]، که توسط اقلیدس[۴۹] ۴۳۰ ـ ۳۶۰ قبل از میلاد، تأسیس شده بود، به وجود آمد. این اقلیدس شاگردی به نام اوبولیدس[۵۰] داشت که بیشتر معروفیتش به خاطر کشف تعدادی پارادوکس است که قابل توجه‌ترینشان معروف به «پارادوکس کاذب یا دروغگو[۵۱]» که صورت امروزی آن:

این جمله دروغ است.

می‌باشد، است. فرض می‌کنیم که این جمله راست باشد، در این صورت راست است که راست نیست، به همین ترتیب فرض می‌کنیم که این جمله دروغ است، در این صورت نتیجه می‌شود که راست است. (این پارادوکس بسیار معروف شد و حتی در اولین نامه‌ای که پولس مقدس[۵۲] به تیتوس[۵۳] نوشته نیز ذکر شده است.) «پارادوکس کاذب» از این حقیقت که جملهٔ آن به طریق خاصی به خودش برمی‌گردد ناشی شده است. در این مورد تنها در سالهای اخیر بوده که تفاوت بین زبان[۵۴] و ماورای زبان[۵۵] که در آن شخص زبان را مورد بحث قرار می‌دهد، آشکار شده است.

البته در بسیاری از حالات بازگشت به خود[۵۶] پارادوکسی روی نمی‌دهد. فی‌المثل، از جملهٔ فارسی زیر هیچ اشکالی به وجود

نمی‌آید:

این گزاره دقیقاً شامل هفت کلمه است.

اما ممکن است شخص سؤال کند که در صورتی که این جمله به زبان چینی ترجمه شود چه اتفاقی ی‌افتد.

متأسفانه، تنها قسمتهایی از نوشته‌های مگاری ـ رواقی باقی مانده و بنابراین چنین پیش آمده که منطق قدیم به مقدار زیادی به معنی منطق قیاسی ارسطویی باشد.

این اقلیدس را، که نامش بیش از یک بار در نوشته‌های افلاطون ذکر شده، نباید با مؤلف کتاب **مقدمات یا اصول**[۵۷]، یعنی اقلیدس[۵۸]، ریاضیدان یونانی، که مکتب اسکندریه را در حدود ۳۰۰ قبل از میلاد به وجود آورد، اشتباه کرد (کاری که بعضی از فلاسفهٔ قرون وسطی کردند).

مقدمات بالغ بر سیزده جلد می‌شود که از آن نه جلد به هندسهٔ مسطحه و فضایی و چهار جلد به حساب اختصاص دارد. بسیاری از مواد آن، تنظیم سیستماتیک ریاضیاتی است که پیش از او معلوم بوده، و در حقیقت کار بیش از یک فرد است. (حتی مطرح شده که چندین نویسنده عمداً از نام اقلیدس استفاده کرده‌اند، مانند نام بورباکی[۵۹] که در ایام اخیر چنان به کار رفته است.)

دقیقاً مشخص نشده که قصد اقلیدس از نوشتن مقدمات چه بوده‌است، اما نتیجهٔ مهم آن به‌عنوان «بزرگترین کتاب درسی تمام ایام» تعریف شده است، و در حقیقت، از این بازماندهٔ بیش از ۲۰۰۰ سال قبل، در قرن اخیر نیز به طور منظم در مدارس استفاده شده است. در این کتاب، کار با ۲۳ **تعریف**[۶۰]، ۵ **اصل موضوع**[۶۱] و ۵ **اصل متعارفی**[۶۲] آغاز، و از آنها قضایای[۶۳] بسیاری استنتاج می‌شود. این کار تمثیل بسیار ابتدایی‌ای از آنچه امروزه روش آکسیوماتیک[۶۴] نامیده می‌شود و با پیشرفتهای جدید منطق ریاضی قرابت بسیار دارد، می‌باشد. در این جا از آوردن فهرست تمام تعاریف و... خودداری می‌کنیم، اما یکی دومثال، از جمله مثال مربوط به اصل توازی را، که بعداً به آن رجوع خواهیم کرد، به دست می‌دهیم.

مثالهایی از تعاریف:

نقطه چیزی است که جزء ندارد.
خط طولی بدون پهناست.
سطح چیزی است که تنها طول و عرض دارد.

در این‌جا بد نیست که نگاهی به تعاریف ابوریحان بیرونی دانشمند بزرگ اسلامی داشته باشیم. این دانشمند در کتاب **التّفهیم** خود که کتابی مقدماتی است و برای تدریس به ریحانه بنت الحسین الخوارزمی که بنا به قول ابوریحان خواهندهٔ او بوده به «طریق پرسیدن و جواب دادن برروئی که خوب‌تر بُوَد و صورتِ بستنِ آن آسان‌تر[۶۵]» نوشته شده، در مورد سطح و خط و نقطه به ترتیب چنین می‌گوید که:

سطح چیست؟ جسم ناچار بی‌نهایت نبود به همه سوها، و نهایت او سطح است و این نام را از بام خانه گرفتند. و نیز او را بسیط گویند یعنی گستریده ازیراک سطح برجسم گسترده است.

خط چیست؟ اگر بسیط را نهایت باشد آن نهایتِ او ناچار خطی باشد و آن خط طولی باشد بی‌عرض.

نقطه چیست؟ چون خط را نهایت باشد نهایتِ او نقطه بُوَد و نقطه کمتر از خط باشد به یک بعد و خط را جز طول نیست.

اما، مثالهایی از اصول موضوع:

تمام زوایای قائمه برابرند.
اگر خط راستی دو خط مستقیم را قطع کند و زوایای داخلی واقع در یک طرف آن کمتر از دو قائمه باشد، دراین صورت دو خط مستقیم به طور نامحدود رسم شده، یکدیگر را در همان طرف تلاقی می‌کنند.

مثالهایی از اصول متعارفی:

اگر مساویها به مساویها اضافه شوند، نتایج مساویند.
کل از جزء بیشتر است.

در واقع، اصل موضوع دومی که نقل شد، پنجمین اصل موضوع

اقلیدس، و موسوم به اصل توازی[۶۶] است، زیرا می‌توان نشان داد که این اصل معادل اصل زیر می‌باشد:

> از یک نقطهٔ معلوم خارج یک خط مستقیم معلوم، تنها یک خط می‌توان موازی آن خط مستقیم رسم کرد.

هم این اصل موضوع، هم اصل متعارفی «کل از جزء بیشتر است» تا زمانی که طرحهای ریاضی قرن نوزدهم، سازمانهای[۶۷] هندسی‌ای به دست دادند که در آنها راست[۶۸] نبودند، به‌عنوان حقایق مورد قبول در نظر گرفته می‌شدند.

از موارد مهم قابل اشاره یکی این است که کتاب مقدمات اقلیدس از تمرین خالی بود، گویی اقلیدس جمیع مشکلات را بر طرف و تمام مسائل را حل کرده چیزی برای دیگران باقی نگذاشته بود.

به هرحال، اکنون آنچه را که منطق قدیم[۶۹] نامیدیم تحت سه عنوان اصلی می‌آوریم:

(۱) نظریهٔ قیاس ارسطویی
(۲) منطق مگاری ـ رواقی
(۳) مقدمات اقلیدس

عنوان (۱) نظریهٔ جامعی بر مبنای قیاس به دست می‌دهد که برای بیست قرن تأثیر عظیمی بر فلسفه و الهیات داشت، (۲) اولین کوشش در تحلیل پارادوکسها را به‌دست می‌دهد، اما از این موضوع چیز نسبتاً کمی باقی می‌گذارد، و (۳) نمایشی جامع و سیستماتیک و به صورت آکسیوماتیک از اغلب مطالبی که در قرون باستانی از هندسه و حساب شناخته شده بودند به‌دست می‌دهد.

در انتهای مقال ابتدا دو سخن می‌آوریم یکی از سلطان الحکما خواجه نصیر طوسی و از آغاز کتاب اساس الاقتباس او، که تحت عنوان: «ابتدای سخن در منطق» در تعریف و فایدهٔ منطق چنین می‌گوید که:

> و نه هرکه کاری کند داند که چه می‌کند یا چه می‌باید کرد. بلک بسیار کسان باشند که درکارها شروع کنند بر سبیل خبط. و هم چنین باشد حکم کسانی که طلب علوم کنند و بر صناعت منطق واقف نباشند.
>
> پس علم منطق شناختن معنیهایی است که از آن معانی رسیدن به انواع علوم مکتسب ممکن باشد، و آنک از هر معنی به کدام علم توان رسید.

و دیگری از معلم ثانی، ابونصر فارابی، که در آغاز فصل دوم کتاب احصاء العلوم خود در باب منطق چنین می‌گوید که:

> صناعت منطق، به طور کلی، قوانینی را به دست می‌دهد که پیروی از آنها باعث استقامت خرد می‌گردد، و در مواردی که ممکن است در بعضی از معقولات برای آدمی اشتباهی پیش آید او را به راه درست و حقیقت رهنمون می‌شود.

و سپس قول پیرس[۷۰] را متذکر می‌شویم که براین است که «در حدود صد تعریف از منطق در دست است» و با این همه همچنان در اول وصف آن مانده‌اند، و بعد قول صدرالمتألهین را در تعریف منطق می‌آوریم که:

> «منطق میزان ادراکی‌ای است که افکار را، برای دانستن صحیح از فاسدشان، با آن وزن می‌کنند.[۷۱]»

و سرانجام، و با این همه، با این که به این قول که:

«منطق بررسی استدلال است»

باور داریم با گفتهٔ شیخ محمود شبستری، در گلشن راز، سخن مان را ختم محمود می‌کنیم:

بود فکر نکو را شرط تجرید	پس آنگه لَمعه‌یی از نور تأیید
هر آن کس را که ایزد راه ننمود	ز استعمال منطق هیچ نگشود

* * *

۱. المراد من المنطق ان یکون عندالانسان آلة قانونیة تعصمه مراعاتها عن ان یضّل فی فکره.

۲. Aristotle (ارسطو)

۳. Sophistical Refutations

۴. Republic

۵. Law of Non - Contradiction

۶. Metaphysics

۷. Theory of Syllogism

۸. Paradox

۹. Achilles

۱۰. البته منهای کارهای منطقیون مسلمان و ایرانی که تحقیقات مفصلی در این مورد کرده‌اند.

۱۱. Subject - Predicate Proposition

۱۲. Subject

۱۳. Predicate

۱۴. Universal Affirmative

۱۵. Universal Negative

۱۶. Particular Affirmative

۱۷. Particular Negative

۱۸. Quantifier حصار گرد شهر

۱۹. Argument

۲۰. Syllogisms

۲۱. Premisses

۲۲. Conclusion

۲۳. قیاس استثنایی یا Modus Ponens همان است که در منطق جدید آن را به صورت:

$p \Rightarrow q$

p

$\therefore q$

علامتی می‌کنند.

۲۴. Major

۲۵. Minor

۲۶. Major Premiss

۲۷. Minor Premiss

۲۸. Term

۲۹. Middle Term

۳۰. Valid

۳۱. Invalid

۳۲. Figure of Syllogism

۳۳. قدما در این مورد حفظ ابیات زیر را توصیه می‌کردند:

اوسط اگر حمل یافت در بر صغری و باز
وضع به کبری گرفت شکل نخستین شمار
حمل به هر دو دوم، وضع به هر دو سوم
رابع اشکال را عکس نخستین بیار

۳۴. Square of Opposition

۳۵. Contradictories

۳۶. التّناقض اختلاف القضیّتین بحیث یلزم لذاته من صدق کلّ منهما کذب الاخری، و بالعکس.

۳۷. Contraries

۳۸. Subalternations

۳۹. Sub - Contraries

۴۰. Converse

۴۱. العکس المستوی تبدیل طرفی القضیه مع بقاء الصدق و الکیف.

۴۲. Contraposition

۴۳. عکس النقیض، تبدیلُ نقیضی الطرفینِ مع بقاءِ الصّدق و الکیف.

۴۴. Logic of Classes

۴۵. Stoics

۴۶. Zenon

۴۷. Logic of Propositions

۴۸. Megarian School

۴۹. Eukleides

۵۰. Eubulides

۵۱. Liar Paradox

۵۲. St. Paul

۵۳. Titus

۵۴. Language

۵۵. Metalanguage
۵۶. Self - Reference
۵۷. Elements
۵۸. Euclid
۵۹. Bourbaki
۶۰. Definition
۶۱. Postulate
۶۲. Common Principle
۶۳. Theorems
۶۴. Axiomatic Method
۶۵. داخل گیومه از متن کتاب التفهیم است.
۶۶. Parallel Postulate
۶۷. Geometric Structure
۶۸. True
۶۹. Ancient Logic
۷۰. Charles Peirce
۷۱. المنطق قسطاس ادراکیٌ یوزن به الافکار لیعلم صحیحها من فاسدها.

منابع فارسی و عربی

۱. تاریخ ریاضیات، دیوید اسمیت، ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار
۲. التفهیم، ابوریحان بیرونی، تصحیح جلال الدین همایی
۳. ریاضیدانان نامی، اریک تمپل بل، ترجمهٔ حسن صفاری
۴. تهذیب المنطق، مولانا سعدالدین تفتازانی
۵. اساس الاقتباس، خواجه نصیرطوسی، تصحیح مدرس رضوی
۶. احصاء العلوم، ابونصر فارابی، ترجمهٔ خدیم جم
۷. اشارات و تنبیهات، ابوعلی سینا
۸. درّة التاج، قطب الدین شیرازی
۹. حکمة الاشراق، شهاب الدین سهروردی، ترجمهٔ دکتر سجادی
۱۰. رسالهٔ منطق دانشنامهٔ علائی، ابوعلی سینا، مقدمه و حواشی: دکتر معین و محمد مشکوة
۱۱. تاریخ منطق، T. ماکولسکی، فریدون شایان
۱۲. اللمعات المشرقیه فی الفنون المنطقیه، صدر الدین شیرازی
۱۳. گلشن راز، شیخ محمود شبستری

منابع خارجی

14. A Profile of Mathematical Logic ,Howard Delony
15. Logic II: proof , Prepared by the Mathematics Foundation Course Team. (منبع اصلی)
16. Philosophical Logic ,Edited by P. F. Strawson.
17. Dictionary of Philosophy and Psychology , Jawes Mark Baldwin
18. Logic , John Nolt , Dennis Rohatyn
19. Symbolic Logic , Copi

ادب ریاضی

(از: التّفهیم، ابوریحان بیرونی، به تصحیح جلال الدین همائی)

یکی چیست؟

آن است که یگانگی بر او افتد و بدو نام زده شود. و از تمامی وی آن است که کمی و بیشی نپذیرد و ز حال خویش به ضرب و قسمت نگردد و اندر قوت همه عددهاست و همه خاصیتهای ایشان. و حال یکی اندر آن چیزها که شمرده شود بدو، هر چند یگانگی او نه به حقیقت باشد، و لکن از جهت نهادن مردمان یک دیگر [نیز همچنان است]. و این یکی ایستاده است میان آن عددها که از مانندهٔ او گرد آید به جمله شدن و میان آن پارهها که از او کمترند. و این ایستادن او میان ایشان از بهر آن است که او چون میانهٔ معتدل راست است. اگر او را به مثل خویش زنی یا بر مثل خویش قسمت کنی هم یکی باشد. و دیگر عددها که از او بیشندُ هر گه که یکی ایشان را ضرب کنی بیفزایند. و قسمت کنی بکاهند. و اما اجزاها که ازو کمترند هرگاه که ضرب کنی بکاهند و که قسمت کنی بیفزایند. و یکی به میان ایشان برحال خویش است.

گروه[1]، پیدایش و کاربرد نظریه گروهها

(مورد استفاده دانش آموزان سال دوّم و سوّم ریاضی)

● حمید رضا امیری

یکی از دستگاههای مهمّ جبری و یکی از مفاهیم اساسی جبر مفهومی است که آن راگروه نامیده‌اند. در دنیای ریاضیات محض، این مفهوم یکی از مواد اصلی در ساختمان جبر مجرّد است. اصطلاح مجرّد، وابسته به طرز تفکّر و برداشت شخص می‌باشد، زیرا ممکن است مطلبی یا مفهومی به نظر شخصی مجرّد آید (کاملاً ذهنی) ولی در تعبیرات شخص دیگری واقعی و عملی جلوه کند. امّا اساساً وظیفه ریاضیات محض و به‌خصوص جبر مجرّد خلق دستگاهها و مفاهیم ریاضی به‌صورت مجرد است، که البته در اکثر موارد این دستگاهها و مفاهیم را می‌توان تعمیم داد و از کاربردهای آن در بقیه علوم استفاده کرد. یکی از این مفاهیم که امروزه در علومی چون، فیزیک ـ شیمی ـ زیست شناسی ـ نجوم و... کاربردهای با ارزشی دارد مفهوم گروه است. این مفهوم در عصرما تا حد زیادی پیشرفت کرده و اکنون به شکل یکی از شاخه‌های اصلی علم جبر در آمده است. از پایه‌گذاران جبر مجرّد و به‌خصوص نظریه گروهها شخصی است به نام اواریست گالوا[2] که نظریه خود را در ۱۹ سالگی به تقریر در آورد.

وی یکی از نوابغ ریاضیات است. گالوا در زمان خود به درس جبر با چشم تحقیر می‌نگریست و در آن خلاقیّت و ابتکاری شاهده نمی‌کرد. او در این درس به‌دنبال روشها و خلاقیتهای بزرگ بود و همین امر باعث شد که حتی معلمین سرشناس و بزرگ زمانش نتوانند او را درک کنند. گالوا در سنّ ۲۱ سالگی در یک دوئل جان باخت و فرصت زیادی برای ادامه راهش در زمینهٔ جبر مجرّد و تئوریها و نظریه‌هایش نیافت، ولی شیوهٔ تفکّر گالوا باعث شد امروزه نظریه او یکی از مهمترین تئوریهای ریاضی به شمار آید و عمومیت داشتن این نظریه نیز موجب استفادهٔ وسیع از آن در علوم دیگر شد. مثلاً در علم شیمی، کار برد نظریه گروه بسیار عمیق و کارساز است تاجایی که در سالهای آخر دورهٔ لیسانس و حتی فوق لیسانس کار برد شیمیایی نظریه گروه در تقارن مولکولی و شیمی کوانتم به دانشجویان این رشته تدریس می‌شود.

همانطور که بعداً خواهیم دید ما برای بیان مفهوم گروه نیاز به یک مجموعه[3] و تعریف یک عمل دوتایی[4] روی این مجموعه خواهیم داشت. حال اگر در مبحث شیمی مجموعه را مجموعه‌ای از عناصر شیمیایی و عمل دوتایی را ترکیب کردن یا... تعریف کنیم و این مجموعه با عمل تعریف شدهٔ روی آن همهٔ خواص لازم برای تشکیل یک گروه (به مفهوم ریاضی) را داشته باشد در این صورت می‌توان از کلیه قوانین و قضایایی که ریاضیدانان در نظریه گروهها ثابت کرده‌اند استفاده نمود و به نتایج جالبی در علم شیمی دست یافت.

اکنون به بیان و بررسی نظریه گروهها می‌پردازیم و به طور

اختصار وارد قلم رو این شاخهٔ بسیار زیبا از ریاضیات می‌شویم.

تعریف عمل دوتایی

یک عمل دو تایی روی مجموعهٔ ناتهی A تابعی[5] است از $A\times A$ به A که به هر زوج مرتب از $A \times A$ عضو منحصر به‌فردی از A را نسبت می‌دهد به عنوان مثال اگر * یک عمل دوتایی روی مجموعهٔ A باشد، آن رابه‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$* : A \times A \to A$$
$$(a , b) \longmapsto a * b$$

مثال ۱ : عمل + روی IR به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$+ : IR \times IR \to IR$$
$$(a , b) \longmapsto a + b$$

به عنوان مثال زوج مرتب (۲- , ۴) تحت این عمل به عدد ۲=(۲-)+۴ ربط داده می‌شود.

تعریف : مجموعهٔ A را نسبت به قانون * بسته گوییم هرگاه برای هر دو عضو مجموعهٔ A مانند x و y داشته باشیم $x * y \in A$ (حاصل ترکیب هر دو عضو مجموعهٔ A تحت قانون * عضوی از مجموعهٔ A باشد).

به‌عبارت دیگر :

$$A \Leftrightarrow (a , b) \in A \times A \Rightarrow a * b \in A$$

نسبت به * بسته است.

توضیح این مطلب واجب است که با توجه به تعریف عمل، اگر لفظ عمل را بر یک قانون اطلاق کنیم یعنی تابعی متصور است مانند * از $A\times A$ به A که بسته بودن مجموعهٔ A نسبت به عمل * در تعریف عمل نهفته است. در حقیقت هرگاه می‌گوییم مجموعهٔ A همراه با عمل * مفروض است، نیازی به بررسی خاصیت بسته بودن در مجموعهٔ A نسبت به‌عمل * نمی‌باشد، زیراطبق تعریف عمل، عمل * ناچاراً به هر دو عضو از A عضوی منحصر بفرد از A را نسبت می‌دهد و این همان مفهوم بسته بودن است ولی اگر لفظ قانون بر * اطلاق شود بررسی خاصیت بسته بودن الزامی است.

در اینجا قبل از معرفی و تعریف گروه به بررسی چند خاصیت مهمّ که اساس و پایه‌های یک گروه بر آنها استوار می‌باشد خواهیم پرداخت.

خاصیت شرکت پذیری : فرض کنیم عمل دوتایی * روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. در این صورت می‌گوییم مجموعهٔ A نسبت به عمل * دارای خاصیت شرکت پذیری است هرگاه داشته باشیم :

$$a , b , c \in A \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

مثال : مجموعهٔ اعداد حقیقی IR نسبت به عمل جمع معمولی دارای خاصیت شرکت پذیری است یعنی برای هر سه عضو از این مجموعه مانند a و b و c داریم:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

مثال : مجموعهٔ اعداد صحیح Z نسبت به عمل ضرب معمولی خاصیت شرکت پذیری دارد یعنی :

$$a , b , c \in Z \Rightarrow (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

مثال : مجموعهٔ اعداد گویا Q نسبت به عمل * که به صورت زیر تعریف می‌شود خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$\forall x , y \in Z \ , \ x * y = x + y - ۵$$

زیرا: $(x * y) * z = (x + y - ۵) * z =$

$$[(x + y - ۵) + z] - ۵ \overset{\text{شرکت پذیری } Z}{=} (x + y + z) - ۱۰ \qquad (۱)$$

$$x * (y * z) = x * (y + z - ۵) = [x + (y + z - ۵)] - ۵$$
$$\overset{\text{شرکت پذیری } Z}{=} (x + y + z) - ۱۰ \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$$

خاصیت جابجایی : فرض کنیم عمل دوتایی * روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد، می‌گوییم مجموعهٔ A نسبت به عمل * دارای خاصیت جابجایی است هرگاه داشته باشیم:

$$a , b \in A \Rightarrow a * b = b * a$$

مثال : مجموعهٔ اعداد حقیقی IR نسبت به عمل جمع معمولی دارای خاصیت جابجایی است یعنی برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b داریم :

$$a + b = b + a$$

مثال: مجموعهٔ ماتریسهای ۲×۲ نسبت به عمل جمع ماتریسی دارای خاصیت جابجایی است زیرا اگر

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} ,\ A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

دو عضو دلخواه این مجموعه باشند داریم:

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \\ (c_1 + c_2) & (d_1 + d_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_2 + a_1) & (b_2 + b_1) \\ (c_2 + c_1) & (d_2 + d_1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = A_2 + A_1$$

خاصیت عضو خنثی: فرض کنیم عمل دوتایی * روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد در این صورت عضو e را عضو خنثی در مجموعهٔ A می‌نامیم هرگاه: اوّلاً $e \in A$ و ثانیاً برای هر عضو مجموعهٔ A مانند a داشته باشیم $a * e = e * a = a$.

مثال: در مجموعهٔ اعداد حقیقی نسبت به عمل جمع معمولی عددِ صفر عضو خنثی است زیرا اگر a عضو دلخواهی از IR باشد داریم

$$a + 0 = 0 + a = a$$

مثال: اگر مجموعهٔ اعداد گویای مثبت را در نظرِ بگیریم و عمل * را به‌صورت زیر تعریف کنیم در این صورت عضو خنثی عددِ ۳ خواهد بود.

$$\forall x, y \in Q^+ ,\ x * y = \frac{x \cdot y}{3}$$

زیرا: $x * 3 = \frac{x \cdot 3}{3} = x ,\ 3 * x = \frac{3 \cdot x}{3} = x$

خاصیت عضو متقابل یا وارون

فرض کنیم عمل دوتایی * روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد در این صورت می‌گوییم مجموعهٔ A نسبت به عمل * دارای خاصیت عضو متقابل است هرگاه برای هر عضو مجموعهٔ A مانند a عضوی از A مانند a' یا (a^{-1}) وجود داشته باشد به قسمی که:

$$a * a' = a' * a = e$$

(e همان عضو خنثی در A است.)

مثال: مجموعهٔ اعداد حقیقی IR نسبت به عمل جمع معمولی دارای خاصیت عضو متقابل است زیرا: برای هر عدد حقیقی مانند x، عدد $-x$ عددی حقیقی است و $x + (-x) = (-x) + x = 0$ که ۰ عضو خنثی در IR نسبت به جمع است.

مثال: اگر مجموعهٔ اعداد گویای مثبت را در نظر گرفته و تعریف کنیم.

$$\forall x, y \in Q^+ ،\ x * y = \frac{x \cdot y}{4}$$

در این صورت عضو متقابل هر عضو از Q^+ به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\left.\begin{array}{l} x * x' = e \Rightarrow \frac{x.x'}{4} = e \Rightarrow x.x' = 4e \Rightarrow x' = \frac{4e}{x} \\ x' * x = e \Rightarrow \frac{x'.x}{4} = e \Rightarrow x'.x = 4e \Rightarrow x' = \frac{4e}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x' = \frac{4e}{x}$$

تذکر: اگر مجموعه نسبت به عمل دوتایی دارای خاصیت جابجایی باشد (مانند مثال بالا) برای به‌دست آوردن عضو خنثی کافی است یکی از دو معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$\begin{cases} x * e = x \\ e * x = x \end{cases}$$

و برای به‌دست آوردن عضو متقابلِ هر عضو کافی است یکی از دو معادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} x * x' = e \\ x' * x = e \end{cases}$$

حال به تعریف گروه می‌پردازیم:

تعریف: مجموعهٔ ناتهی G، همراه با عمل * که روی G تعریف شده یک گروه نامیده می‌شود و می‌نویسیم $(G, *)$ گروه است، اگر و فقط اگر خواص زیر برقرار باشند:

۱ـ $\forall a,b \in G ، a*(b*c) = (a*b)*c$ (خاصیت شرکت‌پذیری[1])

$۲_ \exists!^{۲} e\in G \forall a\in G$ ، $e*a=a*e=a$ (خاصیت عضو خنثی[8])

$۳_ \forall a\in G \exists! a'\in G$ ، $a*a'=a'*a=e$ (خاصیت عضو متقابل)

تذکر: گزاره‌های سوری $\exists!x\forall y$ و $\forall y\exists!x$ با هم تفاوت بسیار دارند. وقتی می‌نویسیم $\exists!x\forall y$ یعنی x ای منحصر بفرد هست که برای تمام y ها خاصیتی برقرار است پس این x برای همهٔ y ها ثابت است امّا وقتی می‌نویسیم $\forall y\exists!x$ یعنی برای هر y، x ای منحصر بفرد هست که خاصیتی برقرار است، پس هر y برای خودش یک x منحصر بفرد دارد، مثلاً اگر ۱۰ عدد y داشته باشیم در قسمت اوّل فقط دارای یک x هستیم ولی در قسمت دوّم دارای ۱۰ عدد x خواهیم بود.

اگر گروه $(G , *)$ علاوه بر خواص سه گانهٔ فوق دارای خاصیت زیر نیز باشد آن را یک گروه جابجایی[9] یا آبلی می‌نامیم:

$$\forall a , b \in G , a * b = b * a$$

تعریف: اگر گروه G دارای تعدادی متناهی عضو باشد آن را یک گروه متناهی و اگر تعداد اعضاء گروه G نامتناهی باشد آن را یک گروه نامتناهی می‌نامیم، مثلاً $(Z , +)$ یک گروه نامتناهی است ولی $(\{۱ , -۱\} , \cdot)$ یک گروه متناهی است.

حال به بررسی و معرفی چند گروه ریاضی که اکثر خوانندگان با آنها برخورد داشته و تا حدود زیادی قابل درک هستند، می‌پردازیم و سپس اندک اندک بحث را به بررسی و شناخت گروههای مجرّدتر همراه با اعمال غیر ملموس‌تر و ناآشناتر، می‌کشانیم.

مثال ۱: اگر قرار دهیم $G = Z$ و عمل * را همان جمع معمولی تعریف کنیم در این صورت $(Z , +)$ یک گروه جابجایی است.

تذکر: اگر مجموعه‌ای مانند A نسبت به عمل * دارای خواص شرکت پذیری یا جابجایی باشد این خاصیتها به کلیه زیر مجموعه‌های A (همراه با همان عملِ *) القاء می‌شود یا به ارث می‌رسند! مثلاً مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی IR نسبت به عمل جمع دارای خاصیت شرکت پذیری و جابجایی است بنابراین تمام زیر مجموعه‌های IR این دو خاصیت را نسبت به همان عمل جمع دارا می‌باشند.

مثال ۲: اگر قرار دهیم $G = Z$ و عمل * را همان عمل ضرب معمولی که با $\cdot$ نشان می‌دهیم تعریف کنیم در این صورت $(Z , \cdot)$ تشکیل گروه نمی‌دهد. زیرا خاصیت عضو متقابل برای هر عضو Z نسبت به عمل ضرب برقرار نیست، چون می‌دانیم عدد ۱ عضو خنثی نسبت به عمل ضرب در Z می‌باشد لذا اگر $a \in Z$ عضوی دلخواه باشد عضو متقابل آن یعنی a' به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a' . a = e = ۱ \Rightarrow a' = \frac{۱}{a}$$

و مثلاً اگر قرار دهیم $a = ۲$ در این صورت $a' = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲} \notin Z$ و یا اگر $a = ۰$ خواهیم داشت: $a' = \frac{۱}{۰}$ که a' تعریف نشده است.

مثال ۳: اگر فرض کنیم $G = \{۱ , -۱\}$ و عمل * را ضرب معمولی فرض کنیم در این صورت $(G , \cdot)$ یک گروه جابجایی است (به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده).

تذکر: همان طور که ملاحظه می‌شود در مثال ۳ مجموعهٔ $\{۱،-۱\}$ یکی از زیر مجموعه‌های بسیار کوچک Z می‌باشد ولی این مجموعهٔ ۲ عضوی با همان عمل ضرب معمولی که روی Z تعریف کردیم و Z با آن تشکیل گروه نداد، می‌تواند یک گروه جابجایی تشکیل دهد و این گویای این مطلب است که بزرگی یا کوچکی (تعداد اعضاء) و متناهی یا نامتناهی بودن یک مجموعه هیچ‌کدامْ نمی‌تواند ملاک قطعی برای گروه بودن آن باشند.

مثال ۴: اگر فرض کنیم $G = Q$ و عمل * را ضرب معمولی تعریف کنیم در این صورت $(Q , \cdot)$ یک گروه نمی‌باشد، زیرا در این مجموعه عدد گویایِ صفر نسبت به عمل ضرب فاقد عضو متقابل است.

تذکر: باید توجه داشته باشیم که خاصیت بسته بودن یک مجموعه نسبت به عملی که روی آن تعریف کرده‌ایم ممکن است به زیر مجموعه‌هایش القاء نشود، مثلاً Z نسبت به عمل تفریق بسته است ولی N که زیر مجموعهٔ Z می‌باشد نسبت به این عمل بسته نیست.

مثال ۵: اگر فرض کنیم مجموعه اعداد گویا با مخرج فرد = G و قانونِ * را روی این مجموعه همان تفریق معمولی تعریف کنیم در این صورت $(G , -)$ تشکیل یک گروه نمی‌دهد، زیرا این مجموعه نسبت به قانون تعریف شده روی آن، خاصیت عضو خنثی ندارد مثلاً اگر $e = ۰$

$$\frac{۱}{۳} - ۰ \neq ۰ - \frac{۱}{۳}$$

حال که تا اندازه‌ای با اسکلت ساختمانِ گروهها در ریاضی آشنا شدیم و چهار چوب این ساختمان را بنا کردیم به داخل ساختمان قدم می‌گذاریم تا خواص و ویژگیهای موجود در یک گروه و قضایای حاکم بر آن را مورد بررسی قرار دهیم، ابتدا به اثبات چند قضیهٔ مهم و اساسی در گروهها می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱: در هر گروه مانند $(G, *)$ عضو خنثی منحصربفرد است

برهان: درحقیقت می‌خواهیم ثابت کنیم اگر درگروه $(G, *)$ برای هر $a \in G$ داشته‌باشیم $e*a=a*e=a$ و $e_1*a=a*e_1=a$ در این صورت $e = e_1$.

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \in G \text{ و } e \text{ عضو خنثی چون } \Rightarrow e*e_1=e_1 \\ e \in G \text{ و } e_1 \text{ عضو خنثی چون } \Rightarrow e*e_1=e \end{array}\right\} \Rightarrow e=e*e_1=e_1 \Rightarrow e=e_1$$

قضیهٔ ۲: در هر گروه مانند $(G, *)$ عضو متقابل برای هر عضو G منحصر بفرد است.

برهان: در این قضیه منظور ما این است که اگر مثلاً برای یک عضو دلخواه G مانند a داشته باشیم:

$$a * a' = a' * a = e , a*a'' = a''*a = e$$

در این صورت باید $a' = a''$.

به شکل زیر قضیه را اثبات می‌کنیم.

$$a' = e*a' = (\underbrace{a''*a}_{e}) *a' = a''*(\underbrace{a*a'}_{e}) = a''*e = a''$$

قضیهٔ ۳: هرگاه $(G, *)$ یک گروه باشد و $a , b \in G$ آنگاه معادلات $a*x = b$ و $y*a = b$ جوابهای منحصر بفردی برای x و y در G خواهند داشت و خصوصاً دو قانون حذف (از چپ و از راست) در G برقرارند یعنی

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \qquad \text{(قانون حذف از چپ)}$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c \qquad \text{(قانون حذف از راست)}$$

برهان:

فرض کنیم: $a*x=b \Rightarrow a^{-1}*(a*x)=a^{-1}*b \Rightarrow (a^{-1}*a)*x= a^{-1}*b \Rightarrow e*x = a^{-1}*b \Rightarrow \boxed{x = a^{-1}*b}$

و با توجه به قضیهٔ ۲ اگر متقابل a را a^{-1} بنامیم در این صورت a^{-1} منحصر بفرد است پس $x = a^{-1} * b$ منحصر بفرد است.

حال اگر فرض کنیم: $y*a = b \Rightarrow (y*a)*a^{-1}=b*a^{-1} \Rightarrow y * (a*a^{-1})=b*a^{-1} \Rightarrow y*e=b*a^{-1} \Rightarrow y=b*a^{-1}$

و چون a^{-1} طبق قضیه منحصر بفرد است پس $y=b*a^{-1}$ نیز منحصر بفرد است.

اکنون به اثبات یکی از قوانین حذف در یک گروه دلخواه مانند $(G,*)$ می‌پردازیم:

فرض کنیم: $a*b=a*c \Rightarrow a^{-1}*(a*b)=a^{-1}*(a*c) \Rightarrow$

$$(a^{-1}*a)*b=(a^{-1}*a)*c \xRightarrow{\text{چون } e \text{ منحصر بفرد است}} e*b=e*c \Rightarrow b=c$$

اثبات قانون حذف از راست به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده.

تمرین: ثابت کنید اگر $(G,*)$ یک گروه آبلی باشد داریم:
$a*b=c*a \Rightarrow b=c$

قضیهٔ ۴: در هر گروه $(G, *)$ و برای هر دو عضو این گروه مانند x و y داریم:

$$(x * y)^{-1}=y^{-1} * x^{-1} \qquad (x^{-1} \text{ متقابل } x \text{ است نسبت به عمل } *)$$

برهان: ابتدا ثابت می‌کنیم $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1})=e$ و سپس با استفاده از قانون حذف قضیه را به اثبات می‌رسانیم:

$$(x*y)*(y^{-1}*x^{-1})=x*[y*(y^{-1}*x^{-1})]=x*[(y*y^{-1})*x^{-1}]$$
$$=x * (e * x^{-1}) = x * x^{-1} =e \qquad (1)$$

و همچنین واضح است که $(x*y)*(x*y)^{-1}=e$:(۲) پس داریم:

$$e=e \xRightarrow{(1) \text{ و } (2)} (x*y)*(x * y)^{-1}= (x * y) * (y^{-1} * x^{-1})$$
$$\xRightarrow{\text{بنابر قانون حذف}} (x * y)^{-1} = y^{-1} *x^{-1}$$

قضیهٔ ۵: ثابت کنید در هر گروه دلخواه مانند $(G,*)$ و برای هر $a \in G$ داریم:

$$(a^{-1})^{-1}=a$$

$$\left.\begin{array}{l} a^{-1} * a=e \\ a^{-1} *(a^{-1})^{-1}=e \end{array}\right\} \Rightarrow a^{-1}* a=a^{-1} *(a^{-1})^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{بنابر قانون حذف}} a=(a^{-1})^{-1}$$

اکنون آمادگی داریم تا به بررسی و معرفی بعضی از گروههای مجرّد بپردازیم و اندکی این مطلب را کلّی‌تر بیان کنیم.

مثـال ٦: اگر فرض کنیم $G=Q^+$ و عمل * را روی Q^+ به‌صورت زیر تعریف کنیم در این صورت $(Q^+ , *)$ یک گروه جابجایی است.

$$\forall a , b\in Q^+ , a*b=\frac{a.b}{۷}$$

$$۱)\ a*(b*c)=a*\left(\frac{b.c}{۷}\right)=\frac{a.\frac{b.c}{۷}}{۷}=\frac{a.(b.c)}{۴۹} \qquad (۱)$$

$$(a*b)*c=\frac{a.b}{۷}*c=\frac{(\frac{a.b}{۷}).c}{۷}=\frac{(a.b).c}{۴۹}=\frac{a.(b.c)}{۴۹} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) برقراری خاصیت شرکت‌پذیری حاصل می‌شود.

۲) برای اثبات خاصیت عضو خنثی به‌دنبال عضوی مانند e در Q^+ هستیم به قسمی که برای هر $a\in Q^+$ داشته باشیم: $a*e=e*a=a$
در این گونه موارد کافی است یکی از دو معادله $a*e=a$ یا $e*a=a$ را حل کنیم و e را به دست آوریم زیرا ثابت می‌شود $(Q^+,*)$ دارای خاصیت جابجایی است.

$$a*e=a \Rightarrow \frac{a.e}{۷}=a \Rightarrow a.e=۷.a \Rightarrow e=۷$$

یعنی در این مجموعه عدد گویای ۷ نسبت به عمل * نقش عضو خنثی را ایفا می‌کند و در واقع عضو خنثی می‌باشد.

۳) حال به‌دنبال یافتن عضو متقابل برای هر عضو Q^+ هستیم یعنی اگر $a\in Q^+$ به‌دنبال عضوی مانند a' در Q^+ می‌باشیم به قسمی که $a*a'=a'*a=e$ که در آن $e=۷$ پس کافی است یکی از دو معادله $a*a'=e=۷$ یا $a'*a=e=۷$ را حل کنیم و a' را بیابیم؛

$$a*a'=۷ \Rightarrow \frac{a.a'}{۷}=۷ \Rightarrow a.a'=۴۹ \Rightarrow a'=\frac{۴۹}{a}$$

و واضح است که اگر $a\in Q^+$ در این صورت $a'=\frac{۴۹}{a}\in Q^+$، مثلاً اگر $b\in Q^+$، وارونِ b یعنی b' برابر است با $\frac{۴۹}{b}$ (وارونِ $\frac{۲}{۳}$ عبارت است از $\frac{۴۹}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۱۴۷}{۲}$) لذا تاکنون ثابت شد که $(Q^+,*)$ یک گروه است، از طرفی:

$$\forall a,b \in Q^+ , a*b=\frac{a.b}{۷}=\frac{b.a}{۷}=b*a \Rightarrow a*b=b*a$$

بنابراین $(Q^+,*)$ یک گروه آبلی یا جابجایی است.

مثال ۷: فرض کنیم $G=\{a_۰,a_۱,...,a_۶\}$ و عمل * را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall a_i , a_j\in G ; a_i*a_j=\begin{cases} a_{i+j} & i+j<۷ \\ a_{i+j-۷} & i+j\geq ۷ \end{cases}$$

مثلاً: $a_۱*a_۳=a_{۱+۳}=a_۴$ (چون $۱+۳<۷$)
$a_۴*a_۵=a_{۴+۵-۷}=a_۲$ (چون $۴+۵>۷$)

ثابت می‌کنیم $(G,*)$ یک گروه آبلی است.

۱) بررسی خاصیت شرکت پذیری:
برای هر a_i و a_j و a_K اگر $i+j+K<۷$ که داریم:

$$a_i*(a_j*a_K)=a_i*(a_{j+K})=a_{i+(j+K)}$$
$$(a_i*a_j)*a_K=(a_{i+j})*a_K=a_{(i+j)+K}=a_{i+(j+K)}$$

و اگر $i+j+K\geq ۷$ اثبات به‌عهده خوانندگان.

۲) بررسی خاصیت عضو خنثی: واضح است که در این مجموعه $e=a_۰$ زیرا $\forall_i , a_i*a_۰=a_{i+۰}=a_i , a_۰*a_i=a_{۰+i}=a_i$

۳) بررسی خاصیت عضو متقابل:
برای هر a_i به‌دنبال عضوی مانند a_j هستیم به قسمی که $a_j*a_i=a_i*a_j=e=a_۰$ با توجه به تعریف عمل، برای هر i اگر قرار دهیم $j=۷-i$ در این صورت $a_i*a_{۷-i}=a_{i+۷-i}=a_۷=a_{۷-۷}=a_۰$
مثلاً متقابل $a_۵$ برابر است با $a_{۷-۵}=a_۲$ زیرا $۵+۲=۷$ پس
$a_۵*a_۲=a_{۵+۲-۷}=a_۰$

پس $(G,*)$ یک گروه است از طرفی
اگر $i+j<۷$ $\quad a_i*a_j=a_{i+j}=a_{j+i}=a_j*a_i$
اگر $i+j>۷$ $\quad a_i*a_j=a_{(i+j)-۷}=a_{(j+i)-۷}=a_j*a_i$
بنابراین گروه $(G,*)$ یک گروه آبلی است.

مثال ۸: فرض کنیم $G=Z$ و عمل * را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\forall x , y \in Z ; x*y=x+y-2$

ثابت می‌کنیم $(Z,*)$ یک گروه جابجایی است.

۱) $x*(y*z) = x*(y+z-2) = [x+(y+z-2)]-2= x+(y+z)-4$ (۱)

$(x*y)*z=(x+y-2)*z=[(x+y-2)+z]-2= (x+y)+z-4= x+(y+z)-4$ (۲)

با توجه به (۱) و (۲) شرکت‌پذیری حاصل می‌شود

۲) به دنبال عضوی در Z مانند e هستیم که برای هر $x\in Z$ داشته باشیم.
$x*e=e*x=x$

$x*e=x \Rightarrow x+e-2=x \Rightarrow \boxed{e=2}$

۳) برای هر $x\in Z$ به دنبال عضوی در Z مانند x' هستیم به قسمی که:
$x*x'=x'*x=e=2$

$x*x'=2 \Rightarrow x+x'-2=2 \Rightarrow x+x'=4 \Rightarrow x'=4-x$

مثلاً متقابلِ عدد ۳ عبارت است از:

اگر $x=3 \Rightarrow x'=4-3=1 \Rightarrow x'=1$

پس $(Z,*)$ یک گروه است از طرفی

$\forall x,y\in Z; x*y=x+y-2=y+x-2=y*x$

بنابراین $(Z,*)$ یک گروه جابجایی است.

تعریف: هرگاه $(G,*)$ یک گروه باشد و $a\in G$ در این صورت:
$a^2=a*a$ و $a^3=a^2*a,...,a^n=a^{n-1}*a$

حال تا حدودی به بررسی خواص و ویژگیهای گروهها با توجه به اعمال تعریف شده روی آنها می‌پردازیم.

مثال ۹: ثابت کنید اگر برای هر دو عضو از گروه $(G,*)$ مانند a و b داشته باشیم، $(a*b)^{-1}=a^{-1}*b^{-1}$ در این صورت $(G,*)$ یک گروه جابجایی است.

تذکر: قبلاً طبق قضیهٔ ۳ ثابت کردیم $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$

حال باید ثابت کنیم:

$\forall a , b\in G ; a*b=b*a$

$$(a*b)=\left((a*b)^{-1}\right)^{-1}=(b^{-1}*a^{-1})^{-1}$$

از طرفی چون G گروه است و $a , b\in G$ پس $a^{-1}, b^{-1}\in G$ لذا

طبق فرض $(b^{-1}*a^{-1})^{-1}=(b^{-1})^{-1}*(a^{-1})^{-1}=b*a$

پس ثابت شد $a*b=b*a$ یعنی $(G,*)$ یک گروه آبلی است.

مثال ۱۰: ثابت کنید هر گروه از مرتبهٔ ۳ آبلی است. فرض کنیم G یک گروه از مرتبهٔ ۳ باشد لذا دارای ۳ عضو است که باتوجه به گروه بودن G و اینکه $e\in G$ پس G حداکثر دارای ۲ عضو مخالفِ e مانند a و b می‌باشد یعنی $G=\{a,b,e\}$.

حال به بررسی خاصیت جابجایی گروه $(G,*)$ می‌پردازیم. خاصیت جابجایی برای هر یک از دو عضو a و b با e باتوجه به خاصیت عضو خنثی در گروه G واضح است یعنی همواره:

$$a*e=e*a=a$$
$$b*e=e*b=b$$

و نیز خاصیت جابجایی برای هر عضو G با خودش واضح است یعنی $e*e=e*e$ و $b*b=b*b$ و $a*a=a*a$

حال ثابت می‌کنیم $a*b=b*a$.

اگر $a*b=c$، با توجه به بسته بودن گروه G نسبت به عمل * باید $c\in G$ اگر $c=a$ در این صورت

$$a*b=a \text{ و } a*e=a \Rightarrow a*b=a*e \xrightarrow{\text{قانون حذف}} b=e$$

و این با منحصر بفرد بودنِ e تناقض دارد پس $c\neq a$ و اگر $c=b$ در این صورت

$$a*b=b \text{ و } e*b=b \Rightarrow a*b=e*b \xrightarrow{\text{قانون حذف}} a=e$$

و این نیز با منحصر بفرد بودن e تناقض دارد پس $c\neq b$ لذا باید $c=e$ یعنی $a*b=e$ و به همین قیاس ثابت می‌شود $b*a=e$ پس $a*b=b*a$ بنابراین $(G,*)$ یک گروه آبلی است.

مثال ۱۱: ثابت کنید هر گاه برای هر عضو گروه $(G,*)$ مانند x اگر داشته باشیم $x=x^{-1}$ (متقابلِ هر عضو خودش باشد) آنگاه G آبلی است.

ثابت می‌کنیم: $\forall x , y \in G ; x*y=y*x$

طبق فرض داریم: $(x*y)=(x*y)^{-1}$ (متقابل هر عضو خودش می‌باشد)

از طرفی چون G گروه است: $(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$

و طبق فرض $y^{-1}=y$ و $x^{-1}=x$، لذا

$$(x*y)=(x*y)^{-1}=(y^{-1}*x^{-1})=(y*x) \Rightarrow x*y=y*x$$

پس G آبلی است.

گاهی اوقات مجموعه‌ها را همراه با عمل تعریف شده روی آنها و اثر عمل روی هر یک از اعضاء مجموعه به صورتِ جدولی نمایش می‌دهیم که بنوبهٔ خود دارای خواص و ویژگیهای قابل توجهی می‌باشد. مثلاً در مثال ۱۰ و با توجه به مطالب اثبات شده در آن می‌توان گروه G از مرتبه ۳ را به صورت جدولی نمایش داد.

*	a	b	e
a	b	e	a
b	e	a	b
e	a	b	e

تذکر: هر گاه یک گروه و نتیجه حاصل از عملِ * روی اعضاء این گروه را به صورت جدولی نمایش دهیم و قطر اصلی جدول را رسم کنیم (مطابق شکل) و اعضاء دو طرف قطر نسبت به آن تقارن داشته باشند در این صورت حتماً گروه مزبور یک گروه آبلی است (اثبات به عهدهٔ خواننده) و نیز اگر در یک جدول یک عضو مجموعه بیش از یک بار در هر سطر یا ستون تکرار شود آن مجموعه همراه با آن عمل تشکیل گروه نمی‌دهد (اثبات به عهده خواننده).

مثال:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

قطر اصلی

اگر $G = \{ e , a , b , c \}$.

طبق مطالب فوق $(G , *)$ یک گروه آبلی است.

مثال: اگر $G = \{ A , B , C , D \}$ در این مثال چون در سطر اوّل B دوبار تکرار شده و یا در سطر آخر D دو بار تکرار شده و یا در ستون دوّم B دوبار تکرار شده لذا بنابر مطالب فوق $(G , *)$ نمی‌تواند یک گروه باشد. البته واضح است که C نقش عضو خنثی را دارد، زیرا ترکیب آن از چپ و از راست با هر عضو G خود آن عضو را نتیجه می‌دهد. امّا مثلاً عضو D فاقد متقابل است زیرا ترکیب هیچ یک از اعضاء G با D عضو خنثی یعنی C را نتیجه نمی‌دهد.

*	A	B	C	D
A	B	C	A	B
B	C	D	B	A
C	A	B	C	D
D	A	B	D	D

به عنوان تمرین ثابت کنید جدول زیر مشخص کننده یک گروه است (عضو خنثی و وارون هر عضو را مشخص کنید)، آیا گروه آبلی است؟

×	۱	−۱	i	−i
۱	۱	−۱	i	−i
−۱	−۱	۱	−i	i
i	i	−i	−۱	۱
−i	−i	i	۱	−۱

تعریف: مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ را مجموعهٔ باقیمانده‌های تقسیم اعداد صحیح مثبت بر n می‌نامیم که در آن $n \geq 1$، و با Z_n نمایش می‌دهیم مثلاً $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$.

تذکر: می‌دانیم هرگاه عددی صحیح و بزرگتر از صفر بر n تقسیم شود باقیماندهٔ این تقسیم یا صفر است یا یک است یا... یا $n-1$ است، واضح است چون بخش پذیری در اعداد صحیح مثبت مطرح است باقیماندهٔ تقسیم اعداد کوچکتر از n بر n خودشان می‌شوند مثلاً باقیماندهٔ تقسیم عدد ۴ بر ۸ برابر است با ۴ زیرا

$$4 = 0 \times 8 + 4 \quad \text{یا} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 8 \\ \underline{0} & 0 \\ 4 & \end{array}$$

حال جمع و ضرب جدیدی روی چنین مجموعه‌هایی تعریف کرده و خواهیم دید که این مجموعه‌ها با اعمال تعریف شده روی آنها تشکیل گروه جابجایی می‌دهند.

مثال ۱۲: فرض کنیم $G = Z_5$ یا $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و عمل $\oplus$ را روی اعضاء این مجموعه به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\forall x, y \in Z_5$ ، $x \oplus y =$ باقیمانده تقسیم $x + y$ بر ۵ (اگر $x+y$ را بر عدد ۵ تقسیم کنیم باقیماندهٔ تقسیم حتماً یکی از اعداد ۰ تا ۴ خواهد بود پس مجموعه نسبت به عمل بسته است).

$$\begin{array}{r|l} x+y & 5 \\ \hline r & m \end{array}$$

$$\Rightarrow x+y = 5m + r \Rightarrow r = (x+y) - 5m$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in Z_5,\ x \oplus y = (x+y) - 5m$$

$$m \in \{0, 1\}$$

به عنوان مثال: $4 \oplus 3 = 2$ زیرا $4 + 3 = 7$ و باقیماندهٔ تقسیم ۷ بر ۵ برابر با ۲ است. حال $(Z_5, \oplus)$ را به‌صورت جدولی نمایش می‌دهیم:

$\oplus$	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴	۰
۲	۲	۳	۴	۰	۱
۳	۳	۴	۰	۱	۲
۴	۴	۰	۱	۲	۳

۱) بررسی خاصیت شرکت پذیری با توجه به جدول واضح و به عهدهٔ خواننده.

۲) به‌دنبال عضوی در Z_5 مانند e هستیم به قسمی که برای هر $x \in Z_5$ داشته باشیم:

$$x \oplus e = e \oplus x = x$$

$$x \oplus e = x \Rightarrow x + e - 5m_1 = x \Rightarrow e = 5m_1$$

و با توجه به اینکه باید $e \in Z_5$ باشد بنابراین $m_1 = 0$ ، یعنی:

$$\boxed{e = 0}$$

۳) برای هر عضو Z_5 مانند x به دنبال عضوی از Z_5 مانند x' هستیم به قسمی که $x \oplus x' = x' \oplus x = e = 0$.

$$x \oplus x' = 0 \Rightarrow x + x' - 5m_1 = 0 \Rightarrow x' = 5m_1 - x$$

اگر $x = 0 \Rightarrow x' = 5m_1 - 0 \xrightarrow{m_1 = 0} x' = 0$

اگر $x = 1 \Rightarrow x' = 5m_1 - 1 \xrightarrow{m_1 = 1} x' = 4$

اگر $x = 2 \Rightarrow x' = 5m_1 - 2 \xrightarrow{m_1 = 1} x' = 3$

اگر $x = 3 \Rightarrow x' = 5m_1 - 3 \xrightarrow{m_1 = 1} x' = 2$

اگر $x = 4 \Rightarrow x' = 5m_1 - 4 \xrightarrow{m_1 = 1} x' = 1$

پس $(Z_5, \oplus)$ یک گروه است. از طرفی با توجه به خاصیت جابجایی جمع معمولی در اعداد حقیقی داریم:

$$x \oplus y = (x + y) - 5m_1 = (y + x) - 5m_1 = y \oplus x$$

لذا $(Z_5, \oplus)$ یک گروه آبلی است.

به همین ترتیب در حالت کلّی می‌توان ثابت کرد که $(Z_n, \oplus)$ یک گروه جابجایی است.

تمرین: اگر $G = Z_5 - \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$ و عمل $\otimes$ را روی اعضاء این مجموعه به‌صورت زیر تعریف کنیم ثابت کنید $(Z_5 - \{0\}, \otimes)$ یک گروه جابجایی است.

$\forall x, y \in Z_5 - \{0\}$ ، $x \otimes y =$ باقیمانده تقسیم $x \times y$ بر ۵ $=$

$$x \times y - 5m \quad (m \in Z)$$

مثلاً $4 \otimes 3 = 2$ زیرا $3 \times 4 = 12$ و باقیمانده تقسیم ۱۲ بر ۵ برابر با عدد ۲ است.

●

تمرین:

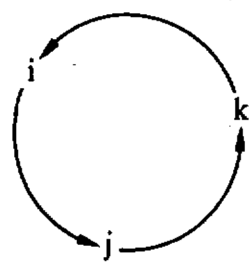
۱) نشان دهید که اگر G گروهی از مرتبهٔ زوج باشد (تعداد اعضاء G زوج است) آنگاه G دارای عضوی چون $a \neq e$ می‌باشد به قسمی که $a^{2} = e$.

۲) ثابت کنید برای هرگروه دلخواه چون G اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد آنگاه G یک گروه آبلی (جابجایی) است.

$$\forall a, b, c \in G; a * b = c * a \Rightarrow b = c$$

۳) فرض کنیم G مجموعه‌ای از عناصر به صورت $G=\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ و عمل ضرب معمولی را روی اعضاء G به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$i^{2} = j^{2} = k^{2} = -1$$
$$ij = -ji = k$$
$$jk = -kj = i$$
$$ki = -ik = j$$



ثابت کنید مجموعهٔ G با ضرب معمولی تعریف شده روی آن یک گروه است. آیا گروه آبلی است؟

۴) اگر a و b و c اعضاء گروه $(G, *)$ باشند ثابت کنید

$$((a * b) * c)^{-1} = (c^{-1} * b^{-1}) * a^{-1}$$

۵) فرض کنیم $A = \{a, b, c\}$ ثابت کنید $(P(A), \cap)$ و نیز $(P(A), \cup)$ هیچ کدام گروه نمی‌باشند.

در مسائل ۶ تا ۱۰ عمل دوتایی * را روی Z تعریف کرده‌ایم. مشخص کنید Z با کدام یک از اعمال تعریف شده تشکیل گروه می‌دهد و کدام یک گروه جابجایی است.

۶) $x * y = x + y + 1$

۷) $x * y = x + xy$

۸) $x * y = x + xy + y$

۹) $x * y = xy + y$

۱۰) $x * y = x - y$

یادداشتها

۱- Group
۲- Evariste Galois
۳- set
۴- Binary opration
۵- Function
۶- Associative
۷- Existential - uniqueness quantifier (سور وجودی یکتا)
۸- Identityelement
۹- Commutative group

ادب ریاضی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

گوشه‌ای از تاریخ ریاضیدانها

آخرین سخنان لاگرانژ از زبان مونژ

از مرگ نباید هراس داشت. وقتی که بدون درد فرارسد هیچ چیز ناگواری در آن وجود ندارد. چند دقیقهٔ دیگر، بدن من از زندگی جدا می‌شود، همه جا مرگ و نیستی خواهد بود. آری من دارم می‌میرم و این خوشایند من است. من زندگی کردم. احترام یک ریاضی دان را به دست آوردم. هرگز کینهٔ خود را به کسی نیازمودم. هیچ بدی نکرده‌ام. مرگ برایم خیلی ساده است.

از کتاب اوریست گالوا اثر لئوپولداینفلد

بخش پذیری در چند جمله ایها

(مورد استفاده دانش آموزان سال سّوم ریاضی)

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

بخش پذیری:

هرگاه باقی ماندهٔ چند جمله‌ای: $p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ بر چند جمله‌ای: $g_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1}+ ... + b_m$ را به $R_{m-1}(x)$ و خارج قسمت این تقسیم را به $q_{n-m}(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$p_n(x) = g_m(x)q_{n-m}(x) + R_{m-1}(x)$ لازم به توضیح است که اندیسهای فوق نشان دهندهٔ درجهٔ چند جمله‌ای است یعنی اندیس n و m و n − m و m − ۱ به ترتیب نشان‌دهندهٔ درجهٔ چند جمله‌ای p(x) و g(x) و q(x) و R(x) می‌باشد. برای توضیح اندیسهای منتخب خارج قسمت و باقی مانده می‌توان گفت که بزرگترین جملهٔ توان دار در خارج قسمت تقسیم $p_n(x)$ بر $g_m(x)$ عبارت است از: $\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$ و یا به‌عبارت ساده‌تر: $\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ که در واقع این جمله درجهٔ خارج قسمت را تعیین می‌کند. به همین علت درجهٔ q(x) برابر n − m است. و همچنین درجهٔ انتخاب شده برای باقی مانده به این علت است که تقسیم مقسوم بر مقسومٌ علیه وقتی خاتمه می‌یابد که درجهٔ باقی‌مانده حداقل یک درجه از درجهٔ مقسومٌ علیه کمتر باشد. به همین علت درجهٔ باقی مانده معمولاً m−۱ است در صورتی که درجهٔ مقسومٌ علیه برابر m باشد.

مثال ۱: در یک تقسیم در صورتی که درجهٔ باقی مانده ۴ و درجهٔ خارج قسمت ۷ باشد درجهٔ مقسوم چیست؟

حل: در صورتی که درجهٔ مقسوم را به n و درجهٔ مقسومٌ علیه را به m نشان دهیم درجهٔ خارج قسمت برابر n − m و درجهٔ باقی مانده برابر m − ۱ می‌شود. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m - ۱ = ۴ \Rightarrow m = ۵ \\ n - m = ۷ \Rightarrow n = m + ۷ \end{cases} \Rightarrow$$

$$n = ۵ + ۷ = ۱۲ , \quad \overset{\text{درجهٔ مقسوم}}{n = ۱۲}$$

۱) بخش پذیری چند جمله‌ای p(x) بر x − a:

بنابر آنچه در قبل گفته شده در صورتی‌که خارج قسمت p(x) بر (x − a) را به q(x) نمایش داده و باقی ماندهٔ آن را به R نمایش دهیم در این صورت خواهیم داشت: $p(x) = (x - a)\, q(x) + R$ در این رابطه R یک عدد حقیقی است (زیرا درجهٔ مقسومٌ علیه برابر یک است). رابطهٔ اخیر به ازای هر x حقیقی برقرار است. بنابراین با اختیار x = a داریم: $p(a) = (a - a)\, q(a) + R$ و نتیجه می‌شود: $R = p(a)$ یعنی باقی ماندهٔ p(x) بر (x − a) برابر است با: p(a). بنابراین برای تعیین باقی ماندهٔ چند جمله‌ای مفروض p(x) بر (x − a) کافی است p(a) را پیدا کنیم. بنابراین اگر $p(a) = ۰$ آنگاه p(x) بر (x − a) بخش پذیر است.

مثال ۲: باقی ماندهٔ $p(x)= x^۷ - ۳x^۵ + x^۲ - ۱$ را بر x + ۱

پیدا کنید.

حل: می‌دانیم $R = p(a)$ بنابراین داریم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow a=-1$$

$$R=p(-1)=(-1)^7-3(-1)^5+(-1)^2-1=$$

باقی مانده:

$$-1+3+1-1=2 \Rightarrow R=2$$

مثال ۳: s و k را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای، $p(x)=x^5+kx^3+sx^2+3$ بر $x-1$ بخش پذیر و باقی‌ماندهٔ آن بر $x+1$ برابر -4 باشد.

حل: چون باید $p(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد بنابراین باید باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $(x-1)$ برابر صفر و یا $p(1)=0$ باشد. و چون باقی ماندهٔ $p(x)$ بر $x+1$ برابر -4 شده است بنابراین $p(-1)=-4$ است. و در نتیجه از دستگاه مقابل s و k محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} p(1)=0 \\ p(-1)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(1)=1+k+s+3=0 \\ p(-1)=-1-k+s+3=-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s+k=-4 \\ s-k=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=-5 \\ k=1 \end{cases}$$

بنابراین چند جمله‌ای مفروض چنین است:

$$p(x)=x^5+x^3-5x^2+3$$

مثال ۴: در چند جمله‌ای: $p(x)=x^4+ax^3+3x^2+4x+1$ مقدار a را چنان تعیین کنید که $p(x)$ بر $(x+a)$ بخش پذیر باشد.

حل: برای اینکه $p(x)$ بر $(x+a)$ بخش پذیر باشد باید داشته باشیم: $x+a=0 \Rightarrow x=-a$

$$p(-a)=R \Rightarrow R=0 \Rightarrow p(-a)=0$$

$$p(-a)=(-a)^4+a(-a)^3+3(-a)^2+4(-a)+1=0 \Rightarrow$$

$$3a^2-4a+1=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ \text{یا} \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$$

۲) تعیین خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)$:

چند جمله‌ای: $p(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$ را در نظر می‌گیریم، خارج قسمت این چند جمله‌ای بر $x-a$ یک چند جمله‌ای است از درجهٔ $n-1$، که فرض می‌کنیم این چند جمله‌ای به صورت: $g(x)=B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots+B_{n-1}$ باشد. در اینجا می‌خواهیم روشی را ارائه دهیم که بدون عمل تقسیم بتوان ضرایب B_0 و B_1 و ... و B_{n-1} را پیدا کنیم و درنتیجه توانسته‌ایم خارج قسمت تقسیم را مشخص کنیم. همانطور که از قضیهٔ تقسیم نتیجه می‌شود در اینجا باید داشته باشیم

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n=(x-a)(B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots+B_{n-1})+R$$

که R باقی مانده است. پس از ضرب و مرتب کردن طرف دوم داریم:

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n \equiv B_0x^n+(B_1-aB_0)x^{n-1}+(B_2-aB_1)x^{n-2}+\ldots+(B_k-aB_{k-1})x^{n-k}+\ldots+R$$

از تساوی ضرایب جمله‌های هم درجه خواهیم داشت:

$$A_0=B_0\ ,\ A_1=B_1-aB_0\ ,\ \ldots\ ,\ A_k=B_k-aB_{k-1}\ ,\ \ldots\ ,\ A_n=R-aB_{n-1}$$

و یا:

$$A_0=B_0\ ,\ B_1=A_1+aB_0\ ,\ \ldots\ ,\ B_k=A_k+aB_{k-1}\ ,\ \ldots\ ,\ R=A_n+aB_{n-1}$$

بنابراین در این‌جا به طور زنجیروار ضرایب خارج قسمت را بدون تقسیم می‌توان به‌دست آورد.

مثال ۵: خارج قسمت تقسیم $p(x)=x^5-3x^3+2x+1$ بر $x-2$ را به‌دست آورید (بدون استفاده از تقسیم).

حل: خارج قسمت تقسیم از درجهٔ ۴ است و می‌توان آن را چنین فرض کرد:

$$q(x)=B_0x^4+B_1x^3+B_2x^2+B_3x+B_4$$

و در نتیجه از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم: $a=2$.

$$B_0=A_0=1\ ,\ B_1=A_1+aB_0=0+2\times1=2\ ,\ B_2=A_2+aB_1=-3+2\times2=1$$

$$B_3=A_3+aB_2=0+2\times1=2, B_4=A_4+aB_3=2+2\times2=6, R=A_5+aB_4=1+2\times6=13 \Rightarrow R=13$$

باقی‌مانده:

بنابراین خارج قسمت تقسیم چنین است :

$$q(x)=x^4+2x^3+x^2+2x+6$$

مثال ۶ :باقی ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر ax^n+b را در صورتی که داشته باشیم: $p(x)=ax^{3n+2}+bx^{2n+1}+c$ به‌دست آورید.

حل : برای به‌دست آوردن باقی ماندهٔ تقسیم ابتدا $p(x)$ را برحسب قوای x^n منظم می‌کنیم. و سپس $x^n=-\frac{b}{a}$ قرار می‌دهیم که در این‌صورت باقی ماندهٔ تقسیم به‌دست می‌آید و داریم :

$$(ax^n+b=0 \Rightarrow x^n=-\frac{b}{a})\ p(x)=a(x^n)^3x^2+b(x^n)^2x+c$$

و با جایگزینی داریم :

$$R(x)=a(-\frac{b}{a})^3x^2+b(-\frac{b}{a})^2x+c$$

و یاپس از اختصار لازم داریم:

$$R(x)=-\frac{b^3}{a^2}x^2+b(-\frac{b^3}{a^2})x+c$$

۳) تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر ax^n+b:

به‌طور کلی برای تعیین باقی ماندهٔ $p(x)$ بر ax^n+b ابتدا $p(x)$ را بر حسب قوای x^n منظم می‌کنیم و سپس $x^n=-\frac{b}{a}$ قرار می‌دهیم و باقی‌مانده به‌دست می‌آید.

مثال ۷ : باقی‌ماندهٔ $P(x)=x^{27}-2x^6+3x^5-x^3+x-1$ را بر x^3+1 پیدا کنید.

حل : $P(x)$ را برحسب قوای x^3 منظم می‌کنیم بنابراین داریم $P(x)=(x^3)^9-2(x^3)^2+3(x^3)x^2-x^3+x-1$ و با جایگزینی $x^3=-1$ داریم:

$$R(x)=(-1)^9-2(-1)^2+3(-1)x^2-(-1)+x-1$$

پس از اختصار لازم داریم: $R(x)=-3x^2+x-3$

۴) تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر ax^2+bx+c:

روش اول : برای تعیین باقی ماندهٔ $p(x)$ بر ax^2+bx+c ابتدا $p(x)$ رابرحسب قوای x^2 مرتب‌کرده وسپس $x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ را قرار می‌دهیم که در این صورت عبارت حاصله باقی ماندهٔ تقسیم است.

مثال ۸ : اگر عبارت $p(x)=x^4+1$ بر x^2-mx+n بخش پذیر باشد، m و n را حساب کنید.

حل : ابتدا باقی ماندهٔ $p(x)$ را بر x^2-mx+n پیدا می‌کنیم و سپس آن را متحد با صفر قرار می‌دهیم یعنی m و n را طوری تعیین می‌کنیم که باقی مانده بازاء جمیع مقادیر متغیر x برابر صفر باشد، در این صورت داریم: $R(x)\ \equiv\ 0$ که ضرایب کلیهٔ درجات متغیر برابر صفر خواهد بود. بنابراین داریم:

$$x^2-mx+n=0 \Rightarrow x^2=mx-n$$

$$x^2=mx-n \Rightarrow R(x)=(mx-n)^2+1=$$

$$m^2x^2-2mnx+n^2+1$$

$$R(x)=m^2(mx-n)-2mnx+n^2+1=(m^3-2mn)$$

$$x-m^2n+n^2+1\equiv0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m^3-2mn=0 \Rightarrow m(m^2-2n)=0 \begin{cases} m=0 \\ m^2=2n \end{cases} \\ n^2-m^2n+1=0 \end{cases}$$

به ازای $m=0$ در معادلهٔ دوم دستگاه جواب حقیقی نداریم.

ولی به ازای $m^2=2n$ معادلهٔ دوم دستگاه چنین می‌شود: $n^2-2n^2+1=0$ و در نتیجه مقدار m و n محاسبه می‌شوند یعنی داریم: $n^2=1 \Rightarrow n=\pm1$.به ازای $n=-1$ مقدار m غیر حقیقی است. و به ازای $n=1$ دو مقدار برای m به‌دست می‌آید و داریم :

$n=1 \Rightarrow m^2=2 \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$ و در نتیجه اگر $n=1$ آنگاه

$m = \pm \sqrt{2}$ و بنابراین جواب مسئله $n=1$ و $m=\sqrt{2}$ یا $n=1$ و $m = -\sqrt{2}$ است.

روش دوم: برای تعیین باقی ماندهٔ $p(x)$ بر ax^2+bx+c اگر معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد می‌توان به روش دیگر نیز آن را محاسبه کرد. اگر α و β دو ریشهٔ آن باشند، خواهیم داشت: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$. در این صورت طبق رابطهٔ بخش پذیری داریم:

$$p(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)q(x)+kx+s$$

که در این رابطه $R=kx+s$ باقی ماندهٔ تقسیم است.

حال طبق قانون بخش پذیری داریم:

$$p(\beta)=k\beta+s \text{ و } p(\alpha)=k\alpha+s$$

یعنی k و s از دستگاه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} k\alpha+s=p(\alpha) \\ k\beta+s=p(\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{p(\alpha)-p(\beta)}{\alpha-\beta} \\ s=\dfrac{\alpha p(\beta)-\beta p(\alpha)}{\alpha-\beta} \end{cases}$$

می‌دانیم $p(\alpha)$ و $p(\beta)$ به ترتیب باقی مانده‌های $p(x)$ بر $(x-\alpha)$ و $(x-\beta)$ می‌باشند و در نتیجه داریم:

$$p(\alpha)=R_1\ ,\ p(\beta)=R_2$$

مثال ۹: اگر باقی ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x+1$ و $x-1$ به ترتیب برابر ۲ و ۴- باشد باقی ماندهٔ $p(x)$ را بر x^2-1 پیدا کنید.

حل: چون داریم: $x^2-1=(x-1)(x+1)$ و $p(1)=-4$ و $p(-1)=2$ بنابراین داریم:

$$k+s=-4 \qquad (R(x)=kx+s)$$

$$k(-1)+s=p(-1)\ ,\ k+s=p(1)$$

و در نتیجه دستگاه مقابل حاصل می‌شود:

$$-k+s=2 \Rightarrow k=-3\ ,\ s=-1 \Rightarrow R(x)=-3x-1$$

مثال ۱۰: نشان دهید هرگاه باقی ماندهٔ چند جمله‌ای های: $A(x)$ و $B(x)$ بر ax^2+bx+c به ترتیب برابر $kx+s$ و $mx+n$ باشند برای تعیین باقی ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر ax^2+bx+c کافی است باقی ماندهٔ: $(kx+s)(mx+n)$ را بر ax^2+bx+c پیدا کنیم.

حل: بنابر قانون بخش پذیری داریم:

$$\begin{cases} A(x)=q_1(x)(ax^2+bx+c)+kx+s \\ B(x)=q_2(x)(ax^2+bx+c)+mx+n\ ,\ A(x)B(x)= \end{cases}$$

$$q_3(x)(ax^2+bx+c)+R(x) \qquad (1)$$

در اینجا کافی است $R(x)$ را تعیین کنیم. بنابراین حاصل ضرب $A(x)$ و $B(x)$ را به‌دست می‌آوریم و از آنجا با مقایسه می‌توان $R(x)$ را به‌دست آورد. یعنی:

$$A(x)B(x)=[q_1(x)(ax^2+bx+c)+kx+s][q_2(x)(ax^2+bx+c)+mx+n]$$

$$A(x)B(x)=q_1(x)q_2(x)(ax^2+bx+c)^2+[(mx+s)q_1(x)+(kx+s)q_2(x)](ax^2+bx+s)+(kx+s)(mx+n)$$

$$A(x)B(x)=\underbrace{[q_1(x)q_2(x)(ax^2+bx+c)+(mx+s)q_1(x)+(kx+s)q_2(x)]}_{q_3(x)}\times(ax^2+bx+s)+(kx+s)(mx+n) \qquad (2)$$

بنابراین در اینجا با مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) داریم:

$$A(x)B(x)=q_3(x)(ax^2+bx+s)+\underbrace{(kx+s)(mx+n)}_{R(x)}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$R(x)=(kx+s)(mx+n)$$

از آنجا که باقی ماندهٔ هر تقسیم حداقل یک درجه از درجهٔ مقسوم علیه کمتر است بنابراین باقی ماندهٔ $A(x)B(x)$ از تقسیم نهایی $R(x)$ بر ax^2+bx+c به‌دست می‌آید و در نتیجه باقی‌ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر ax^2+bx+c برابر باقی ماندهٔ $R(x)=(kx+s)(mx+n)$ بر ax^2+bx+c می‌باشد. در اینجا برای روشن شدن مطلب یک مثال عددی حل می‌کنیم. مثلاً اگر باقی ماندهٔ $A(x)$ و $B(x)$ بر x^2-3x+2 به ترتیب $x+2$ و $x-2$ باشد باقی‌ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 را پیدا کنید.

حل: برای به‌دست آوردن باقی ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 کافی است باقی‌ماندهٔ x^2-4 را بر x^2-3x+2 پیدا کنیم. بنابراین داریم:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x^2=3x-2 \Rightarrow R(x)=(3x-2)-4=3x-6$$

و در نتیجه باقی‌ماندهٔ $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 برابر $3x-6$ می‌باشد.

مثال ۱۱ : نشان دهید در صورتی که $p(x)$ بر $x^{n+1}-1$ بخش‌پذیر باشد بر $x+1$ ، $g(x)=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1$ نیز بخش‌پذیر است.

حل : کافی است به اتحاد: $(x-1)(x^n+x^{n-1}+...+x+1)=x^{n+1}-1$ توجه کنیم. زیرا اگر $p(x)$ بر $x^{n+1}-1$ و یا $(x-1)(x^n+x^{n-1}+...+x+1)$ بخش‌پذیر باشد بر هر یک از عامل‌های مقسوم یعنی $x-1$ و $x^n+x^{n-1}+...+x+1$ نیز بخش‌پذیر است. به‌عنوان مثال اگر عبارتی بر x^5+1 بخش‌پذیر باشد بر عامل‌های آن (عامل‌های مقسوم‌علیه) یعنی $x+1$ و $x^4-x^3+x^2-x+1$ نیز بخش‌پذیر است. زیرا داریم: $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ بنابراین در اینجا نتیجه می‌شود که اگر عبارتی بر عبارت دیگر بخش‌پذیر باشد بر عامل‌های آن عبارت نیز بخش‌پذیر است.

مثال ۱۲ : اگر p و q و r و s و t اعداد طبیعی باشند ثابت کنید،

$$A(x)=x^{14p+6}-x^{14q+5}+x^{14r+4}-x^{14r+3}+x^{14s+2}-x^{14s+1}+x^{14t}$$

بر

$$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$$

بخش‌پذیر است.

حل : در این مسئله کافی است ثابت کنیم $A(x)$ بر x^7+1 بخش‌پذیر است. بنابراین $A(x)$ را برحسب توان‌هایی از ۷ منظم می‌کنیم و با در نظر داشتن $x^7+1=0$ به‌جای x^7 مقدار -1 را قرار می‌دهیم. یعنی :

$$A(x)=(x^7)^{2p}\ x^6-(x^7)^{2q}\ x^5+(x^7)^{2r}\ x^4-(x^7)^{2r}\ x^3+(x^7)^{2s}x^2-(x^7)^{2s}x+(x^7)^{2t}$$

$$R(x)=(-1)^{2p}x^6-(-1)^{2q}x^5+(-1)^{2r}x^4-(-1)^{2r}x^3+(-1)^{2s}x^2-(-1)^{2s}x+(-1)^{2t}=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0$$

بنابراین $A(x)$ بر عبارت مفروض بخش‌پذیر است. زیرا باقی‌ماندهٔ تقسیم $R(x)$ بر $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$ برابر صفر است.

۵) بخش‌پذیری $p(x)$ بر $(x-a)^n$:

اگر $p(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد آنگاه، $p(x)=(x-a)^n q(x)$ و بنابراین با مشتق گیری مکرر تا $(n-1)$ مرتبه از این رابطه خواهیم دید که عامل $(x-a)$ باز هم موجود خواهد بود و در نتیجه با قرار دادن $x=a$ داریم $p^{(n-1)}(a)=0$ یعنی اگر از $p(x)$ به‌طور مکرر $(n-1)$ مرتبه مشتق بگیریم عبارت حاصل که $p^{(n-1)}(x)$ می‌باشد باز هم بر $x-a$ بخش پذیر است، به‌عبارت دیگر چون، $p^{(n-1)}(a)=0$ بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $p^{(n-1)}(x)$ بر $x-a$ صفر است و در نتیجه $p^{(n-1)}(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. و در اینجا از نتیجهٔ فوق می‌توان قضیه زیر را استخراج کرد.

قضیه : شرط لازم و کافی برای آنکه چند جمله‌ای $p(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد آن است که $p(x)$ و همهٔ مشتقات متوالی آن تا مرتبهٔ $(n-1)$ ام بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشند. یعنی داشته باشیم:

$$p(a)=p'(a)=p''(a)=...=p^{(n-1)}(a)=0$$

مثال ۱۳ : به ازای چه مقادیری از a و b و c عبارت درجهٔ چهارم $p(x)=x^4+ax^2+bx+c$ بر $(x+1)^3$ بخش‌پذیر است.

حل : شرط این‌که $p(x)$ بر $(x+1)^3$ بخش‌پذیر باشد این‌است که $p(x)$ و $p'(x)$ و $p''(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر باشند. با دوبار مشتق‌گیری داریم :

$$p'(x)=4x^3+2ax+b\ ,\ p''(x)=12x^2+2a$$

چون $p(x)$ و $p'(x)$ و $p''(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیرند بنابراین داریم:

$$x+1=0\ ,\ x=-1$$

$$\Rightarrow p(-1)=(-1)^4+a(-1)^2+b(-1)+c=0$$

$$\Rightarrow p(-1)=1+a-b+c=0 \qquad (1)$$

$$p'(-1)=4(-1)^3+2a(-1)+b=0$$

$$\Rightarrow p'(-1)=-4-2a+b=0 \qquad (2)$$

$$p''(-1)=12(-1)^2+2a=0 \Rightarrow 12+2a=0 \Rightarrow a=-6 \qquad (3)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) مقادیر a و b و c به‌دست می‌آیند یعنی داریم:

$a=-6: -4-2a+b=0 \Rightarrow$
$-4-2(-6)+b=0 \Rightarrow b=-8$
$a=-6, b=-8: 1+a-b+c=0 \Rightarrow 1-6-(-8)+c = 0 \Rightarrow c=-3$

و بنابراین $p(x)$ مشخص می‌شود یعنی:

$$p(x)=x^4-6x^2-8x-3$$

مثال ۱۴ : در چند جمله‌ای: $p(x)=x^3+px^2+qx+R$ مقادیر p و q و R را چنان تعیین کنید که $p(x)$ بر $(x-1)^2$ و $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

حل : فرض می‌کنیم که $p(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیراست بنابراین $p'(x)$ نیز بر $(x-1)$ بخش پذیر است و داریم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad (1)$$
$$p(1)=(1)^3+p(1)^2+q(1)+R=0,$$

$$p'(x)=3x^2+2px+q \Rightarrow p'(1)= 3(1)^2+2p(1)+q=0 \quad (2)$$

از طرفی دیگر $p(x)$ بر $x+2$ نیز باید بخش‌پذیر باشد بنابراین داریم: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$$p(-2)=(-2)^3+p(-2)^2+q(-2)+R=0 \quad (3)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) دستگاه سه معادله و سه مجهول تشکیل می‌شود که از حل این دستگاه پارامترهای مطلوب محاسبه می‌شوند یعنی:

از حل دستگاه فوق داریم:

$$\begin{cases} p+q+R=-1 \\ 2p+q=-3 \\ 4p-2q+R=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ q=-3 \\ R=2 \end{cases}$$

و در نتیجه $p(x)$ مشخص می‌شود یعنی: $p(x)=x^3-3x+2$

۶) بخش‌پذیری $x^n \pm a^n$ بر $x \pm a$:

در اینجا لازم است چهار حالت را مورد بررسی قرار دهیم و شرط بخش‌پذیری را برای هر یک از حالات چهارگونه به‌دست آوریم.

۱) $p(x)=x^n+a^n$ بر $x-a$ هرگز بخش‌پذیر نیست زیرا داریم: $R=p(a)=2a^n$.

۲) $p(x)=x^n+a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش‌پذیر است که n فرد باشد. زیرا داریم:

$x+a=0 \Rightarrow x=-a: R=p(-a)=(-a)^n+a^n=0 \Rightarrow n=2k-1:$

و می‌دانیم:

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+\ldots-a^{n-2}x+a^{n-1})$$

۳) $p(x)=x^n-a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش‌پذیر است که n زوج باشد. زیرا داریم:

$x+a=0 \Rightarrow x=-a: R=p(-a)=(-a)^n-a^n=0$

$n=2k:$ و می‌دانیم: $x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x-a^{n-1})$

۴) $p(x)=x^n-a^n$ بر $x-a$ همواره بخش‌پذیر است. زیرا داریم: $x-a=0 \Rightarrow x=a: R=p(a)=a^n-a^n=0$

و می‌دانیم: $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1})$

مثال ۱۵ : آیا عبارت $x^{15}+y^{45}$ بر $x+y^3$ بخش‌پذیر است؟

حل: بله، زیر داریم:

$$x+y^3=0 \Rightarrow x=-y^3: R=(-y^3)^{15}+y^{45}=-y^{45}+y^{45}=0$$

مثال ۱۶ : آیا عبارت x^4-16 بر $x+2$ و $x-2$ بخش‌پذیر است؟

حل: بله، زیراداریم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2, x+2=0 \Rightarrow x=-2$$
$$: R=(\pm 2)^4-16=16-16=0$$

مثال ۱۷: آیا عبارت x^7+y^{14} بر $x-y^2$ بخش‌پذیر است؟

حل: خیر، زیرا داریم:

$$x-y^2=0 \Rightarrow x=y^2:$$
$$R=(y^2)^7+y^{14}=y^{14}+y^{14}=2y^{14}$$

۷: بخش پذیری $p(x)=x^n \pm a^n$ بر $x^k \pm a^k$ (با فرض: $n,k\in N$ و $a>0$):

در این جا نیز چهار حالت ممکن را در نظر می‌گیریم و مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱) $p(x)=x^n+a^n$ بر x^k-a^k بخش‌پذیر نیست. زیرا داریم:

$$x^k-a^k=0 \Rightarrow x^k=a^k \Rightarrow \begin{cases} k \text{ زوج}: x=\pm a \\ k \text{ فرد}: x=a \end{cases} \Rightarrow$$

$$R=(\pm a)^n+a^n \Rightarrow \begin{cases} n \text{ زوج}: R=2a^n \\ n \text{ فرد}: R=2a^n \text{ و } R=0 \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر مقدار n و k، $p(x)$ بر x^k-a^k بخش‌پذیر نیست. بدیهی است که در حالت k زوج و n فرد $p(x)$ باید بر $x-a$ و $x+a$ بخش‌پذیر باشد که می‌دانیم $p(x)=x^n+a^n$ بر $x-a$ بخش‌پذیر نیست.

۲) $p(x)=x^n+a^n$ بر x^k+a^k وقتی بخش‌پذیر است که $\frac{n}{k}$ عددی فرد باشد. به‌عنوان مثال عبارت $x^{48}+1$ بر $x^{16}+1$ بخش‌پذیر است زیرا داریم: $\frac{48}{16}=3$ و بنابراین داریم: $x^{48}+1=(x^{16})^3+1$ و $x^{16}=-1$ و در نتیجه، $R=(-1)^3+1=0$.

۳) $p(x)=x^n-a^n$ بر x^k+a^k وقتی بخش‌پذیر است که $\frac{n}{k}$ زوج باشد، یعنی: $\frac{n}{k}=2t$. زیرا داریم:

بافرض

$$n=2kt: p(x)=x^{2kt}-a^{2kt}=(x^{kt}-a^{kt})(x^{kt}+a^{kt})$$
$$p(x)=[(x^k)^t-(a^k)^t][(x^k)^t+(a^k)^t] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t= \text{فرد}: \text{عامل } (x^k)^t+(a^k)^t \text{ بر } x^k+a^k \text{ بخش‌پذیراست} \\ t= \text{زوج}: \text{عامل } (x^k)^t-(a^k)^t \text{ بر } x^k+a^k \text{ بخش‌پذیراست} \end{cases}$$

به‌عنوان مثال $x^{48}-1$ بر x^6+1 و x^4+1 و x^3+1 و x^2+1 بخش‌پذیر است، زیرا داریم: $\frac{48}{2}=24$ و $\frac{48}{3}=16$ و $\frac{48}{4}=12$ و $\frac{48}{6}=8$.

۴) $p(x)=x^n-a^n$ بر x^k-a^k وقتی بخش‌پذیر است که n بر k قابل قسمت باشد یعنی داشته باشیم: $n=kt$ زیرا اگر n را بر k تقسیم کنیم داریم، $n=kt+r$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$p(x)=x^{kt+r}-a^{kt+r} \Rightarrow p(x)=(x^k)^t x^r-a^{kt+r}$ و اگر قرار دهیم $x^k=a^k$ باقی‌ماندهٔ تقسیم چنین است:

$$R=(a^k)^t x^r-a^{kt+r}=a^{kt}(x^r-a^r)$$

برای آنکه باقی ماندهٔ صفر شود باید داشته باشیم: $x^r-a^r=0$ که چون $x\neq a$ لذا $r=0$ و در نتیجه به‌دست می‌آید: $n=kt$.
به‌عنوان مثال $p(x)=x^{36}-y^{54}$ بر x^9-y^{18} بخش‌پذیر است زیرا داریم:

$$x^9-y^{18}=0 \Rightarrow x^9=y^{18}: R(x)=(y^{18})^4-y^{54}=y^{54}-y^{54}=0$$

مثال ۱۸: آیا عبارت $p(x)=64A^{12}B^{18}-C^6D^{24}$ بر $8A^6B^9-C^3D^{12}$ بخش‌پذیر است؟

حل: ابتدا $p(x)$ را برحسب توانی از ۶ منظم می‌کنیم یعنی: $p(x)=(2A^2B^3)^6-(CD^4)^6$ سپس مقسومٌ علیه را برحسب توانی از ۳ منظم می‌کنیم یعنی:

$$8A^6B^9-C^3D^{12}=(2A^2B^3)^3-(CD^4)^3$$

بافرض $\begin{cases} x=2A^2B^3 \\ y=CD^4 \end{cases}$، $p(x)$ و مقسومٌ علیه چنین می‌شوند:

$$p(x)=x^6-y^6,\ (2A^2B^3)^3-(CD^4)^3=x^3-y^3$$

چون $\frac{n}{k}=\frac{6}{3}=2$ عددی است صحیح بنابراین n بر k بخش‌پذیر است و در نتیجه $p(x)$ بر x^3-y^3 بخش‌پذیر است و داریم: $\frac{p(x)}{x^3-y^3}=\frac{x^6-y^6}{x^3-y^3}=x^3+y^3$. بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم صفر و خارج قسمت آن چنین است: $q(x)=x^3+y^3=8A^6B^9+C^3D^{12}$.

مسائل بخش پذیری:

۱) در یک تقسیم در صورتی که درجهٔ خارج قسمت ۵ و درجهٔ باقی‌مانده ۳ باشد درجهٔ مقسوم چیست؟

۲) در چند جمله‌ای $p(x)=x^5+ax^3+bx^2+c$: مقادیر a و c و b را طوری تعیین کنید که $p(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر باشد و باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+2$ برابر -3 شود.

۳) خارج قسمت و باقی ماندهٔ تقسیم: $p(x)=x^5-3x+1$ را بر $x-1$ بدون عمل تقسیم به‌دست آورید.

۴) باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)=x^{45}-3x^{30}+2x^{15}-x^5+1$ بر x^5+1 را حساب کنید.

۵) اگر عبارت $p(x)=x^8+16$ بر $x^{40}-mx^2+n$ بخش پذیر باشد m و n را حساب کنید.

۶) باقی ماندهٔ تقسیم $p(x)=x^5-3x^3+2x+1$ را بر x^2+x-2 به‌دست آورید.

۷) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $A(x)$ بر $x+2$ و $x-1$ به ترتیب برابر -2 و 1 باشد باقی‌ماندهٔ تقسیم $A(x)$ بر x^2+x-2 را به‌دست آورید.

۸) نشان دهید اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $A(x)$ بر $g(x)$ برابر R_1 و باقی‌ماندهٔ تقسیم $B(x)$ بر $g(x)$ برابر R_2 باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $A(x)B(x)$ بر $g(x)$ برابر با باقی‌ماندهٔ تقسیم R_1R_2 بر $g(x)$ است.

۹) اگر باقی‌ماندهٔ $A(x)$ بر x^2-3x+2 برابر $x-1$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم $B(x)$ بر x^2-3x+2 برابر $x+2$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $A(x)B(x)$ بر x^2-3x+2 را تعیین کنید.

۱۰) باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^{5n+20k+1}$ را بر $x^4+x^3+x^2+x+1$ به‌دست آورید.

۱۱) اگر A و B و C اعداد طبیعی باشند، ثابت کنید عبارت:
$A(x)=x^{12A+1}+x^{20B+2}+x^{40C+3}+1$ بر x^3+x^2+x+1 بخش پذیر است.

۱۲) در تقسیم $p(x)=x^5+kx^3+sx^2+t$ مقادیر k و s و t را چنان تعیین کنید که $p(x)$ بر $(x+1)^3$ بخش پذیر باشد.

۱۳) آیا عبارت $x^{30}+y^{135}$ بر x^2+y^9 بخش‌پذیر است؟

۱۴) در عبارت $A(x)=x^{77}+y^{7n}$ مقدار n را چنان تعیین کنید که عبارت $A(x)$ بر $x^{11}+y^5$ بخش پذیر باشد.

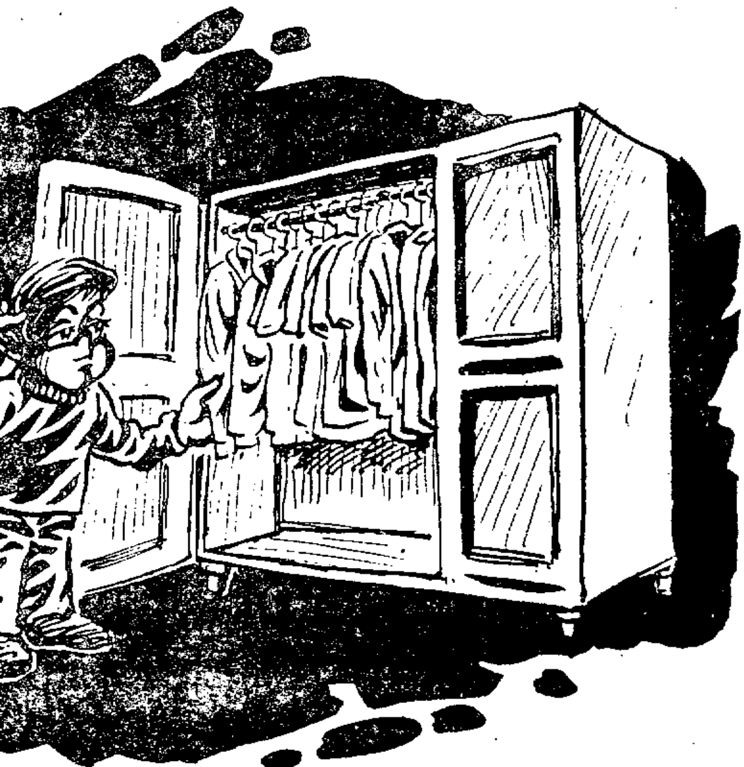
۱۵) عبارت $x^{96n}+k^{3n}$ به ازای چه مقادیری از k و n برعبارت $x^{32}+k$ بخش‌پذیر است.

تفریح اندیشه

(از: Games of Logic, Pierre Berloquin)

کمد پیراهنهای تیمور دارای ۱۷ پیراهن آبی، ۱۱ زرد، ۹ نارنجی، ۳۴ سبز، و ۲ بنفش است که مطابق رنگهاشان قرار نگرفته‌اند.
برق رفته و تیمور نمی‌تواند رنگهای پیراهنها را تشخیص دهد. در این صورت تیمور چند پیراهن باید بردارد تا مطمئن شود که حداقل دو پیراهن از یک رنگ را برداشته است؟

جواب: پنج رنگ موجود است. پنج پیراهن اول ممکن است همه به رنگهای مختلف باشند، در حالی که شش پیراهن اول نمی‌توانند.



تفریح اندیشه

(از : دانشنامهٔ علائی، رسالهٔ منطق. بوعلی سینا)
به تصحیح : دکتر محمد معین و سید محمد مشکوه

دانستن دوگونه است

یکی اندر رسیدن، که به تازی تصور خوانند، چنانکه اگر کسی گوید : مردم، یا پری، یا فرشته و هر چه بدین ماند تو فهم کنی؛ و تصور کنی، و اندر یابی.

و دوم، گرویدن چنانکه بگروی که پری هست، و مردم زیر فرمان است، و هر چه بدین ماند؛ و این را به تازی تصدیق گویند.

و این هر دو دوگونه‌اند :

یکی آن است که به اندیشه شاید اندر یافتن، و چاره نبود که او را به طلب از راه خود شاید به جای آوردن، چنانکه اندر رسیدن به چه چیزی روان، و تصور کردن وی؛ و چنانکه گرویدن به نامردن روان، و تصدیق کردن به وی.

و دیگر آن است که او را اندر یابیم و به وی بگرویم، نه از جهت اندیشه، و نه به طلب خرد، بلکه به اول خرد دانیم.*

چنانکه دانیم که هر چه برابر باشند با یک چیز که هر یک چند وی بوند، یک با دیگر نیز برابر بوند.

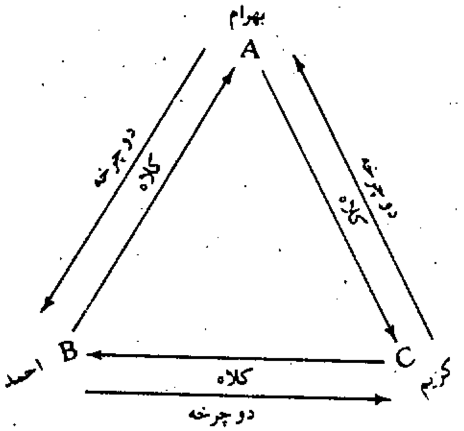
---

* این‌ها همانند که در ریاضیات به عبارات تعریف نشده و به اصول موضوعه معروف‌اند.

(از : Games of Logic , Pierre Berloquin)

احمد، بهرام و کریم سوار دوچرخه‌اند. هر یک سوار دوچرخهٔ دوستش شده و کلاه دوست دیگرش را بر سر نهاده است.

آنکه کلاه کریم را برسر دارد دوچرخهٔ بهرام را می‌راند. چه کسی بر دوچرخهٔ احمد سوار است؟



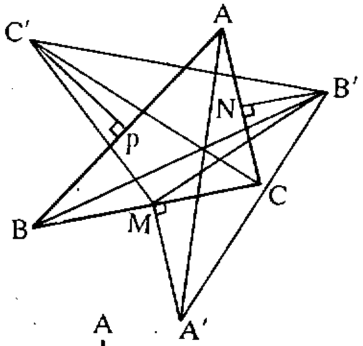
جواب : شخصی که دوچرخهٔ بهرام را می‌راند و کلاه کریم را بر سر دارد نمی‌تواند بهرام یا کریم باشد، پس احمد است.

اگر بهرام سوار بر دوچرخهٔ احمد باشد، کریم سوار بر دوچرخهٔ خود است، اما چنین نیست، بنابراین بهرام دوچرخهٔ کریم و کریم دوچرخهٔ احمد را می‌راند.

مسائل مسابقه‌ای

محمد هاشم رستمی

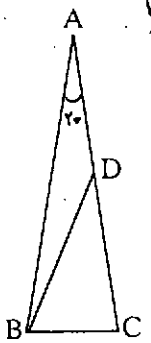
۱ ـ مثلث ABC را در نظر گرفته اوساط اضلاع BC و CA و AB را به ترتیب M و N و P می‌نامیم و در خارج مثلث پاره خطهای MA' و NB' و PC' را به ترتیب عمود بر BC و CA و AB و مساوی نصف آنها رسم می‌کنیم. ثابت کنید:



اولاً ـ مثلث $B'MC'$ قائم الزاویهٔ متساوی الساقین است.

ثانیاً ـ $A'B'$ و CC' بر هم عمود و با هم مساویند.

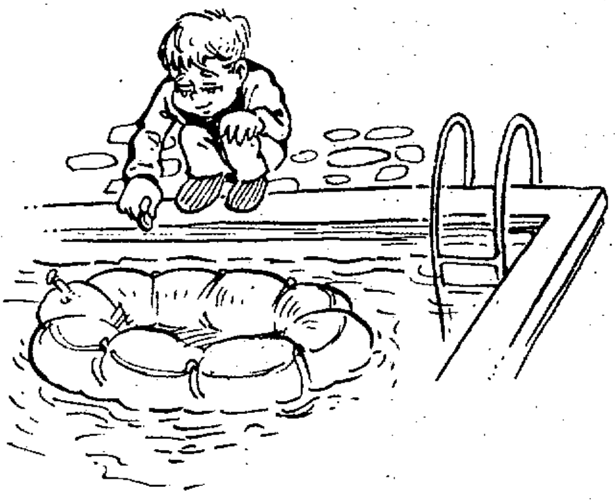
ثالثاً ـ خطوط AA' و BB' و CC' از یک نقطه می‌گذرند.



۲ ـ در مثلث متساوی الساقین ABC ، $(AB=AC)$ اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}=20^\circ$ است. روی ساق AC از نقطهٔ A به طرف C پاره خط AD را مساوی قاعده BC جدا می‌کنیم و از D به B وصل می‌نماییم. اندازهٔ زاویهٔ BDC را محاسبه کنید.

تفریح اندیشه

(از : Games of Logic , Pierre Berloquin)



در استخری یک قایق لاستیکی باد شده انداخته‌ایم. کدام عمل سطح آب را بالاتر می‌آورد : انداختن سکه‌ای درون قایق، یا انداختن سکه‌ای در آب؟

جواب : انداختن سکه در قایق، زیرا سکه در آب به اندازهٔ حجمش آب را تغییر حجم می‌دهد، در حالی که در قایق به اندازهٔ آب هم وزنش آن را جابه‌جا می‌کند، و از آنجا که سکهٔ فلزی از آب سنگین‌تر است، سکه بیش از آب هم حجمش وزن دارد.

مسائل برای حل

(مورد استفاده دانش آموزان سالهای اوّل تا چهارم دبیرستان)

سال اوّل

جبر سال اوّل

سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱) عبارت $A(x)=\sqrt{x+۱}+\frac{x^۳+۱}{x^۲-۱}-\frac{۳x+۳}{x(x^۲-۲)}$ در مجموعه اعداد حقیقی به‌ازاء چه مقادیری از x تعریف شده است (دامنه تعریف $A(x)$). سپس $A(-۱)$ و $A(-۳)$ را به‌دست آورید.

۲) عبارتهای $A=۲a^۲b^۳cx^۳y^۴z^۵$ و $B=-۴ab^۲c^۲x^۲y^۳z^۷$ و $C=-۶a^۳bd^۲xyz$ را در نظر می‌گیریم:

a) عبارت $\frac{A^۲C}{B}$ نسبت به x و y و z و t و a و b و abc و xyzt از درجه چند است؟

b) حاصل نسبت $\frac{A^۴+B^۴+C^۴}{ABC}$ را به‌دست آورید.

c) عامل مشترک عبارت: $A^۳+B^۳+C^۳$ را به‌دست آورید.

d) بزرگترین عامل مشترک (ب. م. م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) بین A و B و C را تعیین کنید.

۳) در عبارتهای زیر به جای؟ عبارت مناسب بنویسید:

a) $\frac{(\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴})}{\sqrt{۵}-\sqrt{۲}}=?+\sqrt{۲}$

b) $۹y^۲+?+۴p^۲q^۴=(??+۲pq^۲)^۲$

c) $x^۲-۴a^۲b^۲x+?=(x-??)^۲$

d) $\left(۱+\frac{۲x^ny^n}{x^{۲n}+y^{۲n}}\right)\left(۱-\frac{۲x^ny^n}{(x^n+y^n)^۲}\right)=?$

e) $۱+۴x^۴=(۱+۲x+۲x^۲)(?)$

f) $(x^۵+۱)\div(x+۱)=?$

g) $\sqrt[۵]{۳\sqrt[۵]{۲\sqrt[۵]{۳\sqrt[۵]{۲\cdots}}}}=?$

h) $-۲+\frac{۳}{-۲+\frac{۳}{-۲+\cdots}}=?$

i) $(۱-x^۲)(۱+x^۲)(۱+x^۴)(۱+x^۸)(۱+x^{۱۶})\ldots(۱+x^{۲^n})=۱-?$

۴) عبارتهای $A=x^۲+x+۱$ و $B=۲x^۲-۳x+۲$ و $C=۳x^۲+x-۴$ را در نظر می‌گیریم:

a) عبارت $۳A-B+۲C$ را به‌دست آورید.

b) مقدار x را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $A+B=C$.

c) عبارت $B^۲-۴A^۲$ را تجزیه کنید.

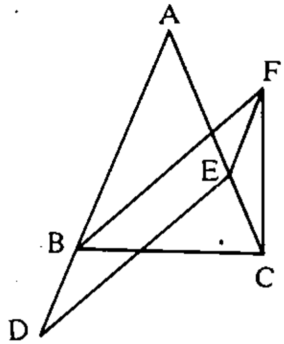
d) مقدار ABC را به ازاء $x=-۱$ حساب کنید.

e) درجه عبارت $C(B-۲A)$ را به‌دست آورده و برحسب قوای صعودی مرتب کنید.

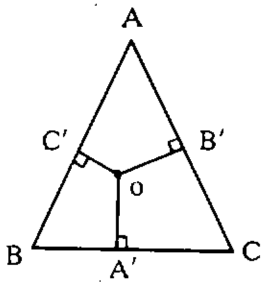
هندسه سال اوّل

محمد هاشم رستمی

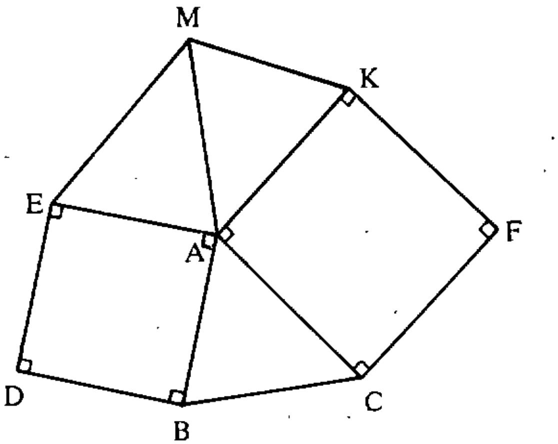
۱) در مثلث متساوی الساقین ABC ، $(AB=AC)$ در امتداد ضلع AB نقطهٔ اختیاری D و روی ضلع AC نقطه E را چنان اختیار می‌کنیم که $BD=CE$ باشد. ثابت کنید اگر با اضلاع BD و DE متوازی الاضلاع DBFE را بنا کنیم FC بر BC عمود است.



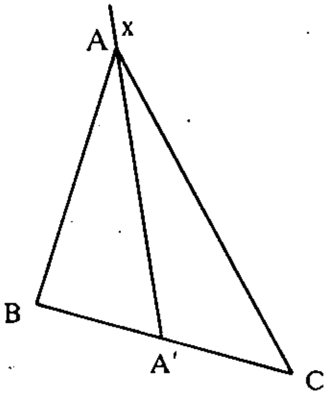
۲) از نقطه O واقع در داخل مثلث متساوی الاضلاع ABC عمودهای OA' و OB' و OC' را به ترتیب بر اضلاع BC و AC و AB فرود می‌آوریم، ثابت کنید که با تغییر مکان نقطهٔ O در داخل مثلث ABC همواره $AC'+BA'+CB'$ مقداری است ثابت.



۳) روی اضلاع AB و AC ازمثلث ABC و درخارج آن دو مربع ABDE و ACFK و سپس روی AE و AK متوازی‌الاضلاع AEMK را می‌سازیم. ثابت کنید که $AM=BC$ و $AM \perp BC$ است.

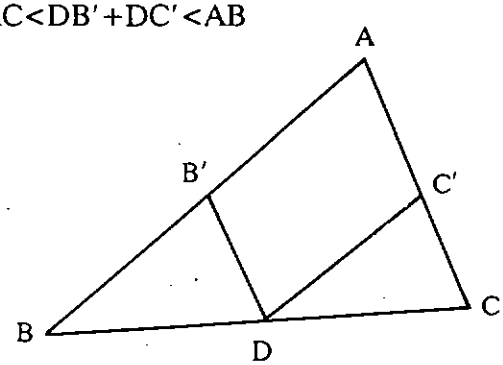


۴) از نقطهٔ A' وسط پاره خط BC نیم خط $A'x$ را رسم می‌کنیم و روی آن نقطهٔ A را اختیار می‌کنیم. ثابت کنید بنابر آنکه پاره خط AA' مساوی یا بزرگتر یا کوچکتر از $\frac{BC}{2}$ باشد. زاویهٔ A از مثلث ABC به ترتیب قائمه یا حاده یا منفرجه است.



۵) در مثلث ABC با فرض $AB>AC$ از نقطهٔ D واقع بر ضلع BC خطوطی به موازات دو ضلع دیگر مثلث رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط B' و C' قطع کنند. ثابت کنید:

$$AC<DB'+DC'<AB$$



ریاضیات جدید سال اوّل

حمید رضا امیری

۱) ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید:

الف) $\forall x\in IR\ ,\ x^2>0$ ب) $\forall x\in N\ ,\ x-1\in N$

ج) $\exists x\in Z\ ,\ x^2\notin N$ د) $\nexists x\in Q\ ,\ x^2+1=0$

۲) ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

الف) $(\forall x\in N\ ,\ x+1\in N)\wedge(\exists x\in N\ ,\ x+1\notin N)$

ب) $(\forall x\in IR\ ,\ \frac{x+1}{x-1}\in IR)\Rightarrow 2^{21}=49684$

ج) $(p\vee\sim p)\wedge(p\wedge\sim p)$

د) $12^8=8499088\Rightarrow$ ۴ عددی زوج‌است

هـ) ۳ عددی فرد و اوّل است $\Leftrightarrow$ ۵ عددی زوج یا منفی است

۳) اگر ارزش گزارهٔ $(p\wedge q)\Rightarrow(q\vee r)$ درست باشد و q نیز گزاره‌ای درست باشد ارزش گزارهٔ $[(p\Leftrightarrow q)\wedge p]\Rightarrow(p\wedge s)$ را تعیین کنید.

۴) اگر ارزش گزارهٔ $(p\vee r)\Leftrightarrow(q\Rightarrow s)$ نادرست باشد و q نیز گزاره‌ای نادرست باشد در این صورت ارزش گزارهٔ $(\sim p\vee\sim q)\Leftrightarrow(r\wedge s)$ را تعیین کنید.

۵) متوازی الاضلاع بودن چه شرطی برای مستطیل بودن است؟

۶) عدد اوّل بودن چه شرطی برای طبیعی بودن است؟

۷) اگر $A=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$ اوّلاً معین کنید مجموعهٔ A دارای چند زیر مجموعه است، ثانیاً تعیین کنید گزارهٔ زیر درست یا نادرست است؟ با ذکر دلیل.

$$(\{a\}\in A)\wedge(\{a\}\subseteq A)$$

۸) دو مجموعهٔ A و B روی هم دارای ۱۰ عضو می‌باشند و تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ A چهار برابر تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ B است. معین کنید هر یک چند عضو دارند.

۹) مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نشان دهید:

$$A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}\}\quad B=\{-3,-2,2,3\}$$

۱۰) ثابت کنید هرگاه $A\cup B=M$ و $A\cap B=\phi$ (M مجموعهٔ مرجع است) در این صورت $B=A'$ (قضیهٔ یکتایی متمم).

۱۱) ابتدا ثابت کنید: $A\cap(A\cup B)=A$ و سپس با استفاده از آن تساوی روبرو را ثابت کنید: $A\cup(A\cap B)=A$. (این دو تساوی به قوانین جذب معروف می‌باشند)

جبر سال دوّم تجربی

سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱) کلیه‌ریشه‌های معادلهٔ $x^2(x^2-1)(x^3+1)(x^2-3x+2)=0$ را به دست آورید.

۲) معادلهٔ درجه دوّم: $x^2-2m^2x+m=0$ مفروض است.

a) m را چنان تعیین کنید که معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

b) به ازاء چه مقادیری از m معادله همواره دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟

c) به ازاء چه مقادیری از m معادله ریشه حقیقی ندارد؟

d) m را چنان تعیین کنید که یک ریشهٔ معادله برابر با عدد ۱ باشد.

e) به ازاه چه مقادیری از m معادله دو ریشهٔ مثبت دارد.

f) مقدار m را طوری تعیین کنید که معادله دو ریشهٔ عکس داشته باشد.

۳) به ازاء چه مقادیری از m و n نقاط $A\left|\begin{matrix}-n\\m\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}2m\\-2\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}3n-1\\m+n\end{matrix}\right.$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۴) مقدار m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ پارامتری زیر دارای ۲ ریشهٔ حقیقی مثبت باشد.

$$(m+1)x^2-8x+m+1=0$$

۵) مقدار k را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم زیر مربع ریشهٔ دیگر باشد.

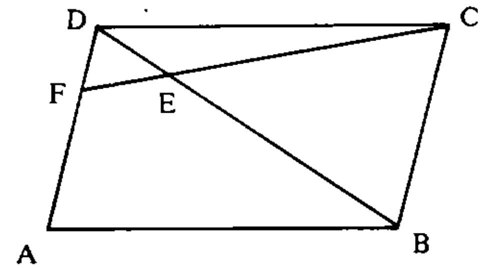
$$4x^2-15x+k=0$$

هندسه سال دوّم تجربی

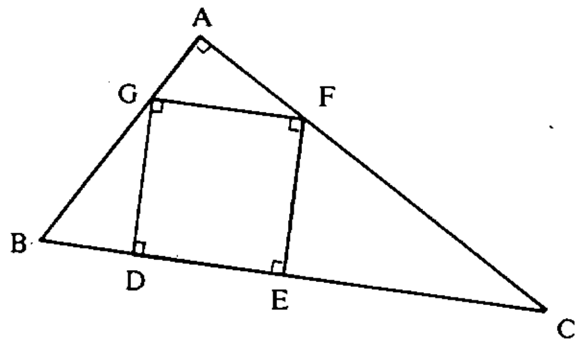
محمد هاشم رستمی

۱) متوازی الاضلاع ABCD مفروض است. از رأس C خطی رسم می‌کنیم که قطر BD را در E قطع کند به قسمی که

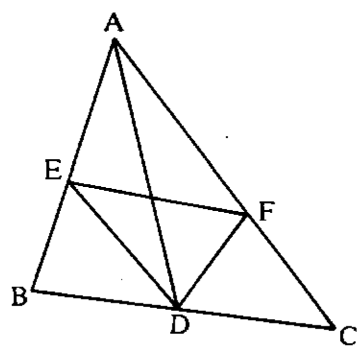
$BD=4DE$ باشد. اگر امتداد CE ، AD را در F قطع کند ثابت کنید $AF=3FD$ است.



۲) مثلث قائم الزاویهٔ ABC مفروض است ($\hat{A}$ قائمه است). مربع DEFG را چنان در این مثلث محاط می‌کنیم که ضلع DE روی وتر مثلث و دو رأس دیگر مربع روی اضلاع AB و AC قرار داشته باشند. ثابت کنید که $DE^2=BD.EC$ است.



۳) در مثلث ABC میانهٔ AD را در نظر گرفته و نیمسازهای دو زاویهٔ ADB و ADC را رسم می‌کنیم تا به ترتیب اضلاع AB و AC را در نقاط E و F قطع کنند. ثابت کنید که EF موازی با BC است.



مثلثات دوّم تجربی و ریاضی

حمیدرضا امیری

۱) اگر ۲/۱ برابر اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد را به اندازهٔ همان زاویه برحسب درجه اضافه کنیم عدد ۴۵ به‌دست می‌آید اندازهٔ این زاویه برحسب رادیان چقدر است؟

۲) اندازهٔ زاویه‌ای برحسب رادیان برابر است با حاصل تقسیم 5π براندازهٔ همان زاویه برحسب درجه. اندازهٔ این زاویه را برحسب گراد محاسبه نمایید.

۳) x چه زاویه‌ای است، اگر حاصلضرب 900π در تفاضل عکس اندازه‌های آن برحسب درجه و گراد با دو برابر اندازهٔ آن برحسب رادیان برابر باشد.

۴) هرگاه $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ و $\cos x=2m-1$ حدود تغییرات m را تعیین کنید.

۵) اگر $A=\frac{tg\,x\,cotg^2x}{(1-\cos x)}<0$ معین کنید انتهای کمان مربوط به زاویهٔ x در کدام ناحیه دایره مثلثاتی باید واقع باشد.

۶) بیشترین وکمترین مقدارعددیعبارت $A=\sin^2x-2\sin x+5$ را محاسبه کنید.

۷) در صفحهٔ مختصات دکارتی اگر $p\left|\begin{matrix}15\\8\end{matrix}\right.$ و o مبدأ مختصات باشد و زاویه‌ای را که op با محور xها می‌سازد (زاویهٔ حاده) θ بنامیم مطلوب است محاسبهٔ کلیه نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ θ

۸) اگر $tg\alpha=\frac{1}{x+1}$ و $\sin\alpha=\sqrt{\frac{y}{y-1}}$ چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است.

۹) در معادلهٔ $a^{\cos^2x}+a^{\sin^2x}=a+1$
مقدار x را به دست آورید

۱۰) درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید

الف) $\cos\alpha-\frac{tg\alpha}{\sin\alpha}+tg\alpha.\sin\alpha=0$

ب) $\sec^4\alpha-tg^4\alpha=\sec^2\alpha+tg^2\alpha$

ج) $cotg\alpha.\sec\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

د) $\frac{1}{\sec^2\alpha} + \sec^2\alpha + \frac{1}{\mathrm{cosec}^2\alpha} - \frac{\sec^2\alpha}{\mathrm{cosec}^2\alpha} = 2$

۱۱) درستی نامساویهای زیر را تحقیق کنید (α و β حاده‌اند)

الف) $\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{2} \geq \sqrt{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$

ب) $(\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{cotg}^2\alpha)^2 \geq (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{cotg}\alpha)^4$

سال دوم ریاضی

جبر دوم ریاضی

سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right.$ گذشته و برخط $4y - 2x - 1 = 0$ عمود باشد.

۲) هرگاه فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ از خط $2y - 3px + 1 = 0$ برابر با ۱ باشد پارامتر p را تعیین کرده و سپس خط را رسم کنید.

۳) سه خط D و ′D و ″D به معادلات

$$\begin{cases} D: ax + y + 1 = 0 \\ D': ay + bx - 1 = 0 \\ D'': 2x - y - b = 0 \end{cases}$$

مفروضند:

اولاً: a و b را چنان تعیین کنید که خط ′D بر خط ″D عمود و با خط D موازی باشد ($ab \neq 0$).

ثانیاً: فاصلهٔ دو خط D و ′D را حساب کنید.

ثالثاً: خط $y = mx + h$ را طوری تعیین کنید که از نقطهٔ تقاطع ′D و ″D گذشته و با خط $2x + 3y + 1 = 0$ موازی باشد.

۴) معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(\sqrt{3}, 3)$ و $B(0, 2)$ عبور کند و سپس زاویهٔ این خط را با محورهای مختصات تعیین کنید و در آخر اگر M وسط AB باشد اندازهٔ میانهٔ OM و معادلهٔ ارتفاع OH را بنویسید.

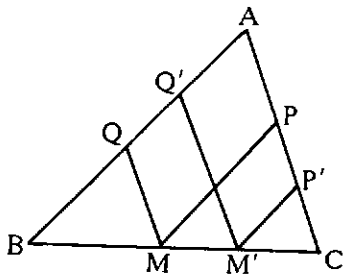
۵) معادلهٔ قطر AC از مربع ABCD عبارت است از $x - 2y = 0$ و طول نقطهٔ A برابر ۴ و اندازهٔ AC برابر $2\sqrt{5}$ می‌باشد. مختصات رئوس مربع را پیدا کنید.

۶) معادلهٔ خطی را بنویسید که از محل برخورد میانه‌های مثلث ABC به رئوس $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-3\\1\end{matrix}\right.$ عبور کرده و بر نیماز ′AA عمود باشد.

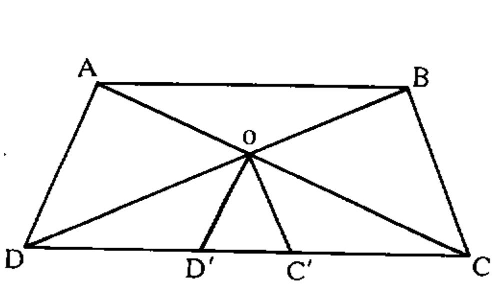
هندسه سال دوّم ریاضی

محمّد هاشم رستمی

۱) مثلث ABC مفروض است، از دو نقطهٔ M و ′M که روی ضلع BC قرار دارند دو خط به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقاط P و ′P قطع کنند. و نیز از همان دو نقطه M و ′M خطوطی به موازات ضلع AC رسم می‌نماییم تا ضلع AB را در نقاط Q و ′Q قطع نمایند. ثابت کنید: $\frac{PP'}{QQ'} = \frac{AC}{AB}$.

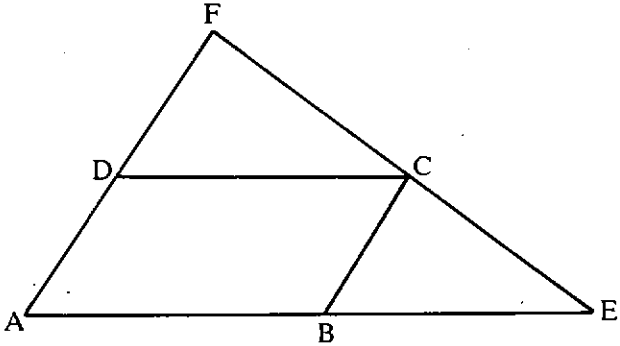


۲) از نقطه O محل تلاقی اقطار ذوزنقهٔ ABCD خطوطی به موازات ساقهای BC و AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ CD را در نقاط ′C و ′D قطع کنند. ثابت کنید که: $DD' = CC'$.



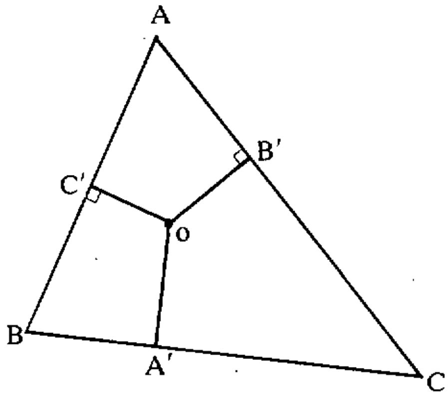
۳) متوازی الاضلاع ABCD مفروض است. از رأس C خطی در خارج متوازی الاضلاع رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید:

$$\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=۱$$



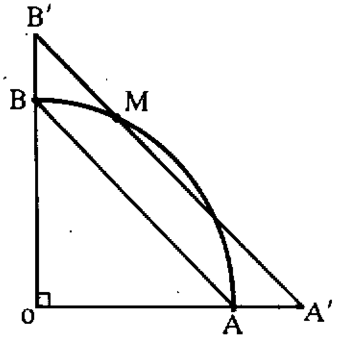
۴) از نقطهٔ O واقع در درون مثلث ABC عمودهای 'OA و 'OB و 'OC را به ترتیب براضلاع BC و AC و AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که:

$$AB'^۲+BC'^۲+CA'^۲=AC'^۲+BA'^۲+CB'^۲$$



۵) ربع دایرهٔ AOB به مرکز O مفروض است. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر این ربع دایره خطی موازی وتر AB رسم می‌کنیم تا امتدادهای OA و OB را به ترتیب در نقاط 'A و 'B قطع کند. ثابت کنید:

$$MA'^۲+MB'^۲=AB^۲.$$



ریاضیات جدید دوّم ریاضی

حمید رضا امیری

۱) برای هر سه مجموعهٔ A و B و C ثابت کنید:

الف) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

ب) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $(A\times C)\subseteq(B\times C)$

۲) در مجموعهٔ $A=\{۲,۳,۴,۵\}$ رابطه‌ای بنویسید که: الف) هیچ یک از خواص رابطهٔ هم ارزی رانداشته باشد. ب) هیچ یک از خواص رابطهٔ ترتیب را نداشته باشد. ج) فقط خاصیت پاد تقارن داشته باشد. د) فقط خاصیت تقارنی داشته باشد. هـ) فقط خواص تقارنی و پاد تقارنی داشته باشد. و) فقط دارای خواص بازتابی و تقارنی باشد.

۳) را بطهٔ R روی N×N به‌صورت زیر تعریف شده است. ثابت کنید رابطهٔ R هم ارزی است و کلاس هم ارزیِ [(۵ , ۳)] را بنویسید.

$$\forall(a,b),(c,d)\in N\times N\ ;\ (a,b)R(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$$

۴) یک افراز برای مجموعهٔ $A=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$ بنویسید.

۵) روی $IR^۲$ رابطهٔ R به‌صورت زیر تعریف شده است. ثابت کنید این رابطه هم ارزی است و کلاس هم ارزی [(۱،۲)] را معین کنید.

$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow \exists \lambda \in IR\ ; ((\lambda > 0)\ , x' = \lambda x\ , y' = \lambda y)$

۶) چند رابطه روی یک مجموعه k عضوی می‌توان تعریف کرد؟

۷) فرض کنیم مجموعهٔ A دارای m عضو و B مجموعه‌ای با n عضو باشد. ثابت کنید اگر $m>n$ آنگاه هیچ تابع یک بیک از A در B وجود نخواهد داشت.

۸) تابع $\begin{cases} f: IR \to IR - \{2\} \\ f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+6} \end{cases}$ مفروض است نشان دهید f وارون پذیر است و ضابطهٔ وارون آن را به دست آورید.

۹) آیا رابطهٔ زیر تابع است؟ چرا؟

$$f : IR \to IR \quad f(x)= \begin{cases} x^2-3x & x>3 \\ 0 & x=3 \\ x-3 & x<3 \end{cases}$$

۱۰) تابع $\begin{cases} f: IR \to IR \\ f(x) = \dfrac{x}{1+|x|} \end{cases}$

مفروض است درمورد یک بیکی و پوشاییِ f بررسی کنید.

۱۱) تابع $\begin{cases} f: IR^2 \to IR^2 \\ f(x,y)=(x+y\ , x+2y) \end{cases}$

مفروض است خاصیت یک بیکی و پوشاییِ را برای f بررسی کنید.

۱۲) ثابت کنید

با $A=\{x\in IR \mid 0<x<1\}$ که $f : A \to IR$

ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$ یک تابع دو سویی است.

۱۳) ثابت کنید تابع زیر نه یک بیک و نه پوششی است.

$f: IR^2 \to IR^2$

$f(x\ , y) = (2x+y\ , 6x+3y)$

۱۴) تابع $\begin{cases} f : IR \to IR \\ f(x)= \dfrac{|x|+7}{x} \end{cases}$

مفروض‌است خاصیتهای یک بیک و پوشایی را برای این تابع بررسی کنید.

جبر سال سوم رشتهٔ تجربی

محمّد هاشم رستمی

۱) نقاط A و B به ترتیب به طولهای ۴ و ۶− روی محور $x'ox$ مفروض‌اند. نقطهٔ M را روی این محور به قسمی تعیین کنید که :

اولاً : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\dfrac{2}{3}$، ثانیاً : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = 2$ باشد.

۲) با استفاده از تعریف فاصله، عبارتهای زیر را خلاصه کنید.

الف) $]-3\ , 4[\ \cap [2,6]$ ب) $[-4\ , 3[\ \cup [3,5[$

۳) مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که نقطهٔ $M(2a-b-1\ , a+2b+3)$ بر مبدأ مختصات منطبق گردد.

۴) به ازاء چه مقداری از m نقطهٔ $A(2m-1\ , 3m+6)$ بر مبدأ مختصات منطبق می‌شود؟

۵) اگر $A\left|\begin{matrix} 2a-1 \\ a+2b \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix} 2b+1 \\ a-b \end{matrix}\right.$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطهٔ C وسط پاره خط AB باشد.

۶) نقطه‌ای روی نیمساز ربع دوم و چهارم تعیین کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ $M(-2,4)$ برابر $2\sqrt{5}$ باشد.

۷) اگر $f(x+2)=x+\sqrt{x+5}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $f(-2)$.

۸) اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1\ , x\geq 1 \\ 3-2x\ , x<1 \end{cases}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ

$f(\sqrt{2}-1)\ , f(0)\ , f(\sqrt{2})$

۹) دامنهٔ تعریف هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y = \sqrt[5]{\dfrac{3}{x^2-3x-4}}$ ب) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{|x|-x}}$

ج) $y=\frac{2x}{\sqrt{9-x^2}}$ د) $y=\sqrt{x-|x|}+\sqrt{4x^2-1}$

۱۰) اگر $f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\frac{x+2}{x-1}$ باشد، $f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۱) اگر $f(x)=x^3-3x$ و $g(x)=\sqrt{8x}+3$ باشد، $(fog)\ (2)$ را محاسبه کنید.

۱۲) اگر $g(x)=x+1$ و $(fog)\ (x)=x^2+4x-2$ باشد، تابع $f\ (x)$ را تعیین کنید.

۱۳) اگر $f(x)=\frac{1}{x^2}$ باشد، تابع $(fof)\ (x)$ را تعیین کنید.

۱۴) منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ مفروض است. مطلوب است تعیین معادلهٔ قرینهٔ این منحنی نسبت به:

۱) محور xها ۲) محور yها ۳)نیمساز ربع اول و سوم
۴) خط $x=1$ ۵) خط $y-2=0$ ۶) خط $x-2y-5=0$
۷)نقطهٔ $o'(1,-2)$

۱۵) نقـــــاط $A(3,-1)$ و $B(a+b\ ,\ b-2a)$ و خـــط $\Delta:2x+y-1=0$ مفروض‌اند. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو نقطهٔ A و B نسبت به خط Δ قرینه یکدیگر باشند.

۱۶) نقطهٔ $M(-3,\frac{1}{2})$ وسط پاره خط AB است. در صورتی که نقطه A روی محور طولها و نقطهٔ B روی محور عرضها واقع باشند معادلهٔ خط AB را بنویسید.

۱۷) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(3\ ,\ 4)$ می‌گذرد و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۳ تشکیل می‌دهد.

۱۸) نقطهٔ $A(4,2)$ یک رأس متوازی الاضلاعی است که دو ضلعش به معادلات $2x-3y+1=0$ و $4x+3y=7$ می‌باشند.
مطلوب است تعیین :

۱) معادلات دو ضلع دیگر متوازی الاضلاع
۲) مختصات مرکز متوازی الاضلاع
۳) مساحت ستوازی الاضلاع

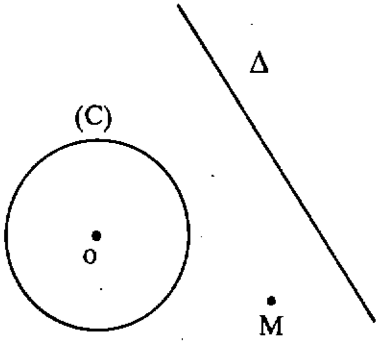
۱۹) مقدار λ را به قسمی تعیین کنید که دو خط $\Delta\ :\ \lambda x+2y-4=0$ و $\Delta'\ :\ 3x-y=6$ روی محور طولها متقاطع باشند.

۲۰) نـــقطهٔ $A(-2,1)$ یک رأس مـــربعی است کـــه خـــط $\Delta:5x-12y-17=0$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت این مربع را محاسبه کنید.

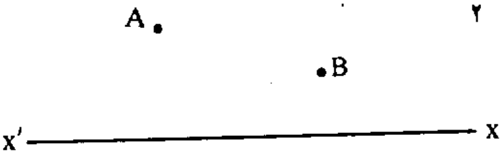
هندسه سوّم تجربی

محمّد هاشم رستمی

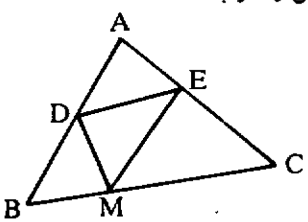
۱) دایرهٔ $C(O\ ,\ R)$ و خط Δ و نقطهٔ M غیر واقع بر Δ مفروض می‌باشند. مطلوب است تعیین نقطه‌ای از دایره (C) که قرینهٔ آن نقطه نسبت به نقطهٔ M روی خط Δ قرار گیرد (بحث کنید).



۲) خط x'x و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن خط مفروض‌اند. نقطهٔ M را روی خط x'x به قسمی تعیین کنید که $A\hat{M}x'=\frac{1}{2}B\hat{M}x$ باشد.



۳) مثلث ABC و نقطهٔ M واقع بر ضلع BC مفروض‌اند. مثلث MDE را طوری در مثلث ABC محاط کنید که محیط مثلث MDE کمترین مقدار ممکن را دارا باشد.



۴) اگر $|\vec{a}|=2$ و $|\vec{b}|=3$ و $(\vec{a}\ ,\vec{b})=\frac{\pi}{3}$ باشد
مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $(-3\vec{a})\ .\ (2\vec{b})$ ب) $|\vec{a}+\vec{b}|\ /\ |\vec{a}-\vec{b}|$

مثلثات سال سوم رشتهٔ تجربی و ریاضی

محمّد هاشم رستمی

۱) مجموع دو زاویه مساوی $\frac{7\pi}{9}$ رادیان و عدد اندازهٔ یکی برحسب گراد ۱۰ برابر عدد اندازهٔ دیگری برحسب درجه است. این دو زاویه را محاسبه کنید.

۲) اگر $\cos x = \frac{3}{5}$ باشد، $\cos(2x-5\pi)$ را محاسبه کنید.

۳) اگر $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{3}$ باشد حداکثر مقدار عبارت $\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$ را تعیین کنید.

۴) در صورتی که $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2}{5}$ و $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$ باشد حاصل عبارت $A=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+2\cos\alpha\cos\beta$ را به‌دست آورید.

۵) درستی برابریهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 7x(\cos 5x-\sin 7x)+\cos 7x(\sin 5x-\cos 7x)-\sin 12x=-1$

ب) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$

ج) $tg\alpha+tg(\alpha\pm\frac{\pi}{3})+tg(\alpha\pm\frac{2\pi}{3})=3tg3\alpha$

د) $\cos[\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2}+3\mathrm{Arctg}(-1)+\mathrm{Arccos}(\frac{-1}{2})+2\mathrm{Arccotg}(-1)]=\frac{1}{2}$

هـ) $\mathrm{Arctg}2+\mathrm{Arctg}3=\frac{3\pi}{4}$

و) $\sin(\alpha+2\beta)-\sin(\alpha-2\beta)=4\cos\alpha\cos\beta\sin\beta$

۶) در صورتی که $\alpha+\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}$ باشد ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است. $(1-tg\alpha)(1-tg\beta)=2$

۷) ثابت کنید درصورتی که $\sin 2\alpha=2\sin^2\beta$ باشد رابطه $2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\cos 2\beta$ برقرار است.

۸) ثابت کنید عبارتهای زیر مربع کامل هستند.

الف) $2(1+\cos\frac{x}{2})(1+\sin\frac{x}{2})$

ب) $(\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha})^2+(\cos\alpha+\frac{1}{\sin\alpha})^2$.

۹) هریک از عبارتهای زیر را به عبارت قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم تبدیل کنید.

الف) $\frac{\cos x-\cos 3x}{\cos x+\cos 3x}-\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}$

ب) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$

ج) $\cos^2\beta-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\cos^4\alpha$

د) $\frac{1+\cos 2x-\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$

هـ) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

۱۰) درستی هر یک از رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos\alpha\cos(\alpha+2\beta)-\cos\beta\cos(2\alpha+\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

ب) $\sin(\alpha+3\beta)\sin(\alpha-3\beta)-\sin(\frac{\alpha}{3}+3\beta)\sin(\frac{\alpha}{3}-3\beta)=\sin\frac{4\alpha}{3}\sin\frac{2\alpha}{3}$

ج) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

۱۱) عبارت زیر را به مجموع تبدیل کنید.

الف) $4\sin x\sin 2x\sin 3x$ ب) $\sin 20\sin 40\sin 80$

۱۲) هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $tg(3x-\frac{\pi}{4})+cotg(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=0$

ب) $2\cos^2 2x+\sin(3x-\frac{\pi}{4})=1$

ج) $\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x=1$

د) $tg(\frac{x}{3}+1)\cdot tg(1-\frac{x}{4})=-1$

هـ) $\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{6})$

و) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0$

ز) $\sin 7x+\sin 3x+2\sin^2 x=1$

ح) $\sin 3x\sin x+\cos 6x\cos 2x+\cos 5x=0$

۱۳) معادله $a\sin^2(3x-\frac{\pi}{4})=1$ مفروض است. مقدار a را به قسمی تعیین کنید که یکی از جوابهای معادلهٔ $x=\frac{5\pi}{4}$ باشد. سپس در ازاء مقدار به‌دست آمدهٔ a معادله را حل کنید.

۱۴) حداکثر و حداقل مقدار عبارت $\cos^2x-2\cos x$ را تعیین کنید.

سال سوم رشتهٔ ریاضی

جبر سال سوّم ریاضی

سید محمّدرضا هاشمی موسوی

۱) m و n را چنان تعیین کنید که چند جمله‌ای x^3+mx^2+nx+3 بر $(x-1)$ بخش‌پذیر باشد و باقیماندهٔ آن بر $(x+1)$ برابر -2 باشد.

۲) اگر عبارت $A(x)=16x^4+4$ بر $4x^2-2kx+s$ بخش‌پذیر باشد k و s را حساب کنید.

۳) ضریب x^{-10} را در بسط $(x^4-x^{-3})^{15}$ پیدا کنید.

۴) آیا در $(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}})^7$ جملهٔ مستقل از x وجود دارد؟ (در صورت وجود آن را بیابید.)

۵) تابع $f(x)$ را از ضابطهٔ $af(x)+bf(\frac{1}{x})=x$ به‌دست آورده و تعیین‌کنید به‌ازای چه مقادیری از a و b، $f(x)$ نامعین است.

۶) دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}+\sqrt{x(x-1)}+\frac{1}{x}$ را به صورت فاصله نشان دهید.

۷) تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ مفروض‌اند. دامنهٔ تعریف توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ را حساب کنید.

۸) تابع $f(x)=[2x]+|x|$ را دربارهٔ $[-2,3]$ رسم کنید

۹) با استفاده از تعریف حد ثابت کنید

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$$

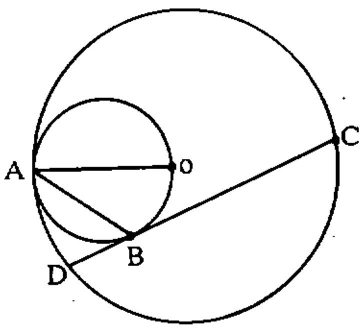
۱۰) در تابع
$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leq 1\\ 5-kx^2 & x>1\end{cases}$$
مقدار k را چنان تعیین‌کنید که تابع فوق در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد.

۱۱) در تابع $f(x)=a[x]+b[x-1]+c[|x+2|]$ پارامترهای a و b و c را چنان تعیین کنید که اوّلاً: تابع در نقطه $m\,|\,{}^{-2}_{1}$ پیوسته باشد و ثانیاً: منحنی نمایش تابع از نقطهٔ $N\,|\,{}^{-\frac{1}{2}}_{-1}$ عبور کند و پس از تعیین پارامترها منحنی را رسم کنید.

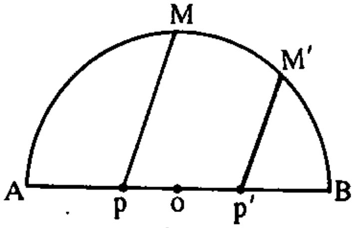
هندسهٔ سوّم ریاضی

محمّد هاشم رستمی

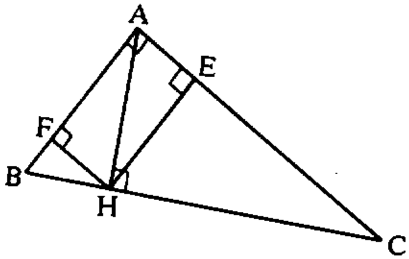
۱) دایره‌ای به قطر OA مفروض است. از نقطهٔ B واقع بر این دایره خطی مماس برآن رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به مرکز O و به‌شعاع OA را در دو نقطهٔ C و D قطع کند. ثابت کنید که $BD.\ BC=AB^2$ است.



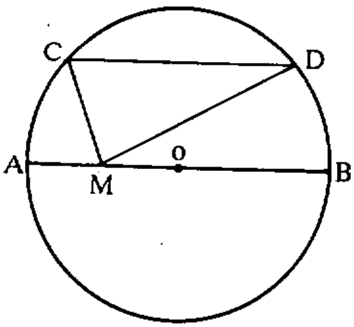
۲) نیم‌دایرهٔ به قطر AB و به مرکز O مفروض است. نقاط P و P′ را به فاصلهٔ مساوی از مرکز نیم‌دایره اختیار می‌کنیم و از این دو نقطه دو خط موازی رسم می‌کنیم تانیم‌دایره را به ترتیب در نقاط M و M′ قطع کنند ثابت کنید که حاصل ضرب PM. P′M′ با تغییر امتداد خطوط موازی MP و M′P′ تغییر نمی‌کند (ثابت می‌ماند).



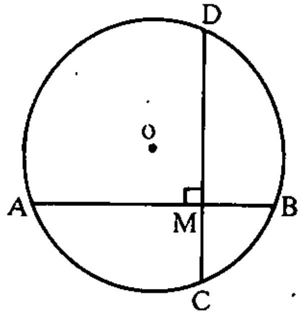
۳) ارتفاع AH از مثلث قائم الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را رسم می‌کنیم و تصاویر نقطهٔ H روی اضلاع AC و AB را به ترتیب E و F می‌نامیم. ثابت کنید که $\frac{AC^3}{AB^3}=\frac{CE}{BF}$ است.



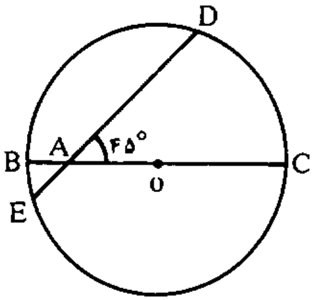
۴) دایره‌ای به قطر AB مفروض است. اگر M نقطه‌ای واقع برقطر AB و CD وتری از دایره موازی قطر AB باشد. ثابت کنید $MC^2+MD^2=MA^2+MB^2$ است.



۵) از نقطهٔ ثابت M واقع در داخل دایرهٔ $C(O\,,R)$ دو وتر عمود برهم AMB و CMD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید اگر این دو وتر با همان حالت عمود برهم حول نقطهٔ O دوران نمایند حاصل AB^2+CD^2 مقداری است ثابت.



۶) وتر DAE از دایرهٔ $C(O,R)$ قطر BC از این دایره را درنقطهٔ A به زاویهٔ 45° قطع می‌کند. ثابت کنید: $AD^2+AE^2=2R^2$.



ریاضیات جدید سوّم ریاضی

حمیدرضا امیری

۱) ثابت کنید در حالت کلّی، اگر W_1 و W_2 دو زیر فضای فضای برداریِ V باشند نمی‌توان نتیجه گرفت که $W_1 \cup W_2$ نیز یک زیر فضای V است.

۲) نشان دهید که اگر a و b و c اعداد حقیقی باشند دراین صورت مجموعهٔ W که به صورت زیر تعریف می‌شود یک زیر فضای IR^3 است

$$W=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in IR\ ,\ ax+by+cz=0\}$$

۳) در فضای برداری IR^n

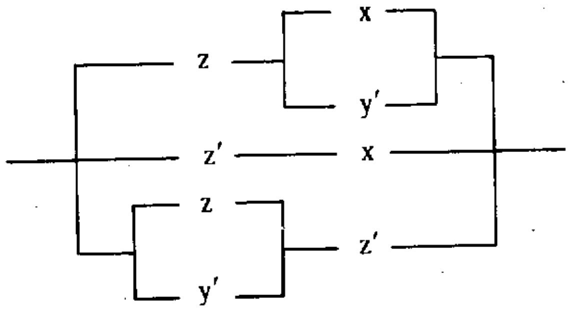
$$(IR^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,|\ \ x_1,x_2,\dots,x_n\in IR\})$$

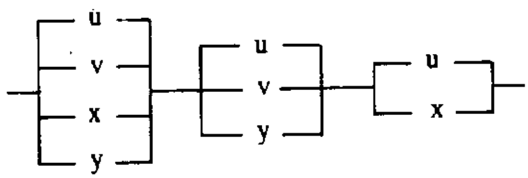
ثابت کنید هر $n+1$ بردار وابستگی خطی دارند.

۴) ثابت کنید اگر W یک زیر مجموعهٔ ناتهی از فضای برداری V باشد شرط لازم و کافی برای آنکه W یک زیر فضای V باشد آن است که $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall w_1, w_2 \in W ; aw_1 + bw_2 \in W$

۵) اگر x و y و z، ۳ بردار در فضای برداری V بوده و مستقل خطی باشند ثابت کنید بردارهای $x-2y+z$ و $x+y-z$ و $2x-y+z$ نیز مستقل خطی‌اند.

۶) عبارت جبری مدارات زیر را نوشته و آنها را ساده کنید.



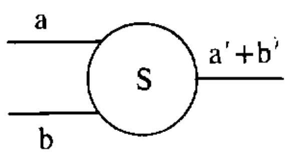


۷) ۴ نفر متشکل از دو مرد و دو زن دربارهٔ موضوعاتی رأی می‌دهند، تصویب یک موضوع منوط به این شرط است که دو مرد یا دو زن و یک مرد به آن رأی مثبت بدهند. مداری طرح کنید که تصویب یک موضوع را با روشن شدن یک چراغ اطلاع دهد.

۸) متمم عبارت $(x+y)(x+y')(x'+y')$ را بنویسید.

۹) عبارت بولی زیر را ساده کنید $(a+b)[a+b'(a+b)]$.

۱۰) مدار منطقی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم



یا $aSb = a' + b'$

با توجه به تعریف مدار S و فقط با استفاده از کلیدهای a و b عبارتهای زیر را به‌دست آورید:

الف) a ب) a' ج) $a'+b'$ د) $(a+b)'$ هـ) ab'

سال چهارم رشته تجربی

جبر سال چهارم رشتهٔ تجربی

محمّد هاشم رستمی

۱) مشتق هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y = 3\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cot g^5 \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

ب) $y = \sin \sqrt[3]{\frac{x+2}{2x-1}}$

ج) $y = 8 \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} \cos\frac{x}{8} \sin\frac{x}{8}$

د) $y = \sin(\cos^2 x) + \cos(\sin^2 x)$

۲) مقدار عددی مشتق تابع $y = \sqrt[5]{(2 + tg\, 2x)^3}$ را به ازای $x = \frac{3\pi}{8}$ محاسبه کنید.

۳) اگر $f(a) = \frac{1}{2}$ و $f'(a) = 4$ باشد مقدار مشتق عبارت $f^3(x) + \frac{3}{f(x)}$ را در $x = a$ محاسبه کنید.

۴) اگر $(x+y)^3 - 2x^2y + x^2 - y^2 - 1 = 0$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ y'_x و x'_y.

۵) در تابع پارامتری $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3t^2 + t \end{cases}$، مطلوب است محاسبهٔ y'_x.

۶) در صورتی که مشتق مرتبهٔ سوم تابع $y = a \sin 2x$ در $x = \frac{\pi}{6}$ برابر ۴ باشد مقدار a را محاسبه کنید.

۷) معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی به معادلهٔ $y = \cos(\pi \sin x)$ را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{6}$ واقع برآن بنویسید.

۸) حدود m را چنان تعیین کنید که تابع $y = mx^3 + x^2 + mx - 1$ همواره صعودی باشد.

۹) معادلهٔ خط قائم برمنحنی به معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ را در نقطهٔ $M(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ بنویسید.

۱۰) تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مفروض است. ضرایب a و b و c و d را چنان بیابید که درازاء $x=-1$ تابع دارای ماگزیمم یا می‌نیممی برابر ۴ بوده و نقطهٔ عطف آن به طول ۱ و روی منحنی به معادلهٔ $y=\frac{5x+7}{x-2}$ قرار داشته باشد.

۱۱) تابع $y=x^2+2mx+m-1$ مفروض است. معادلهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تغییرات این تابع در نقطه‌ای به طول ۱ واقع برآن محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مقدار m را چنان تعیین کنید که مساحت مثلث OAB برابر ۳ باشد.

۱۲) معـادلهٔ درجـهٔ دوّم $x^2-(m^2-m-2)x+2m+1=0$ مـفروض است. مـقدار m را بـه قـسمی تـعیین کـنید کـه مـجموع ریشه‌های این معادله حداقل مقدار ممکن را دارا باشد.

۱۳) تابع $y=(m+1)x^2-2mx+m-3$ مفروض است. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ ماگزیمم یا می‌نیمم این تابع را وقتی پارامتر m تغییر می‌کند به‌دست آورید.

۱۴) تابع $y=x^3+mx^2+(1-m)x+2$ مـفروض است. اولاً : مقدار m را به قسمی تعیین کنید که مجموع طولهای نقاط ماگزیمم و می‌نیمم این تابع برابر $\frac{2}{3}$ باشد. ثانیاً : در ازاء $m=-1$ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع فوق را رسم کنید.

۱۵) تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $2x^3-3x^2-12x+5=0$ را تعیین کنید.

۱۶) تابع $y=\frac{mx+3}{x+2m-2}$ مفروض است. مقدار m را به قسمی تعیین کنید که مرکز تقارن منحنی نمایش تغییرات این تابع روی خط به معادله $2x-y+3=0$ قرار داشته باشد.

۱۷) تابع $y=\frac{x+a}{ax+a+2}$ مفروض است. مقدار a را چنان تعیین کنید که:

۱) منحنی نمایش تغییرات تابع تبدیل به خط راستی موازی محور طولها گردد.

۲) منحنی نمایش تغییرات تابع به خط راستی غیر موازی با دو محور تبدیل شود.

۳) خط مماس بر منحنی نمایش تغییرات این تابع در نقطه‌ای به طول -1 برخط به معادله $2x-y=1$ عمود باشد.

۱۸) تابع $y=\frac{ax+b}{cx-2}$ مـفروض است. ضـرایب a و b و c را بـه قسمی تعیین کنید که مرکز تقارن منحنی نمایش تـغییرات ایـن تـابع نقطه‌ای به طول $+1$ واقع برخـط بـه معـادله $y=2x-3$ بـاشد و ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تابع فوق در نقطهٔ برخوردش با محور عرضها برابر -1 باشد.

سال چهارم رشتهٔ ریاضی

جبر چهارم ریاضی فیزیک

سید محمّد رضا هاشمی موسوی

۱) دامنه تعریف تابع: $y=\frac{x-4}{x-4}+\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}$ را به‌دست آورید.

۲) دامـنه تـابع: $f(x)=\frac{x}{1+[x]}+\frac{x+1}{[x]+[-x]}$ را بـه دست آورید.

۳) دورهٔ تناوب $y=\sin^2\frac{2x}{3}+tg^3\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ را تعیین کنید.

۴) ضابطهٔ تابع معکوس تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2}$ را به‌دست آورید.

۵) با استفاده از تعریف حدّ ثابت کنید:

الف) $\lim_{x\to -1}(x^2-4)=-3$

ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

ج) $\lim_{x\to +\infty}(x^6+x+1)=+\infty$

د) $\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\infty$

هـ) $\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1-2x}{3x-5}=\frac{-2}{3}$

و) $\lim_{x\to \pm\infty}\frac{3-4x^2}{2x+1}=\pm\infty$

۶) حدود زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+x-2}-\sqrt{x^2-2x+3})$

ب) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{\sin^n x}\right)$

ج) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

د) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2^n+3^n+4^n+5^n}{6^n+7^n+8^n+9^n}\right)$

هـ) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[5]{x-1}}\right)$

و) $\lim_{x\to 0} \left(x^n \sin\frac{1}{x^n}\right)$

ز) $\lim_{x\to 1} (1+x^2) \log^2_x 2$

ح) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2+n}$

هندسه سال چهارم ریاضی

محمّد هاشم رستمی

۱) اگر نقطهٔ A ابتدا و نقطهٔ B انتهای بردار $\vec V=\vec i+3\vec j-2\vec k$ و نقطه $M(\frac{5}{2},\frac{1}{2},2)$ وسط پاره خط AB باشد مختصات نقاط A و B را پیدا کنید.

۲) اگر $\sum_{i=1}^{3} \vec V_i=\vec 0$ و $|\vec V_1|=3$ و $|\vec V_2|=2$ و $|\vec V_3|=5$ باشد مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $\vec V_1 \cdot \vec V_2$

ب) $\vec V_1 \cdot \vec V_2 + \vec V_2 \cdot \vec V_3 + \vec V_3 \cdot \vec V_1$

ج) $\vec V_1 \cdot (\vec V_2 + \vec V_3)$

۳) بردار V را چنان تعیین کنید که بر دو بردار

$$\vec V_1=3\vec i+2\vec j+2\vec k \quad \text{و} \quad \vec V_2=18\vec i-22\vec j-5\vec k$$

عمود باشد و با oy زاویهٔ منفرجه بسازد و قدر مطلق آن برابر ۱۴ باشد.

۴) ثابت کنید که چهار نقطهٔ $A(5,5,4)$ و $B(2,-1,1)$ و $C(4,1,3)$ و $D(3,2,-1)$ در یک صفحه قرار ندارند.

۵) نقاط $A(5,0,-1)$ و $B(-1,3,1)$ و $C(2,0,3)$ رئوس مثلث ABC می‌باشند. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC بر محور yها عمود رسم می‌شود.

۶) نقاط $A(-3,1,4)$ و $B(2,-4,-6)$ مفروض‌اند. نقطهٔ M روی خط AB به قسمی قرار دارد که $2\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB}$ است. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که در نقطهٔ M برخط AB عمود رسم می‌شود.

۷) وضع دو نقطهٔ $M_1(1,-2,2)$ و $M_2(0,3,-1)$ را نسبت به صفحهٔ $P: 2x-y+2z-5=0$ مشخص سازید و در صورتی که M_1M_2 موازی صفحهٔ P نباشد، مختصات نقطهٔ برخورد M_1M_2 با صفحه P را تعیین کنید.

۸) تحقیق کنید که دو نقطهٔ $A(-2,1,3)$ و $B(0,1,-1)$ هر دو داخل یک فرجه از فرجه‌های حاصل بین دو صفحهٔ $P: x-y-z+2=0$ و $P': 2x+y+z+3=0$ واقع‌اند یا در داخل دو فرجهٔ متمایز.

۹) مطلوب است محاسبه حجم چهار وجهی حاصل بین صفحهٔ $P: 2x-3y+6z-12=0$ و صفحات مختصات.

۱۰) حجم مکعبی را تعیین کنید که دو وجه مقابل آن دو صفحه $P: 2x+y-2z=5$ و $P': 4x+2y-4z=6$ باشند.

۱۱) نقطه‌ای از صفحهٔ به معادله $2x-3y+3z-17=0$ را تعیین کنید که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ $A(0,-1,1)$ و $B(2,0,3)$ می‌نیمم باشد.

۱۲) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $M(2,1,-2)$ می‌گذرد و با صفحهٔ $P: x+y-z+2=0$ موازی است و خط $D: \frac{x}{2}=y=\frac{z-1}{-1}$ را قطع می‌کند.

۱۳) معادلهٔ کانونیک خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(-3,1,2)$ و نقطهٔ M وسط پاره‌خطی ازخط

$$D: \begin{cases} x+y=2 \\ 2y-z=5 \end{cases}$$

که‌محصور بین دو صفحهٔ

$$P: 3x-y+z-1=0$$

و

$$P': 3x-y+z=5$$

است می‌گذرد.

۱۴) کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط

$$D:\begin{cases} x=t-1 \\ y=-t+2 \\ z=3t+5 \end{cases}$$

و

$$D' : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z$$

را پیدا کنید

۱۵) مختصات نقطهٔ برخورد خط $D: \frac{x+2}{3} = 2(y-1) = z+2$ و صفحه $P: x-2y+z-3=0$ را پیدا کنید.

۱۶) مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(0,1,-2)$ را نسبت به خط $D : \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$ به‌دست آورید.

۱۷) مختصات تصویر قائم نقطهٔ $M(3,-1,0)$ روی صفحه $P: x-2y+z-2=0$ را تعیین کنید.

۱۸) مختصات قرینهٔ نقطهٔ $M(3,2,-1)$ را نسبت به صفحه $P: x+y-z-3=0$ به‌دست آورید.

۱۹) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه $P : 2x-y+3z-2=0$ و $P' : x+y+3=0$ می‌گذرد و بر صفحهٔ $R : -x+y+2z=1$ عمود است.

ریاضیات جدید چهارم ریاضی

حمید رضا امیری

۱) نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید:

الف) $\forall x \exists y, (x+1=3) \Rightarrow [(x=2) \wedge y=0]$

ب) $\forall x \forall y, (x<y \vee y\leq x)$

ج) $\forall x \exists y, (x+y=0 \Rightarrow x=-y)$

د) $\exists x \forall y, [\, |x| = |y| \Rightarrow (x^2=y^2 \vee x^3=y^3)]$

۲) درستی استنتاجهای زیر را بررسی کنید.

الف)

$$\begin{array}{l} (p\wedge q) \Rightarrow [p \Rightarrow (s\wedge r)] \\ (p\wedge q)\wedge t \\ \hline \therefore s \vee r \end{array}$$

$$p \vee (q \vee r)$$

ب)

$$\begin{array}{l} (q\Rightarrow s)\wedge(r\Rightarrow t) \\ (s\vee t) \Rightarrow (p\vee r) \\ \sim p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

$$p\Rightarrow q$$

$$q\Rightarrow r$$

ج)

$$\begin{array}{l} (s \Rightarrow r) \wedge (t\Rightarrow q) \\ (\sim r \vee \sim q)\wedge(\sim u \vee \sim p) \\ \hline \therefore (\sim s \vee \sim t)\wedge(\sim u \vee \sim p) \end{array}$$

۳) ثابت کنید هر میدان یک حوزهٔ درست است. آیا عکس مطلب برقرار است؟ چرا؟

۴) ثابت‌کنید $U= \{a|a=3m, m\in Z\}$ یک ایده‌آل حلقهٔ Z است.

۵) ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به‌صورت $m+n\sqrt{2}$ که در آن $n\in Z$ و m یک حوزهٔ صحیح است.

۶) با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، عدد $a=4^n+15n-1$ بر عدد ۹ بخش‌پذیر است.

۷) با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید:

$$\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx= \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}$$

۸) مطلوب است تعیین دو عدد طبیعی متمایز که حاصل ضرب آنها مربع کامل باشد و کوچکترین مضرب مشترکشان برابر با ۴۸ باشد.

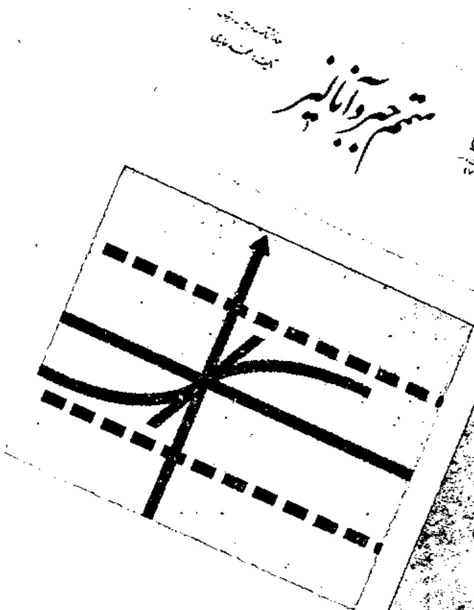
۹) ثابت کنید اگر $(a,4)=(b,4)=2$ آنگاه $(a+b,4)=4$.

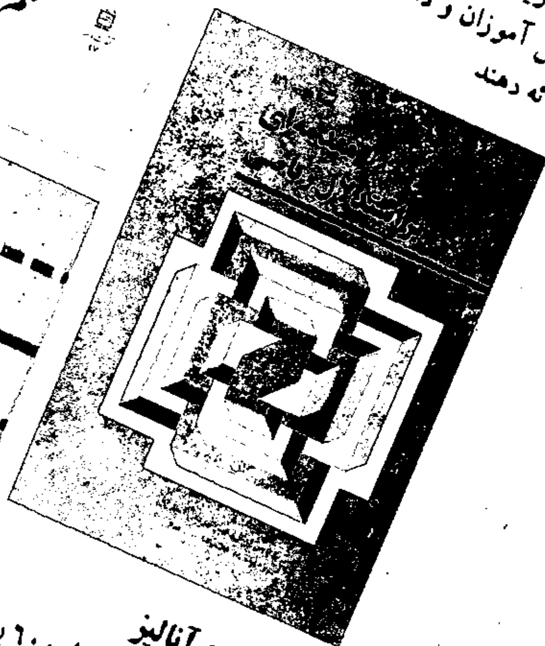
معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی

۳۱۵ صفحه / چاپ اول / ۹۰۰ ریال

... بنابه تجربیات ما بیشتر دانشجویان هنگامی که با مسائل ریاضی روبرو می‌شوند از آنجاکه اعتقاد دارند مهارت در ریاضیات، ترکیبی از فورمولهای حفظ شده و عملیات جبری است، مایلند که عقل سلیم راکنار بگذارند... این مسأله و مشکلات دیگر در زمینهٔ فهم صحیح از ریاضیات معلول فقدان تفکر ریاضی است. مؤلفین این کتاب سعی کرده‌اند تا استدلال ریاضی را به دانش آموزان و دانشجویان بشناسانند و روشهای صحیح استدلال ریاضی را ارائه دهند





متمم جبر و آنالیز

۲۴۰ صفحه / چاپ ششم / ۶۰۰ ریال

مؤلف در طی سالیان طولانی تدریس کتب ریاضی به برخی از نکات مبهم و پیچیده کتب جبر و آنالیز دبیرستانی برخورده است که در این کتاب سعی کرده این مشکلات را حل کند. لذا قضایای این کتاب تقریباً همان قضایای جبر و آنالیز سالهای سوم و چهارم رشتهٔ ریاضی است که همراه با اثبات دقیق آن بیان شده است.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

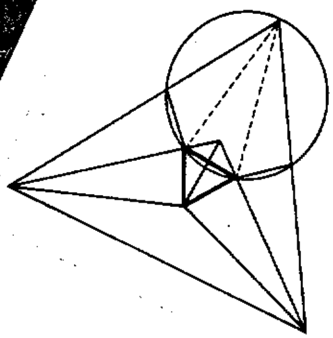
باز آموزی و باز شناخت هندسه

۲۳۲ صفحه / چاپ ششم / ۴۵۰ ریال

کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه، شامل شش بخش دربارهٔ مفاهیم و قضایای کلی هندسه و همچنین نکات جالب و تازه‌ای از هندسهٔ مسطحه می‌باشد. این کتاب هم برای دانش آموز و هم برای دبیران قابل استفاده است.



بازآموزی و بازشناخت هندسه



مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و...

۱۶۴ صفحه / چاپ دوم/ ۴۵۰ ریال.

تاراسو، مؤلف کتاب از معروفترین معلمین ریاضی و فیزیک در شوروی است. او در این کتاب تعدادی از مسائل و زیربنایی دیفرانسیل و انتگرال را در قالب گفتگوی میان استاد و شاگرد مطرح کرده است.



حکیم عمر خیام نیشابوری (۴۳۹ - ۵۲۶ هـ.ق)

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}b^r$$

ریاضیدان بزرگ مسلمان ایرانی که ترجمهٔ بسیاری از آثار او (و دیگر دانشمندان مسلمان) به زبانهای اروپائی از موجبات مهم و اساسی رنسانس علمی اروپا است. به عنوان مثال بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ که منتسب به نیوتن می‌باشد مدتها پیش از او توسط خیام به دست آمده بود.

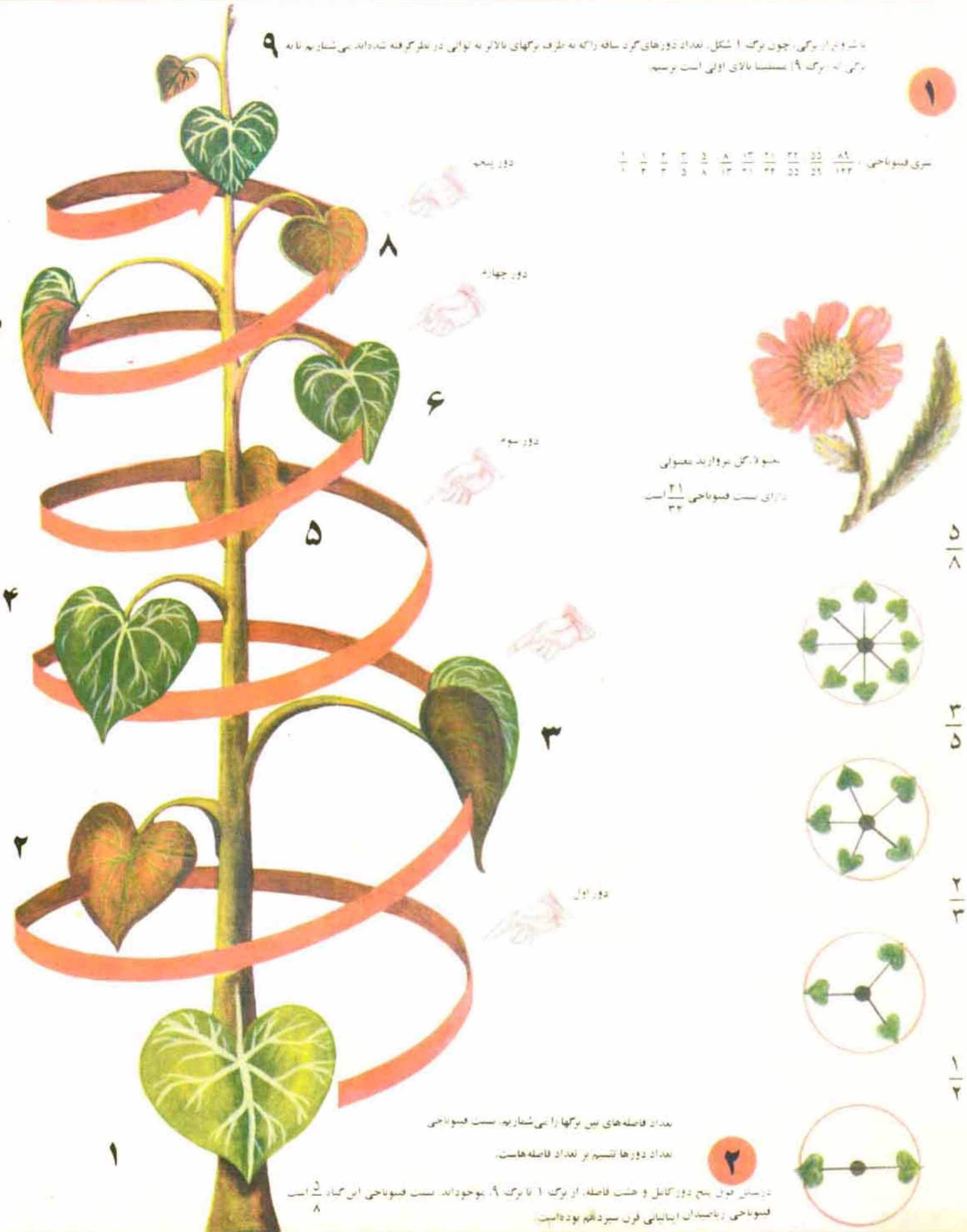
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۲

سال اول، بهار ۱۳۷۱
بهاء ۵۰۰ ریال
چاپ پنجم



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن
۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش آموزان)به همراه حل آن
۴ ـ طرح معماهای ریاضی
۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه ولطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

● مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
● هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاداست.
● مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، پلاک ۲٦۸، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش تلفن: ۸۲٦۰۰۷

مطالب این شماره

● سخن سردبیر	۱
● شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲) پرویز شهریاری	۲
● دنباله احمد قندهاری	۱۱
● تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران غلامرضا یاسی‌پور	۲۳
● معادلات سید محمدرضا هاشمی موسوی	۳۰
● منطق جدید و ریاضیات غلامرضا یاسی پور	۴۳
● اتحادهای مثلثاتی، نامساویهای مثلثاتی حمید رضا امیری	۵۸
● مسائل مسابقه‌ای و مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی سید محمدرضا هاشمی موسوی	٦۷
● مسائل برای حل	٦۸
● حل مسائل مسابقه‌ای	۹۹
● حل مسائل شمارهٔ ۱	۱۰۰

سخن سردبیر

عزیزان سلام:

پس از چاپ شمارهٔ اول مجلهٔ ریاضی «برهان» که با استقبال بسیار زیادی از طرف شما دانش‌آموزان عزیز و معلمین گرامی روبرو شد و با توجه به پیشنهادات، انتقادات، تشویقها و دلگرمیهای خوانندگان محترم که به‌صورت کتبی و یا شفاهی به اینجانب رسیده مطالبی به نظرم رسید که مختصراً عنوان می‌کنم:

۱ - «مسائل برای حل» از این شماره به بعد همراه با تست خواهد بود.

۲ - بریده مطالب «تفریح اندیشه» و «ادب ریاضی» را که مورد توجه شما عزیزان واقع شده، افزایش داده‌ایم.

۳ - از این شماره به بعد در قسمت مسائل مسابقه‌ای، مسائلی از ریاضیات جدید و جبر نیز طرح خواهیم کرد. در ضمن پس از چاپ هر شماره فقط یک ماه فرصت دارید تا جواب مسائل مسابقه‌ای را برای ما ارسال کنید.

۴ - از این شماره به بعد قسمتی را به «تاریخچه مجلات ریاضی در ایران» اختصاص داده‌ایم و در بعضی موارد از این مجلات نکات و مسائل جالبی آورده‌ایم که حتماً مورد توجه شما عزیزان قرار خواهد گرفت.

ضمناً چون تاریخ چاپ این شمارهٔ مجله احتمالاً مصادف با «هفته معلم» است این هفته را از طرف خود و همهٔ دست‌اندرکاران مجله ریاضی «برهان» به تمامی «معلمینی که شمع وجودشان روشنگر راه شما دانش‌آموزان عزیز است» تبریک عرض می‌کنم.

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲)

• پرویزشهریاری

از «دفتر خاطره‌های علمی» صحبت می‌کردیم. اگر کار با این دفتر را بدون وقفه و باحوصله ادامه دهید، به‌تدریج چنان علاقه‌مندی شما را جلب خواهد کرد که در تمامی زندگی علمی خود درآینده، نمی‌توانید از آن دل بکنید و تا آنجا به آن عادت می‌کنید که جزئی از زندگی شما خواهدشد. وجود این دفتر، شما را در همهٔ زمینه‌ها کنجکاو می‌کند و وامی‌دارد تا به هر پیشامدی با دیدی علمی، و درعین حال انتقادی، نگاه کنید. وقتی باکسی دربارهٔ موضوعی بحث‌می‌کنید، به‌جای آن که، در ذهن خود، درفکر پاسخگویی به او و دفاع از نظر خود باشید، به حرفها و استدلالهای او گوش می‌کنید و درجهت جداکردن درست از نادرست تلاش می‌ورزید.

فرض کنید، دربخش محل زندگی شما، یا درمسیری که هرروز به مدرسه می‌روید، بعضی از خیابانها را، برای عبور اتومبیل، یک طرفه اعلام کنند. با این مسأله، خیلی ساده و مثل یک حادثهٔ معمولی، برخورد نکنید. سعی کنید، بادیدی علمی، دربارهٔ آن بیندیشید. آیا به واقع، به ساده‌تر شدن عبور و مرور کمک کرده‌است؟ آیا تصادف کمتری رخ می‌دهد؟ آیا زودتر و راحت‌تر به‌منزل یا مدرسه می‌رسید؟ مسیر عبور بااتومبیل، از منزل به مدرسه، یابرعکس، چقدر طولانیترشده؟ آیا می‌توانید، در وقت بی‌کاری خود، آماری تهیه کنید و معین کنید، به‌خاطر یک طرفه شدن این خیابانها و، درنتیجه، طولانیتر شدن مسیر برخی اتومبیلها، چقدر به مصرف بنزین اضافه شده‌است؟ شاید، به دلیل این که اتومبیلها کمتر معطل می‌شوند، درمصرف بنزین هم، صرفه‌جویی شود! آیا وقت افراد کمتر تلف می‌شود یا بیشتر؟ در مورد استهلاک اتومبیلها چطور؟ آیا می‌توانید راهی برای این «محاسبه‌ها» پیداکنید و سود یازیان این وضع جدید را بسنجید؟ آیا می‌توانید بااستدلال و آمار، درستی یا نادرستی این تعمیم را نشان‌دهید؟ این، یک مسألهٔ ریاضی است و البته نه‌چندان ساده، هروقت، به‌هر نتیجه‌ای یا محاسبه‌ای، هرچند کوچک رسیدید، در «دفتر خاطره‌های علمی» خود یادداشت کنید و، بعد، به فکر کاملتر کردن بیفتید.

بیشتر ساختمانهایی که در تهران می‌سازند، بعداز ۲۰ یا ۲۵ سال (وگاهی کمتر)، «کلنگی» به‌حساب می‌آیند؛ آنها را خراب می‌کنند و دوباره، به‌جای آنها، ساختمانهای تازه‌ای بنا می‌شود. در محله‌ای که زندگی می‌کنید، آمارگیری کنید: متوسط عمر ساختمانهای این محله چندسال است؟ کدام یک به‌خاطر عریض‌کردن خیابان بازسازی شده‌است و کدام به‌خاطر کم دوامی ساختمان یا بی‌سلیقگی درنقشهٔ آن؟ این خراب کردن و دوباره ساختن، چقدر از پول و نیرو را هدر می‌دهد؟ زیان مالی مملکت، از بابت عدم توجه کافی به ساختمانها دراین محله، به‌طور متوسط، سالی چقدر است؟... چه راهی برای این «محاسبه‌ها» و به‌دست آوردن جواب پیشنهاد می‌کنید؟

دریک شهر بندری زندگی می‌کنید. کشتیهای حامل کالا، مرتباً وارد می‌شوند و، برای تخلیه، نوبت می‌گیرند. به‌نظر شما کدام راه بهتر است: انبارهای بزرگ برای نگهداری کالاها ساخته‌شود یاایستگاه قطار را تانزدیکی اسکله بیاورند و بارکشتیها را مستقیم از کشتی به‌قطار منتقل کنند؟ ساختن جاده‌های استاندارد و تدارک کامیونها و تریلیها

به‌صرفه نزدیکتر است یاکشیدن راه‌آهن؟... آیا تصمیم‌گیری دراین مورد، تنها باتصور یاتکیه به تجربه ممکن است یا با محاسبه؟ و کدام محاسبه؟ آیا باید به‌این مسأله، به‌عنوان یک مسألهٔ ریاضی نگاه کرد؟ اگر چنین است، راه‌حل آن کدام است؟...

جهان دور و برما، یعنی طبیعت و زندگی اجتماعی، پراز مسأله است و بسیاری از این مسأله‌ها، هنوز حل نشده‌اند. درجهان امروز، بدون دانش و بدون دید علمی، نمی‌توان زندگی شایسته‌ای داشت. به‌هر گوشه‌ای از طبیعت و زندگی نگاه کنید، می‌توانید جنبه‌هایی از آن را پیداکنید که به‌دانش، و به‌خصوص به ریاضیات، مربوط می‌شود، بنابراین، ارزش اندیشیدن‌دارند و نتیجهٔ این اندیشه‌ها، هرچند کوچک، باید در «دفتر خاطره‌های علمی» شما منعکس شود.

گاه به گاه، دفتر خاطره‌های علمی خود را ورق بزنید. به‌عقب برگردید، یک سال یا دوسال پیش چگونه فکر می‌کرده‌اید؟ به چه مسأله‌هایی می‌اندیشیده‌اید؟ با چه دشواریهایی روبرو بوده‌اید؟... آن وقت می‌فهمید که، درهمین مدت کوتاه، چقدر رشد کرده‌اید؟ دانش و آگاهی شما تا چه‌اندازه بالا رفته‌است؟ ممکن است به برخی اندیشه‌های قبلی خود بخندید، ولی هرگز آنها را دور نریزید و مسیر زندگی علمی خود را، بادقت، برای خود حفظ کنید.

□

خاطره نویسی، علاوه برآن که ما را وامی‌دارد تا ذهنی کنجکاو و نکته سنج و چشمی تیزبین و دقیق داشته‌باشیم؛ دربارهٔ معنای واقعی هر واژه بیندیشیم؛ توجه خود را نه به ظاهر پیشامدها و پدیده‌های طبیعی و اجتماعی، بلکه به‌رابطهٔ متقابل آنها و به ماهیت درونی آنها معطوف کنیم و به ریشه‌یابی استدلالی آنها، به‌جای روایت ساده و بی‌مضمون، بپردازیم و...، می‌تواند وظیفه‌ای تاریخی، اجتماعی و میهنی هم به‌حساب آید.

درشرق، و از آن جمله درایران، به دلایلی که جای ذکرش دراین جانیست، بسیارکم بوده‌اند کسانی که «یادداشتهای روزانه» و «سفرنامه» یا «دفترخاطره» ای از خود باقی گذاشته باشند و، به همین مناسبت، درشناخت تاریخ اجتماعی مردم سرزمینمان، دچار دشواریهای فراوان هستیم. اگر از بعضی نوشته‌های رسمی (مثل نوشته‌های منشیهایی که در رکاب شاهان و امیران بوده‌اند) بگذریم، بسختی می‌توانیم مدرکی یا سندی پیداکنیم که مثلاً زندگی عادی مردم کشورمان را در پانصد سال پیش به ما نشان دهد و ناچاریم، برای بازیابی تاریخ اجتماعی مردم ایران در چهارصدسال اخیر، به سفرنامه‌های بیگانگانی مراجعه کنیم که اغلب، به غرض سیاسی یا به‌طمع سودمالی باکشور ما رفت و آمد داشته‌اند.

وقتی شما سفرنامهٔ ناصرخسرو را می‌خوانید (و توصیه می‌کنم، حتماً آن را بخوانید) تمامی زندگی مردم شهرهایی که مورد بازدید نویسندهٔ آن قرار گرفته‌است، جلوچشم شما زنده می‌شود و افسوس که نمی‌توانیم شبیه شاهکار ناصرخسرو را، دست‌کم برای هرصدسال یکی، داشته باشیم... و چنین است که مردم شرق، تاریخ و درنتیجه هویت خود را، کم و بیش گم کرده‌اند و ناچارند تنها با حدس و گمان، دربارهٔ پدران خود ودربارهٔ شیوهٔ زندگی اجتماعی آنها داوری کنند.

اگر از همین روزهایی که پشت نیمکتهای دبیرستان نشسته‌ایم، به‌خاطره نویسی عادت کنیم، دست کم از امروز به بعد، این کمبود را از بین برده‌ایم و وظیفهٔ خود را دربرابر تاریخ، مردم و کشورمان انجام داده‌ایم.

وقتی که بیش‌از پانصدسال پیش، دریانوردان ماجراجوی اسپانیایی و پرتغالی، سرزمینهای ناشناختهٔ امریکا راکشف کردند و مردم بومی ساکن درآن را ازدم تیغ گذراندند، به‌نحوی که در مدتی بسیارکوتاه، جمعیت بیش‌از پنجاه میلیونی آن را، به کمتراز پنج میلیون رساندند، ادعا می‌کردند با مردمی وحشی روبرو بوده‌اند و، به‌همین بهانه، همهٔ آثار ساختمانی و هنری آنها را ازبین بردند، کتابها و نوشته‌های آنها را نابود کردند و باقی ماندهٔ مردمشان را، به بردگی درکشتزارها واداشتند. ولی امروز که اندک آثار باقی ماندهٔ قومهای ساکن امریکای قبل از کشف ــ مثل قومهای آزتک، اینکا و مایا ــ مورد بررسی دانشمندان قرار گرفته، روشن شده‌است که در مرحلهٔ کم و بیش پیشرفته‌ای از تمدن و فرهنگ به سرمی‌برده‌اند: به بسیاری از کشفهای ریاضی و اخترشناسی دست یافته بودند؛ در صنایع دستی و هنرهای گوناگون، پیشرفت داشته‌اند و از بسیاری کشورهای آن روز این طرف دنیا، حتی برخی کشورهای اروپایی آن روزگار، عقب‌تر نبودند. اصولاً عنوان «انسان وحشی» ساخته و پرداختهٔ ذهن استعمارگرانی است که می‌خواستند و می‌خواهند وحشی‌گریهای خود را در غارت و کشتار مردم سرزمینهای دیگر، توجیه کنند... خود اصطلاح «کشف امریکا»

هم، تاحد زیادی خود خواهانه و بی‌معنی است. وقتی، چندسال پیش، یکی از رهبران سرخپوستان امریکا، درفرودگاه رُم از هواپیما پیاده می‌شد، باطنز پردردی به خبرنگاران گفت، می‌توانید نام مرا، به عنوان کسی که ایتالیا را کشف کرد، ثبت کنید. زیرا نخستین سرخپوستی هستم که قدم به‌خاک ایتالیا می‌گذارم... ولی توجه کنیم، اگر قومهای بومی ساکن امریکا، اندیشه‌ها و پیشرفتهای خود را، به‌صورت نوشته باقی نمی‌گذاشتند و اگر این چند اثر اندک، از دستبرد مهاجمان مصون نمی‌ماند، چگونه می‌شد به مظلومیت و حقانیت مردم بومی امریکا پی‌برد؟...

عادت به خاطره نویسی و ثبت یادداشتهای روزانه، نقش سازندهٔ دیگری هم دارد. وقتی حادثه‌ای دریک خیابان اتفاق می‌افتد، دهها و گاهی صدها نفر آن را می‌بینند، ولی همه، خیلی زود آن را فراموش می‌کنند و، جز خاطره‌ای مبهم و سطحی، چیزی در ذهن‌شان باقی نمی‌ماند. تنها اگر در بین این دهها و صدها نفر، نویسنده یا شاعری تیزبین وجود داشته باشد، از آن حادثه، شاهکاری می‌آفریند و برای همیشه آن را زنده‌نگه‌می‌دارد. چرا؟ برای این که نویسنده یا شاعر، اگر نویسنده یا شاعر به‌معنای واقعی کلمه باشد، به‌دقت و تیزبینی عادت کرده‌است، نکته‌هایی را می‌بیند که دیگران نمی‌بینند، صداهایی را می‌شنود که به‌گوش دیگران نمی‌رسد. او نالهٔ گُلی راکه زیر پاله می‌شود، فریاد درختی راکه از تشنگی رنج می‌برد و غرش درون مردی راکه آرام و بی‌صدا، ولی گیج و مات از خیابان می‌گذرد، می‌شنود... و شما هم، اگر بخواهید قدرت شنیدن آواهای پنهان و زخمهای نهان را داشته‌باشید، اگر بخواهید خود را صاحب قلمی کنید که دیگران را تکان‌دهد و به فکر وادارد، اگر بخواهید نیروی آن را پیدا کنید که بتوانید اندیشه‌های خود را، به‌صورتی گویا و پرجذبه، برای دیگران بنویسید و یا... حتی اگر بخواهید امکان پیداکنید که راه‌حل مسأله‌های دشوار را، به زبانی ساده و قابل فهم روی کاغذ بیاورید، باید خود را به «نوشتن» و به‌خصوص «خاطره نویسی» عادت دهید...

اندیشه معمولاً جرقه می‌زند و در ذهن پدیدمی‌آید، ولی باید از مرحله‌هایی بگذرد تا پخته و قابل عرضه شود... ولی اندیشه را باید بیان کرد و شما حتماً تجربه کرده‌اید که «بیان» یک مطلب، دشوارتر از «اندیشیدن» دربارهٔ آن است. شما مطلب را می‌دانید و در ذهن خود پخته‌اید، ولی در لحظهٔ بیان آن، دچار دشواری می‌شوید و در می‌مانید. دشوارتر از بیان یک مطلب، به روی کاغذ آوردن آن است: از کجا باید آغاز کرد؟ با چه مقدمه‌ای؟ آیا اصلاً به مقدمه‌ای نیاز دارد یابهتراست، بدون هیچ توضیح اضافی، اصل مطلب به‌طور مستقیم مطرح شود؟... چرا جمله‌ها ساده و زیبا از آب در نمی‌آیند؟ چرا واژه‌ها نرمش ندارند؟ به دلخواه آدم در بین جمله‌ها جانمی‌گیرند؟ این «نوشته» چقدر خشک است، هیچ کس را جلب نمی‌کند!... و سرانجام، بعداز ساعتها کشش و کوشش، بازهم از نوشتهٔ خود راضی نیستید: آن چه در ذهن خود داشتید، روی کاغذ نیامده؛ حرف شما چیزدیگری بود واین نوشته چیز دیگری از آب درآمد...

بله، از اندیشیدن دربارهٔ یک مطلب و فهمیدن آن، تا بیان آن به‌صورت یک نوشته برای دیگران، مسیری پرپیچ و خم وجود دارد که جز با تمرین مستمر شناخته نمی‌شود... و «خاطره نویسی» یکی از راههای این تمرین و احتمالاً بهترین آنهاست.

ضمن نوشتن خاطره یا یادداشت روزانه، به این نکته‌ها توجه داشته باشید:

۱ـ همان طور که می‌اندیشید و همان‌گونه که برای دیگران تعریف می‌کنید، بنویسید. به خودتان فشار نیاورید که جمله‌هاتان «ادیبانه» باشد. تاجایی که می‌توانید، از جمله‌های دراز پرهیز کنید. از همان واژه‌هایی استفاده کنید که ضمن صحبت با دوستانتان به‌کار می‌برید. کافی است معنا و مفهوم جمله‌روشن باشد و منظور شما را برساند. ساده نویسی، هنراست، درحالی که به‌کاربردن واژه‌ها و جمله‌های پیچیده و دور از ذهن، موجب دورشدن از مطلب و، درنتیجه، گمراهی خواننده‌می‌شود. جمله‌های پر پیرایه ممکن است خواننده را دچار شگفتی لحظه‌ای کند، ولی چیزی به او نمی‌دهد و، به‌همین جهت، خیلی زود فراموش می‌شود. هرگز از واژه، اصطلاح یا ضرب‌المثلی که معنای درست و دقیق آن را نمی‌دانید، استفاده نکنید.

۲ـ تلاش کنید، درنوشته‌های خود، از جادهٔ انصاف خارج نشوید. حادثه‌ها را همان‌طور که پیش آمده‌اند روایت کنید، نه آن طور که شما و در آرزوهای خود انتظار داشته‌اید. عیبی‌ندارد آرزوهای خودتان را هم روی کاغذ بیاورید، ولی مرز آنها را با پیشامدهای واقعی، به روشنی معین کنید؛ مثلاً به این صورت: «من انتظار داشتم... ولی در واقع این طور نشد و...». اگر می‌خواهید شخصیتی را بستایید یا

مورد بی‌مهری قراردهید، یادآوری کنید که عقیدهٔ خود را بیان می‌کنید و چه بهتر که نظردیگران را هم، بادقت و بی‌طرفی بیاورید. ننویسید «فلانی چنین است»، بنویسید «آن طور که من تصور می‌کنم، فلانی این طور است».

انسان، موجود پیچیده و گاه‌متضادی است، در زندگی خود، همه جا و همیشه رفتاری یکسان ندارد و زیر تأثیر پیشامدها و به‌انگیزه‌های عاطفی یا اجتماعی تغییر می‌کند. برای داوری دربارهٔ یک انسان، باید تمامی زندگی او، مجموعهٔ رفتارهای او و همهٔ انگیزه‌های درونی و بیرونی او را شناخت. بایک برخورد کوتاه و مقطعی، نمی‌توان دربارهٔ شخصیت و اعتبار کسی، داوری قاطع و بی‌چون و چرا کرد.

۳- پاکیزه بنویسید. حتی وقتی که برای خودتان یادداشت برمی‌دارید، سعی کنید نوشتهٔ شما، چه از نظر دستوری و جمله‌بندی و چه ازنظر زیبایی و خوش نویسی، بالاترین حد توانایی شما را منعکس کند. به موقع نقطه‌گذاری کنید، به‌جای خود، سرسطر بیایید و تاریخ و محل نوشتهٔ خود را فراموش نکنید. نوشتهٔ هرکس، معرف سلیقه، اخلاق و رفتار اوست و پاکیزگی و نظم، باید یکی از ویژگیهای هر انسان امروزی باشد.

۴- وقتی دریک مجلس سخنرانی یاکلاس درس یاگفت وگوی با دوستان، به مطلبی برخوردید که در خور ثبت در دفترخاطرهای علمی شما بود، همان جا برخی نکته‌های اساسی آن را یادداشت کنید؛ حافظه همه چیز را و همان‌گونه که مایلید، نگه نمی‌دارد. به‌این مناسبت، دفتر یادداشت کوچکی در جیب داشته‌باشید که هر وقت چیزی به ذهنتان رسید، به‌موقع یادداشت کنید تا تفصیل آن را، سرفرصت، در دفتر خاطره‌های خود بنویسید.

□

واژه نامهٔ ریاضی

از دانش‌آموز خوبی که درسال سوم دبیرستان، رشتهٔ‌ریاضی - فیزیک تحصیل می‌کرد، خواستم روی تختهٔ‌سیاه بنویسد: a^2-b^2 بعداز او پرسیدم: «این چیه؟ درجبر، به a^2-b^2 چه می‌گویند؟» و دانش‌آموز پاسخ داد: «این، یک **اتحاد مزدوج** است.» کلاس اعتراضی نکرد، من هم مخالفت نکردم. به او گفتم: «بسیارخوب، ولی اول **اتحاد** را تعریف کن. اتحاد یعنی چه؟»

بعداز گفت و شنود کم و بیش طولانی باکلاس، به این نتیجه رسیدیم که: **اتحاد، نوعی برابری است.** پرسیدم: «چه نوع برابری؟» و بازهم، بعداز اظهار نظرهای متفاوت، باچند تعریف که کم و بیش هم ارز یکدیگر بودند، باهم توافق کردیم:

- دراتحاد، در دوطرف برابری، یک عبارت، منتهی به دوصورت مختلف نوشته‌شده‌است.

- اتحاد یک برابری است که، به کمک تبدیلها و عملهای مجاز، بتوان یکی از دو طرف را، به‌طرف دیگر منجرکرد.

- اتحاد به چنان برابری گویند که، باانجام عملهای مجاز، بتوان از آن، به یک برابری واضح، مثل $x=x$ رسید.

- برابری اتحاد، باید به‌ازای هر مقدار دلخواه مجهول یا مجهولها، برقرار باشد.

پرسیدم: «چند اتحاد جبری داریم؟» یکی گفت ۱۲ تا، دیگری گفت ۱۳ تا،... پرسیدم: «$2x-x=x$»، چه نوع برابری است؟ آیا اتحاد است؟» این جابود که همه به‌اشتباه خود پی‌بردند: «آقا! بی‌نهایت اتحاد جبری وجود دارد.»

- بسیارخوب، حال به من بگویید، آیا برابری $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ یک اتحاد است؟

- بله!

- ولی قرار شد، اتحاد به‌ازای همهٔ مقدارهای مجهول برقرارباشد. آیا می‌توان در دوطرف این برابری $x=1$ قرارداد؟

- نه! مخرج نمی‌تواند برابر صفر باشد؛ به‌جای x نمی‌توان عدد ۱ را قرارداد.

بنابراین، باید در تعریفهای خود تجدیدنظر کنیم؛ آنها به دقت بیشتری نیازدارند. عبارت $\frac{x^2-1}{x-1}$، تنها با شرط $x\neq 1$، باعبارت $x+1$ متحداست. سرانجام، روشن شد که، درتعریف اتحاد باید شرط «برای مقدارهای قابل قبول مجهول یا مجهولها» ذکر شود. به زبان دیگر، دریک اتحاد، باید عبارتهایی که در دوطرف برابری قرار دارند، حوزهٔ تعریف یادامنهٔ مشترکی داشته‌باشند.

پرسیدم: «بالاخره، تکلیف ما بابرابری $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ چیست؟

اتحاد است یا یک برابری از نوع دیگری؟»

وبعداز گفت و گوها و ذکر مثالها، به این نتیجه رسیدیم که این، یک اتحاد مشروط است:

$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$، باشرط $x\neq 1$، یک اتحاد است.

همچنین روشن شد که، مثلاً، می‌توان گفت:

برابری $x^3+y^3+z^3=3xyz$، باشرط $x+y+z=0$، یک اتحاد است. می‌دانید چرا؟... اگر سمت چپ برابری را، به‌ازای $z=-(x+y)$ محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-(x+y)^3=x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)=-3x^2y-3xy^2=-3xy(x+y)=-3xy(-z)=3xyz$$

سمت‌چپ برابری، باتوجه به‌شرط $x+y+z=0$، باانجام عملهای مجاز، به‌سمت راست برابری تبدیل شد.

[یادتان باشد که باید معنای «انجام عملهای مجاز» را روشن کنیم؛ درضمن به این مطلب هم بپردازیم که، اگر یک برابری اتحاد نباشد، چه نامی دارد؟... در فرصتهای بعدی به آنها خواهیم پرداخت.]

گفتم: بحث اتحاد اندکی طولانی شد، به مطلب خود برگردیم. دوباره پرسش اول خودرا، منتهی به صورت دیگری، تکرار می‌کنم:

ـ آیا a^2-b^2 یک برابری است؟

ـ نه.

ـ پس، اتحاد هم نمی‌تواند باشد. حداقلِ شرطی که باید یک «اتحاد» داشته‌باشد، وجود یک برابری است: «اتحاد نوعی برابری است که...» a^2-b^2 اتحاد نیست.

به واژهٔ «مزدوج» بپردازیم. در ریاضیات، و به خصوص در جبر، درکجا از واژهٔ «مزدوج» استفاده می‌کنیم؟ «مزدوج» یعنی چه؟

سرانجام معلوم شد، برای استفاده از واژهٔ «مزدوج» باید با دو عبارت دوجمله‌ای سروکار داشته‌باشیم: دوعبارت دوجمله‌ای را وقتی مزدوج هم‌گویند که، درآنها، یکی‌از جمله‌ها برابروجمله‌های دوم‌قرینهٔ یکدیگر باشند، مثلاً $a+b$ و $a-b$ مزدوج یکدیگرند.

ـ $x+y$ چند مزدوج دارد؟

ـ دوتا! $x-y$ و $-x+y$.

ـ $x+y+z$ چند مزدوج دارد؟

ـ آقا، این سه جمله‌ای است نه دو جمله‌ای!

و دانش‌آموزی دیگر:

ـ می‌توان $(x+y)$ را، یک جمله به‌حساب آورد.

ـ فقط $(x+y)$ را؟

ـ نه! $(x+z)$ یا $(y+z)$ راهم می‌توان به‌عنوان یک جمله درنظر گرفت.

ـ بالاخره $x+y+z$ چند مزدوج دارد؟

ـ شش تا:

$$(x+y)-z,\quad -(x+y)+z,$$
$$(x+z)-y,\quad -(x+z)+y,$$
$$x-(y+z),\quad -x+(y+z),$$

ـ بسیار خوب، دوباره به a^2-b^2 برگردیم. آیا دراین جا با دوعبارت سروکار داریم؟

ـ نه!

ـ ولی شرط اصلی استفاده از واژهٔ مزدوج این است که دو عبارت داشته‌باشیم: $a+b$ و $a-b$ یا $x+y+z$ و $x+y-z$. به‌این ترتیب، برای a^2-b^2، که یک عبارت است و نه دوعبارت، نمی‌توان از واژهٔ مزدوج استفاده کرد.

به دانش‌آموزی که کنار تخته سیاه ایستاده بود، بالحنی شماتت بار گفتم:

ـ شما، برای معرفی a^2-b^2، از دو واژه استفاده کردید: «اتحاد» و «مزدوج». ولی a^2-b^2 نه اتحاد است و نه مزدوج. پس چیست؟ و توضیح دادم:

ـ چرا به چشمهای خود اعتماد نمی‌کنید؟ هرچه می‌بینید، همان را به زبان بیاورید.

ـ آقا، این یک عبارت جبری است.

ـ درست است. ولی «عبارت جبری» خیلی کلی و مبهم است. سعی کنید، بیشتر و بهتر آن را معرفی کنید.

ـ این، یک دوجمله‌ای جبری است.

ـ چه نوع دوجمله‌ای؟

ـ تفاضل دومجذور کامل.

ـ بله، کاملاً درست است. a^2-b^2، نه اتحاد است و نه‌مزدوج؛

تفاضل دو مجذور کامل است. و اگر بخواهیم، ویژگیهای بیشتری از آن را بیان کنیم، می‌توانیم بگوییم:

a^2-b^2، یک دوجمله‌ای و به صورت تفاضل دو مجذور کامل است و، بنابراین، می‌توان آن را به ضرب دوعبارت مزدوج تجزیه کرد:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \qquad (1)$$

و برابری (۱)، یک اتحاد است. حالا دیگر، رابطهٔ a^2-b^2 با واژه‌های «اتحاد» و «مزدوج» روشن شد.

□

می‌بینید، حتی در ساده‌ترین موضوعها، اگر معنا و تعریف درست واژه‌ها را ندانیم، ممکن است دچار چه گمراهیهایی بشویم!

شما معمولاً، ضمن عملهایی که انجام می‌دهید، اغلب از این جمله‌ها استفاده می‌کنید:

«معلوم و مجهول می‌کنیم» ؛ «طرفین وسطین می‌کنیم» ؛ «دور در دور، نزدیک در نزدیک» ؛... این جمله‌ها، به‌خودی خود، هیچ معنایی ندارند؛ آنها را روی کاغذ بنویسید و به کسی نشان دهید که با زبان فارسی آشناست، ولی ریاضیات نمی‌داند. بدون تردید، به شما خواهد گفت: این جمله‌ها بی‌معنی‌اند؛ «طرفین وسطین می‌کنیم» ، هیچ معنای روشنی ندارد. اصلاً «طرفین» یا «وسطین» یعنی چه؟

توصیهٔ من این است که، هرگز از این گونه جمله‌ها استفاده نکنید. سعی کنید، معنای ریاضی عملی را که انجام می‌دهید، برای خودتان روشن کنید و ، بعد، چیزی را برزبان بیاورید که معرف آن عمل ریاضی باشد. شما، عمل را درست انجام می‌دهید، ولی معنای آن را نمی‌دانید، یعنی نمی‌دانید از کدام عمل ریاضی، به چه دلیل و با‌چه شرطی استفاده‌می‌کنید.

عمل «طرفین وسطین کردن» را بشکافیم.

اگر aو b، دوعدد و، درضمن، b مخالف صفر باشد، $\frac{a}{b}$ را نسبت هندسی دوعدد a و b گویند. اکنون اگر دونسبت هندسی برابر داشته‌باشیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad (2)$$

بایک تناسب هندسی سروکار داریم. برابری (۲) ، باشرط $b\neq 0$ و $d\neq 0$، یک تناسب هندسی است که می‌توان آن را، این‌طور هم نوشت:

$$a:b=c:d \qquad (2)'$$

وقتی تناسب هندسی را به‌صورت $(2)'$ بنویسیم، عددهای a و d در دوطرف و عددهای bو c در وسط قرارمی‌گیرند؛ به‌همین جهت aو d را «طرفین» و bو c را «وسطین» گویند. اگر دوطرف برابری (۲) یا $(2)'$ را درعدد bd ضرب کنیم، به برابری $ad=bc$ می‌رسیم؛ یعنی درهر تناسب هندسی، حاصل ضرب دوعدد «طرفین» ، برابر است با حاصل‌ضرب دو عدد «وسطین». این، یک ویژگی تناسب هندسی است و وقتی می‌گوییم «طرفین وسطین می‌کنیم»، از این ویژگی استفاده‌می‌کنیم.

بنابراین، اگر هم می‌خواهیم از همین جمله استفاده کنیم، لااقل به این صورت بیان کنیم:

«حاصل ضرب طرفین را مساوی حاصل ضرب وسطین قرار می‌دهیم.»

خلاصه نویسی و خلاصه‌گویی، کار درستی است، ولی نباید به قیمت از دست رفتن معنای جمله تمام شود. می‌گویند «وقت ارزش دارد» یا «وقت طلاست» ولی اگر شما وظیفهٔ تهیهٔ کالایی را به‌عهده دارید، حق ندارید به بهانهٔ «صرفه‌جویی در وقت» کالای ناقص یا معیوبی تهیه کنید.

باهمهٔ اینها، بهترین روش این است که اصلاً از واژه‌های «طرفین» و «وسطین» استفاده نکنید و همان عمل ریاضی را که انجام می‌دهید، بیان کنید و بگویید: در برابری (۲)، می‌دانیم b و d مخالف صفرند؛ بنابراین می‌توانیم دوطرف برابری را در bd ضرب کنیم.

زمانی در راهرو یکی از دبیرستانها، به دختر دانش‌آموزی برخوردم که چیزی را، به زبانی کاملاً ناآشنا، تکرار می‌کرد. جلو رفتم و پرسیدم چه می‌خوانی! گفت: «فرمولهای مثلثات را حفظ می‌کنم». خواهش کردم، یکبار دیگر تکرار کند و او گفت:

ـ وقتی سینوس باشد، می‌شود «سَن کو سَن کو» و وقتی کسینوس باشد می‌شود «کوکو سَن سَن».

پرسیدم یعنی چه؟ این چه زبانی است؟ چینی یا ژاپنی؟

ـ نه آقا، به این فرمولها نگاه کنید:

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b,$$
$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\pm\sin a\sin b$$

وقتی سینوس را بخواهیم، حاصل آن از دوجمله تشکیل شده‌است که هرکدام حاصل ضرب یک سینوس در یک کسینوس است، یعنی «sin ـ co» (سَن کو) ، یعنی برای سینوس داریم «سن‌کو سن‌کو» و همچنین برای کسینوس.

از این نوع یادگیری ریاضیات، چیزی عاید شما نمی‌شود ریاضیات «سن‌کو سن‌کو ـ کوکو سن‌سن» ، تنها به درد شوخی و طنز روی صحنه و برای خنداندن شنونده می‌خورد.

سالها قبل، وقتی که دورهٔ دبستان شش‌سال و دورهٔ دبیرستان هم شش سال بود، دریکی از دبیرستانها، در ساعت فراغت خود، به کلاس‌دوم دبیرستان (که در آن ساعت، معلم‌نداشت) رفتم. هندسه داشتند. پرسیدم: «کسی می‌تواند دایره را تعریف کند.»

تقریباً همهٔ دانش‌آموزان دست خود را بلند کردند. یکی از آنها را انتخاب کردم و او آغاز کرد:

«دایره، منحنی مسدودی است که همهٔ نقطه‌های آن از نقطه‌ای به نام مرکز، به یک فاصله باشند.»

به‌سرعت برق و باد حرف می‌زد و واژه‌ها همچون تگرگ از زبان او بیرون می‌ریخت و مغز شنونده را بمباران می‌کرد.

گفتم: پسرم، من باید بتوانم سخن تو را در مغز خود حلاجی کنم. مغز من قدرت جذب این همه سرعت و شتاب را ندارد. شمرده‌تر و آرام‌تر تکرار کن.

مثل نواری که حرکت آن را کند کرده‌باشند، تکرار کرد:

«دایره... منحنی... مسدودی...»

او را نگه‌داشتم:

ـ می‌گویی «منحنی مسدود»؛ یعنی چه؟

نوار به دور افتاد. دانش‌آموز مرتباً تکرار می‌کرد:

«منحنی مسدودی است که... منحنی مسدودی است که...»

پرسیدم «مسدود» یعنی چه؟ معنای واژهٔ «مسدود» را می‌خواهم. معلوم شد معنای این واژه را نمی‌داند. از دیگران پرسیدم و سرانجام، یکی گفت «مسدود، یعنی بسته».

از همان دانش‌آموزی که معنای «مسدود» را گفته بود، خواستم پای تخته سیاه بیاید و یک منحنی یا یک شکل رسم کند که مسدود باشد، ولی دایره نباشد. و او درماند. مگر می‌شود چیز دیگری، غیراز دایره، مسدود باشد. او حفظ کرده‌بود: «دایره، منحنی مسدودی است...» ، اگر چه هرشکلی که او رسم می‌کرد، به همه‌چیز شباهت داشت به جز دایره.

... درریاضیات (و نه تنها در ریاضیات) ، کمتر حفظ کنید و بیشتر بفهمید... اغلب، چیزهایی می‌گوییم و از واژه‌هایی استفاده‌می‌کنیم که معنای درست، و به‌خصوص، معنای ریاضی آنها را نمی‌دانیم و این، سرچشمهٔ اصلی ناکامیهای ما در درسهای ریاضی است. بسیار دیده‌شده‌است که جوانی یا حتی نوجوان یا کودکی، غزلی از حافظ را از حفظ می‌خواند، ولی حتی یک بیت آن را نمی‌تواند معنی کند. این، نوعی تحمیل به حافظه است و، به خصوص، موجب تضعیف نیروی استدلالی فرد می‌شود، به‌نحوی که بتدریج، به‌جای «اندیشیدن و انتخاب کردن» ، به «پذیرفتن» عادت می‌کند... تأکید می‌کنم: تنها وقتی جمله‌ای را برزبان بیاورید که معنای آن و معنای تک تک واژه‌های آن را بدانید.

این کمبودها را چگونه جبران کنیم؟

درهر کلاسی که هستید، حتی اگر گمان می‌کنید فهم موضوعهای ریاضی برای شما دشوار است، از همین امروز تصمیم بگیرید، یک «واژه نامهٔ ریاضی» برای خودتان درست کنید.

وقتی سرکلاس به درس معلم گوش می‌دهید، وقتی مسأله‌ای را حل می‌کنید یا یک کتاب ریاضی را می‌خوانید، به واژه‌هایی که معنای ریاضی دارند، توجه کنید و همهٔ آنها را روی ورق کاغذی بنویسید: «ضریب» ، «جمله» ، «معادله» ، «دایره» ، «چندضلعی منتظم» ، «مخروط ناقص» ، «کسر» ، «نابرابری»،...

بعد، درمنزل، سعی کنید، دربارهٔ معنای ریاضی آنها بیندیشید؛ به کتاب مراجعه کنید، از دوستان و یا دبیران خود بپرسید، جست وجو کنید تامعنا و تعریف درست هر واژه را پیداکنید، اگر لازم است چند مثال مربوط به آن را بیابید، چند مسألهٔ مربوط به آن را حل کنید و، بعد، در دفتر «واژه نامهٔ ریاضی» خود بنویسید. برای هر واژه، چند صفحه اختصاص بدهید تا اگر، بعدها، بازهم مطلبی دربارهٔ آن داشتید و یا بنظرتان رسید که باید مطلب قبلی را اصلاح کنید، جاداشته‌باشید. مثلاً:

معادله، یعنی یک برابری که...

آن وقت چند مثال بیاورید، مثالها را حل کنید، راه شناسایی معادله را توضیح دهید؛ چند نوع معادله می‌شناسید؟ و چگونه باید آنها را

حل کرد؟ چه گمراهیهایی در حل معادله وجود دارد؟...

به یاد داشته‌باشید که، هر «اصطلاحی» معنای خاصی‌دارد و ممکن است، این معنا، در دانشهای مختلف، متفاوت باشد: «آنالیز ریاضی»، غیراز «آنالیزشیمی» است. «عددگنگ» مفهومی غیراز «آدم گنگ» دارد. در ریاضیات «اول» با «نخست» فرق دارد و به «عدد اول» نمی‌توان گفت «عدد نخست» یا به‌جای «عددگویا» نمی‌توان «عدد زبان‌دار» به‌کار برد.

شما در ریاضیات، با «تصاعد نزولی» سروکار دارید. معنای تحت الفظی آن، چیزی به شما نمی‌دهد: «تصاعد» حکایت از «صعودی بودن» می‌کند و با «نزولی» سازگار نیست، مثل این که کسی بگوید «مرتفع عمیق» یا «ستمکار عادل». پس، اصطلاح «تصاعد نزولی»، معنایی ریاضی دارد، غیراز آن چه از ظاهر واژه‌ها به‌دست می‌آید. همهٔ «اصطلاحها» کم و بیش چنین‌اند: وقتی می‌گویید «فرودگاه» ، در واقع از یک اصطلاح استفاده کرده‌اید؛ فرودگاه، تنها محل فرود آمدن هواپیما نیست؛ در فرودگاه، پرواز و بلند شدن هواپیما هم اتفاق می‌افتد. دراین جا، قصد شما از واژهٔ «فرودگاه»، مشخص کردن محلی است که همگان معنای آن را می‌دانند. در ریاضیات هم، باید معنای هر اصطلاحی، برای کسی که با ریاضیات کار می‌کند، معلوم باشد. درغیر این صورت، نمی‌توان بر ریاضیات مسلط شد. اصطلاحهای ریاضی، «الفبای» زبان ریاضیات‌اند و، بدون آشنایی کامل با الفبا، نمی‌توان از «زبان» سردرآورد.

«واژه نامهٔ ریاضی» شما، باید هرروز غنی و غنی‌تر شود و، اگر به ریاضیات علاقه‌مندید، بعداز پایان تحصیل هم ادامه پیداکند. نه تنها هرروز باید واژه یا واژه‌های تازه‌ای به آن اضافه شود، بلکه باید دایم در واژه‌های قبلی هم تجدید نظر کرد و اگر بی‌دقتی و کمبودی در آنها وجود دارد و یا اگر مطلب تازه‌ای دربارهٔ آنها پیداکرده‌اید، به اصلاح و تکمیل آنها بپردازید.

در بحث بعدی، نمونهٔ کوچکی از این «واژه نامه» را می‌آوریم، ولی حتی دربارهٔ این نمونه هم، کار را تمام شده نپندارید، دربارهٔ تعریفها و مثالهای آن بیندیشید، شاید درآنها ابهامها یاکمبودهایی وجودداشته‌باشد. هرکسی که اهل دانش باشد، درهمان حال که به نوشته‌ها و کارهای دیگران ارج می‌گذارد، نباید دربست به آنها تسلیم شود؛ اگر تسلیم به کارهای علمی گذشتگان کار درستی بود، دانش دریک جا متوقف می‌شد و پیش نمی‌رفت. به این سخن رنه‌دکارت ، ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی توجه کنید:

«وقتی روی موضوعی بررسی می‌کنیم، نباید چیزی را جست‌وجو کنیم که دیگران فکر می‌کنند یاخودمان تصور می‌کنیم، بلکه باید در جست وجوی چیزی باشیم که یا آشکارا و به روشنی دیده‌می‌شود و یا بااستدلال قیاسی قابل اثبات است، زیرا دانش به صورت دیگری به‌دست نمی‌آید.»

ویاحتی روشنتر از آن، این سخن بودا:

«ما نباید گفته‌ای را، به صرف این که دیگران گفته‌اند، باورکنیم؛ نباید اخبار دیگران را، به‌صرف این که از قدیم به ما رسیده‌اند، باورکنیم؛ نباید بدون فکر به گفته و نوشتهٔ دانشمندان و خردمندان، تنها چون گفته و نوشتهٔ دانشمندان و خردمندان است، تسلیم شویم...؛ نباید به ملاحظهٔ شباهت و قیاس، چیزی را بپذیریم؛ نباید کلام استاد را، تنها چون کلام استاد است قبول کنیم. ماباید، باتکیه به عقل و فهم و ادراک خود، چیزی را بپذیریم که درستی آن برایمان روشن و آشکاراست، خواه کلام باشد، خواه نوشته یا هرچیزدیگری.»

می‌دانید چرا؟ به این خاطر که به‌قول رژه‌گودسان ، استاد دانشکدهٔ علوم دانشگاه پاریس:

«نخستین وظیفهٔ ریاضیدان، ساختن و تحویل دادن چیزی است که، شاید امروز، کمتر کسی طالب آن باشد، یعنی «انسان»، انسانی که می‌اندیشد، انسانی که می‌تواند درست را از نادرست تشخیص دهد، انسانی که برایش شناخت و انتشار حقیقت، برخیلی چیزها و مثلاً بریک تلویزیون دو بعدی برتری دارد، انسانی آزاد نه آدم واره‌ای آهنی.»

تابعد



— مرد جنگی باید که علم عدد را فرا گیرد وگرنه نخواهد دانست سپاه خود را چگونه بیاراید؛ و فیلسوف هم برای اینکه از دریای تبدّلات به درآید و مقام حقیقی خویش را بازیابد، باید یک حسابدان باشد... علم حساب نتیجه‌ای عظیم و عالی دارد، و ذهن را به تفکر دربارهٔ عدد مجرد معتاد می‌کند.

جمهور افلاطون
تاریخ ریاضیات اسمیت.
ترجمهٔ صدری افشار

بیش از هر مردی در زمان خویش بخشی بزرگ از جهان را گشته‌ام و در باب دوردست‌ترین چیزها به پژوهش پرداخته‌ام، اقالیم و سرزمینهای بسیار دیده‌ام و به سخنان دانشمندان بسیار گوش فراداده‌ام، ولی هیچ کدام تاکنون در ترسیم خطوط و اثبات آنها بر من پیشی نگرفته، نه حتی «مساحان مصری» که روی هم رفته پنج سال با آنان در دیار غربت به سر بردم.

دموکریتوس فیلسوف خندان
تاریخ ریاضیات اسمیت. ترجمهٔ صدری افشار

دنباله[1]

احمد قندهاری

۱ـ دنبالهٔ عددهای طبیعی:

اگر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی متوالی را پشت سرهم تا عدد n بنویسیم، این مجموعه را دنبالهٔ عددهای طبیعی گوییم. مانند

۱ , ۲ , ۳ , ... , n , n+۱ , ...

۲ـ دنبالهٔ اعداد :

به مجموعه‌ای از اعداد مرتب‌شده که با دنبالهٔ عددهای طبیعی یا بخشی از آن در تناظر یك به‌یك باشد، دنباله گفته می‌شود.

در هردنباله، جمله متناظر باعدد یك‌را جمله‌یکم (a_1) و جمله متناظر باعدد دو را جمله‌دوم (a_2) و ... و جمله متناظر با عدد n را جمله nام یا جمله‌عمومی (a_n) گوییم.

مانند دنبالهٔ اعداد زوج

$$\begin{array}{cccc} ۲ , & ۴ , & ۶ , \dots , & ۲n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_n \end{array}$$

مانند دنباله عددهای طبیعی مربع کامل

$$\begin{array}{cccccc} ۱ , & ۴ , & ۹ , & ۱۶ , & ۲۵ , \dots , & n^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots a_n \end{array}$$

۳ـ جمله عمومی یك دنباله :

در هردنباله، جمله‌ای که برحسب عبارتی‌از n بیان‌شود، جمله عمومی آن دنباله گفته می‌شود. مثلاً در دنباله عددهای طبیعی مربع کامل عبارت (n^2) جمله عمومی این دنباله است. مسلماً اگردر جمله‌عمومی به‌جای n ، عدد ۱ را قراردهیم،جمله اول و اگر به‌جای n عدد۲ را قراردهیم جمله‌دوم... دنباله به دست می‌آید.

۴ـ تعریف دیگر دنباله:

تابع f به صورت:

$$\begin{cases} f : N \rightarrow R \\ n \rightarrow f(n) \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم.

این تابع، تابعی است‌که $D_f \subset N$ و $R_f \subset R$ و جمله عمومی‌آن f(n) ضابطه‌تابع است.

این تابع یك دنباله‌را تعریف‌می‌کند.

مثلاً تابع $\begin{cases} f : N \rightarrow R \\ n \rightarrow f(n) = n^2 + n \end{cases}$ که هرعدد طبیعی

1_ Sequence

را به مجموع، مربع خودش + خودش مربوط می‌کند.

$۲ , ۶ , ۱۲ , \cdots, n^۲+n$

مثلاً تابع
$$\begin{cases} f: N \rightarrow R \\ n \rightarrow f(n)=\frac{۱}{n+۲} \end{cases}$$

$$\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \cdots, \frac{۱}{n+۲}$$

مسأله : کدام جمله از دنباله $a_n = ۳n^۲+۵n$ مساوی (۱۸۲) است؟

$$۳n^۲+۵n=۱۸۲ \Rightarrow ۳n^۲+۵n-۱۸۲=۰$$

$$n=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۲۰۹}}{۶}=\frac{-۵\pm۴۷}{۶} \begin{cases} ۷ \\ -۱۳ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پس جمله هفتم .

۵ـ انواع دنباله:

الف: دنباله صعودی و نزولی

اگر قدرمطلق هرجمله‌دنباله، بزرگتر از ، قدرمطلق جمله ماقبل‌باشد، چنین‌دنباله‌ای را دنباله صعودی گوییم اگرقدرمطلق هرجمله دنباله،کوچکتر از، قدرمطلق جمله ماقبل باشد، چنین دنباله‌ای‌را دنباله نزولی گوییم.

مانند :

دنباله صعودی
$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}, ۲, ۸, ۳۲ \\ \frac{۱}{۲}, -۲, ۸, -۳۲ \end{cases}$$

دنباله نزولی
$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶} \\ \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, -\frac{۱}{۱۶} \end{cases}$$

□

ب: دنباله متناوب به دوصورت زیر است:

۱ـ به دنباله‌هایی گفته می‌شود که جملاتش یك در میان مثبت و منفی باشد مانند :

$$\frac{۱}{۲}, -۲, ۸, -۳۲$$

به این دنباله، دنباله متناوب صعودی گوییم.

۲ـ به‌دنباله‌هایی گفته می‌شود که جملات آن‌درفاصله‌های معین تکرار می‌شود.

مانند: $۰, ۱, ۰, -۱, ۰, ۱, ۰, -۱, \ldots$

$$a_n = \sin\frac{k\pi}{۲}, \quad k \in z$$

□

ج: دنباله مثبت

دنباله‌ای است که همه جملاتش مثبت باشد.

□

د : دنباله منفی ، دنباله‌ای است که همه جملاتش منفی باشد .

سری یا رشته[۲]

متناظر باهردنبالهٔ a_n ، دنبالهٔ S_n وجوددارد به‌طوری که:

$$S_n = a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_n$$

به این مجموع، رشته یا سری گویند.

2_ Series

به‌عبارت دیگر، سری عبارت است‌از مجموع n جمله مرتب‌شده یك‌دنباله که n مقادیرطبیعی از یك تا هرعدد دلخواه را می‌پذیرد.

a_n که قبلاً گفته شد، جمله عمومی دنباله است، جمله عمومی سری‌نیز می‌باشد. معمولاً برای‌نمایش‌سری ازنماد $\sum$ (= سیگما) استفاده می‌شود.

اگر a_n جمله‌عمومی دنباله‌ای باشد، سری متناظرآن را با نماد $\sum_{n=1}^{n} a_n$ نشان می‌دهیم.

یادداشت:

$$\sum_{n=1}^{n} n = ۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^۲ = ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^۳ = ۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳ = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$$

$$\sum_{n=1}^{n} ۲n = ۲+۴+۶+\cdots+۲n = n(n+۱)$$

$$\sum_{n=1}^{n} (۲n-۱) = ۱+۳+۵+\cdots+۲n-۱ = n^۲$$

توجه: انواع سری، همان‌انواع دنبالهٔ مولد آنها می‌باشد.

تصاعد عددی یا حسابی

دنباله‌ای است‌که هرجمله‌آن برابر باشد با جمله قبل به اضافه‌عدد ثابتی. این‌عدد ثابت‌را قدرنسبت گویند و با حرف r یا d نشان می‌دهند.

مثال:

$$\div ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \ldots$$

$$d=۴$$

درحالت‌کلی، دنباله تصاعد عددی را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$\div a_۱, (a_۱+d), (a_۱+۲d), (a_۱+۳d), \ldots,$$

$a_۱$ جمله‌اول، $a_۲$ جمله‌دوم، $a_۳$ جمله‌سوم، $a_۴$ جمله‌چهارم ...

$a_۱+(n-۱)d$ ← جمله nام

▲

۱- هرگاه $\div x, y, z$ سه‌جمله‌متوالی‌یك‌تصاعدعددی باشد داریم:

$$x=a_k, \quad y=a_k+d, \quad z=a_k+۲d \text{ ، } k\in N$$

$$۲(a_k+d)=(a_k)+(a_k+۲d)$$

$$\Longrightarrow \boxed{۲y=x+z} \quad (۱)$$

▲

۲- جمله عمومی یا جمله (n) ام:

$$\boxed{a_n=a_۱+(n-۱)d} \quad (۲)$$

▲

۳- در هرتصاعد عددی داریم:

$$a_m-a_n=(m-n)d$$

اثبات:

$$\begin{cases} a_m=a_۱+(m-۱)d \\ a_n=a_۱+(n-۱)d \end{cases}$$

$$a_m-a_n=a_۱+md-d-a_۱-nd+d$$

$$\boxed{a_m - a_n = (m-n)d} \quad (۳)$$

مثال: در یک تصاعد عددی $a_{10} = 24$ و $a_{15} = 39$، جمله‌چهلم چند است؟

$$a_{15} - a_{10} = 39 - 24 \Rightarrow 5d = 15 \Rightarrow d = 3$$

$$a_{40} - a_{15} = 25d \Rightarrow a_{40} - a_{15} = 25(3)$$

$$\Rightarrow a_{40} - 39 = 75 \Rightarrow a_{40} = 114$$

۴- نتیجه: در هر تصاعد عددی داریم:

$$\text{اگر } \begin{cases} a_m = n \\ a_n = m \end{cases} \Rightarrow d = -1 \ , \ \boxed{a_{m+n} = 0} \quad (۴)$$

اثبات: بنا به (۳) داریم:

$$a_m - a_n = (m-n)d$$

$$n - m = (m-n)d \Rightarrow \boxed{d = -1}$$

$$a_{m+n} - a_m = (m+n-n)d$$

$$a_{m+n} - n = nd \Rightarrow a_{m+n} - n = -n \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{m+n} = 0}$$

مثال:

$$\text{اگر } \begin{cases} a_{15} = 10 \\ a_{10} = 15 \end{cases} \Rightarrow d = -1 \ , \ a_{25} = 0$$

۵- قاعدهٔ اول اندیس:

در هر تصاعد عددی داریم:

$$\boxed{2a_n = a_{n+p} + a_{n-p}} \quad (۵) \quad p, n \in N, \ p < n$$

اثبات:

$$2a_n = a_{m+p} + a_{n-p}$$

$$2[a_1 + (n-1)d] = a_1 + (n+p-1)d + a_1 + (n-p-1)d$$

$$2a_1 + 2(n-1)d =$$

$$2a_1 + (n+p-1+n-p-1)d$$

$$2a_1 + 2(n-1)d = 2a_1 + (2n-2)d$$

$$2a_1 + 2(n-1)d = 2a_1 + 2(n-1)d$$

مثال: دریک تصاعد عددی جمله‌اول دوبرابر جمله‌بیستم است. جمله سی‌ونهم این‌تصاعد،چند است؟

$$1 + 39 = 2(20)$$

$$\Rightarrow a_1 + a_{39} = 2a_{20} \Rightarrow a_{39} = 0$$

۶- قاعدهٔ دوم اندیس:

در هر تصاعد عددی داریم:

به شرطی‌که $m+n = p+k$ ، $m, n, p, k \in N$

$$\boxed{a_m + a_n = a_p + a_k} \quad (۶)$$

اثبات:

$$a_1 + (m-1)d + a_1 + (n-1)d =$$

$$a_1 + (p-1)d + a_1 + (k-1)d$$

$$2a_1 + (m+n-2)d = 2a_1 + (p+k-2)d \ \ldots$$

چون $m+n = p+k$ پس‌تساوی فوق‌همواره درست است.

اثبات: با استفاده از دستور شماره (۳)

$$a_m - a_p = a_k - a_n$$

$$(m-p)d = (k-n)d$$

$$md - pd = kd - nd \Rightarrow (m+n)d = (k+p)d$$

$$\Rightarrow m+n = k+p$$

که برقرار است.

مثال: دریك تصاعد عددی مجموع دوجمله‌نهم و بیست و نهم مساوی (۱۰۰) است، اگر جمله پانزدهم (۳۲) باشد جمله بیست وسوم این‌تصاعد چند است؟

$$a_{۱۵}+a_{۲۳}=a_{۹}+a_{۲۹}$$
$$۳۲+a_{۲۳}=۱۰۰ \Longrightarrow a_{۲۳}=۶۸$$

▲

۷- S_n مجموع n جمله اول یك تصاعد حسابی :

در هر تصاعد حسابی

$$\div a_۱ , (a_۱+d) , (a_۱+۲d) , (a_۱+۳d) , \cdots$$

داریم :

$$\boxed{S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)} \quad (۷)$$

اثبات :

$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_{n-۲}+a_{n-۱}+a_n$$
$$S_n=a_n+a_{n-۱}+a_{n-۲}+\cdots+a_۳+a_۲+a_۱$$
$$\Longrightarrow ۲S_n=(a_۱+a_n)+(a_۲+a_{n-۱})+(a_۳+a_{n-۲})+\cdots$$

تعداد پرانتزهای این‌تساوی (n) است وهریك از این‌پرانتزها بنا به قاعده‌دوم اندیسها مساوی $(a_۱+a_n)$ می‌باشد پس:

$$۲S_n=n(a_۱+a_n) \Longrightarrow S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

مثال: در یك تصاعد عددی داریم :

$$a_۷+a_{۱۴}=۱۰۰$$

مجموع بیست جمله‌اول این‌تصاعد چند است؟

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a_۱+a_{۲۰})$$

بنا به قاعده‌دوم اندیس داریم:

$$a_۱+a_{۲۰}=a_۷+a_{۱۴}$$
$$\Longrightarrow S_{۲۰}=۱۰(۱۰۰)=۱۰۰۰$$

۸ - اگر در دستور $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ به جای a_n، مساویش‌را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]} \quad (۸)$$

▲

۹- در هر تصاعد عددی داریم:

$$\boxed{a_n=S_n-S_{n-۱}} \quad (۹)$$

اثبات :

$$a_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]-\frac{n-۱}{۲}\times[۲a_۱+(n-۲)d]$$

$$a_n=\frac{۱}{۲}[۲a_۱n+n(n-۱)d-۲a_۱n+۲a_۱-(n-۱)(n-۲)d]$$

$$a_n=\frac{۱}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d(n-n+۲)]$$

$$a_n=\frac{۱}{۲}[۲a_۱+۲(n-۱)d]=a_۱+(n-۱)d=a_n$$

مثال : دریك تصاعد عددی داریم:

$$S_n+n(۴n+۱)$$

جمله‌دهم این‌تصاعدچند است؟

حل :

$$a_{۱۰}=S_{۱۰}-S_{۹}=۱۰(۴۱)-۹(۳۷) \Longrightarrow$$

$$\boxed{a_{۱۰}=۷۷}$$

مثال : در یک تصاعد عددی داریم:

$a_n = ?$ و $S_n = n(2n+5)$

حل : $n=1 \Rightarrow S_1 = a_1 = 7$

داریم :

$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) \Rightarrow$

$\frac{n}{2}(a_1+a_n) = n(2n+5)$

$\Rightarrow \frac{n}{2}(7+a_n) = n(2n+5) \Rightarrow$

$7+a_n = 4n+10 \Rightarrow a_n = 4n+3$

مثال : در یک تصاعد عددی داریم:

$S_n = ?$ و $a_n = 5n-2$

حل : $n=1 \Rightarrow a_1 = 3$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) = \frac{n}{2}(3+5n-2)$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(5n+1)$

▲

۱۰- در هر تصاعد عددی داریم :

اگر $S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$	(۱۰) $m \neq n$

اثبات : $S_m = S_n \Rightarrow \frac{m}{2}[2a_1+(m-1)d] =$

$\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

$\Rightarrow 2a_1m+(m^2-m)d = 2a_1n+(n^2-n)d$

$\Rightarrow 2a_1(m-n)+d(m^2-m-n^2+n)d = 0$

$\Rightarrow 2a_1(m-n)+[m^2-n^2-(m-n)]d = 0$

$\Rightarrow 2a_1(m-n)+$
$[(m-n)(m+n)-(m-n)]d = 0$

$\Rightarrow 2a_1(m-n)+(m-n)(m+n-1)d = 0$

بر $(m-n)$ تقسیم

$\Rightarrow 2a_1+(m+n-1)d = 0$

در $\frac{m+n}{2}$ ضرب

$\frac{m+n}{2}[2a_1+(m+n-1)d] = 0$

$\Rightarrow S_{m+n} = 0$

مثال : اگر $S_6 = S_4 \Rightarrow S_{10} = 0$

▲

۱۱- اگر دریک تصاعد عددی تعداد جملات فرد وجمله وسط (k) باشد داریم:

$2k = a_1+a_n$	(۱۱)

اثبات : $\div a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p, \cdots, a_n$

اگر $k = a_p$ جمله وسط باشد داریم :

$2p = 1+n$

بنابه قاعده اول اندیس خواهیم داشت:

$2a_p = a_1+a_n \Rightarrow 2k = a_1+a_n$

▲

۱۲- اگر دریک تصاعد عددی تعداد جملات فرد و جمله وسط k باشد داریم:

$2k = a_1+a_n \quad , \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2k) \Rightarrow$ $\boxed{S_n = n \cdot k}$ (۱۲)

مثال : زوایای‌داخلی‌یك پنج‌ضلعی محدب تصاعد،عددی می‌سازند، زاویه وسطی‌چند درجه‌است؟

مجموع زوایای‌داخلی یك n ضلعی محدب

$(2n-4)\times 90°$

مجموع زوایای داخلی یك پنج ضلعی محدب

$n=5 \Rightarrow 6\times 90°=540°$

$S_n=nk \Rightarrow 540°=5k \Rightarrow k=108°$

▲

۱۳- اگر در یك تصاعد عددی داشته باشیم

آنگاه: $\frac{S_m}{S_n}=\left(\frac{m}{n}\right)^2, m\neq n$

$$\boxed{d=2a_1}$$

اثبات :

$$\frac{\frac{m}{2}(a_1+a_m)}{\frac{n}{2}(a_1+a_n)}=\left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow \frac{a_1+a_m}{a_1+a_n}=\frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{2a_1+(m-1)d}{2a_1+(n-1)d}=\frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$2a_1n+mnd-nd=2a_1m+mnd-md$$

$$\Rightarrow 2a_1(n-m)=(n-m)d$$

$$\Rightarrow d=2a_1$$

مثال : اگر در یك تصاعد داشته باشیم:

$$\frac{S_7}{S_3}=\left(\frac{7}{3}\right)^2$$

آنگاه $d=2a_1$.

۱۴- مجموع اعدادهرجدول‌ضرب مساوی مربع مجموع اعداد سطر اول

اثبات : جدول ضرب $n\times n$ را در نظر می گیریم .

$$\text{مجموع اعداد سطر اول}=1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

$$\text{مجموع اعداد سطر دوم}=2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$$

$$d=n(n+1)-\frac{n}{2}(n+1)=\frac{n}{2}(n+1)$$

بنا بر این مجموع اعداد این‌جدول ضرب برابراست‌بامجموع n جمله‌اول تصاعد عددی زیر:

$$\begin{cases} a_1=\frac{n}{2}(n+1) \\ d=\frac{n}{2}(n+1) \\ \text{تعداد جملات}=n \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}[n(n+1)+(n-1)\times\frac{n}{2}(n+1)]$$

$$S_n=\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}[2(n+1)+(n-1)(n+1)]=\frac{n^2}{4}[2n+2+n^2-1]$$

$$S_n=\frac{n^2}{4}[n^2+2n+1]=\frac{n^2}{4}(n+1)^2\equiv \text{مربع‌مجموع‌اعدادسطر اول}$$

مثال : مجموع‌اعداد یك‌جدول‌ضرب ۱۲ × ۱۲ چیست؟

$$S=1+2+3+\cdots+12=\frac{12}{2}(12+1)=$$

$۶(۱۳)=۷۸$

$۶۰۸۴ = ۷۸^۲ =$ مجموع اعداد این جدول‌ضرب

۱۵- اگر بین دو عدد a و b ، n واسطه عددی درج کنیم خواهیم داشت ......

$\div a, \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n}, b$

$b=a+(n+۱)d \Rightarrow b-a=(n+۱)d$

$$\Rightarrow \boxed{d=\frac{b-a}{n+۱}} \quad (۱۳)$$

مثال : اگر بین دو عدد ۱۰ و ۱۴ ، سیصد و نود و نه واسطه عددی درج کنیم، جمله دویست و نود و نهم این تصاعد چند است؟

$a=۱۰ \quad , \quad b=۱۴$

$d=\frac{b-a}{n+۱}=\frac{۴}{۴۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$

$a_{۲۹۹}=a_۱+۲۹۸d=۱۰+۲۹۸\left(\frac{۱}{۱۰۰}\right)=$

$۱۰+۲/۹۸=۱۲/۹۸$

۱۶- اگر بین دو عدد a و b ، n واسطه عددی درج کنیم، خواهیم داشت:

b جمله $(n+۲)$ ام است

$\div a, \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n \text{ تا}}, b$

$S_{n+۲}=\frac{n+۲}{۲}(a+b)=\left(\frac{n}{۲}+۱\right)(a+b)=$

$\frac{n}{۲}(a+b)+(a+b) \Rightarrow$

$$\boxed{S_n=\frac{n}{۲}(a+b) \text{ واسطه}} \quad (۱۴)$$

مثال : اگر بین دو عدد ۸ و ۲۲ ، دویست واسطه عددی درج کنیم، مجموع این واسطه‌ها چقدر است؟

$S=\frac{n}{۲}(a+b)=\frac{۲۰۰}{۲}(۸+۲۲)=$

$۱۰۰(۳۰)=۳۰۰۰$

توجه : درجمله عمومی، a_n ، ضریب n مساوی d (قدر نسبت) است. ودرعبارت S_n، ضریب $n^۲$، مساوی $\left(\frac{d}{۲}\right)$ است.

مثال : در یک تصاعد عددی $S_n=۲n(۳n-۱)$، حاصل $(a_{n+۵}-a_{n-۵})$ چند است؟

حل : $\frac{d}{۲}=۶=n^۲ \text{ ضریب} \Rightarrow d=۱۲$

$a_{n+۵}-a_{n-۵}=۱۰d=۱۲۰$

۱۷- اگر دو تصاعد عددی با قدر نسبتهای $d_۱$ و $d_۲$ داشته باشیم .

چنانچه بین آنها جملات مشترکی وجود داشته باشد، این جملات مشترک تصاعد عددی جدیدی می‌سازند که قدر نسبت آن مساوی $(d_۱ \cdot d_۲)$ است.

اثبات :

$\div a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_n$

تصاعد اولی: $d_۱=$ قدر نسبت

$\div u_۱, u_۲, u_۳, \cdots, u_n$

تصاعد دومی: $d_۲=$ قدر نسبت

فرض می‌کنیم $d_۱$ و $d_۲$ نسبت به هم اول باشند.

فرض می‌کنیم $a_۱$ و a_p و a_k با $u_۱$ و u_t و u_l جملات

مشترکی از دو تصاعد باشند که خودشان یك تصاعد عددی می‌سازند
پس :

$$\left.\begin{matrix} \div\, a_1 \,,\, a_p \,,\, a_k \\ \div\, u_1 \,,\, u_t \,,\, u_t \end{matrix}\right\} \text{قدر نسبت } = d'_1$$

$$\begin{cases} a_p = a_1 + d_1' \\ a_p = a_1 + (p-1)d_1 \end{cases} \Rightarrow d'_1 = (p-1)d_1 \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} u_t = u_1 + d'_1 \\ u_t = u_1 + (t-1)d_2 \end{cases} \Rightarrow d'_1 = (t-1)d_2 \quad (\text{II})$$

با مقایسه روابط (I) و (II) نتیجه می‌شود

$$(p-1)d_1 = (t-1)d_2$$

چون d_1 و d_2 نسبت به هم اول‌اند پس:

$$d_2 = p-1 \quad , \quad d_1 = t-1$$

پس :

$$d_1' = (p-1)d_1 \Rightarrow d_1' = d_1 \cdot d_2$$

توجه : اگر d_1 و d_2 نسبت به هم اول نباشد باز هم مسألهٔ قابل اثبات است. (اثبات به عهده خواننده واگذار می‌شود).

مثال : در دو تصاعد عددی، ۶, ۳$\div$ و ۷, ۳$\div$، مجموع ده‌جمله مشترك اولیه چقدر است ؟

$$\begin{cases} d_1 = 3 \\ d_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow d_1' = 12$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d = \frac{12}{2}[6 + 9 \times 12] =$$

$$6(114) = 684$$

مسائل:

مسأله ۱- به چه‌شرطی عبارتهای:

$$x^2+xy+y^2 \,,\, y^2+yz+z^2 \,,\, z^2+xz+x^2$$

تصاعد عددی می‌سازند.

حل : سه‌جمله را به ترتیب a_1 و a_2 و a_3 فرض می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 \quad \leftarrow \text{ یا } \quad 2a_2 = a_1 + a_3$$

$$x^2+xy+y^2-y^2-yz-z^2 =$$

$$y^2+yz+z^2-z^2-xz-x^2$$

$$x^2+xy-yz-z^2 = y^2+yz-xz-x^2$$

$$+xz-xz \qquad\qquad +xy-xy$$

$$x(x+y+z)-z(x+y+z) =$$

$$y(x+y+z)-x(x+y+z)$$

$$(x+y+z)(x-z) = (x+y+z)(y-x)$$

$$\Rightarrow x-z = y-x \Rightarrow 2x = y+z$$

یعنی y و x و z باید سه‌جمله متوالی یك تصاعد عددی باشند.

■

مسأله ۲ - مجموع سه‌عدد m و مجموع مربعات آنها n است اگر این سه‌عدد جمله‌های متوالی یك تصاعد عددی باشد، به چه‌شرطی مسأله‌دارای جواب است؟

حل : جمله وسطی‌را b و قدر نسبت‌را d فرض‌می‌کنیم.
و تصاعد به صورت : $\div\, b-d \,:\, b \,:\, b+d$ است

$$\Rightarrow \begin{cases} 3b = m \Rightarrow b = \frac{m}{3} \\ b^2 + (b+d)^2 + (b-d)^2 = n \Rightarrow \\ b^2 + 2(b^2+d^2) = n \end{cases}$$

$$۳b^۲+۲d^۲=n \implies d^۲=\frac{n-۳b^۲}{۲} \implies$$

$$d^۲=\frac{n-۳\left(\frac{m^۲}{۹}\right)}{۲} \implies d^۲=\frac{۳n-m^۲}{۹}$$

شرط وجود جواب مسأله آن است که $۳n-m^۲>۰$ یا:

$$\boxed{n>\frac{m^۲}{۳}}$$

مسأله ۳ - یک تصاعد عددی بیابید که مجموع n جمله اول آن $n(۲n+۳)$ باشد.

این مسأله را از راههای زیر می‌توان حل کرد .

راه اول: فرمول S_n را نوشته هم‌ارز $۲n^۲+۳n$ قرار می‌دهیم.

$$S_n\equiv ۲n^۲+۳n \implies$$

$$\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]\equiv n(۲n+۳)$$

$$۲a_۱+(n-۱)d\equiv ۴n+۶ \implies$$

$$nd+(۲a_۱-d)\equiv ۴n+۶$$

$$\implies \begin{cases} d=۴ \\ ۲a_۱-d=۶ \implies ۲a_۱-۴=۶ \implies \\ a_۱=۵ \end{cases}$$

$$\implies \div ۵ , ۹ , ۱۳ , \dots$$

راه دوم:

$$S_n=۲n^۲+۳n$$

$$n^۲ \text{ ضریب} : \text{قبلاً گفته شد } = \frac{d}{۲} \implies$$

$$۲=\frac{d}{۲} \implies \boxed{d=۴}$$

$$n=۱ \implies S_۱=a_۱=۵$$

$$\implies \div ۵ , ۹ , ۱۳ , \dots$$

راه سوم:

$$n=۱ \implies S_۱=a_۱=۵$$

$$S_n=n(۲n+۳)$$

$$\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=n(۲n+۳) \implies$$

$$a_۱+a_n=۴n+۶$$

$$۵+a_n=۴n+۶ \implies a_n=۴n+۱$$

$$n \text{ ضریب}=d \implies \boxed{d=۴}$$

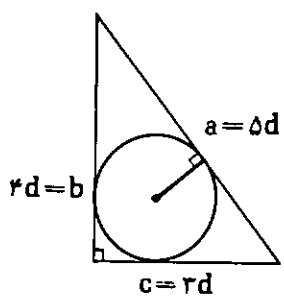
$$\implies \div ۵ , ۹ , ۱۳ , \dots$$

مسأله ۴ - ثابت کنید اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تصاعد عددی بسازند، اولاً ضلع‌وسطی چهار برابر قدرنسبت است، ثانیاً شعاع‌دایره محاطی داخلی مساوی قدرنسبت است.

$$\div c , b , a$$

یا

$$\div b-d \quad b \quad b+d$$



داریم :

$$a^۲=b^۲+c^۲ \implies (b+d)^۲=b^۲+(b-d)^۲$$

$$\implies (b+d)^۲-(b-d)^۲=b^۲ \implies$$

$$۴bd=b^۲ \implies \boxed{۴d=b}$$

بدین‌ترتیب اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تصاعد عددی بسازد، اضلاع آن را می‌توان به‌صورت ۳d و ۴d و ۵d نشان داد .

داریم :

$$r = \frac{s}{p} = \frac{۶d^۲}{۶d} \Longrightarrow \boxed{r = d}$$

■

مساله ۵ - مجموع هفت جمله‌اول یك تصاعدعددی (۷) است و حاصل ضرب این جملات صفر است. تصاعد را معلوم کنید.

حل : جمله وسطی‌را k و قدرنسبت را (d) می‌نامیم.

$$\div k-۳d\ ,\ k-۲d\ ,\ k-d\ ,\ k\ ,\ k+d\ ,$$

$$k+۲d\ ,\ k+۳d \Longrightarrow ۷k=۷ \Longrightarrow \boxed{k=۱}$$

$$\Longrightarrow k(k^۲-d^۲)(k^۲-۴d^۲)(k^۲-۹d^۲)=۰$$

$$(۱-d^۲)(۱-۴d^۲)(۱-۹d^۲)=۰$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} d=\pm ۱ \\ d=\pm \frac{۱}{۲} \\ d=\pm \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

تصاعدهای موردنظر مسأله :

$$\div -۲\ ,\ -۱\ ,\ ۰\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳\ ,\ ۴$$

$$\div\ ۴\ ,\ ۳\ ,\ ۲\ ,\ ۱\ ,\ -۱\ ,\ -۲$$

$$\div -\frac{۱}{۲}\ ,\ ۰\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{۳}{۲}\ ,\ ۲\ ,\ \frac{۵}{۲}$$

$$\div \frac{۵}{۲}\ ,\ ۲\ ,\ \frac{۳}{۲}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ ۰\ ,\ -\frac{۱}{۲}$$

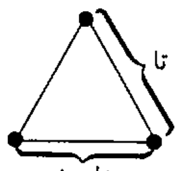
$$\div ۰\ ,\ \frac{۱}{۳}\ ,\ \frac{۲}{۳}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{۴}{۳}\ ,\ \frac{۵}{۳}\ ,\ ۲$$

$$\div ۲\ ,\ \frac{۵}{۳}\ ,\ \frac{۴}{۳}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۱}{۳}\ ,\ ۰$$

■

مساله ۶ - چهار وجهی منتظمی‌داریم که در آن با شرایط زیر گلوله‌گذاری شده است. به طوری‌که در هررأس یك گلوله و روی هریال۱۰ گلوله قرار گرفته است، اگر کل‌فضای داخلی‌آن را با شرایط فوق گلوله‌گذاری‌کنیم ، تعیین‌کنید در حجم آن چندگلوله به‌کار رفته است؟

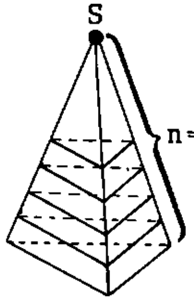
حل : می‌دانیم سطوح جانبی ایـن چهار وجهی مثلثهای متساوی‌الاضلاع است. پس گلوله‌های سطح قاعده چنین چیده شده است.



$$۱+۲+۳+\cdots+۱۰=$$

$$\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۱۰(۱۱)}{۲}=۵۵$$

پس‌در سطح‌قاعده ۵۵ گلوله گذاشته‌شده‌است ودر رأس S یك گلوله قرار گرفته‌است. اگرفرض‌کنیم گلوله‌ها روی‌صفحه‌هایی موازی سطح‌قاعده در داخل این‌چهار وجهی قرار گرفته باشند، در سطح‌پایینی (۵۵) گلوله ودر سطح‌بالایی یـك گلوله قرار دارد وتعداد این‌صفحات (۱۰) است پس:



$$\begin{cases} a_۱=۱ \\ a_{۱۰}=۵۵ \\ n=۱۰ \end{cases} \quad S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

$$=\frac{۱۰}{۲}(۱+۵۵)=۵(۵۶)=۲۸۰$$

مسأله ۷ - در یک دنباله اعداد طبیعی، چهار عدد فرد متوالی به‌طریقی بیابید که مجموع مربعات آنها از مجموع مربعات اعداد زوج بین آنها (۴۸) واحد بیشتر باشد.

چهار عدد فرد متوالی

$$n\ ,\quad n+۲\ ,\quad n+۴\ ,\quad n+۶$$

سه عدد زوج متوالی بین آنها

$$n+۱\qquad n+۳\qquad n+۵$$

$$n^۲+(n+۲)^۲+(n+۴)^۲+(n+۶)^۲=$$
$$۴۸+(n+۱)^۲+(n+۳)^۲+(n+۵)^۲$$
$$\Rightarrow n^۲+۶n-۲۷=۰ \Rightarrow$$
$$\begin{cases} n=۳ \\ n=-۹ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow \boxed{۳\ ,\ ۵\ ,\ ۷\ ,\ ۹}$$

توضیح اینکه: مقاله راجع‌به تصاعد هندسی در شماره۳ این مجله خواهدآمد.

تیمور پس از یک سفر طولانی به خارج، گزاره‌های زیر را در مورد هتلهای مورد علاقه‌اش بیان کرده‌است:

۱ـ وقتی غذای هتل خوب باشد، گارسنها مؤدبند.

۲ـ هیچ هتل سرتاسرسال بازی از داشتن منظره‌ای از اقیانوس محروم نیست.

۳ـ غذا تنها در بعضی هتلهای ارزان قیمت بد است.

۴ـ هتلهایی که استخرشنا دارند دیوارهاشان را به‌دقت با پیچ امین‌الدوله می‌پوشانند.

۵ـ هتلهایی که خدمه‌شان نامؤدبند آنهایی هستند که تنها قسمتی از سال بازند.

٦ـ هیچ هتل ارزان قیمتی سگها را نمی‌پذیرند.

۷ـ هتلهای بی‌استخرشنا منظره‌ای از اقیانوس ندارند.

آیا دراین هتلها، یک دارندهٔ سگ می‌تواند از پیچ امین‌الدوله لذت ببرد؟

جواب

می‌توانیم نظریات تیمور را به‌ترتیب زیربازنویسی کنیم:

٦ـ اگر هتلی سگها را بپذیرد، قیمتش بالاست.

۳ـ اگر قیمت هتل بالاست، غذای آن خوب است.

۱ـ اگر غذا خوب است، پیشخدمتها مؤدبند.

۵ـ اگر پیشخدمتها مؤدبند، هتل سراسر سال باز است.

۲ـ اگر هتل سراسر سال باز است، منظره‌ای از اقیانوس دارد.

۷ـ اگر منظره‌ای از اقیانوس موجودباشد، استخرشنا موجود است.

۴ـ اگر استخرشنا موجودباشد، پیچ امین‌الدوله روی دیوارهایش هست.

بنابراین، هتلهایی که سگ می‌پذیرند پیچ‌امین الدوله روی دیوارهاشان دارند.



تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران[1]

● غلامرضا یاسی پور

گـواه رهـرو آن بـاشدکـه سردش یابی از دوزخ
نـشان عـاشق آن بـاشدکـه خشکش بینی از دریا
سخن کز راه دین گویی چه سُریانی[1] چه عِبرانی[2]
مکان کـز بهر حق جویی چه جابُلقا[3] چه جابُلسا[4].
«سنایی»

سخن از مجلات ریاضی منتشر شده در ایران داریم و از یکی از قدیمی‌هاشان* یعنی «**حل المسائل ریاضی** که شامل حل مسائل شعب مختلفهٔ علوم ریاضی بوده و در تحت نظر و مراقبت **ناصر ـ هورفر ـ ریاضی**[5]» انتشار می‌یافته آغاز می‌کنیم.

جلد اول این مجله در ۱۵ دیماه ۱۳۰۶ شمسی در **مطبعهٔ نهضت شرق طهران** به چاپ رسیده و در روی جلد آن چنین می‌خوانیم:

در اول و پانزدهم هر ماه منتشر خواهد شد.[6]
وجه اشتراک سالیانه در طهران و ولایات یک تومان
قیمت یک جلد   ده‌شاهی

اشخاصی که مایل به اشتراک باشند به کتابخانهٔ طهران (خیابان لاله‌زار) رجوع نمایند.

مسائلی که در این مجموعه حل می‌گردد عموماً از مسابقه‌ها و امتحانات نهائی ایران و اروپا و غیر آن اتخاذ می‌شود. ضمناً بعضی از مسائل که در یکی دو جلد بعد حل می‌شود در جلدهای قبل به عنوان سؤال طرح خواهد شد و اسامی مشترکینی که مسائل مندرجه را بعد از پانزده روز از نشر مجموعه، صحیح حل کرده بفرستند در ذیل همان مسأله درج خواهد شد.

مجله به قطع بزرگ و به خط نستعلیق و به خامهٔ زرین خط است، هر شمارهٔ آن هشت صفحه دارد و صفحات مجلدات آن مسلسل و در مطالب آن غلبه با مسائل هندسه است و در مقدمهٔ آن چنین آمده:

---

* البته به زعم ما، چه تاکنون از این قدیمتر سراغ نکرده‌ایم و این یکی را نیز از آقای پرویز شهریاری به امانت گرفته‌ایم. ناگفته نماند که خود این کار نیز به اشارت مشارٌ الیه صورت گرفته است.

«هیچ کس اهمیت ریاضیات و دخالت مستقیم آن را در علوم و صنایع امروزهٔ دنیا انکار ندارد. حتی متخصصین فنون دیگر نیز از آموختن اصول و مبانی این علم ناگزیرند زیرا دانستن ریاضی نه تنها وسیلهٔ پیشرفت در علوم مربوط به آن است بلکه دماغ[۷] را برای فهم هرگونه مطلب غیر آن حاضر می‌نماید.

چنانکه پاسکال گوید «مابین افکار متساویه آنکه استعداد هندسه دارد مطالب را بهتر درک می‌کند.» و به همین جهت است که حکما و فلاسفهٔ قدیم همواره مردم را به آموختن هندسه تحریض و ترغیب می‌کرده‌اند چه می‌دانستند اساس و بنیان هر علم وقتی محکم و محقق می‌گردد که مبنی بر تعاریف و موضوعهای منطقی باشد و هندسه تنها علمی بوده که در آن زمان به این عنوان شناخته می‌شده.

از کلمات افلاطون است: «انسان لایق کسی است که اصّم[۸] بودن نسبت قطر مربع را به ضلعش بداند[۹]» و نیز گفته است: «اعداد در دنیا حکومت می‌کنند.»[۱۰]

از این قبیل کلمات بسیار و گنجاندن آنها در این مختصر دشوار است. فقط منظور و مقصود اصلی از ذکر این مقال بیان این مطلب است که بدون آموختن ریاضی پیشرفت در علوم دیگر مشکل بلکه محال است.»

سپس به علل نیاز به وجود کتب مسائل می‌پردازد و به این ترتیب بنای وجود کتب شامل حل مسائل را می‌سازد و درطی آن وعده می‌دهد که:

«این نامه به نام مجموعهٔ حل المسائل به استثنای دو ماه از تعطیل تابستان در اول و پانزدهم هر ماه منتشر خواهد شد (و) شامل حل مسائلی است که متناسب با قوه و استعداد محصلین متوسطه می‌باشد.»

چیز مهم دیگری در رابطه با مقاصد مجله حداقل درهفت شماره‌ای که نزد نویسندهٔ این سطور است نیست، بنابراین از سر این مطلب می‌گذریم و برای آگاهی خواننده به ذکر مسائلی چند از متن آن می‌پردازیم.

اولین مثال را از شمارهٔ اول و از حساب انتخاب می‌کنیم:

اجرت روزانهٔ بنا و گچ بر و نقاش به ترتیب سه قران و ۴ قران و ۷ قران است[۱۱]. معین کنید یک عمله[۱۲] در ماه چند روز به هر یک از شغل‌های مذکور می‌پردازد تا آنکه ماهی ۱۸۶ قران به او عاید گردد؟

فرض کنیم عدهٔ روزهای بنائی و گچ‌بری و نقاشی در ماه به ترتیب x، y، z باشد. پس بنا به فرض مسأله $x+y+z=۳۰$[۱۳] و $۳x+۴y+۷z=۱۸۶$. و پس از حذف z بین این دو معادله

$$۴x+۳y=۲۴$$

و یا[۱۴]

$$y=\frac{۲۴-۴x}{۳}=۸-x-\frac{x}{۳}$$

حال اگر فرض کنیم[۱۵]، $\frac{x}{۳}=t$ نتیجه می‌شود.

$$x=۳t\,,\ y=۸-۴t$$

و چون x و y باید مثبت باشند، پس $۳t>۰$ و $۸-۴t>۰$ و یا $t>۰$ و $t<۲$، یعنی t فقط می‌تواند واحد باشد، بنابراین[۱۶]

$$t=۱\,,\ x=۳\,,\ y=۴\,,\ z=۲۳$$

مثال دوم از هندسه و از همان شماره است:

مثلث غیر مشخص ABC مفروض است، دایرهٔ محیطی این مثلث را رسم کنید و بعد از نقطهٔ A قوسی مساوی و مختلف الجهة با AC جدا کرده[۱۷] از نقطهٔ D خطی بر ضلع AB عمود کنید تا محیط دایره را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید که خط AE بر BC عمود است.

برای اثبات از نقطهٔ B خط BF را بر AB عمود می‌کنیم چون

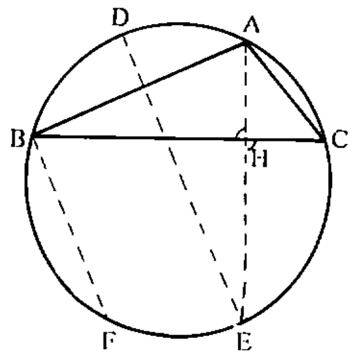
زاویهٔ ABF قائمه است، نقطهٔ F متقاطر[18] A می‌شود. بنابراین DF=CF . بعلاوه خط BF موازی DE نیز می‌گردد و بالنتیجه $\widehat{DB}=\widehat{EF}$ و بنابراین BF=CE . پس چون در تساوی واضح:

نصف محیط $=\widehat{AB}+\widehat{BF}$، به جای BF مساویش CE را قرار دهیم چنین خواهیم داشت:

$\widehat{AB}+\widehat{CE}=$ نصف محیط

پس مقیاس زاویهٔ H[19] عبارت خواهد بود از

ربع محیط[20] $= \frac{\widehat{AB}+\widehat{CE}}{2}$



مثال سوم را از جبر و از همین شماره می‌آوریم:

معادلهٔ درجه چهارم $x^4-6x^3+5x^2+4x-1=0$ را حل کنید.

ابتدا آن را چنین می‌نویسیم:

$$x^4-6x^3=-5x^2-4x+1$$

و چون بر طرفین معادله $9x^2$ اضافه کنیم:

$$x^4-6x^3+9x^2=4x^2-4x+1$$

و یا

$$(x^2-3x)^2=(2x-1)^2$$

و بنابراین[21]

$$(x^2-3x)^2-(2x-1)^2\equiv(x^2-5x+1)(x^2-x-1)=0$$

پس حل معادلهٔ مفروض به حل دو معادلهٔ درجه دوم $x^2-5x+1=0$ و $x^2-x-1=0$ راجع می‌شود و از آنجا

$$x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2} \quad \text{و} \quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

و چنانکه دیده می‌شود معادله دارای چهار ریشهٔ حقیقی است.

در مجله نه تنها از مسائل معمول بلکه از معماها و چیستانهای متداول آن زمانها نیز استفاده شده و مثلاً در انتهای شمارهٔ دوم آن این مسأله آمده است:

گوشواری داشتم از لعل و مروارید و زر
بود یک مثقال وزن آن مُرصّع گوشوار
قیمتش کردند صّرافان ز روی معدلت
لعل مثقالی به سی، لؤلؤ به هجده، زر، چهار
بِسْتَد از من صِیرَفی و بیست دینارم بداد
مانده‌ام من اندرین دادو ستد بی‌اختیار

در مجله و مثلاً در مجلّد سوم آن به اسامی افراد معروفی نظیر تقی هورفر، محمد علی مجتهدی، غلامحسین مصاحب، محمود مهران و محسن هشترودی[22] نیز برخورد می‌کنیم که پیداست مسائلی را در مجله طرح یا حل کرده‌اند و از آنِ هشترودی به قرار ذیل است:

معادلهٔ سیّالهٔ $x^4+y^4+z^4+t^4=N^2$ را از روی اتحادهای جبری حل کنید.

مجله در کنار مسائل ساده و متوسط گاه مسائل بسیار مشکلی را نیز مطرح کرده و از جمله مسألهٔ زیر را که حل آن ریاضی‌دانها را قرن‌ها به خود مشغول داشته است[23]:

ثابت کنید که اگر در مثلثی دو منصّف الزاویه متساوی باشند آن مثلث متساوی الساقین است.

از غلط‌های چاپی نیز طبق معمول تهی نیست. اما گاهی بعضی از

اشتباهات آن به صورت طنزآمیزی در آمده، و مثلا در یک مورد به جای: «صحت اتحاد ذیل را تحقیق کنید»، «صحت الحاد ذیل را تحقیق کنید» آورده است[۲۴].

به ریاضیات عالی نیز پرداخته و مثلاً محاسبهٔ مشتق $y=\log_a x$ و $y=e^x$ و $y=x^x$ را، که در زمانهای اخیر معمولاً در سال اول دانشکده‌ها مطرح می‌شود، خواسته است.

به تاریخ ریاضی نیز پرداخته و فی‌المثل راجع به مقدار π، پس از آنکه اثبات $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} ۱/۲+\operatorname{arctg} ۱/۳$ را خواسته، چنین می‌نویسد[۲۵] که:

«ارشمیدس اول کسی است که نسبت محیط دایره را به قطرش به حرف یونانی π نمایش داد.»

واضح است π حد محیط کثیرالاضلاع منتظم محاطی یا محیطی در دایرهٔ به قطر واحد است، وقتی عدهٔ اضلاع آن کثیرالاضلاع از هر حدی تجاوز کند. از قدیم اصم بودن π معلوم بوده چنانکه ارشمیدس محیط کثیرالاضلاع $۳\times۲^۵=۹۶$ ضلعی محاط در دایرهٔ به قطر واحد را حساب کرده ثابت کرد مقدار آن بین $۳\frac{۱۰}{۷۰}$ و $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ می‌باشد، و بنابراین $\frac{۲۲}{۷}$ مقدار تقریبی π است تا ۰٫۰۰۲ تقریب، یعنی دو رقم اعشار آن صحیح است. بعدها علمای ریاضی طریقهٔ مهندس[۲۶] یونانی را تعقیب کردند و به واسطهٔ سهولتی که اعداد اعشاری در محاسبه ایجاد می‌کند توانستند مقدار تقریبی π را تا ۳۵ رقم اعشار به دست آورند.

ارشمیدس در ۲۵۰ سال قبل از میلاد کسر $\frac{۲۲}{۷}$ را به دست آورد و ۷۸۰ سال بعد آریابهاتا محیط کثیرالاضلاع منتظم $۳\times۲^۷=۳۸۴$ ضلعی محاط در دایرهٔ به قطر واحد را حساب کرده از آن رو مقدار π را تا چهار رقم اعشار تقریب به دست آورد.

در مشرق نیز علمای اسلامی مخصوصاً ایرانیها برای تعیین π تحقیقاتی نموده‌اند چنانکه غیاث الدین جمشید کاشانی در مفتاح‌الحساب می‌نویسد:

«مقداری را که در رسالهٔ موسوم به محیطیّه برای نسبت محیط به قطر به‌دست آورده‌ام بعدازطرح روابع این‌است: ج (جه) ح (قه) کط (ثانیه) مد (ثالثه)»

و چون حروف را به عدد تبدیل کنیم:[۲۷]

$$۳+\frac{۸}{۶۰}+\frac{۲۹}{۶۰^۲}+\frac{۴۴}{۶۰^۳}=۳/۱۴۱۵۹۲۵۹۲$$

چنانکه دیده می‌شود این مقدار تا ۶ رقم اعشار با مقداری که امروز برای π به دست آمده موافق است و به سهولت معلوم می‌شود که تفاوت π با این مقدار از $\frac{۱}{۱۰^۷}$ کمتر است.

در ۱۵۸۵ ویت از روی محیط کثیرالاضلاع منتظم $۳\times۲^{۱۱}=۳۹۳۲۱۶$ ضلعی مقدار π را تا ۹ رقم اعشار تقریب تعیین کرد و نیز در ۱۵۹۷ آدریانوس رومانوس از روی کثیرالاضلاع $۳\times۵\times۲^{۲۴}$ ضلعی مقدار π را تا ۱۵ رقم اعشار تقریب تعیین نمود و بالاخره آخرین کسی که بدین وسیله مقدار π را تعیین کرد لودلف می‌باشد که در ۱۶۱۵ و ۱۶۲۱ از حساب محیط کثیرالاضلاعهای $۳\times۵\times۲^{۳۵}$ ضلعی و $۲^{۶۵}$ ضلعی مقدار π را اول دفعه تا ۲۰ رقم و دفعهٔ ثانی تا ۳۵ رقم اعشار تقریب به دست آورد و به همین مناسبت است که در آلمان π را لودلف می‌گویند[۲۸].

کسر $\frac{۲۲}{۷}$ یا ۳/۱۴ برای اغلب موارد استعمال π کفایت می‌کند و در نظر داشتن آن نیز سهل است معذالک می‌توان از روی عبارت (سه و یک می‌شود چهار) آن رابه‌نظرآورد و هم چنین برای آنکه مقدار آن تا چهار رقم اعشار تقریب به نظر آید عبارت ذیل را باید به خاطر سپرد: (۳ و ۱ می‌شود ۴ و ۱ می‌شود ۵).

ولی از آنجایی که اثر نظم در به خاطر سپردن مطالب بیش از نثر است در ممالک مختلفه اشعاری گفته شده که عدهٔ حروف کلمات به ترتیب ارقام مقدار π می‌باشند، و چون رقم سی دوم آن صفر است این اشعار تا سی رقم اعشار آن را بیشتر به دست نمی‌دهد.

و ما اینجا به ذکر اشعار فرانسه و انگلیسی و آلمانی آن پرداخته و امیدواریم که دانشمندان این سرزمین هم به ساختن قطعه‌ای که متضمن این مقصود باشد بپردازند و نام نیک خویش را در صفحات کتب ریاضی جای دهند.

«کارکنان مجموعهٔ حل المسائل به نوبهٔ خود زحمات شعرائی که این مقصود را انجام دهند تقدیر نموده و آنان را مفتخر به اخذ جائزه خواهد کرد.[۲۹]»

اما بر نویسندهٔ مقاله معلوم نیست که کسی در آن زمان و در این مورد زحمتی کشید و به راحتی رسید یا نه. اما بعدها افرادی به گفتن اشعاری از این دست همت گماشتند و از آن جمله است شعر زیر که از آن غلامحسین صدری افشار است[۳۰]:

گر زقدر پی‌کنند از تو سؤال[۳۱] پاسخی ده که خردمند ترا آموزد

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان
۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹

ره سرمنزل توفیق بما آموزد
۲ ۶ ۵ ۳ ۵

در مجلدات مورد بحث مسائلی از هیأت، فیزیک، مکانیک، هندسهٔ ترسیمی و هندسهٔ رقومی نیز آمده که ذکر مواردی از آنها در این مختصر نمی‌گنجد و به کار فعلی ما نیز نمی‌آید.

مقاله را با ذکر یک دو مثال دیگر از مجلدات مزبور خاتمه می‌دهیم و از خوانندگانی که اطلاعات بیشتری در مورد مجلدات احتمالی دیگر آن، نیز دربارهٔ شرح حال **ناصر ـ هورفر ـ ریاضی** که قاعدتاً اعضای هیأت تحریریهٔ آن بوده‌اند، دارند، تقاضا می‌کنیم که ما را هم بی‌خبر نگذارند تا در جائی دیگر به ذکر آن خبرها بپردازیم.

مسأله. مقدار $e = \text{حد}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\ L\alpha = 0$ را تعیین کنید.

واضح است که وقتی α به سمت صفر میل کند e به صورت مبهم 1^{∞} در می‌آید و برای تعیین مقدار واقعی آن فرض می‌کنیم $\alpha = \frac{1}{m}$ و بنابراین $m = \frac{1}{\alpha}$ و لهذا

$$e = \text{حد}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\ L\alpha = 0 = \text{حد}(1+\frac{1}{m})^{m}\ Lm = \infty$$

حال چون موافق دستور دو جملهٔ نیوتن

$$(a+b)^m \equiv a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\times 2}a^{m-2}b^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)(\dots)(m-p+1)}{1\times 2\times 3\times \dots \times p}a^{m-p}b^p + \dots$$

عبارت $(1+\frac{1}{m})^m$ را بسط می‌دهیم:

$$(1+\frac{1}{m})^m \equiv 1 + \frac{m}{1}\times\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1\times 2}\cdot\frac{1}{m^2} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1\times 2\times 3\times\dots\times p}\cdot\frac{1}{m^p} + \dots$$

و یا

$$(1+\frac{1}{m})^m \equiv 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{m}}{1\times 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\times 2\times 3} + \dots$$

که چون m به سمت بی‌نهایت میل کند مقادیر $\frac{1}{m}$، $\frac{2}{m}$، $\frac{3}{m}$ و غیره به سمت صفر میل کرده چنین خواهیم داشت:

$$e \equiv \text{حد}(1+\frac{1}{m})^m\ Lm \to \infty \equiv 1 + 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \dots$$

(حاصل ضرب $1\times 2\times 3\times 4 \dots m$ رابه علامت اختصاری $m!$ نوشته آن را m عامله تلفظ می‌کنند[۳۲]) پس مقدار e را می‌توان به صورت ذیل نوشت

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{m!}$$

به دلایلی که این مختصر گنجایش ذکر آنها را ندارد می‌توان ثابت کرد که این رشته دارای حدی است از سه کوچکتر[۳۳] و مقدار آن تا ده رقم اعشار تقریب عبارت است از

۲/۷۱۸ ۲۸۱ ۸۲۸ ۴

مسأله. مطلوب است حل معادلهٔ $f(x) \equiv 8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$ در صورتی که بدانیم ریشه‌های آن تصاعد عددی تشکیل می‌دهند.

اگر α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشند بنابر فرض مسأله $\gamma-\beta=\beta-\alpha$ و یا $\alpha+\gamma=2\beta$. اما موافق روابط بین ضرایب و ریشه‌ها $\alpha+\beta+\gamma=\frac{12}{8}$ بنابراین $3\beta=\frac{12}{8}$ یعنی $\beta=\frac{1}{2}$ و از آنجا

معلوم می‌شود که یکی از ریشه‌های معادله باید $\frac{۱}{۲}$ باشد، پس $f(x)$ بر $x-\frac{۱}{۲}$ یا $۲x-۱$ باید قابل قسمت باشد به قسمی که

$$f(x) \equiv ۸x^۳ - ۱۲x^۲ - ۲x + ۳ \equiv (۲x-۱)(۴x^۲-۴x-۳)$$

لهذا ریشه‌های معادلهٔ مفروض $-\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ می‌باشند، و چنانکه دیده می‌شود این سه عدد تصاعد عددی تشکیل می‌دهند که قدر نسبتش واحد است.

توضیح: نام محمد علی مجتهدی به نام حل کننده زیر راه حل مسأله آمده است.

یادداشتها

۱. منسوب به سوریه و زبانی از لهجهٔ آرامی

۲. عبری

۳. شهری خیالی در مشرق

۴. شهری خیالی در مغرب

۵. داخل گیومه از روی جلد است.

۶. همّت را بنگرید که چگونه وعده می‌دهند که در هر ماه دو شماره نشرکنند.

۷. فکر، ذهن

۸. گنگ

۹. البته این سخن شاید شرط لازم انسان لایق باشد اما حتماً شرط کافی آن نیست، و اگر مقصود از انسان لایق «خردمند کافی» باشد شرط لازم هم نخواهد بود.

۱۰. این گفته را به دیگران از جمله فیثاغورس نیز نسبت داده‌اند و امروزه با وجود کامپیوترها به خصوص در مورد جهان غرب حرف بسیار بی‌ربطی نیز نیست.

۱۱. معلوم است که در آن زمان‌ها نیز گرانی به بیداد بوده و قران همان گران است!

۱۲. عمله جمع است و جمع عامل است و اکنون معلوم می‌شود که چرا آن را جمع بسته‌اند زیرا به چند کار متفاوت می‌پرداخته و به‌قول حافظ، « چندین هنره بوده است.

۱۳. ماه را ۳۰ روز فرض کرده و این از نوع همان استدلالهایی است که در منطق آن را با **مقدمات مفقوده** می‌گویند و قیاس چنینی را **قیاس اضماری** می‌نامند.

۱۴. آوردن «ویا» در بسیاری از عبارات از جمله در همین عبارت خطاست و «یا»ی تنها کافی است چه در این گونه موارد آوردن «ویا» به قول منطقیون جدید فورمول را «بدترکیب» می‌کند. (در مقابل **فورمول خوش ترکیب** «well - formed formula» که آن را wff اختصار می‌کنند.)

۱۵. البته خواننده متوجه است که دستگاه مورد بحث، دستگاه معادلات سیّاله یا دیوفانتی است.

۱۶. باز از جوابهای مسأله مشخص می‌شود که عملهٔ مزبور واقعاً «عمله» بوده چه هر ۳۰ روز ماه را به کاری مشغول بوده و حتی یک روز هم استراحت نداشته‌است.

۱۷. در اینجا باید اضافه شود: « انتهای آن را D می‌نامیم.»

۱۸. یعنی نقطه‌ای که چون به A وصل شود قطری از دایره را به‌وجود می‌آورد.

۱۹. که نگفته کدام نقطه است اما از شکل معلوم می‌شود.

۲۰. در شکل آمده درکتاب، BF بر AB عمود نیست.

۲۱. رسم الخط از خود کتاب است.

۲۲. البته معروف در زمان ما و از نظر معلمی با حدود سی سال سابقهٔ معلمی و زنده.

۲۳. این مسأله عاقبت در قرن هجدهم توسط مهندسی فرانسوی به نام **دسکوب** حل شد، و بعدها راه حلهای متعددی از جمله جبری (با استفاده از رابطهٔ بین اضلاع و نیمساز داخلی مثلث) و مثلثاتی (بااستفاده از فورمول محاسبهٔ نیمساز داخلی برحسب اضلاع و زوایای مثلث) برای آن پیدا شد. در ایران آقای **احمد آرام** به حل هندسی جدیدی از آن دست یافته است (که در یکی از شماره‌های مجلهٔ ریاضی **یکان** مسطور است و انشاءالله‌به‌ذکر آن خواهیم پرداخت). برای بعضی از راه حلهای این مسأله مثلاً به کتاب حل المسائل **هندسه** و **مخروطات** آقای **پرویز شهریاری** و کتاب قضایا و مسائل هندسهٔ غلامرضا **یاسی پور** رجوع کنید.

۲۴. در انتهای جلد چهارم

۲۵. در صفحهٔ ۵۱ جلد هفتم که آخرین مجلدی است که در دست‌بنده است و فعلاً نمی‌دانم که آخرین مجلد این دوره نیز بوده است یا خیر.

۲۶. معنی اصلی « مهندس» هندسه دان است و آن به مفهوم کسی است که اندازه‌گیری یا تقدیر را می‌داند، مثال از حافظ:

مهندس فلکی راه‌دیرشش‌جهتی — چنان ببست که ره‌نیست زیر دیرمغاک

۲۷. تا زمان غیاث الدین کسرها ستّینی (یعنی شستگانی) بوده و ظاهراً او اولین

کسی است که کسرهای اعشاری را به وجود آورده است. برای تفصیل این حکایت به کتاب کاشانی نامه اثر آقای ابوالقاسم قربانی رجوع کنید.

۲۸. در این مورد در رسالهٔ کاشانی نامهٔ آقای ابوالقاسم قربانی می‌خوانیم که: در فصل هشتم محیطیّه، کاشانی مقدار محیط دایره را به فرض آن که شعاع آن واحد باشد، یعنی در واقع 2π ، را در دستگاه شمار دهگانی یا کسرهای اعشاری که خود مخترع آنهاست به دست آورده است به این شرح

$$2\pi = 6/283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

همهٔ شانزده رقم اعشاری این عدد دقیق است، و این نهایت دقت کاشانی را در محاسبه می‌رساند. همو در جای دیگر همین کتاب می‌نویسد که کاشانی عدد π یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن را با دقتی که تقریباً تا صد و پنجاه سال بعد از وی بی‌رقیب ماند حساب کرد.

۲۹. کارکنان مجله باید در واقع جایزهٔ مورد بحث را به خود کاشانی یا به اخلاف او می‌دادند زیرا چنانکه در کاشانی نامهٔ مذکور در فوق‌آمده: کاشانی به خوبی از اهمیت کار خود در محاسبهٔ 2π آگاه‌بوده و برای آنکه نتیجهٔ کارش محفوظ بماند ارقام آن را (از چپ به راست) هم در یک بیت عربی و هم در یک بیت فارسی به‌نظم در آورده است.

و بَحجا خَهَج صَز از طَه حَوّهٌ

محیطٌ لقطر هُوَ اثنان منه

در مصراع اول کلمهٔ صَز مرکب از صاد حرف اول صفر وزا یعنی رقم ۷ می‌باشد.

شش و دوهشت و سه یک هشت و پنج و سه صفری

بهفت و یک زا و نه پنج و هشت و شش پنج است.

درمصراع دوم زا به معنی رقم ۷ است.

۳۰. از کتاب: تربیع دایره و غیرجبری بودن عدد π، ترجمهٔ: **پرویزشهریاری.**

۳۱. این مصراع به وزن سه مصراع بعدی یعنی : فعلاتن فعلاتن فعلاتن فعلات نیست، و مثلاً می‌تواند به این صورت تصحیح شود: گر ز قدر عددپی بکنند از توسؤال

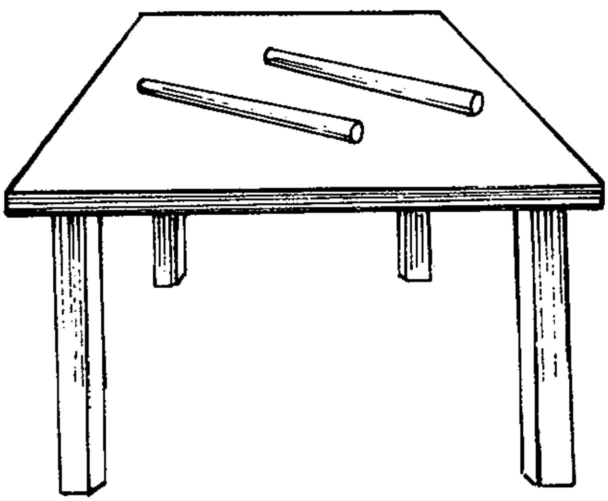
۳۲. m عامله همان فاکتوریل m است.

۳۳. برای اثبات این موضوع می‌توانید به هرکتاب انتگرال و دیفرانسیل (جامع و فاضل) رجوع کنید.

تفریح اندیشه

دو میلهٔ آهنی برمیزی قراردارند. آندو یکسان به‌نظر می‌رسند، اما یکی از آنها آهنربایی است که درهریک از دوسر آن قطبی است، و دیگری نیست.

چگونه می‌توانیم بدون اینکه آنها را بلند کنیم و بدون آنکه از شیء دیگری استفاده کنیم تنها باحرکت دادن آنها روی میز مشخص کنیم که کدامیک آهنرباست؟



جواب

یکی از دومیله را درنظر گرفته آن را با لغزاندن روی میز عمود بر وسط دیگری قرار می‌دهیم تاشکل ┬ بسازند. اگر میلهٔ آهنربا بالای باشد میلهٔ دیگر آن را جذب نمی‌کند.

معادلات[1]

سید محمدرضا هاشمی موسوی

حل و بحث معادلات درجهٔ اول و دوم یك مجهولی

به طور کلی هرمعادلـهٔ درجهٔ nام یـك مجهولی را در حالت عمومی به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$a_\circ x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots$$
$$+ a_{n-1} x + a_n = \circ \quad (n \in N) \qquad (1)$$

در حالت عمومی $n \geqslant ۵$ معادلهٔ(۱) به‌وسیلهٔ رادیکالهای بسته و محدود قابل‌حل نیست. یعنی‌ریشهٔ معادلهٔ (۱) در حالت عمومی $n \geqslant ۵$ به‌وسیلهٔ رادیکالهای متناهی قابل‌بیان نیست. در این حالت معادلـه را با روشهای‌تقریبی موجود حل می‌کنند. بنابراین حل‌معادلهٔ (۱) فقط درحالت $n \leqslant ۴$ ممکن‌است.زیرا دراین حالت معادلهٔ حلال‌معادلهٔ منظور، ازنظردرجه، یك‌درجه کمترازدرجهٔ معادله‌اصلی‌است. بنابراین دراین‌جا نتیجه می‌شود که معادلهٔ (۱) را تنها درمجموعه‌ای محدود از n می‌توان حل نمود یعنی:

$$n = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$$

دراین شماره‌کلیهٔ مطالب‌در رابطهٔ باحل معادلهٔ (۱) به ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ ارائه می‌شود.

---
1) Equations

۱) حل معادلهٔ (۱) در حالت $n = ۱$:

معادلهٔ (۱) به‌ازای $n = ۱$ به شکل خاص

$$a_\circ x + a_1 = \circ$$

درمی‌آید. برای‌حل این معادله‌کافی است a_1 را به‌طرف دیگر برده و طرفین‌را بر $a_\circ$ که مخالف‌صفر فرض شده است تقسیم کنیم یعنی:

$$x = -\frac{a_1}{a_\circ}$$

حل و بحث معادلهٔ درجهٔ اول: بنابر مقادیری کـه $a_\circ$ و a_1 کسب می‌کنند سه حالت می‌تواند وجود داشته باشد که موردبحث قرار گیرند. I) اگر $a_\circ = \circ$ و $a_1 \neq \circ$ دراین صورت معادلـه جواب ندارد. II) اگر $a_\circ = \circ$ و $a_1 = \circ$ معادله به‌شکل $\circ \times x + \circ = \circ$ درمی‌آید و ریشهٔ معادله مبهم است. III) اگر $a_\circ \neq \circ$ و $\forall a_1 \in R$ ریشهٔ معادله چنین است:

$$x = -\frac{a_1}{a_\circ}$$

مثال۱: به‌ازای مقادیرمختلف m در وجود یا عدم ریشهٔ معادلهٔ: $m^2 x + ۲m + ۱ = (۳m - ۲)x$ بحث‌کنید.

حل: ابتدا مجهولات‌رابه سمت‌چپ ومعلومات‌رابه‌طرف راست‌انتقال می‌دهیم. (با توجه به‌اینکه هرعدد از یك‌طرف به طرف‌دیگر برده‌شود علامتش عوض می‌شود.) بنابراین داریم:

$$m^2x-3mx+2x=-2m-1 \Longrightarrow$$

$$(m^2-3m+2)x=-(2m+1)$$

معادله به‌ازای $m=R-\{1\ ,\ 2\}$ یک ریشه حقیقی دارد.

$$x=\frac{-(2m+1)}{m^2-3m+2}=-\frac{2m+1}{(m-1)(m-2)}$$

بحث:
- I) اگر $(m-1)(m-2)=0 \Longrightarrow m=1 \vee m=2$ معادله ریشه حقیقی ندارد.
- II) اگر $(m-1)(m-2)\neq 0 \Longrightarrow m\neq 1 \wedge m\neq 2$ معادله یک ریشه حقیقی دارد.

مثال۲: به ازای مقادیرمختلف m و n در وجود یا عدم ریشه‌معادله زیر بحث کنید.

$$(3m-2n+1)x+1=(2m-n)x+3n-2m$$

حل:

$$(3m-2n+1)x-(2m-n)x=3n-2m-1$$

$$(m-n+1)x=3n-2m-1 \Longrightarrow$$

$$x=\frac{3n-2m-1}{m-n+1}$$

بحث:
- I) اگر $m-n+1=0 \wedge 3n-2m-1\neq 0$ غیر ممکن
- II) اگر $m-n+1=0 \wedge 3n-2m-1=0$ مبهم
- III) اگر $m-n+1\neq 0 \wedge \forall m$ و $n\in R$ ممکن

توجه: برای به دست آوردن m و n در حالت مبهم کافی است دستگاه زیر را حل کنیم. ازحل دستگاه نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} m-n+1=0 \\ 3n-2m-1=0 \end{cases} \Longrightarrow n=-1 \text{ و } m=-2$$

۲) حل معادلهٔ (۱) درحالت $n=2$:

معادله (۱) به‌ازای $n=2$ به شکل خاص

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0$$

درمی‌آید. برای سادگی معادله درجه دوم را درحالت عمومی به شکل آشنای مقابل درنظر می‌گیریم:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \qquad (2)$$

معادله (۲) را می‌توان با روشهای جبری، هندسی، مثلثاتی، ترسیمی (گرافیکی) حل نمود. در اینجا تنها به‌ذکر یك روش جبری ساده اکتفا می‌کنیم.

روش جبری: ابتدا معادله(۲) را در $4a$ ضرب می‌کنیم. سپس به طرفین معادلهٔ حاصله b^2 را اضافه می‌کنیم یعنی:

$$4a(ax^2+bx+c)=0$$

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Longrightarrow$$

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

طرف اول رابطه‌اخیر مربع $(2ax+b)$ است بنابراین‌داریم:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac \qquad (3)$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود طرف‌اول رابطه(۳) همواره‌مثبت است، بنابراین طرف‌دوم تساوی‌فوق نیز همواره باید مثبت و یا مساوی‌صفر باشد. دراین‌صورت اگر طرف‌دوم تساوی‌فوق‌الذکر را به Δ نمایش‌دهیم می‌توانیم Δ را مبین حل‌معادلهٔ (۲) منظور کنیم. یعنی برای‌وجود جواب‌معادله(۲) باید داشته‌باشیم:

$$\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$$

در اینجا با فرض $\Delta\geqslant 0$ می‌توان از طرفین رابطهٔ (۳) جذر گرفت وسپس x را محاسبه نمود. یعنی:

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \Longrightarrow$$

$$2ax=-b\pm\sqrt{\Delta} \Longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad (a\neq 0)$$

بحث‌در وجود یا عدم ریشه‌های معادله (۲) : به‌طورکلی اگر

$\Delta \geqslant ۰$ باشد معادله ریشه‌حقیقی‌دارد. و اگر $\Delta < ۰$ باشدمعادله ریشه حقیقی ندارد. یعنی:

بحث:

I) اگر $\Delta = b^۲ - ۴ac > ۰ \implies$
معادلهٔ (۲) دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

II) اگر $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۰ \implies$
معادلهٔ (۲) دو ریشه مساوی (ریشه‌مضاعف) دارد.

III) اگر $\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰ \implies$
معادلهٔ (۲) ریشه حقیقی ندارد.

تبصره۱ : درحالت $\Delta < ۰$ معادله دو ریشه غیر حقیقی داردکه به شکل کلی: $x = \alpha \pm i\beta$ می‌باشند. این نوع اعداد که درآنها $i = \sqrt{-۱}$ است از دوجزء تشکیل‌یافته‌اند،که‌این دوجزء عبارتنداز جزءحقیقی[1] (یعنی α) وجزء موهومی[2] (یعنی $i\beta$). به‌عنوان مثال معادله: $x^۲ + x + ۱ = ۰$ دارای دوریشه غیرحقیقی (مختلط[3]) است که عبارتنداز:

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱-۴}}{۲}$$

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲} = \frac{-۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{-۳}}{۲} =$$

$$\frac{-۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳} \times \sqrt{-۱}}{۲} = \underbrace{-\frac{۱}{۲}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{\beta} i \quad (i = \sqrt{-۱})$$

$$\implies x = \alpha \pm i\beta \quad \text{(ریشه‌های‌مختلط‌معادله)}$$

مثال۳: ریشه‌های غیرحقیقی (مختلط) معادله

$$x^۲ - ۳x + ۴ = ۰$$

را به‌دست‌آورید.

حل : داریم: $x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹-۱۶}}{۲}$

1) Real 2) Imaginary 3) Complex

ودر نتیجه ریشه‌های مختلط چنین می‌شوند.

$$x = \frac{۳}{۲} \pm \frac{\sqrt{-۷}}{۲} = \frac{۳}{۲} \pm \frac{\sqrt{۷}}{۲} i_{(i=\sqrt{-۱})}$$

تبصرهٔ ۲ : ریشه‌های غیر حقیقی (مختلط) همـواره در معادلات باضرایب حقیقی به شکل مزدوج ظاهر می‌شوند یعنی اگـر معادلهٔ درجهٔ دومی دارای ریشهٔ $۲ - i\sqrt{۳}$ باشد ریشهٔ دیگرش درصورت‌حقیقی‌بودن‌ضرایب، $۲ + i\sqrt{۳}$ می‌باشد.

G

مثال۴: معادلهٔ درجهٔ دومی که یك ریشهٔ غیر حقیقی آن $\frac{۳ + i\sqrt{۵}}{۲}$ است،ریشهٔ‌دیگرش‌درصورت‌حقیقی‌بودن‌ضرایب، چیست .

حل : چون فرض شده‌است ضرایب معادله حقیقی است بنابراین‌ریشه دیگرمعادله باید مزدوج ریشهٔ‌داده شده‌باشد یعنی ریشهٔ دیگر معادله $\frac{۳ - i\sqrt{۵}}{۲}$ است.

تذکر: اگر درمعادلهٔ(۲) b زوج‌باشد (یعنی $b = ۲b'$) معادله‌را می‌توان بافرمول ساده‌تری حل‌نمود. زیرا داریم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \implies b = ۲b' \implies$$

$$x = \frac{-(۲b') \pm \sqrt{(۲b')^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$x = \frac{-۲b' \pm \sqrt{۴b'^۲ - ۴ac}}{۲a} =$$

$$\frac{-۲b' \pm ۲\sqrt{b'^۲ - ac}}{۲a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - ac}}{a}$$

$$\implies \left| \begin{array}{l} \Delta' = b'^۲ - ac \\ b = ۲b' \end{array} \right. \implies x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ (۲):

اگر دو ریشهٔ معادلهٔ (۲) را با x' و x'' نمایش دهیم و معادلهٔ دوجه‌دوم (۲) را بر a که مخالف‌صفر فرض شده است تقسیم کنیم، از مقایسهٔ معادلهٔ حاصل و معادلهٔ:

$$(x-x')(x-x'')=0$$

و یا معادله: $x^2-(x'+x'')x+x'x''=0$ روابط بین ریشه‌ها و ضرایب به‌دست می‌آید. یعنی:

$$\left|\begin{array}{l} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \\ x^2-(x'+x'')x+x'x''=0 \end{array}\right. \quad \text{از مقایسه} \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} x'+x''=-\frac{b}{c} \\ x'x''=\frac{c}{a} \end{array}\right. \qquad (۴)$$

مثال۵: به ازای مقادیر مختلف m در وجود یا عدم ریشه‌های معادله:

$$mx^2-2(m-1)x+m+1=0$$

بحث کنید. ومقدار m را طوری تعیین کنید که ریشه‌ها عکس و قرینهٔ یکدیگر باشند. و تعیین کنید به ازای چه مقادیری از m معادله دو ریشه قرینه دارد.

حل: برای بحث در وجود یا عدم ریشه‌های حقیقی معادله کافی است مبین معادله را تشکیل دهیم. چون b زوج است بهتر است Δ' را تشکیل دهیم. بنابراین داریم:

$$\Delta'=(m-1)^2-m(m+1)$$

$$\Delta'=m^2-2m+1-m^2-m=-3m+1$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\Delta'=-3m+1>0 & \text{(۱) دو ریشه‌حقیقی‌دارد.} \\ \Delta'=-3m+1=0 & \text{(۲) ریشه مضاعف دارد.} \\ \Delta'=-3m+1<0 & \text{(۳) ریشه حقیقی‌ندارد.}\end{cases}$$

ویا داریم:

$$\Longrightarrow\begin{cases}-3m+1>0 \Longrightarrow -3m>-1 \Longrightarrow \\ m<\frac{1}{3} & \text{(۱) دو ریشهٔ‌حقیقی‌دارد.} \\ -3m+1=0 \Longrightarrow -3m=-1 \Longrightarrow \\ m=\frac{1}{3} & \text{(۲) ریشهٔ مضاعف دارد.} \\ -3m+1<0 \Longrightarrow -3m<-1 \Longrightarrow \\ m>\frac{1}{3} & \text{(۳) ریشهٔ حقیقی ندارد.}\end{cases}$$

اگر ریشه‌ها عکس وقرینهٔ یکدیگر باشند داریم:

$$x''=\frac{-1}{x'} \Longrightarrow \begin{cases} x'x''=-1 \\ x'x''=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{m}\end{cases} \Longrightarrow$$

از روابط بین ریشه‌ها و ضرایب داریم:

$$\frac{m+1}{m}=-1 \Longrightarrow m+1=-m \Longrightarrow 2m=-1$$

$$\Longrightarrow m=\frac{-1}{2}$$

بنابراین به‌ازای $m=-\frac{1}{2}$ ریشه‌ها عکس وقرینهٔ یکدیگرند.

اگر ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگر باشند داریم: $x''=-x'$

و از روابط بین ریشه‌ها وضرایب داریم:

$$x''+x'=-\frac{b}{a}$$

بنابراین با جایگزینی داریم:

$$-x'+x'=-\frac{b}{a} \Longrightarrow -\frac{b}{a}=0 \Longrightarrow b=0$$

بنابراین به‌ازای $m=1$ ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگرند. زیراداریم:

$$b=-2(m-1)=0 \Longrightarrow m=1$$

تعیین معادلهٔ درجهٔ دوم، با معلوم‌بودن ریشه‌ها:

با توجه به‌روابط بین ریشه‌ها و ضرایب می‌توان به‌طور مستقیم معادلـه‌را مشخص نمود. یعنی اگر فـرض‌کنیم مجموع ریشه‌ها برابر S و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر P باشد در این صورت داریم :

$$\begin{cases} x'+x''=-\frac{b}{a}=S \\ x'x''=\frac{c}{a}=P \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^{۲}-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=۰ \Longrightarrow x^{۲}-Sx+P=۰$$

مثال۶: معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ باشد.

حل: داریم: $x'=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $x''=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$

بنابراین ازجمع وضرب‌ریشه‌ها نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x'+x''=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}=۱ \\ x'x''=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)=-۱ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x'+x''=۱ \\ x'x''=-۱ \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} S=۱ \\ P=-۱ \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$x^{۲}-x-۱=۰$$

نتیجه : با در دست‌داشتن دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم به طور مستقیم می‌توان‌از رابطهٔ:

$$x^{۲}-(x'+x'')x+x'x''=۰$$

استفاده‌کرد و معادلهٔ درجهٔدوم منظور را نوشت.

> ❊ برهان نکاتی چند درمورد معادلهٔ درجهٔدوم که‌درتست می‌توان بکار برد.

$$ax^{۲}+bx+c=۰ \qquad (۲)$$

۱) همواره قدرمطلق تفاضل‌ریشه‌ها چنین است:

$$|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

برهان: همان‌طورکه می‌دانیم ریشه‌های معادلهٔدرجهٔ دوم (۲) چنین است:

$$x' \ , \ x''=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

بنابراین داریم :

$$\begin{cases} x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \begin{cases} x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases}$$

پس به ترتیب داریم:

$$x'-x''=\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \quad \text{و یا} \quad x'-x''=\frac{-\sqrt{\Delta}}{a} \Longrightarrow$$

$$x'-x''=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$a(x'-x'')=\pm\sqrt{\Delta} \Longrightarrow |a(x'-x'')|=\sqrt{\Delta}$$

$$\Longrightarrow |a|\,|x'-x''|=\sqrt{\Delta}$$

و بنابراین از رابطهٔ اخیر داریم:

$$|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

(لازم به توضیح است‌که رابطهٔ اخیر را از اصل:

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$$

نتیجه گرفته‌ایم.)

۴) با استفاده از روابط بین‌ریشه‌ها وضرایب‌معادلهٔ(۲) عبارتهای متقارن اصلی زیر را برحسب S و P محاسبه کنید (x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ(۲) فرض شده‌اند).

(لازم‌به ذکراست‌که عبارت متقارن‌برحسب x وy عبارتی است‌که اگر x به y و y به x تبدیل‌شود عبارت تغییر نکند، به عبارت دیگر عبارات متقارن عباراتی هستند که اگر نقش متغیرهارا بایکدیگر عوض‌کنیم عبارت تغییری‌نکند، به عنوان مثال عبارت $P=x^2+y^2+xy$ یک عبارت متقارن است زیرا اگر x به y و y به x تبدیل شود عبارت‌چنین می‌شود:

$$P=y^2+x^2+yx$$

که در واقع همان عبارت قبلی است. به عنوان مثالی دیگر $S=x^3+xyz+y^3+z^3$ نیز متقارن است.)

$$A=x_1^2+x_2^2 \quad و \quad B=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

$$C=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} \quad و \quad D=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$$

$$E=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad و \quad F=x_1^3+x_2^3$$

$$G=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3} \quad و \quad H=x_1^4+x_2^4$$

$$*(S_k=x_1^k+x_2^k)*$$

حل: همان‌طور که می‌دانیم روابط‌بین‌ریشه‌ها وضرایب معادلهٔ (۲) چنین است:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=S \\ x_1x_2=P \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = S^2-2P$$

$$B=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S}{P}$$

$$C=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)^2-2\frac{1}{x_1x_2} =\frac{S^2}{P^2}-\frac{2}{P}$$

$$D=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2P}{P}$$

$$E=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \Longrightarrow E^2=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2$$

$$E^2=\frac{S^2-2P}{P}+2=\frac{S^2-2P+2P}{P}=\frac{S^2}{P} \Longrightarrow$$

$$E=\frac{S}{\sqrt{P}}\times\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}}=\frac{S\sqrt{P}}{P} \quad (P>0)$$

$$F=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) =S^3-3PS$$

$$g=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\frac{S^3-3PS}{P^3}$$

$$H=x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2 =(S^2-2P)^2-2P^2=S^4-4PS^2+2P^2$$

* (برای محاسبهٔ S_k برحسب P و S چنین‌عمل‌می کنیم:

$$S_k=\left(\frac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2}\right)^k+\left(\frac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2}\right)^k$$

(لازم به توضیح است که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ (۲) می باشند و داریم:

$$\begin{cases} x_1=\frac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2} \\ x_2=\frac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2} \end{cases}$$

و با جایگزینی x_1 و x_2 در S_k به رابطهٔ فوق رسیده‌ایم.)

پس‌از بسط هریک‌از پرانتزها و اختصار لازم مقدار S_k برحسب S و P محاسبه می‌شود یعنی :

$$S_k=\frac{1}{2^{k-1}}\Big[S^k+\frac{k(k-1)}{1\times 2}(S^2-4P)S^{k-2}+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\times 2\times 3\times 4}(S^2-4P)^2S^{k-4}+\dots\Big]$$

رابطهٔ اخیر بیان S_k را بر حسب S و P نشان می‌دهد.) *

G

مثال ۷ : اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$x^2-\sqrt{3}x-2\sqrt{6}=0$$

باشند عبارت متقارن زیر را حساب کنید.

$$A=x_1^3x_2^4+x_2^3x_1^4+x_1^3x_2^2+x_2^3x_1^2$$

حل :
$$A=x_1^3x_2^3(x_1+x_2)+x_1^2x_2^2(x_1+x_2)=(x_1+x_2)(x_1^3x_2^3+x_1^2x_2^2)$$
$$A=S(P^3+P^2)\Longrightarrow A=SP^2(P+1)\Longrightarrow$$
$$\begin{cases}x_1+x_2=\sqrt{3}=S\\ x_1x_2=-2\sqrt{6}=P\end{cases}\Longrightarrow A=24(\sqrt{3}-6\sqrt{2})$$

G

مثال۸: عبارت $T=\frac{x_1^8-x_2^8}{x_1^2-x_2^2}$ در صورتی که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند را حساب کنید.

$$T=\frac{(x_1^4-x_2^4)(x_1^4+x_2^4)}{x_1^2-x_2^2}=\frac{(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2)(x_1^4+x_2^4)}{x_1^2-x_2^2}$$

با حذف $x_1^2-x_2^2$ ازصورت و مخرج داریم:

$$\Longrightarrow T=(x_1^2+x_2^2)(x_1^4+x_2^4)$$
$$T=(S^2-2P)[(S^2-2P)^2-2P^2]=(S^2-2P)^3-2P^2(S^2-2P)$$

از طرفی داریم :

$$\begin{cases}x_1+x_2=S=3\\ x_1x_2=P=1\end{cases}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$T=(9-2)^3-2(9-2)=7^3-14=329$$

---

۳) تشکیل معادلهٔ درجهٔ دومی که بین ریشه‌های آن و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ‌دوم مفروضی رابطهٔ خاصی برقرار باشد.
به عنوان مثال معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل‌دهیدکه ریشه‌هایش k واحد بیشتر ویا کمتراز معادلهٔ(۲) باشد. ویا معادلهٔ‌درجهٔ‌دومی تشکیل‌دهیدکه هرریشهٔ آن مکعب هرریشهٔ معادلهٔ(۲) باشدو.... در این‌جا برخی از این‌گونه مسائل را مطرح و با یکی از دو روش معمول‌یعنی استفاده از عبارتهای متقارن ویا برقراری رابطهٔ بین ریشه‌های معادلهٔ مفروض (x) و ریشه‌های معادلهٔ مطلوب (y) حل می‌کنیم. البته بایدبه این‌نکته توجه داشت‌که در برخی از مسائل‌روش‌اول ودر برخی‌دیگر روش‌دوم ساده‌تر است. و در بعضی از مسائل تنها از یکی از روشهای معمول می‌توان استفاده‌کرد.

۳ـ۱) معادلهٔ درجهٔ‌دومی تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش k واحد بیشتر یاکمتراز معادلهٔ (۲) باشد.

$$ax^2+bx+c=0\quad(2)$$

حل : ریشهٔ معادلهٔ مطلوب‌را y فرض می‌کنیم. بنابراین با برقراری‌رابطهٔ بین‌ریشه‌های معادلهٔ‌مفروض وریشه‌های‌معادلهٔ مطلوب داریم :

$$y=x\pm k\Longrightarrow x=y\mp k$$

باجایگزینی رابطهٔ‌اخیر درمعادلهٔ (۲) داریم:

$$a(y\mp k)^{2}+b(y\mp k)+c=0$$

معادلهٔ مطلوب :

$$ay^{2}\mp 2aky+k^{2}+by\mp bk+c=0 \Longrightarrow$$
$$ay^{2}+(b\mp 2ak)y+(k^{2}\mp bk+c)=0$$

(اگر k واحد بیشتر باشد با علامت منفی $(-)$ واگر k واحد کمتر باشد باعلامت مثبت $(+)$ درنظر می‌گیریم.)

مثال۹: معادلهٔ درجهٔ‌دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش ۲ واحد کمتراز ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}-4x+2=0$ باشد.

حل : ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$y=x-2$$
$$x=y+2 \Longrightarrow (y+2)^{2}-4(y+2)+2=0$$
$$\Longrightarrow y^{2}+4y+4-4y-8+2=0$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب چنین است :

$y^{2}-2=0$ (معادله‌ای‌که ریشه‌هایش ۲ واحدکمتر از معادلهٔ مفروض است).

۲-۳) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادلهٔ(۲) باشد.

حل : ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$y=kx$$

با محاسبهٔ x برحسب y و جایگزینی آن در معادلهٔ (۲) خواهیم داشت:

$$x=\frac{y}{k}$$

$$a\left(\frac{y}{k}\right)^{2}+b\left(\frac{y}{k}\right)+c=0 \Longrightarrow$$
$$\frac{ay^{2}}{k^{2}}+\frac{by}{k}+c=0 \Longrightarrow$$
$$ay^{2}+bky+ck^{2}=0$$

مثال ۱۰: معادلهٔ درجهٔ‌دومی تشکیل‌دهید که ریشه‌هایش ۳ برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^{2}+x-3=0$ باشد.

حل : y را ریشهٔ معادلهٔ مطلوب فرض می‌کنیم بنابراین باید داشته باشیم:

$$y=5x$$

با محاسبهٔ x برحسب y وجایگزینی درمعادله داریم:

$$x=\frac{y}{5} \Longrightarrow \left(\frac{y}{5}\right)^{2}+\left(\frac{y}{5}\right)-3=0$$

ودر نتیجه داریم:

$$\frac{y^{2}}{25}+\frac{y}{5}-3=0 \Longrightarrow y^{2}+5y-75=0$$

(معادلهٔ مطلوب)

۳-۳) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل‌دهید که به‌ترتیب ریشه‌هایش معکوس ، مجذور ، مکعب و قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ (۲) باشد.

حل : اگر ریشهٔ‌معادلهٔ مطلوب را y فرض کنیم، در این صورت داریم :

$$y=\frac{1}{x} \Longrightarrow x=\frac{1}{y}$$

با جایگزینی در معادلهٔ (۲) داریم:

$$a\left(\frac{1}{y}\right)^{2}+b\left(\frac{1}{y}\right)+c=0 \Longrightarrow$$
$$\frac{a}{y^{2}}+\frac{b}{y}+c=0$$

باضرب طرفین معادلهٔ‌اخیر در y^{2} معادلهٔ‌مطلوب یعنی‌معادله‌ای که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادلهٔ (۲) می‌باشد چنین است :

$$cy^{2}+by+a=0$$

همچنین اگر مجذور باشد داریم:

$$y=x^{2} \Longrightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

با جایگزینی در معادلهٔ (۲) داریم:

$$a(\pm\sqrt{y})^2+b(\pm\sqrt{y})+c=0 \Longrightarrow$$
$$ay\pm b\sqrt{y}+c=0$$
$$ay+c=\mp b\sqrt{y} \Longrightarrow (ay+c)^2=(\mp b\sqrt{y})^2$$
$$\Longrightarrow a^2y^2+2acy+c^2=b^2y$$

معادله‌ای که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ (۲) است:

$$a^2y^2+(2ac-b^2)y+c^2=0$$

همچنین اگر مکعب باشد داریم:

$$\begin{cases} y_1=x_1^3 \\ y_2=x_2^3 \end{cases} \Longleftarrow$$ y_1 و y_2 ریشه‌های معادلهٔ مطلوب فرض می‌شوند.

و می‌دانیم:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=S \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=P \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1+y_2=x_1^3+x_2^3 \\ y_1y_2=x_1^3x_2^3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1+y_2=S^3-3PS \\ y_1y_2=P^3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$y^2-(S^3-3PS)y+P^3=0$$

بنابراین معادله‌ای که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادلهٔ (۲) می‌باشد چنین است:

$$a^3y^2+(b^3-3abc)y+c^3=0$$

بالاخره معادله‌ای که ریشه‌هایش قرینهٔ معادلهٔ(۲) است چنین است:

$$y=-x \Longrightarrow x=-y$$
$$a(-y)^2+b(-y)+c=0 \Longrightarrow$$
$$ay^2-by+c=0 \quad (\text{معادلهٔ مطلوب})$$

مثال ۱۱: معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشد.

حل: ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$y=\frac{1}{x} \Longrightarrow x=\frac{1}{y} \Longrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{y}\right)^2-3\left(\frac{1}{y}\right)+1=0$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y}+1=0 \Longrightarrow y^2-3y+1=0$$

بنابراین چنین نتیجه می‌شود که اگر ریشه‌های معادلهٔ
$x^2-3x+1=0$
را معکوس کنیم باز هم در معادله صدق می‌کنند.

مثال ۱۲: معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ باشد.

حل: روش اول: ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم، پس داریم: $y=x^2$

$$x=\pm\sqrt{y} \Longrightarrow$$
$$(\pm\sqrt{y})^2-(\pm\sqrt{y})-1=0 \Longrightarrow$$
$$y\mp\sqrt{y}-1=0 \Longrightarrow y-1=\pm\sqrt{y}$$
$$\Longrightarrow (\pm\sqrt{y})^2=(y-1)^2$$
$$\Longrightarrow y=y^2-2y+1 \Longrightarrow$$
$$y^2-3y+1=0 \quad (\text{معادلهٔ مطلوب})$$

روش دوم: ریشه‌های معادلهٔ مطلوب را y_1 و y_2 فرض می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} y_1=x_1^2 \\ y_2=x_2^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1+y_2=x_1^2+x_2^2 \\ y_1y_2=x_1^2x_2^2 \end{cases}$$

$$\left(\text{می‌دانیم:} \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-1 \end{cases} \right) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1+y_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \\ y_1y_2=(x_1x_2)^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1+y_2=(1)^2-2(-1)=3 \\ y_1y_2=(-1)^2=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1+y_2=3 \\ y_1y_2=1 \end{cases} \Longrightarrow y^2-3y+1=0$$

G

مثال ۱۳: معادلهٔ درجهٔ‌دومی تشکیل‌دهید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-2=0$ باشد.

حل: ریشه‌های معادلهٔ‌مطلوب‌را y_1 و y_2 فرض‌می‌کنیم،

پس داریم:

$$\begin{cases} y_1=x_1^3 \\ y_2=x_2^3 \end{cases}$$

ودر نتیجه داریم:

$$\begin{cases} y_1+y_2=x_1^3+x_2^3= \\ (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) \\ y_1y_2=x_1^3x_2^3=(x_1x_2)^3 \end{cases}$$

$$\left(\text{می‌دانیم:} \begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=-2 \end{cases} \right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1+y_2=(3)^3-3(-2)(3) \\ \qquad =27+18=45 \Longrightarrow \\ y_1y_2=(-2)^3=-8 \end{cases}$$

$$y^2-45y-8=0 \quad \text{(معادلهٔ مطلوب)}$$

مثال ۱۴: معادلهٔ درجهٔ‌دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+3=0$ باشد.

حل: اگر ریشه‌های معادلهٔ مطلوب‌را به y نمایش دهیم، دراین‌صورت داریم: $y=-x \Longrightarrow x=-y$

و با جایگزین کردن درمعادلهٔ مفروض داریم:

$$(-y)^2-5(-y)+3=0 \Longrightarrow$$
$$y^2+5y+3=0$$

۴-۳) معادلهٔ درجهٔ‌دومی تشکیل‌دهید که هر ریشهٔ آن از k برابر هریك‌از ریشه‌های‌معادلهٔ(۲)، m واحدکمتر باشد.

حل: ریشهٔ‌معادلهٔ مطلوب‌را y فرض‌می‌کنیم بنابراین‌از شرایط مسئله داریم:

$$y=kx-m$$

از رابطهٔ‌اخیر x را برحسب y محاسبه‌می‌کنیم وسپس‌درمعادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم، یعنی:

$$x=\frac{y+m}{k} \Longrightarrow a\left(\frac{y+m}{k}\right)^2+ b\left(\frac{y+m}{k}\right)+c=0$$

$$\frac{a}{k^2}(y^2+2my+m^2)+\frac{b}{k}(y+m)+c=0$$

$$\Longrightarrow ay^2+2amy+bky+am^2+bkm+k^2c=0$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب چنین است:

$$ay^2+(2am+bk)y+am^2+bkm+k^2c=0$$

G

مثال ۱۵: معادلهٔ درجهٔ‌دومی تشکیل‌دهید که هر ریشهٔ‌آن از ۳برابر هریك‌از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x+1=0$ به اندازهٔ ۲ واحد بیشتر باشد.

حل: ریشهٔ معادلهٔ مطلوب را y فرض می‌کنیم بنابراین

با توجه به‌شرایط مسئله داریم:

$$y = ۳x + ۲$$

و در نتیجه داریم:

$$x = \frac{y-۲}{۳} \Rightarrow ۲\left(\frac{y-۲}{۳}\right)^۲ - ۴\left(\frac{y-۲}{۳}\right) + ۱ = ۰$$

$$\frac{۲}{۹}(y^۲ - ۴y + ۴) - \frac{۴}{۳}(y-۲) + ۱ = ۰ \Rightarrow$$

$$۲y^۲ - ۸y + ۸ - ۱۲y + ۲۴ + ۹ = ۰$$

پس از اختصار لازم معادلهٔ مطلوب چنین است:

$$۲y^۲ - ۲۰y + ۴۱ = ۰$$

۴) نتایجی از حالتهای خاص ضرایب a و b و c:

۴-۱) هر گاه در معادلهٔ (۲) داشته باشیم $a = ۰$ آنگاه یك ریشهٔ معادله به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۴-۲) اگر $c = ۰$، یك ریشهٔ معادله صفر و ریشهٔ دیگر آن برابر $\frac{-b}{a}$ است زیرا داریم:

$$ax^۲ + bx = ۰$$

$$x(ax+b) = ۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = ۰ \\ ax + b = ۰ \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} x = ۰ \\ x = \frac{-b}{a} \end{array} \right.$$

۴-۳) اگر $b = ۰$، باشرط مختلف‌العلامت بودن a و c معادله دو ریشهٔ قرینه دارد زیرا:

$$b = ۰ : ax^۲ + c = ۰ \Rightarrow x^۲ = -\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

۴-۴) اگر در معادلهٔ (۲) داشته باشیم:

$$a = b = c = ۰$$

آنگاه معادله بی‌شمار جواب‌دارد زیرا دراین حالت معادله به اتحاد عددی تبدیل می‌شود. یعنی:

$$۰ \times x^۲ + ۰ \times x + ۰ = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$$

۴-۵) اگر $a+b+c = ۰$ آنگاه یك ریشهٔ معادله $x_۱ = ۱$ و ریشهٔ دیگر معادله $x_۲ = \frac{c}{a}$ است و برعکس. زیرا اگر درمعادلهٔ (۲) مقدار $x = ۱$ را قراردهیم خواهیم داشت:

$$a(۱)^۲ + b(۱) + c = ۰ \Rightarrow a+b+c = ۰ \;,$$

$$\begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۱x_۲ = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow ۱ \times x_۲ = \frac{c}{a} \Rightarrow x_۲ = \frac{c}{a}$$

۴-۶) اگر $a+c = b$ آنگاه یك ریشهٔ معادله $x_۱ = -۱$ و ریشهٔ دیگر معادله $x_۲ = -\frac{c}{a}$ است و برعکس. زیرا اگر در معادلهٔ (۲) مقدار $x = -۱$ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$a(-۱)^۲ + b(-۱) + c = ۰ \Rightarrow a - b + c = ۰$$

$$\Rightarrow a + c = b \;, \begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۱x_۲ = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-۱)x_۲ = \frac{c}{a} \Rightarrow x_۲ = \frac{-c}{a}$$

۴-۷) اگر درمعادلهٔ (۲) مقادیر a و c مختلف‌العلامت باشند یعنی $\frac{c}{a} < ۰$، معادله همواره دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت‌دارد و نیازی به‌تشکیل Δ (مبین) نمی‌باشد. زیرا با این شرط همواره $\Delta > ۰$ است. همچنین باید توجه داشت‌که اگر $\frac{c}{a} > ۰$ باشد دلیلی برنداشتن ریشه‌نیست و Δ را باید تشکیل دهیم.

۴-۸) اگر در معادلهٔ (۲) داشته باشیم $a=c$ یعنی: $\frac{c}{a}=1$، معادله دو ریشهٔ معکوس دارد. زیرا در این حالت داریم:

$$x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{a}=1\Rightarrow x_1x_2=1\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{1}{x_1}\ \text{یا}\ x_1=\frac{1}{x_2}$$

۵) برای آنکه دو معادلهٔ

$ax^2+bx+c=0$ و $a'x^2+b'x+c'=0$

ریشهٔ مشترک داشته‌باشند باید داشته باشیم:

$$(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(ac'-a'c)^2$$

برهان:

$$\begin{cases}ax^2+bx+c=0\\ a'x^2+b'x+c=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{matrix}-a'\\ a\end{matrix}\begin{cases}ax^2+bx+c=0\\ a'x^2+b'x+c'=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-a'ax^2-a'bx-a'c=0\\ aa'x^2+ab'x+ac'=0\end{cases}$$

ازجمع‌دو رابطهٔ دستگاه‌نتیجه می‌شود:

$$(ab'-a'b)x=a'c-ac'\Rightarrow$$

$$x=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$$

ازآنجاکه ریشهٔ‌اخیر در هردو معادله‌صادق‌است داریم:

$$a\left(\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)^2+b\left(\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)+c=0$$

$$a(a'c-ac')^2+b(a'c-ac')(ab'-a'b)$$

$$+c(ab'-a'b)^2=0$$

$$a(a'c-ac')^2+(ab'-a'b)[b(a'c-ac')+c(ab'-a'b)]=0$$

$$a(a'c-ac')^2+(ab'-a'b)[ba'c-bac'+cab'-ca'b]=0$$

$$a(a'c-ac')^2+a(ab'-a'b)(b'c-bc')=0$$

بنابراین با فرض $a\neq0$ داریم:

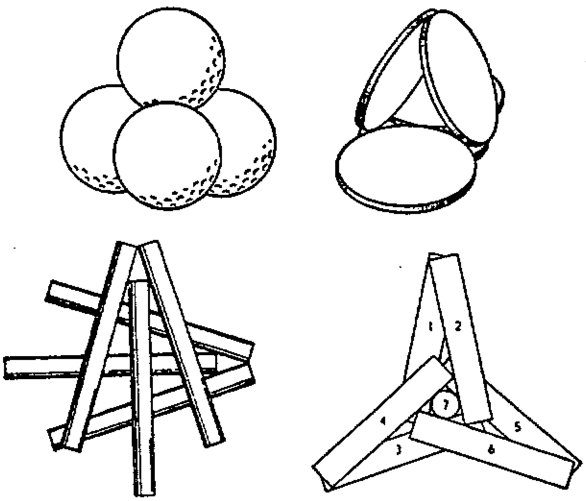
$$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$$



۱) پنج توپ‌گلف را چنان قراردهید که هر توپ به سه توپ دیگر تماس داشته‌باشد. ۲) پنج سکهٔ دو ریالی را چنان قراردهید که هر سکه به چهارسکهٔ دیگر برخوردکند. ۳) آیا ممکن است شش سیگار را چنان قراردهیم که هریك از آنها با پنج قطعهٔ دیگر برخوردکند؟ سیگارها را نباید خم کرد یا شکست. هفت سیگار را چطور؟

مارتین‌گاردنر
معماها و تفریحات ریاضی،
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

جواب





اسماعیل قصاب، رئیس کمیتهٔ مغازه‌داران خیابان، که شامل بقال، نانوا، و سیگارفروش نیز هست، می‌باشد. تمام آنها دورمیزی نشسته‌اند.

- اسماعیل سمت چپ اسمال نشسته است.
- اصغر سمت راست بقال نشسته است.
- اصلان که مقابل اسمال است نانوا نیست.
- اصغر چه دکانی دارد؟

جواب

باتخصیص اسماعیل درصندلی ته میز، چهار شخص مذکور می‌توانند تنها به این طریق بنشینند:

اصغر

اسمال　　　　اصلان

اسماعیل

درنتیجه، اسمال بقال است، و اصلان سیگار فروش، و اصغر نانوا.

ادب ریاضی

دیوفانت «Diophantus» (حدود ۲۵۰ ب.م) کتاب حساب «Arithmetica» خود را، که اولین کتاب شناخته‌شده راجع به جبر است، نوشت. این کتاب شامل اولین کاربرد سیستماتیک نماد ریاضی در ارائهٔ مجهولات معادلات و توانهای این مجهولات است. تقریباً چیزی در مورد زندگی دیوفانت، جز اینکه در حدود ۲۵۰ب.م در اسکندریه می‌زیسته، نمی‌دانیم. تنها منبع مربوط به جزئیات زندگی دیوفانت از مضمونی یافت‌شده در مجموعه‌ای موسوم به گلچین یونانی «anthology Greek» به دست آمده‌است: «دیوفانت یک ششم زندگی خود را در کودکی گذراند، یك‌دوازدهم آن را در نوجوانی، و یك‌هفتم آن را در جوانی. پنج‌سال بعد از ازدواجش پسرش که چهارسال پیش از پدر، در سنی برابر نصف سن او، مرد، متولدشد.»

خواننده از این نکته می‌تواند نتیجه بگیرد که دیوفانت تا سن ۸۴ سالگی در قیدحیات بوده‌است.

ازکتاب: نظریهٔ اعداد مقدماتی
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

منطق جدید و ریاضیات

غلامرضا یاسی‌پور

به خاطر اجتناب از عدم کفایتهای زبانهای طبیعی در اهداف تحلیل منطقی، لازم است که زبان طبیعی به نمادی دقیقتر ترجمه شود.

آلونزوچرچ[۱]

ارزیابی استدلالات ارائه شده در زبان فارسی یا هر زبان طبیعی دیگر غالباً به علت طبیعت مبهم و دوپهلوی کلمات به‌کار رفته در آنها، ابهام ساختاری‌شان، اصطلاحات گمراه کننده‌ای که ممکن است دربرداشته باشند، شیوهٔ استعاری بالقوه گیج‌کننده‌شان، و آشفتگی حاصل از مقصود عاطفی‌شان، مشکل است. حتی هنگامی که این مشکلات برطرف شوند، مسألهٔ تشخیص درستی یا نادرستی استدلال همچنان باقی می‌ماند، برای اجتناب از این مشکلات برونی شایسته‌است که زبان علامتی مصنوعی[۲] بری از نقایص فوقی، که بتوان در آن گزاره‌ها و استدلالات را علامتی کرد، طرح‌شود، و عهده‌دار این مهم موضوعی است که منطق علامتی[۳] یا سمبلیک نامیده می‌شود.

جورج‌بول در آغاز فصل اول کتاب مشهورش به‌نام قوانین تفکر[۴] چنین تقریر می‌کند که:

> مقصود از مقالهٔ زیر تحقیق در قوانین اساسی آن دسته از اعمال ذهن که استدلال به کمک آنها انجام می‌گیرد، نمایش آنها در زبان علامتی یك حساب، و بر این مبنا، تأسیس علم منطق و بنای روش آن؛ تنظیم این روش به عنوان مبنای روش عمومی‌ای در کاربرد اصول ریاضی احتمالات؛ و بالاخره، جمع بعضی از دلالات محتمل مربوط به طبیعت و ساخت ذهن بشری از عناصر گوناگون صدقی که طی این تحقیقات آشکار می‌شوند، است.

اما در این تحقیقات این که چه‌چیز اصل است و چه فرع خیلی روشن نیست و بناچار باید به قول پاتنم[۵] که:

> متجسس در ریاضیات باید حقیقت ریاضیات را به عنوان فرضی قبلی یا پیشینه فرض قبول کند، نه این که دنبال توضیح آن برود.

یا به گفتهٔ فرگه که:

> در حساب سروکار ما با چیزهایی نیست که... با

خارج بیگانه باشند، بلکه با چیزهایی است که مستقیماً با قوهٔ عقلی ما ارتباط دارند و برای آن چنان روشن‌اند که گویی نزدیکترین بستهٔ آن‌اند.

عمل کنیم و در این مراحل، چنان که غالب ریاضیدانها نمی‌ایستند، توقف نکنیم. در این مورد راسل به این موضوع اعتقاد داشت که ریاضیات در واقع همان منطق است. و در واقع نشان‌داد که ریاضیات عبارت است از منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها، یعنی می‌توان با صبر و حوصلهٔ کافی و تعاریفی به‌قدر کافی طولانی، هر یك از شاخه‌های ریاضیات را برحسب منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف کرد و همهٔ اثباتها را در چهارچوب حساب احتمالات انجام‌داد.

در این صورت به منطق نمادی یاعلامتی که به قول اندرتون[6] مدلی ریاضی برای تفکر قیاسی است، یا حداقل در آغاز چنین بوده، می‌پردازیم، و به تعریف منطق رومی‌آوریم، و در تعریف به صدق آن می‌گوییم که: منطق دانش بررسی ساختهای نمونهٔ صادق است، و در تعریف به استنتاج آن مطرح می‌کنیم که: منطق دانش بررسی ساختمانهای استنتاجی درست است.

منطق جدید، همان‌طور که به تفصیل ملاحظه خواهیم‌کرد، در رابطه با آنچه که به نام بحران در اصول ریاضیات نامیده‌شده، و در آغاز قرن بیستم، حضور و سرعت یافت. هرگونه کوشش در طرح سیستماتیك ریاضیات (یا هر علم دیگر) به مسألهٔ انتخاب مفاهیم اساسی(اولیه) و اصولی که کل طرح بر آن مبتنی است، منجر می‌شود. مسألهٔ انتخاب و توجیه انتخاب مفروضات اولیهٔ مزبور قاعدةً در خارج علم مربوطه قرارمی‌گیرد و به فلسفه و متدولوژی علم مربوط می‌شود.

بسیاری از اشخاص کوشیده‌اند ویژگی ریاضیات را، هم از لحاظ موضوع هم از لحاظ روش تعریف کنند. موضوع ریاضیات به‌طور مداوم افزایش می‌یابد و با نظامهای جدید غنی می‌شود، بنابراین، به‌جای این که به‌طور ساده به شمارش این نظام بپردازیم، باید طریقی در توصیف به کفایت محتویات نظریه‌های ریاضی بیابیم. در قرن نوزدهم، کوشش در مشخص کردن ریاضیات به عنوان علم کمیت انجام‌گرفت. اما امروزه باید بپذیریم که این تعریف بس محدودکننده است؛ و فی‌المثل، مفاهیم اساسی ریاضیات چون نظریهٔ گروهها یا توپولوژی را در برنمی‌گیرد. این موضوعات با ساختهای اساسی‌ای سروکار دارند که توجه ریاضیدانها به آنها، در خالص‌ترین صورت‌شان، تنها از پایان قرن گذشته به این طرف معطوف شده‌است. به این ترتیب مشخص کردن ریاضیات با موضوعش مرتب در حال تغییر است و ممکن است آنچه که امروزه موضوع آن در نظر گرفته می‌شود فردا متغیر شود. اما مطالب مربوط به روش ریاضیات در اساس همان است که دوهزار سال پیش بوده، و از ریاضیدان این انتظار می‌رود که قضایای علم خود را ثابت کند، و در این مورد رابطهٔ خوش تعریفی بین یك قضیهٔ ریاضی و قضایایی که در اثبات این قضیه به آنها رجوع می‌شود موجود است، و کار منطق بررسی این رابطه می‌باشد.

اکنون با اشاره به این که منطق را علم بررسی استدلال خوب و بد نیز دانسته‌اند؛ به آن می‌پردازیم.

مورد استعمال عبارت «منطق» طی قرون متمادی به‌گونهٔ وسیعی از نویسنده‌ای به نویسنده‌ای تغییر کرده است. اما چنین به‌نظر می‌رسد که موارد استعمال گوناگون مذکور دارای این قسمت مشترك باشند که: منطقی که به صورت متداول توصیف‌شده، به طور مبهم، علم استنتاج لازم است، و تمایل فزاینده‌ای موجود است که عبارت «منطق» را به این حوزه محدود کنند.

ویژگی به گونه‌ای کمتر مبهم این حوزه، به این ترتیب است که: عبارات اسامی شامل «اگر»، «در این صورت»، «و»، «یا»، «نه»، «جزاینکه»، «بعضی»، «همه»، «هیچ»، «هر»، «آن» و غیره، که سخن را با آنها آغاز می‌کنیم، را می‌توان منطقی[7] نامید. عبارات فوق در گزاره‌های مربوط به هر موضوعی ظاهر می‌شوند، و نمونه‌ای که طبق آن سایر اجزاء خاصتر یك گزاره، طبق این عبارات اسامی به یکدیگر مربوط می‌شوند را می‌توان ساخت منطقی[8] آن گزاره‌ها خواند، به عنوان مثال، گزاره‌های:

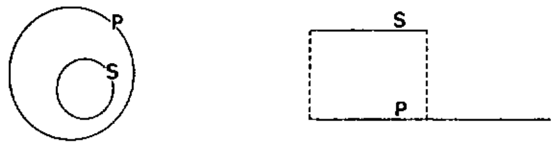
۱ ـ هر میکربی حیوان یا سبزی است،
۲ ـ هر ایرانی‌ای شیعه یا سنی است،

دارای ساخت منطقی یکسانند. در این صورت منطق حمل ساخت منطقی برصدق و کذب را بررسی می‌کند.

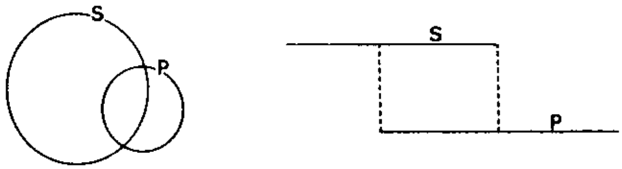
معمولاً ظهور منطق جدید را با کارهای جورج‌بول[9]

(۱۸۱۵-۱۸۶۴) در جبر منطق [۱۰] درنظر می‌گیرند، ولی ما تاریخ آن را یک قرن زودتر و با فیلسوف و ریاضیدان آلمانی، گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتز [۱۱] (۱۶۴۶-۱۷۱۶) آغاز می‌کنیم.

لایب‌نیتز احتمالاً نخستین ریاضیدانی بود که مفهوم منطق را مورد توجه قرارداد. شهرت اصلی این ریاضیدان برجسته برای کارهای خلاقش در حساب جامع و فاضل است، گرچه طراح یک زبان علامتی بین‌المللی نیز بوده‌است. این دانشمند در کوششهایی که برای علامتی‌کردن استدلالات منطقی در عبارات جبری به عمل‌آورد بر بول مقدم بود. اما آثارش در این مورد از آنجاکه تا سال ۱۹۰۳ به چاپ نرسید، کم‌اثر یا بی‌اثر بودند. لایب‌نیتز به نمایش هندسی قیاسات نیز توجه داشت و اولین کسی بود که آنچه راکه امروز به عنوان نمودارهای ون می‌شناسیم (۲۰۰ سال قبل از ون) به‌کاربرد، و همراه با نمودارهای (مجموعه‌ای) دایروی از نمودارهای خطی نیز، از آنجاکه آنها را برای به‌کارگرفتن آسانتر می‌پنداشت، استفاده کرد. دو مثال زیر مفهوم کلی این موضوع را به دست می‌دهند.



تمام S ها P اند



بعضی S ها P اند

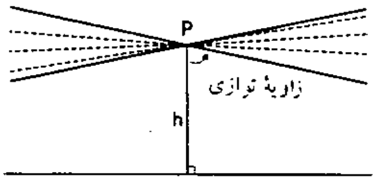
در این مورد لئونارد اولر [۱۲] (۱۷۰۷-۱۷۸۳) سوئیسی و جان‌ون [۱۳] (۱۸۳۴-۱۹۲۳) و بالاخره چارلز داج‌سون [۱۴] (۱۸۳۲-۱۸۹۸) که دوایر ون را در مستطیل (یا مربع)ی نمایش دهندهٔ عالم مقال * (مجموعهٔ جهانی) قرار، و به این ترتیب نمودار ون را به طریقی که امروزه آن را به کارمی‌بریم به دستمان دادند، سهمی دارند.

اصل توازی [۱۵] اقلیدس را می‌شناسیم. طی قرون متمادی کوششهای بسیاری برای اثبات این اصل (یا اصول معادل آن) با استفاده از تعریفات، اصول موضوعه، و اصول متعارفی، گرچه بدون موفقیت، به عمل آمد. با این همه اصل مزبور همواره به عنوان حقیقتی بدیهی [۱۶] درنظر گرفته‌می‌شد، تا اینکه نیکلای لباچفسکی [۱۷] (۱۷۹۳-۱۸۵۶)، ریاضیدان روسی، با تغییر این اصل، هندسه‌ای غیراقلیدسی کشف و جزئیات آن را منتشر کرد.

در هندسهٔ لباچفسکی به جای توازی اقلیدسی اصل زیر قرار دارد:

از یک نقطه خارج یک خط معلوم می‌توان بی‌نهایت خط موازی با آن خط معلوم رسم کرد.

در این مورد نمودار زیر را درنظر می‌گیریم:



(از تفسیر اقلیدسی این نمودار خودداری کنید.) در این شکل خطوط گذرنده از P به دو طبقه تقسیم شده‌اند، طبقهٔ اول آنهاکه خط معلوم را قطع می‌کنند، و طبقهٔ دوم آنهاکه آن را قطع نمی‌کنند، و دو خطی که مرز بین طبقات را تشکیل می‌دهند، با عمود مرسوم از P به خط، زاویه‌ای حاده؛ که معروف به زاویهٔ توازی است، و مقدار واقعی آن به ارتفاع h نقطهٔ Pی بالای خط معلوم بستگی دارد، می‌سازند. این زاویه هنگامی که h زیاد می‌شود به ۰، و زمانی که کم می‌شود به °۹۰ میل می‌کند.

خاصیت جالب هندسهٔ لباچفسکی در این است که این هندسه مقیاس مطلق فاصله، یعنی مقیاسی که به انتخاب واحد (مثل متر و

* اصطلاح را از این بیت حافظ گرفته‌ایم:
من که ملول گشتمی ازنفس فرشتگان   قال و مقال عالمی می‌کشم از برای تو

یارد) بستگی ندارد، را به دست می‌دهد. و این بدین علت است که فاصلهٔ (ارتفاع) h به تمامی برحسب زاویه، یک کمیت بدون بعد، اندازه‌گیری می‌شود. نتیجهٔ دیگر اصل لباچفسکی این است که مجموع زوایای داخلی هر مثلث از دو قائمه کمتر است، اما همچنان که سطح مثلث به صفر میل می‌کند به مقدار اقلیدسی مایل می‌شود. از آنجاکه در این هندسه، فاصله تنها به زوایا بستگی دارد، مثلثهای متساوی‌الزوایا لزوماً دارای یک سطح‌اند و قضایای تشابه اقلیدسی بی‌معنی می‌شوند.

مثال دیگری از هندسهٔ نا اقلیدسی دیگر، توسط برنهارد ـ ریمان[18] (۱۸۲۶ـ۱۸۶۶) داده‌شد. این ریاضیدان طی یک دوره سخنرانی معروف در دانشگاه گوتینگن[19] در سال ۱۸۴۵ هندسه‌ای را مطرح کرد که در آن از یک نقطهٔ خارج یک خط معلوم هیچ خطی را نمی‌توان موازی آن خط رسم کرد. در هندسهٔ ریمان مجموع زوایای داخلی هر مثلث بیش از دو قائمه است، اما همچنان که ساحت مثلث به صفر میل می‌کند، به مقدار اقلیدسی مایل می‌شود.

هر دو هندسهٔ غیر اقلیدسی فوق، دستگاههایی کاملاً سازگارند، گرچه شهودمان بر این است که، به این مفهوم، که چنین به‌نظر می‌رسد که دنیای فیزیکی اطرافمان برمقیاس کوچکی که می‌توانیم آن را اندازه بگیریم اقلیدسی است، راست نیستند. اما شهودها به‌هیچ‌وجه همیشه راهنمایی قابل اعتماد نیستند. و در این مورد باید قبل از اینکه هندسه‌های دیگر را کنار بگذاریم احتیاط کرده به خاطر بیاوریم که هندسهٔ اقلیدسی نیز بر تعاریف اشیایی بناشده که در دنیای فیزیکی مانندی ندارند، و به عنوان نمونه، نقطه به صورت «چیزی که جزء ندارد» تعریف شده‌است. نیز باید این را به خاطر داشته‌باشیم که تئوری نسبیت [20] اینشتین که یکی از صورتهای تعمیم یافتهٔ هندسهٔ ریمانی است در فضای فیزیکی راست است.

اکنون به جورج بول، که پیش از این نامش را ذکر کردیم، و کارش، راجع به جبر منطق، که با آن نام آگوستوس دومورگان[21] (۱۸۰۶ـ۱۸۷۱)، نیز مربوط است و هر دو آنها کارشان را در سال ۱۸۴۷ انتشار دادند، بازمی‌گردیم.

بول در ابتدا با توسعهٔ جبرمنطق سروکار داشت، و با به‌کار بردن صورتی از جبر، که با جبرمعمولی تفاوت داشت، دریافت که امکان دارد که نظریهٔ کامل قیاس را استنتاج کند و در حقیقت توانست خطاهای نظریهٔ ارسطو را، که به مدت ۲۰۰۰ سال کشف نشده باقی‌مانده بود، مورد بحث قراردهد. اما آنچه که امروزه به نام جبربول[22] معروف است، در واقع، توسعهٔ بعدی جبری است که توسط بول مطرح شده‌است. توسعهٔ مذکور کار ارنست شرودر[23] (۱۸۴۱ ـ ۱۹۰۲)، منطقی بود، که کارش را با دستگاه بول آغاز کرد، اما بعد آن را برای مقابله با مشکلات خاصی که در تعبیر، به خصوص تعبیر جمع منطقی[24] رخ می‌داد، تعدیل کرد.

بول به این مطلب توجه‌کرد که ارسطو در کار خود به طبقات[25] اشیاء نظر داشته‌است، زیراگزارهٔ

تمام انسانها میرا هستند.

بدین معنی است که طبقهٔ تمام انسانها زیر طبقهٔ[26] تمام موجودات میراست. به این ترتیب، زیر طبقهٔ اعضای طبقهٔ x، که اعضای طبقهٔ y نیز هستند، را با xy، ضرب منطقی[27]، نمایش داد، و طبقهٔ تمام اشیایی که به طبقهٔ x تعلق نداشتند را با $1-x$ نشان داد. و طبقهٔ تمام اشیای متعلق به طبقهٔ x یا طبقهٔ y، با فرض اینکه x و y عضو مشترک ندارند، را با $x+y$، جمع منطقی، نمایش داد. برای نمایش‌دادن اینکه طبقهٔ x تهی است (یعنی، عضو ندارد)، $x=0$، و برای نمایش دادن اینکه طبقات x و y یکسان‌اند، $x=y$ نوشت. به این ترتیب اثبات روابط زیرکاری نسبتاً آسان است:

$$xy=yx$$
$$x+y=y+x$$
$$(xy)z=x(yz)$$
$$(x+y)+z=x+(y+z)$$
$$x(y+z)=xy+xz$$

تمام این روابط با روابط آشنا در جبر معمولی متناظرند، اما برخلاف جبر معمولی، این رابطه نیز نتیجه می‌شود که

$$xx=x$$
$$(x+y)(x+z)=x+yz$$

اما در مورد جمع منطقی مزبور، زمانی که x و y اعضای مشترکی داشتند، مشکلی بروز کرد. در این مورد بول طی مسأله‌ای استفاده از

$$x+y$$

را مجاز ساخت، اما، از آنجا که این موضوع، در چنین حالاتی، «صورت نامعبری[۲۸]» بود، لازم دانست که مطلب مزبور در پاسخ نهایی خود به‌طور مناسبی باز- حل شود. بنابراین، در دستگاه بول، عبارت

$$x+x=x$$

از آنجا که سمت راست آن از لحاظ او نامعبر است، یافت نمی‌شود.

اکنون می‌توانیم مثالی چند از موارد استعمال دستگاه علامتی بول به‌دست دهیم. به عنوان نمونه، اگر

x طبقهٔ اشیای سخت باشد،

y طبقهٔ اشیای کش‌دار باشد،

و

z طبقهٔ اشیای فلزی باشد،

در این صورت

xz طبقهٔ اشیای سخت فلزی را نشان می‌دهد،

و

$z(1-y)$ طبقهٔ اشیای ناکش‌دار فلزی را نمایش می‌دهد.

باز به عنوان مثال، چهار قضیهٔ اساسی ارسطو را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

تمام S ها P است	با	$s(1-p)=0$
هیچ S ی P نیست	با	$sp=0$
بعضی S ها P اند	با	$sp\neq 0$
بعضی S ها P نیستند	با	$s(1-p)\neq 0$

(حروف کوچک s و p به عنوان علایم متناظر با طبقات S، P در منطق ارسطو به کار رفته‌اند.)

در منطق ارسطو، قیاس:

اگر هر M ی P باشد
و هر M ی S باشد
در این صورت بعضی S ها P اند.

درست درنظر گرفته می‌شود، اما، چون دو مقدمهٔ آن را در دستگاه علامتی بول به ترتیب به صورت

$$m(1-p)=0$$

و

$$m(1-s)=0$$

قراردهیم، آشکار می‌شود که لزوماً چیزی در مورد S و P نتیجه نمی‌شود، زیرا معادلات مزبور به ازای $m=0$، و به عبارت دیگر چون M طبقه‌ای تهی باشد، برقرارند. به همین ترتیب، قیاس ارسطویی:

اگر هیچ M ی P نباشد،
و تمام M ها S باشد،
در این صورت، بعضی S ها P نیستند.

که آن نیز به صورت درست درنظر گرفته می‌شد، به طور مساوی با تهی‌بودن M برقرار می‌شود. اما، درستی صورت ضعیف‌تر اولین این دو قیاس، یعنی

اگر بعضی M ها P باشند،
و تمام M ها S باشند،
در این صورت، بعضی S ها P اند.

توسط بول نشان‌داده‌شده، زیرا از

$$mp \neq ۰$$
$$m(۱-s) = ۰$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$sp \neq ۰$$

بول توجه خود را به طبقات و نظریهٔ قیاس معطوف کرد، اما معاصر او دومورگان به طور وسیعی با طبقات و نسب[۲۹] بین طبقات سروکار داشت. در واقع بسیاری از نتایجی که این دو به دست آوردند یکسان بودند. این نتایج، با ادراکاتی که امروزه از این مسأله داریم به هیچ‌وجه قابل توجه نیستند، گرچه چنین به‌نظر می‌رسد که در روزگار خودشان نیز وضع بدین منوال بوده‌است.

نام دومورگان امروزه با قوانین تَمیم[۳۰]

$$\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$$
$$\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$$

همراه است، اما این قوانین و بسیاری از روابط دیگر بین طبقات در دوران مدرسی*[۳۱] مشخص بوده‌اند و صرفاً توسط دومورگان برحسب جبر طبقات[۳۲] صوری بازگویی شده‌اند.

همانطور که ملاحظه کردیم بول و دومورگان در اصل به بیان قوانین قبلاً مشخص‌شدهٔ استدلال و طبقه‌بندی، برحسب جبر علامتی می‌پرداختند، و مؤسس واقعی آنچه که امروزه به منطق ریاضی معروف است گوتلب فرگه[۳۳] (۱۸۴۸-۱۹۲۵) است. و نه تنها در حساب گزاره‌ها[۳۴]، بلکه برای کاربرد کامل سورهای عمومی و وجودی[۳۵] در ریاضیات، و تحلیل منطقی روش مهم اثبات با استقرای ریاضی[۳۶] به او مدیونیم. مقصود اصلی فرگه بنای حساب، تنها بر منطق بود؛ یعنی این هدف که درحساب، گزاره‌هایی در مورد حقایق تجربی موجود نباشد، و در این راه در واقع از رؤیای زبان علامتی جهانی[۳۷] لایب نیتز پیروی می‌کرد. و روش برخوردش، چون روش اقلیدس، آکسیوماتیک بود، و بر تمایز بین مقدمات[۳۸] (که می‌توانند به صورت علامتی نمایش داده‌شوند) و قواعد استنتاج[۳۹] (که در صورتی که شخص محدود به علایم مقدمات مزبور باشد نمی‌توانند به صورت علامتی نوشته‌شوند) تأکید می‌کرد.

فرگه، برخلاف بول، نتوانست کار علامتی کردن خود را بر مبنای علایم جبری بگذارد زیرا سعی در استفاده از منطق در بنانهادن پایه‌های حساب داشت، و در نتیجه مجبور بود که از ظهور مقدماتی آنچه که جهد در استخراجش داشت خودداری کند. سهم بزرگ او در دقت استثنایی روش علمی‌اش در کوشش در بنانهادن پایه‌های ریاضیات، قراردارد.

به مفهومی بس حقیقی، بول، دومورگان و شرودر در پایان مسیر درازی که مستقیماً به ارسطو بازمی‌گردد، ایستاده‌اند، در حالی که فرگه در آغاز راه تازه‌ای در منطق که همچنان ادامه‌دارد، و خطوط مهیجی در تحقیق را به دست می‌دهد، قرارگرفته‌است.

در این مرحله، لازم می‌نماید که به عقب برگردیم و دو بحران ریاضیات را، که یکی از آنها هنوز هم به مقدار وسیعی لاینحل مانده‌است، مورد بررسی قراردهیم.

در قرون هفدهم و هجدهم، ریاضیدانها تحت تأثیر قدرت حساب دیفرانسیل و انتگرال، بسیاری از مسائلی راکه تا آن زمان بسیار مشکل بودند، حل کردند. در انجام این کار، آنان هیچ‌گاه در مورد صحت روشهاشان نگران نبودند، و بعضی از کارهاشان را می‌توان، حداقل، به عنوان بی‌قید توصیف کرد. فی‌المثل، اولر در آثارش سری متباعدی چون

$$۱-۱+۱-۱+۱-...$$

که جمع آن را با بیان آن به صورت

$$۱-x+x^۲-x^۳+...$$

و قراردادن $x=۱$ به دست‌آورد، به کارگرفت، و با دریافتن اینکه این سری (که تصاعدی هندسی است) دارای مجموع حدی

$$\frac{۱}{۱+x}$$

به ازای $x<۱$، است، نتیجه گرفت که مجموع سری اصلی $\frac{۱}{۲}$ است. روش اولر، اما، لزوماً جوابهای سازگار به دست نمی‌دهد. به عنوان

* قرون وسطی

مثال، مورد زیر را درنظر می‌گیریم

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^3}$$

$$= (1-x^2)(1+x^3+x^6+\ldots)$$

$$= 1-x^2+x^3-x^5+x^6-\ldots$$

که چون $x=1$ را در آن قراردهیم باردیگر سری
$1-1+1-1+1-\ldots$
را به دست می‌آوریم، اما این‌بار حیلهٔ اولر

$$\frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

را به عنوان جمع حدی آن به دست‌می‌دهد.

بحران فوق که از کاربرد بی‌احتیاط روشهای حدی سرچشمه می‌گیرد توسط آگوستین‌لویی‌کوشی[۴۰]، (۱۸۵۷-۱۷۸۹) که نشان داد که چگونه می‌توان کاربرد به احتیاط نظریهٔ حدود را به جای روشهای بی‌قید اولر قرارداد، برطرف شد. از پس این بحران، مسألهٔ بسیار مشکل‌تر دیگری به وجودآمد.

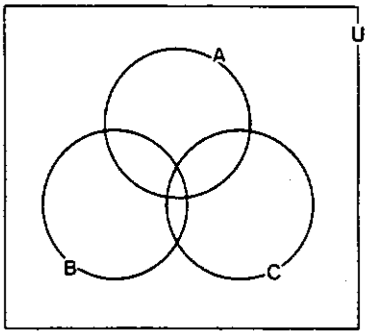
در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم نشان‌داده‌شد که بیشتر ریاضیاتی که تا آن زمان شناخته‌شده‌بود، می‌تواند به دستگاهی بناشده از حساب اعداد صحیح مثبت تحویل شود. اما طنزدر اینجاست که‌این موضوع نه تنهاصحت و ایقان ریاضیات را بنا نکرد بلکه چاهی، که برگرد آن بسیاری از مطالب ریاضیات بناشده‌بود، را نیز آشکارکرد. در گسترش دستگاههای پیچیده‌تر از حساب مقدماتی، به‌نظریهٔ مجموعه‌هایی نیاز است، و نه صرفاً نظریهٔ مجموعه‌های اعداد صحیح، بلکه نظریه‌ای که مفهوم مجموعهٔ مجموعه‌ها، مجموعهٔ مجموعه‌های مجموعه‌ها و غیره را دربرگیرد.

خالق نظریهٔ مجموعه‌ها[۴۱] جورج‌کانتور[۴۲]، (۱۹۱۸-۱۸۴۵) بود. او چنین مطرح کرد که کلمهٔ نامتناهی[۴۳] در ریاضیات دارای دو معنی است. اول، می‌تواند به جای مقداری که ماورای هرحد مشخصی افزایش می‌یابد قرارگیرد، و کانتور آن راکه توسط علامت اکنون آشنای ∞ نمایش داده‌شده نامتناهی ناتمام[۴۴] نام‌نهاد. معنی دوم را می‌توان با درنظرگرفتن یک خط متناهی[۴۵] به عنوان مجموعهٔ ناستاهی‌ای از نقاط توضیح‌داد.

به علت اینکه خط مورد بحث متناهی است، دریافتی وجوددارد که در آن می‌توانیم از این مجموعه به عنوان نامتناهی تمام[۴۶] یادکنیم* (خط مزبور می‌تواند در تمامیت خود با وجود اینکه شامل بی‌نهایت نقطه است رسم‌شود، اما یک مقدار افزایش یابنده نمی‌تواند با هیچ شکل کاملی نمایش داده‌شود).

تعریف کانتور از مجموعه به عنوان «دسته‌ای اشیای معین و جدا از هم»، تا وقتی که تنها به بررسی تعداد متناهی‌ای از اشیا می‌پردازیم به اشکالی برخورد نمی‌کند. اما مشکل در ارتباط با مجموعه‌های نامتناهی، و، به خصوص، با مجموعهٔ جمیع مجموعه‌ها[۴۷] پدیدار می‌شود.

کانتور دو مجموعه را معادل یا هم‌ارز[۴۸] نامید در صورتی‌که بتوانند در تناظری یک به یک[۴۹] قرار گیرند؛ به این ترتیب مجموعه‌های {a, b, c, d, e} و {۱،۲،۳،۴،۵} معادل‌اند، زیرا



* این بحث یادآور این مطلب از گلشن راز شیخ محمود شبستری است که در پاسخ شخصی که از او سؤال می‌کند که:

مسافر چون بود رهرو کدام است — که را گویم که او مرد تمام است، می‌گوید:

بود مرد تمام آن کز تمامی — کند با خواجگی کار غلامی

فی‌المثل، تناظر:

a ↔ ۱
b ↔ ۲
c ↔ ۳
d ↔ ۴
e ↔ ۵

را داریم. واضح است که مجموعه‌های معادل باید تعداد عضوهای یکسان[۵۰] داشته‌باشند، و تا وقتی که کار خود را محدود به مجموعه‌های متناهی کرده‌ایم پارادوکسی حاصل نمی‌شود. اکنون مجموعهٔ اعداد صحیح زوج مثبت، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ جمیع اعداد صحیح مثبت، را درنظر می‌گیریم. این مجموعه را می‌توان در تناظر یك‌به‌یک با مجموعهٔ جمیع اعداد صحیح مثبت، فی‌المثل:

۲ ↔ ۱
۴ ↔ ۲
۶ ↔ ۳
۸ ↔ ۴

و در حالت کلی،

$2n \leftrightarrow n$

قرارداد. به این ترتیب درست به اندازهٔ اعداد صحیح زوج مثبت عدد صحیح مثبت موجود است. مثالهای بسیاری از چنین مجموعه‌هایی که تعداد اعضایی برابر تعداد اعضای زیرمجموعهٔ واقعی‌ای از خود دارند موجودند، اما در هر یک از چنین حالاتی تعداد اعضا نامتناهی است.

در این صورت بر سر اصل متعارف اقلیدس:

«کل چیزی بزرگتر از جزء آن چیز است»

چه می‌آید؟ این اصل به‌طور واضح در مورد مجموعه‌های نامتناهی برقرار نیست. در واقع، می‌توانیم، مجموعهٔ متناهی[۵۱] را به عنوان مجموعه‌ای که نمی‌تواند با زیرمجموعهٔ واقعی خود معادل باشد، و مجموعهٔ نامتناهی[۵۲] را به صورت مجموعه‌ای که می‌تواند، تعریف کنیم. با این همه نباید تصور کنیم که با نظریهٔ مجموعه‌های کانتور، جمیع مسائل و پارادوکسهای مطرح‌شده حل شده‌اند.

برای مشخص‌کردن اینکه چنین نیست، به ذکر تنها یکی از مشکلات نظریهٔ کانتور می‌پردازیم.

اگر مجموعه‌هایی راکه شامل خودشان نیستند نرمال[۵۳]، و آنهایی راکه شامل خودشان هستند (چون مجموعهٔ جمیع مجموعه‌ها) آنرمال[۵۴] بنامیم، در این صورت می‌توانیم این مسأله راکه آیا مجموعهٔ جمیع مجموعه‌های نرمال، نرمال است یا آنرمال، مطرح کنیم. فرض می‌کنیم نرمال باشد. در این صورت بنابه تعریف شامل خودش نیست. اما به عنوان مجموعهٔ جمیع مجموعه‌های نرمال، شامل خودش است. اکنون فرض می‌کنیم آنرمال است. در این صورت شامل خودش هست، و بنابراین باید نرمال باشد. به این ترتیب در هر یک از دو حالت به تناقض می‌رسیم. (این پارادوکس خاص به نام برتراندراسل[۵۵] (۱۸۷۲ ـ ۱۹۷۰)، فیلسوف انگلیسی، که آن را کشف کرد، معروف است.) صورتهای معروف بسیاری از این پارادوکس در دست است، و یکی از آنها صورت زیر می‌باشد:

> در دهکده‌ای، آرایشگر دهکده صورت کسانی و تنها کسانی را که خودشان را اصلاح نمی‌کنند اصلاح می‌کند. آیا بنابراین، آرایشگر مزبور صورت خودش را اصلاح می‌کند؟

فرض می‌کنیم که آرایشگر خودش صورت خود را اصلاح کند. در این صورت نتیجه‌می‌شود که چنین نمی‌کند، زیرا تنها کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند. اکنون فرض می‌کنیم صورت خود را اصلاح نمی‌کند. در این صورت، صورت خود را اصلاح می‌کند. زیرا او تمام کسانی راکه صورت خود را اصلاح نمی‌کنند اصلاح می‌کند: می‌توان به‌طور ساده از پارادوکس عامه‌پسند راسل با گرفتن این نتیجه که نتیجهٔ مزبور ثابت می‌کند که اصول موضوعه‌مان دروغ‌اند، یعنی، چنین آرایشگری نمی‌تواند وجود داشته‌باشد، خلاص شویم. اما، مجموعه‌های نرمال و آنرمال وجوددارند، بنابراین مسیر برخورد با پارادوکس راسل روشن نیست، گرچه باید یا اشتباهی در استدلال یا سستی‌ای در تعاریف آن موجود باشد.

کار فرگه، که آن را به اختصار مورد بحث قراردادیم، شدیداً بر

راسل که به اتفاق آلفردنورث وایتهد[۵۶] (۱۸۶۱-۱۹۴۷) کتاب سه‌جلدی اصول ریاضیات[۵۷] را تهیه کرد، اثر گذاشت. راسل و وایتهد هوشیارانه از اصول کلی فرگه تبعیت کردند اما تغییراتی را در علامت‌نویسی و اصطلاحات او به وجودآوردند. در اینجا به بحث در تغییرات مزبور نمی‌پردازیم؛ و به طریقی که آنها برای اجتناب از مشکل پارادوکس راسل مطابق آن مطرح شدند، توجه می‌کنیم.

کار را با به دست‌دادن تعریفی از عدد ۱، که، در واقع، تعبیری از آنچه راسل و وایتهد در نماد جدید:

$$۱=\{X: \sim(X=\phi) \text{ و } y\in X \wedge z\in X \Rightarrow y=z\}$$

بیان کرده‌اند، است، آغاز می‌کنیم. این نماد را به صورت زیر می‌خوانیم:

«عدد یک مجموعهٔ اشیای X و چنان است که هیچ X ی تهی نیست، و چنان که اگر y و z هر دو به یك X متعلق باشند، در این صورت y و z یکی باشند.»

دراین مورد به خصوص توجه داشته‌باشید که هر X باید خود یک مجموعه‌باشد (زیرا چیزی در مورد اعضای X ، نیز اینکه هیچ Xی تهی نیست گفته‌ایم)، و در نتیجه ۱ به صورت مجموعهٔ مجموعه‌ها تعریف شده‌است. در واقع، ۱ به‌طور ساده به صورت مجموعهٔ جمیع مجموعه‌های دارای یک عضو منفرد تعریف شده‌است. ممکن است تعریف فوق در نگاه اول تعریفی به گونه‌ای پیچیده به‌نظر برسد، اما در واقع چنین نیست، چه با روشی که در زندگی روزمره‌مان، طبق آن، با اعداد آشنا شده‌ایم، به خوبی موافقت دارد. تهیهٔ چنین تعریفی دستاوردی بزرگ بود، زیرا قبلاً تصور می‌رفت که اعداد صحیح و مثبت، چیزهایی که دیگر نمی‌توانند مورد تحلیل قرارگیرند، هستند. لئوپلدکرونکر[۵۸] (۱۸۲۳-۱۸۹۱) این جملهٔ معروف را خاطرنشان کرده‌بود که:

خداوند اعداد صحیح را آفرید، مابقی اثر انسان است*.

اما حتی تعریف فوق نیز خالی از اشکال نیست، زیرا برحسب نظریهٔ مجموعه‌ها اداشده، اما این نظریه نمی‌تواند نظریهٔ مجموعه‌های کانتور باشد زیرا مورد اخیر شامل همان پارادوکسی است که تعریف مورد بحث برای اجتناب از آن طرح شده‌است. وایتهد و راسل به این تشخیص رسیدند که علت اصلی مشکل مورد بحث در مجاز شمردن تعلق هرچیز به خودش قراردارد، و لذا نظریهٔ انواع[۵۹] را مطرح کردند. به این ترتیب گفته‌می‌شود که:

افراد[۱۵] از نوع ۰ اند،
مجموعهٔ افراد از نوع ۱ اند،
مجموعه اشیای نوع ۱ از نوع ۲ اند، و غیره.

عباراتی چون

$$y\in X$$

تنها اگر X از نوعی دقیقاً یکی بیشتر از y باشد، مجازند. این موضوع از مشکلات پارادوکس راسل جلو می‌گیرد، اما اینکه در مورد آن مشکلات دیگری ظهور می‌کنند یا خیر آشکار نیست.

با بازگشت به تعریف عدد ۱ به عنوان مجموعهٔ مجموعه‌ها، و پذیرفتن نظریهٔ انواع، درمی‌یابیم که مسألهٔ جدی‌ای داریم: y ، z باید از یک نوع باشند، و بنابراین X باید از نوع بالاتری باشد. به‌طور واضح ، ۱ به عنوان مجموعهٔ Xها باز هم باید از نوع یکی بالاتری باشد. مطابق با انتخاب‌مان در مورد yها و zها می‌توانیم اعداد از نوع ۲، ۳، ۴، و غیره را انتخاب کنیم، اما این به‌هیچ‌وجه آنچه که مقصودمان بود نیست. اینکه بکوشیم که ۱ از نوع (مثلاً) ۲ را به ۱ از نوع ۳ بیفزاییم چه معنی دارد؟ مقصودمان از ابتدا تعریف یک عدد ۱ منحصربه‌فرد بود.

* Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd.2, page 19.

وایتهد و راسل تصمیم گرفتند بامعرفی آنچه که آن را آکسیوم تحویل‌پذیری[۶۱] نامیدند، خود را از این مخمصه خلاص کنند. این آکسیوم (به‌طور تقریبی) به این معنی است که اگر شیء ریاضی‌ای از نوع معینی را تعریف کردیم، می‌توانیم وجود اشیای از هر نوع دیگر متناظر با آن را بینگاریم. مقصود کلی موضوع اخیر را می‌توانیم به صورت زیر درنظر بگیریم:

انواع اگرچه گاهی اهمیت پیدا می‌کنند،
می‌توان اغلب اوقات از آنها چشم پوشید.

به‌طور وضوح، یک چنین فرضی امکان وقوع ناسازگاری را بار دیگر به دست می‌دهد. ظاهراً کوشش در بنانهادن ریاضیات براساس منطق غیرقابل لرزانی، بادوام نیست. لزوم آکسیومی چون آکسیوم تحویل‌پذیری عامل مهمی در سرخوردگی ریاضیدانها از دستگاه وایتهد - راسل شد.

شکست جهد فوق در استخراج ریاضیات از منطق یکی از معضلات مهم ریاضی قرن بیستم را آشکار می‌کند؛ اما در این مورد کوششهای دیگری نیز برای روشن‌کردن مسائل جدی رخ دهنده در اساس ریاضیات انجام‌گرفته‌بود.

برخوردی کاملاً متفاوت به این مسأله از ریاضیدان هلندی ال.ای.جی.بروئر[۶۲] (۱۸۸۱ - ۱۹۶۸) بود. بروئر پیشتاز آنچه که به مکتب شهودگرای[۶۳] ریاضیدانها معروف شده، بود. شاید نام مزبور اندکی بداقبال باشد، زیرا چنین به‌نظر می‌رسد که مستلزم این باشد که در جریان اثباتهای ریاضی توسلی به شهود صورت می‌گیرد. اما در واقع، اثباتهای شهودگرایان حداقل به اندازهٔ اثباتهای ریاضیدانهای دیگر دقیق‌اند؛ و اغلب دقت منطقی بیشتری را می‌طلبند. نام مزبور از این حقیقت مشتق‌شده که شهودگرایان هرگونه کوشش در بنانهادن حساب بر دستگاه اساسی‌تری را مردود می‌شمارند، و اعداد صحیح و مثبت را به عنوان حقیقتی شهودی که به صورت مبنای مطمئنی که بناکردن بر آن انجام می‌گیرد، به کار می‌رود، درنظر می‌گیرند. در دفاع از این نظرگاه حرف بسیاری برای گفتن موجوداست.

بروئر تصور وجود[۶۴] در ریاضیات را مرادف ساخت پذیری[۶۵]، و صدق[۶۶] را مرادف اثبات‌پذیری[۶۷] درنظر می‌گرفت. بنابراین ادعای صدق یک گزارهٔ ریاضی ادعای اینکه اثباتی از آن داریم می‌شود. به همین‌ترتیب، ادعای کذب[۶۸] یک گزارهٔ ریاضی به این معنی که اثباتی داریم که اگر گزارهٔ مزبور را راست بینگاریم این پندار گرفتار تناقض‌مان می‌کند، می‌باشد. این مطلب استلزامات منطقی مهمی در بردارد.

می‌دانیم که به ازای هر گزارهٔ a

$$a \vee \sim a$$

صادق[۶۹] (یعنی a هرچه باشد راست) است. در واقع این صادق، که از دوران گذشته به عنوان قانون طرد اوسط[۷۰] معروف بوده، بر این است که یک گزارهٔ معلوم باید راست[۷۱] یا دروغ[۷۲] باشد. برای شهودگرا این مطلب به این مفهوم است که «یا اثباتی برای a داریم یا در غیراین‌صورت، این اثبات، که فرض a به تناقض می‌انجامد، در دست است»، بنابراین قانون طرد اوسط نمی‌تواند در دستگاه شهودگرایان داخل شود، زیرا این دستگاه مستلزم این است که چیزی به عنوان مسألهٔ حل‌نشده وجود ندارد. اثر مفروضات شهودگرایان این است که کل حوزه‌هایی از ریاضیات کلاسیک که در آنها اثباتهای سنتی بناشده بر مفروض

$$a \vee \sim a$$

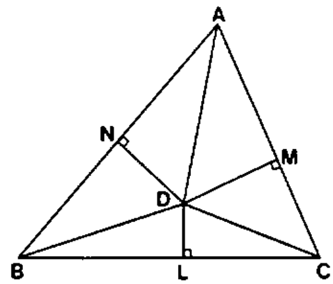
نتوانند بر سبنایی شهودگرا دوباره‌سازی شوند، باید کنار گذاشته شود. اغلب ریاضیدانها موافقت دارند که هرچیزی که در دستگاه شهودگرا ثابت شود درست است، اما عموماً چنین تصور می‌رود که شهودگرایان بیش از اندازه محتاط‌اند، و ردشان بر آن همه ریاضیات در غیر این صورت پذیرفتنی، زیانی جدی است.

اکنون به سراغ مؤسس مکتب دیگری از تفکر می‌رویم. دیویدهیلبرت[۷۳] (۱۸۶۲ - ۱۹۴۳) عقیده‌داشت که کوشش در بناکردن کل ریاضیات بر سبنای منطق بسیار جاه‌طلبانه است. برخورد او تجزیه‌کردن مسائل گوناگون به اجزا و خرد خرد به آنها پرداختن است. نخست، مسألهٔ صدق و کذب، که همواره باعث مشکلات فلسفی شده‌بود، باید به کناری نهاده می‌شد، و تمرکز بر سازگاری[۷۴] و تمامیت[۷۵] مجموعه‌های آکسیومها قرارمی‌گرفت. سازگاری در این

زمینه مستلزم این است که در هیچ دستگاهی شخص نمی‌تواند یک مطلب و نقیض همان مطلب را اثبات کند. و تمامیت به این معنی است که آکسیومهای کافی، برای این که جمیع نتایجی که باید (به مفهومی) استنتاج‌پذیر باشند بتوانند استنتاج شوند، داده‌شده‌باشد.

یکی از دستاوردهای اولیهٔ هیلبرت تنظیم مجموعهٔ کامل آکسیومهای هندسهٔ اقلیدسی بود. اثبات اقلیدسی زیر را درنظر می‌گیریم:

فرض می‌کنیم ABC مثلث دلخواهی باشد:



و فرض می‌کنیم نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف BC در D تلاقی کنند. عمودهای DN،DM را به ترتیب بر AB،AC فرود می‌آوریم. DC ، DB را وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم L وسط BC باشد. اکنون از آنجا که $BL=LC$، DL مشترك است، و $\angle BLD=\angle CLD=90^\circ$، مثلثهای BLD،CLD همنهشت‌اند، و بنابراین $BD=CD$ است. از آنجا که زوایای NAD و MAD ساوی‌اند، $\angle AND=\angle AMD=90^\circ$ و AD مشترك است، مثلثهای AND، AMD همنهشت‌اند، و بنابراین $DN=DM$، $AN=AM$ است.

از آنجا که $DN=DM$، $BD=DC$ و $\angle BND=\angle CMD=90^\circ$ است، مثلثهای BND ، CMD همنهشت‌اند، و بنابراین $NB=MC$ است. و از آنجا که

$NB=MC$ و $AN=AM$

نتیجه می‌شود که

$$AB=AC$$

بنابراین مثلث دلخواهی متساوی‌الساقین است؛ در نتیجه هر مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد

مطلب فوق آشکارا یاوه است، و با این همه اثبات آن از آکسیومهای اقلیدسی در مورد هندسه به‌دست می‌آید. اشکال در این واقعیت قراردارد که آکسیومهای اقلیدسی ناتمام[۷۶] اند و نیاز به این دارند که با آکسیومهای برخورد*[۷۷] که بیان‌کنندهٔ این مطلب‌اند که چون خطوطی به طریق معینی رسم شوند، در قسمت معینی از صفحه برخورد می‌کنند، تکمیل شوند. (طریقی که شکل را رسم کرده‌ایم مفروض است و در نتیجه بیان می‌کند که D داخل مثلث واقع می‌شود که فرضی ناموجه است.)

به علت این که هیلبرت و پیروانش برساخت دستگاههای صوری، که به کمک آن توانستند هر یك از شاخه‌های مشخص ریاضیات را به طور جداگانه مورد بررسی قراردهند، متمرکز شده‌بودند، برخوردشان به عنوان صورت‌گرایی[۷۸] شناخته، و برنامه‌هاشان به خاطر قادرشدن به بررسی سازگاری و تمامیت این دستگاههای صوری، شامل ساخت زبان کلی‌تر، یا ماورای زبانی[۷۹]، که دستگاههای صوری بتوانند در آنها مورد بحث قرارگیرند، شد. و سرانجام، نشان داده‌شد که سازگاری دستگاههای صوری به سازگاری حساب مقدماتی وابسته است.

متأسفانه، برنامهٔ هیلبرت نیز مانند سایر برنامه‌های مقدم برآن، سرانجام به مانعی جدی برخورد کرد. و این زمانی اتفاق افتاد که در ۱۹۳۰ کورت‌گودل[۸۰] (۱۹۰۶...) نتایج خود را در مورد قضایای تردیدآمیز دستگاه صوری اعلام کرد.

گودل نشان داد که در هر دستگاهی که در بیان حساب مقدماتی به قدرکافی «غنی» باشد، یا گزاره‌های اثبات شده‌ای که دروغ‌اند، یا گزاره‌های اثبات نشدنی‌ای که راست‌اند، و در آنها باید به دروغ و راست تعبیری مطابق دستگاه مورد بررسی داده‌شود، وجوددارند. این نتیجه احتمالاً بزرگترین نتیجه در منطق جدید است. برای آگاهی‌یافتن

* وقوع، تلاقی

از اهمیت این موضوع، دستگاه صوری ساده‌ای را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

فرض می‌کنیم که کار را با دستگاه صوری‌ای شامل (مثلاً) یک یا دو علامت منطقی، تعداد کمی علایم حسابی چون ۰، ۱، +، =، و چند آکسیوم و قاعدهٔ تبدیل آغاز کنیم. می‌توان تصورکرد که جمیع گزاره‌های ممکن در چنین دستگاهی را می‌توان نوشت. اما دستگاه‌مان نباید چنان «غنی» باشد که پارادوکسهایی چون پارادوکس دروغگو*[81] را در برگیرد، یا ناسازگار باشد. اما، فرض می‌کنیم که شامل گزاره‌ای به صورت

این گزاره اثبات پذیر نیست.

باشد. گزارهٔ مزبور را S می‌نامیم.

اگر S راست باشد، در این صورت S اثبات‌پذیر نیست.
اگر S راست نباشد، در این صورت S اثبات‌پذیر است.
اگر S اثبات‌پذیر باشد، در این صورت S راست نیست.
اگر S اثبات‌پذیر نباشد، در این صورت S راست است.

بنابراین باید نتیجه بگیریم که اگر دستگاه‌مان برای دربرداشتن S به‌قدرکافی «غنی» باشد، در این صورت باید حداقل شامل یک جمله که راست است اگر و تنها اگر اثبات‌پذیر نباشد، باشد. این مشکل در جمیع دستگاههایی که برای دربرگرفتن حساب مقدماتی به‌قدر کافی «غنی»اند، رخ می‌دهد، و بنابراین در پایان نشان داده‌می‌شود که برخورد صورت گرایی نیز، درست به اندازهٔ برنامهٔ استخراج کل ریاضیات از منطق، غیرقابل دفاع است و اکنون آشکار می‌شود که هیچ‌یك از چنین دستگاههایی نمی‌تواند هم سازگار، هم تمام باشد.

در «تاریخچه»مان سعی در نشان دادن این داشتیم که چگونه ریاضیات و منطق در سرتاسر گسترشهای مربوطه‌شان به‌طور مکرر بر یکدیگر اثر گذاشته‌اند، و هر بار که تأثیر متقابل مستقیمی وجودداشته هر دو دستگاه بهره‌مند شده‌اند. بسیاری از مسائل حل‌شده، اما حل مسائل یک قرن به‌طور تغییرناپذیری مسائل دیگری را، که می‌بایست توسط منطقیون و ریاضیدانهای قرن بعد به آنها پرداخته شود، مطرح‌کرده‌است. و اکنون می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که «در چه مرحله‌ای قرارگرفته‌ایم؟» زیرا به‌نظر می‌رسد که هنوز هم پارادوکسهای حل‌نشده‌ای در اساس ریاضیات موجود باشد. و اوضاع را می‌توان احتمالاً مطابق چیزی شبیه این توصیف کرد:

اگر طالب ایقان مطلق‌ایم، در این صورت باید به محدودکردن خود به دستگاه بسیار «مختصری» چون حساب گزاره‌ها با گزاره‌هایی به تعداد متناهی، قناعت کنیم. اما، اگر مایل به لذت‌بردن از غنای مخاطرات [illegible] در استدلالهایی که مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها و اعداد مجازشان می‌شمریم [illegible] هستیم، در این صورت باید عناصری از ناامنی، و امکان روبروشدن با پارادوکسهایی که تنها سفری دورتر به اطراف و اکناف (امکاناً) حتی ناامن‌تر توان حل‌شان حاصل می‌شود، را به‌جان بپذیریم.

در پایان قولی از راسل می‌شنویم:

> حاصل نخستین و بلاواسطهٔ لحظهٔ شهود، اعتقاد به امکان نحوه‌ای از معرفتی است که می‌توان آن را مکاشفه یا الهام یا اشراق نامید، به خلاف احساس و استدلال و تجزیه وتحلیل، که ما را در وادی جهل و وهم سرگردان می‌سازند.

و به قولی از آنِ جلال‌الدین محمد مولوی گوش دل فرامی‌دهیم:

درگشاد عقده‌ها گشتی تو پیر   عقده‌ای چند دگربگشاده گیر
عقده را بگشاده گیر ای منتهی   عقده‌ای سخت است برکیسهٔ تهی
عقده‌ای کان برگلوی‌تست سخت   اینکه دانی که خسی یانیک بخت
حل این اشکال کن‌گر آدمی   خرج این دم کن اگر صاحب دمی

ومن الله‌التوفیق

*(به مقالهٔ منطق قدیم و ریاضیات در شمارهٔ ۱ مجلهٔ برهان رجوع شود.)

* این پارادوکس به صورت جدیدش چنین است: این گزاره دروغ است.

یادداشتها

1. Alonzo Church
2. Artificial Symbolic Language
3. Symbolic Logic
4. Laws of Thought
5. H. Putnam
6. Herbert B.Enderton
7.Logical
8.Logical Structure
9.George Boole
10. Algebra of Logic
11. Gottfried Wilhelm Leibniz
12. Leonhard Euler
13. John Venn
14. Charles Dodgson
15. Parallel Postulate
16. Self – evident Truth
17. Nikolai Lobachevski
18. Bernhard Riemman
19. Göttingen
20. Theory of Relativity
21. Augustus De Morgan
22. Boolean Algebra
23. Ernst Schröder
24. Logical Sum
25. Classes
26. Sub-class
27. Logical Product
28. Uninterpreted Form
29. Relations
30. Complementation Laws
31. Scholastic Times
32.Algebra of classes
33. Gottlob Frege
34. Propositional Calculus
35. Universal and Existential Quantifiers
36. Mathematical Induction
37. Universal Symbolic Language
38. Premisses
39. Rules of Inference
40. Augustin Louis Cauchy
41. Theory of Sets
42. Georg Cantor
43.Infinite
44. Improper Infinite
45. Finite
46. Completed Infinite
47. Set of all Sets
48. Equivalent
49. One-one Correspondence
50. Same number of Elements
51. Finite Set
52. Infinite Set
53. Normal
54. Abnormal
55. Bertrand Russell
56. Alfred North Whitehead
57. Principia Mathematica
58. Leopold Kroneker
59. Theory of Types
60. Individuals
61. Axiom of Reducibility
62. L.E.J. Brouwer
63. Intuitionist School
64. Existence
65. Constructibility
66. Truth
67. Provability
68. Falsehood
69. Tautology
70. Law of Excluded Middle
71. True
72. False
73. David Hilbert
74. Consistency
75. Completeness
76. Incomplete
77. Axioms of Incidence
78. Formalism
79. Metalanguage
80. Kurt Gödel
81. Liar Paradox

مراجع:

الف: فارسی

۱ـ منطق و اثبات: ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور
۲ـ خودآموز منطق ریاضی: ترجمهٔ غلامرضایاسی‌پور
۳ـ فلسفهٔ ریاضی: نظارت و مقدمهٔ حسین‌ضیایی
۴ـ فلسفهٔ ریاضی: ترجمهٔ احمدبیرشک
۵ـ منطق ریاضی چیست؟ ترجمهٔ شاپور اعتماد، غلامرضا برادران خسروشاهی
۶ـ آشنایی با منطق ریاضی: ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی، محمد رجبی طرخورانی
۷ـ منطق و عرفان: ترجمهٔ نجف دریابندری

ب: انگلیسی

1. An Investigation of the Laws of Thought, George Boole.
2. Logic, Quine
3. Logic II: Proof, prepared by the Mathematics Foundation Course Team (مرجع اصلی)
4. Logic, Copi
5. Mathematical Logic, Yu.L. Ershov, E.A. Palyutin
6. Introduction to Mathematical Logic, H. Hermes

مقدمهٔ رسالهٔ محیطیهٔ غیاث‌الدین جمشید کاشانی

ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط آگاه است[1] و اندازهٔ هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفرینندهٔ زمین و آسمانها و قراردهندهٔ نور در تاریکی است. و درود و سلام بر محمدمصطفی که مرکز دایرهٔ رسالت و محیط[2] اقطار رهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد.

اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش وی جمشید پسرمسعود پسرمحمود، طبیب کاشانی ملقب به غیاث، که خداوند احوال او را نیکوگرداند، می‌گوید: ارشمیدس ثابت کرده است که محیط (دایره) از سه برابر قطرش به اندازهٔ کمتر از $\frac{1}{7}$ و بیشتراز $\frac{10}{71}$ قطر، بزرگتر است. پس تفاوت بین این دو مقدار $\frac{1}{497}$(قطر) است. پس دایره‌ای که قطرش ۴۹۷ ذراع یا قصب[3] یا فرسنگ باشد مقدار محیطش در حدود یک ذراع یا قصب یا فرسنگ مجهول و مشکوک است و دایرهٔ عظیمه‌ای که بر کرهٔ زمین واقع باشد محیطش در حدود پنج فرسنگ مجهول است زیرا قطر آن برحسب فرسنگ تقریباً پنج برابر مقدار مذکور می‌باشد[4] و در فلک‌البروج در حدود بسیار بیش از صدهزارفرسنگ مجهول است، و این مقادیر که در محیطها (این‌اندازه) زیاد هستند در مساحت(ها) چه خواهندبود؟

از: کاشانی نامه . ابوالقاسم قربانی

۱ـ اشارهٔ لطیفی است به اسم‌بردن نسبت قطر دایره به محیط آن ($\frac{1}{\pi}$).

۲ـ از صنایع تلمیح و مراعات نظیر استفاده کرده‌است.

۳ـ احتمالاً به معنای نی است که چون ذراع واحد اندازه‌گیری بوده‌است.

۴ـ بنابراین کاشانی قطر کرهٔ زمین را تقریباً ۵،۴۹۷۰۲۴۸۵ فرسنگ محسوب داشته است.

هرروز صبح تیمور، هرمز و بهرام، قبل از صبحانه در پارك می‌دوند. بعد از یك ماه دریافتند که در این مدت تیمور بیش از آنکه از هرمز عقب بماند از او جلو زده‌است، و هرمز بیش از آنکه از بهرام عقب‌بماند از او جلو افتاده‌است.

آیا امکان دارد که بهرام بیش از آنکه از تیمور عقب مانده باشد از او جلو زده‌باشد؟

جواب: بله امکان دارد. فرض می‌کنیم سه رفیق مزبور سی‌مرتبه با این نتایج دویده‌باشند:

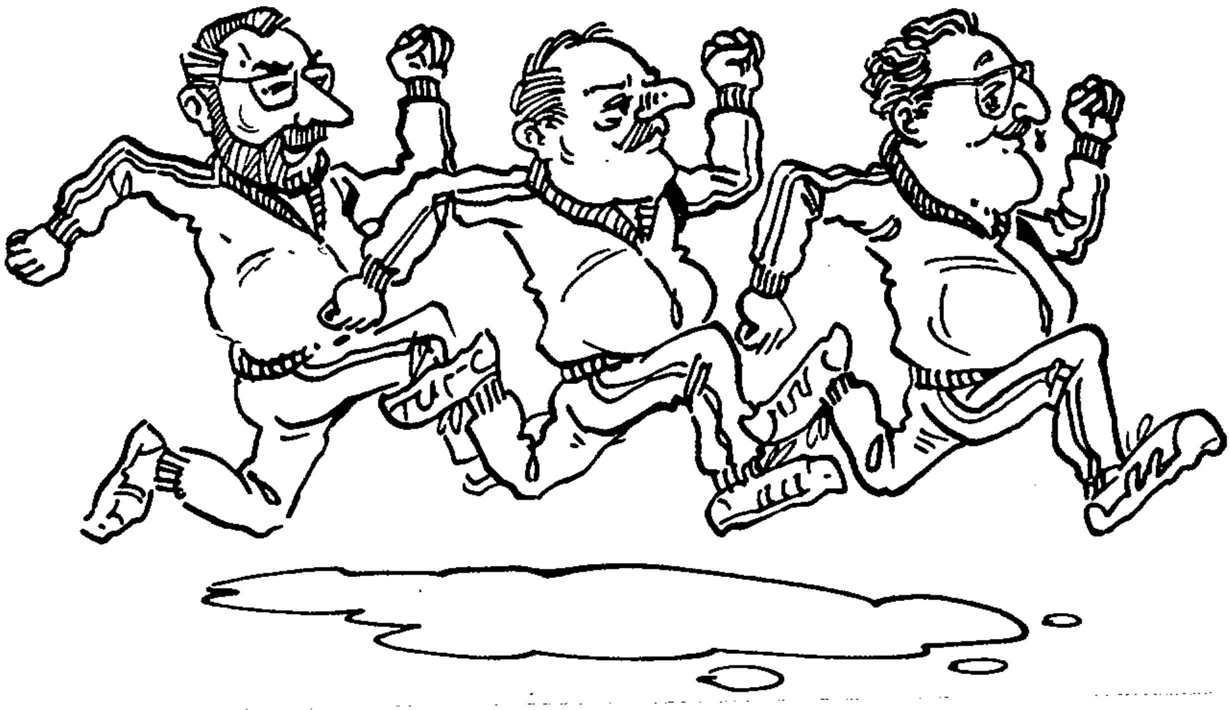
برای ده روز اول ترتیب جلوبودن: تیمور، هرمز، بهرام،

برای ده روز دوم ترتیب جلوبودن: هرمز، بهرام، تیمور،

برای ده روز آخر ترتیب جلوبودن: بهرام، تیمور، هرمز،

باشد. در این صورت: تیمور بیست‌مرتبه از سی‌مرتبه از هرمز جلوزده‌است. هرمز بیست‌مرتبه از سی‌مرتبه از بهرام جلوزده‌است. بهرام بیست‌مرتبه از سی مرتبه از تیمور جلو زده‌است.

پی‌یر برلوکوئین
بازیهای منطقی،
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور



اتحادهای مثلثاتی، نامساویهای مثلثاتی

حمیدرضا امیری

(مورد استفاده دانش‌آموزان سال دوم تجربی‌وریاضی)

۱ـ ساده‌کردن عبارتهای مثلثاتی

یادآوری و اثبات چند فرمول مهم مثلثاتی جهت‌استفاده در ساده‌کردن و اثبات اتحادهای مثلثاتی

الف) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

ب) $\boxed{1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha}$

ج) $\boxed{1+cotg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=cosec^2\alpha}$

د) $\boxed{tg^n\alpha . cotg^n\alpha=1} \Leftrightarrow tg^n\alpha=\dfrac{1}{cotg^n\alpha} \Leftrightarrow$

$cotg^n\alpha=\dfrac{1}{tg^n\alpha}\quad (n\in N)$

هـ) $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\pm 2\sin\alpha\cos\alpha$
$=1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\Longrightarrow \boxed{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha}$ &

$\boxed{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha}$

و) $\boxed{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

اثبات ← داریم $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1^2 \Longrightarrow$
$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$
$\Longrightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos 2\alpha$

ز) $\boxed{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

اثبات ← داریم $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=1^3 \Longrightarrow$
$\sin^6\alpha+3\sin^4\alpha\cos^2\alpha+3\cos^4\alpha\sin^2\alpha+\cos^6\alpha=1$
$\Longrightarrow \sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\overbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{1}=1$
$\Longrightarrow \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

ح) $\boxed{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

اثبات ← $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=$
$(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\underbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1}=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

به همان قیاس خواهیم داشت

$\boxed{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

ط) $tg\alpha + cotg\alpha = \frac{1}{sin\alpha cos\alpha}$

اثبات → $tg\alpha + cotg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} =$

$$\frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{sin\alpha cos\alpha} = \frac{1}{sin\alpha cos\alpha}$$

ساده‌کردن عبارتهای مثلثاتی و مسائل حل شده

برای ساده‌کردن عبارتهای مثلثاتی با استفاده از فرمولها و برابریهای مهم‌که اهم آنها به اثبات رسید، عبارت مثلثاتی را به ساده‌ترین صورت درآورده به‌طوری‌که ساده‌تر نشود. (درحقیقت هرگاه طرف دوم یك اتحاد مثلثاتی راکه مفصل دربارهٔ آن مطلب خواهیم گفت حذف‌کنیم عبارتی مثلثاتی به‌دست می‌آید که اگرساده شود همان طرف دوم‌حاصل می‌شود.)

مسألهٔ ۱ـ عبارت مثلثاتی زیر را ساده‌کنید.

$A = (cos x + sin x - 1)(cos x + sin x + 1)$

اتحاد مزدوج $\Longrightarrow A = (cos x + sin x)^2 - 1 =$

$(1 + 2 sin x cos x) - 1 = 2 sin x cos x$

مسألهٔ ۲ـ عبارت مثلثاتی زیر را ساده‌کنید.

$B = (sin\alpha + cos\alpha)(tg\alpha + cotg\alpha)$

$B = (sin\alpha + cos\alpha)\left(\frac{1}{sin\alpha cos\alpha}\right) = \frac{sin\alpha + cos\alpha}{sin\alpha cos\alpha} =$

$\frac{sin\alpha}{sin\alpha cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{sin\alpha cos\alpha} \Longrightarrow B = \frac{1}{cos\alpha} + \frac{1}{sin\alpha}$

تذکر: در حقیقت از تجزیه‌کسرها استفاده شده است و به‌طورکلی داریم:

$$\frac{A+B-C+D-E}{F} = \frac{A}{F} + \frac{B}{F} - \frac{C}{F} + \frac{D}{F} - \frac{E}{F}$$

مسألهٔ ۳ـ عبارت مثلثاتی زیر را ساده‌کنید:

$C = (sin\alpha + cos\alpha)\left(\frac{1}{sin\alpha} - \frac{1}{cos\alpha}\right) =$

$(sin\alpha + cos\alpha)\left(\frac{cos\alpha - sin\alpha}{sin\alpha cos\alpha}\right)$

اتحاد مزدوج $\Longrightarrow C = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{sin\alpha cos\alpha} =$

$\frac{cos^2\alpha}{sin\alpha cos\alpha} - \frac{sin^2\alpha}{sin\alpha cos\alpha} = cotg\alpha - tg\alpha$

۲ـ اتحادهای مثلثاتی

تعریف وروشهای اثبات اتحادهای مثلثاتی ومسائل‌حل شده برای هر روش.

تعریف: هر تساوی مثلثاتی بین‌چندنسبت مثلثاتی که‌به‌ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای آن همواره برقرار باشد را یك اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

برای اثبات یك اتحاد مثلثاتی به سه طریق می‌توان‌عمل نمودکه هرکدام از این روشها را پس ازتوضیح با ذکرمثالی وحل از همان روش در زیر آورده‌ایم.

روش اول: دراین روش ازیك طرف تساوی استفاده کرده وباکمك‌گیری از فرمولهای مثلثاتی و برابریهای اثبات شده‌که قبلاً آمده است به طرف دیگر تساوی می‌رسیم. لازم به تذکر است‌که اگراز طرف چپ اتحاد به‌طرف راست و یا ازسمت راست اتحاد به سمت چپ‌برسیم فرقی‌ندارد و بستگی به سلیقه و تشخیص خودمان دارد.

مسألهٔ ۴ـ اتحاد مثلثاتی زیررا ثابت‌کنید.

$\frac{cos^4 x - sin^4 x}{cos^2 x} = (1 - tg x)(1 + tg x)$

$\frac{cos^4 x - sin^4 x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x - sin^2 x}{cos^2 x} =$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1-tg^2 x=(1-tg x)(1+tg x)$$

تذکر : قبلاً ثابت کردیم :

$$\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\cos^2 x$$

روش دوم : دراین روش ازهردوطرف تساوی‌استفاده می‌شود و باکمک گیری از فرمولها و برابریهای اثبات شده ، دو طرف تساوی را ساده‌کرده تا به یك مقدار مشترك برسیم .

مسألهٔ ۵- اتحاد مثلثاتی زیر را اثبات کنید (x در ناحیه اول دایره مثلثاتی)

$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{1}{\cos x}-tg x$$

$$\text{سمت راست}=\frac{1}{\cos x}-tg x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\left|\frac{1-\sin x}{\cos x}\right|$$

$$\text{سمت چپ}=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\sqrt{\underbrace{\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}_{\text{اتحادمزدوج}}}=\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}=$$

$$\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}=\left|\frac{1-\sin x}{\cos x}\right|$$

هر دوطرف به عبارت $\frac{1-\sin x}{\cos x}$ رسید بنابـراین دو طرف با هم برابرند لذا اتحاد برقرار است .

روش سوم : دراین روش ما تساوی را برقرار فرض می‌کنیم‌ودوطرف‌تساوی راساده‌کرده‌ویامثلاً یك‌طرف‌را به‌طرف دیگر منتقل می‌کنیم تا بـه یك تساوی منطقی و همیشه درست برسیم (دراین راه از همهٔ خواص تساویها علاوه برفرمولهای مثلثاتی می‌توان استفاده کرد). به‌محض اینکه به تساوی منطقی رسیدیم همهٔ عملیات را ازتساوی منطقی‌که همیشه برقراراست به‌سمت عقب بازمی‌گردیم تا به اتحاد مثلثاتی مورد نظردست یابیم، در اینجا نه تنها اتحاد مثلثاتی ثابت شده است بلکه به دست آمده‌است.درحقیقت این‌روش(مرحلهٔ برگشت از تساوی منطقی به طـرف خود اتحاد) می‌تواند روشی بـرای ساختن اتحادهای مثلثاتی باشد.

مسألهٔ ۶- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت‌کنید:

$$\frac{\sin Z\, tg Z}{tg Z-\sin Z}=\frac{tg Z+\sin Z}{\sin Z\, tg Z}$$

فرض‌کنیم اتحاد برقرارباشد بـا طرفین وسطین واستفاده از اتحاد مـزدوج داریـم:

$$\sin^2 Z\ tg^2 Z=tg^2 Z-\sin^2 Z \iff \sin^2 Z tg^2 Z=\frac{\sin^2 Z}{\cos^2 Z}-\sin^2 Z=\frac{\sin^2 Z-\sin^2 Z\cos^2 Z}{\cos^2 Z}$$

$$\iff \sin^2 Z tg^2 Z=\frac{\sin^2 Z(1-\cos^2 Z)}{\cos^2 Z}=\frac{\sin^2 Z\sin^2 Z}{\cos^2 Z}=tg^2 Z\cdot\sin^2 Z$$

$\iff \sin^2 Z tg^2 Z=\sin^2 Z tg^2 Z$ ← تساوی منطقی

مسأله ۷- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت‌کنید:

$$\sin^2 y-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos^2 y$$

فرض‌کنیم اتحاد برقرار باشد $\Longrightarrow \sin^2 y+\cos^2 y=$
$\cos^2 x+\sin^2 x \Longrightarrow 1=1$ ← تساوی منطقی
حال‌داریم $1=1 \Longrightarrow \sin^2 y+\cos^2 y=$
$\cos^2 x-\cos^2 y$ ← اتحاد به‌دست آمد .
$\sin^2 x+\cos^2 x \Longrightarrow \sin^2 y-\sin^2 x=$
$\cos^2 x-\cos^2 y$

مسأله ۸- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت‌کنید.

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x+\cos x-\sin^2 x\cos x-\cos^2 x\sin x$$

$\sin^3 x \cos^3 x =$

$(\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x}_{1})$

$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=$

$\sin x - \sin^2 x\cos x + \cos x - \sin x\cos^2 x$

مسأله ۹- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$\cos^2 x = \operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x \cdot \cos^2 x$

سمت راست $= \operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x\cdot\cos^2 x =$

$\operatorname{cotg}^2 x(1-\cos^2 x) = \operatorname{cotg}^2 x\cdot \sin^2 x =$

$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x = \cos^2 x =$ سمت‌چپ

مسأله ۱۰- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\cos^4 x\cdot\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{cotg}^2 x}+\frac{\sin^4 x\cdot \operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

داریم: $1+\operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Longrightarrow \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 x}=\sin^2 x$

و نیز داریم: $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos^2 x$

$\Longrightarrow$ سمت چپ اتحاد $= \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 x}\cdot\cos^4 x\cdot\operatorname{cotg}^2 x$

$+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot \sin^4 x\cdot \operatorname{tg}^2 x =$

$\sin^2 x\cdot\cos^4 x\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\cos^2 x\cdot\sin^4 x\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=$

$\underbrace{\cos^6 x+\sin^6 x = 1-3\sin^2 x\cos^2 x}_{\text{قبلاً ثابت شده است}} =$ سمت راست

مسأله ۱۱- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$\sin^8 x+\cos^8 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x(2-\sin^2 x\cos^2 x)$

داریم: $(\sin^4 x-\cos^4 x)^2 = (\sin^2 x-\cos^2 x)^2$

$\Longrightarrow \sin^8 x+\cos^8 x - 2\sin^4 x\cos^4 x =$

$\sin^4 x+\cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x$

و نیز داریم: $\sin^4 x+\cos^4 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Longrightarrow \sin^8 x+\cos^8 x-2\sin^4 x\cos^4 x =$

$1-2\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$\Longrightarrow \sin^8 x+\cos^8 x = 1-4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x\cos^4 x$

$\Longrightarrow \sin^8 x+\cos^8 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x(2-\sin^2 x\cos^2 x)$

و اتحاد به‌دست آمده

مسأله ۱۲- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x$

قبلاً ثابت کردیم: $(\sin^4 x-\cos^4 x = \sin^2 x-\cos^2 x)$

سمت چپ $= \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} =$

$\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}-\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \Longrightarrow \operatorname{tg}^2 x-\operatorname{cotg}^2 x =$ سمت‌راست

مسأله ۱۳- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+1=\operatorname{cotg}^4 x$$

از اتحاد $1+\operatorname{cotg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$ استفاده می‌کنیم

سمت‌چپ $=(\frac{1}{\sin^2 x})^2 - 2\times(\frac{1}{\sin^2 x})+1=$

$(1+\operatorname{cotg}^2 x)^2-2\times(1+\operatorname{cotg}^2 x)+1$

$=1+\operatorname{cotg}^4 x+\cancel{2\operatorname{cotg}^2 x}-2-\cancel{2\operatorname{cotg}^2 x}+1=$

$\operatorname{cotg}^4 x$. و اتحاد ثابت شد.

مسأله ۱۴- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin^6 x-\cos^6 x}{2\sin^2 x-1}=1-\sin^2 x+\sin^4 x$$

ازاتحاد a^3-b^3 استفاده می‌شود

$$\text{سمت چپ}=\frac{(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^4x+\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)}{2\sin^2x-(\sin^2x+\cos^2x)}$$

قبلاً ثابت کردیم : $\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x$

$$\Longrightarrow \text{سمت چپ}=\frac{(\sin^2x-\cos^2x)(1-\sin^2x\cos^2x)}{(\sin^2x-\cos^2x)}=$$

$$1-\sin^2x\cos^2x=1-\sin^2x(1-\sin^2x)=$$

$$1-\sin^2x+\sin^4x= \quad \text{سمت راست تساوی}$$

مسأله ۱۵- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$(tg\alpha+cotg\alpha-\sqrt{2})(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{2})=tg^2\alpha+cotg^2\alpha$$

قبلاً ثابت کردیم $\leftarrow$ $tg\alpha+cotg\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$\Longrightarrow$ سمت چپ $=(tg\alpha+cotg\alpha-\sqrt{2})(tg\alpha+cotg\alpha+\sqrt{2})$ اتحاد مزدوج $(tg\alpha+cotg\alpha)^2-(\sqrt{2})^2$

$$=tg^2\alpha+cotg^2\alpha+2tg\alpha cotg\alpha-2=$$

$$tg^2\alpha+cotg^2\alpha+2-2=tg^2\alpha+cotg^2\alpha$$

۳- نامساویهای مثلثاتی

روشهای اثبات نامساویهای مثلثاتی - مسائل حل شده

برای اثبات برقراری نامساویهای مثلثاتی روشهای مختلفی برحسب نامساوی مورد نظر موجود است مثلاً بعضی از نامساویهای مثلثاتی را از روشهای ابتکاری و بعضی با استفاده از نامساویهای جبری اثبات می‌شوند اما می‌توان یك روش کلی برای اثبات نامساویهای مثلثی به‌کاربرد ، به‌این صورت‌که ابتدا نامساوی را اثبات شده وبرقرار فرض‌کرده، سپس با استفاده از خواص نامساویها آن را ساده می‌کنیم تا به یك نامساوی منطقی برسیم ، یعنی به یك نامساوی همیشه برقرار مثلاً، $\sin^2x\geqslant 0$ و بلافاصله به محض رسیدن به‌چنین نامساوی منطقی از همان نامساوی شروع و روابط را به‌عقب برمی‌گردیم تا به‌نامساوی مزبور برسیم و اینجاست‌که نه‌تنها نامساوی اثبات شده، بلکه به دست آمده است در حقیقت این روش‌که تقریباًدرهمهٔ مواردبه‌راحتی‌نتیجه می‌دهد، نه‌تنهاروشی است برای اثبات نامساویها بلکه روشی است برای ساختن و طرح مسائل نامساویهای مثلثاتی. حال به حل چند نمونه از نامساویهای مثلثاتی می‌پردازیم:

مسأله ۱۶- درستی نامساوی زیر راتحقیق‌کنید (α زاویه حاده).

$$\sin\alpha\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}\Longrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 1\Longrightarrow$$

$$\underbrace{1-2\sin\alpha\cos\alpha}_{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}\geqslant 0$$

$\Longrightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geqslant 0 \rightarrow$ نامساوی همیشه برقرار

حال داریم: $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geqslant 0\Longrightarrow$

$$1-2\sin\alpha\cos\alpha\geqslant 0\Longrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 1$$

$$\Longrightarrow \sin\alpha\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}$$

مسأله ۱۷- درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویه حاده).

$$\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}\Longrightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\leqslant 2\Longrightarrow$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 2\Longrightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha\geqslant 0$$

$\Longrightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geqslant 0 \rightarrow$ نامساوی منطقی

حال داریم :

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geqslant 0\Longrightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha\geqslant 0\Longrightarrow$$

$$2-1-2\sin\alpha\cos\alpha\geqslant 0\Longrightarrow$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha\leqslant 2\Longrightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\leqslant 2\Longrightarrow$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$$

مسأله ۱۸- درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α

زاویه حاده) .

$$tg\alpha + cotg\alpha \geqslant ۲$$

برای اثبات این نامساوی ازیك نامساوی جبری می توان استفاده کردکه ابتدا آن نامساوی را ثابت می کنیم :

$$a \geqslant ۰ \text{ فرض کنیم } \Longrightarrow (۱-a)^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow$$

$$۱-۲a+a^۲ \geqslant ۰ \xRightarrow{\text{طرفین بر a تقسیم}} \frac{۱}{a}-۲+a \geqslant ۰$$

$$\Longrightarrow a + \frac{۱}{a} \geqslant ۲$$

حال باتوجه به اینکه حدود تغییرات تانژانت و کتانژانت از $-\infty$ تا $+\infty$ می باشد، پس هر عدد حقیقی می تواند تانژانت یا کتانژانت زاویه ای باشد و برعکس. اگر فرض کنیم $a = tg\alpha$ ، داریم :

$$\frac{۱}{a} = \frac{۱}{tg\alpha} = cotg\alpha \Longrightarrow tg\alpha + cotg\alpha \geqslant ۲$$ وحکم ثابت است

۴ـ پیداکردن رابطه‌های مستقل از زاویه (حذف زاویه)

روشهای حذف زاویه در دستگاههای پارامتری ـ مسائل حل شده

برای حذف زاویه در دستگاههای پارامتری ابتدا حتی‌الامکان دستگاه را برحسب دو نسبت مثلثاتی تبدیل می کنیم (سینوس وکسینوس یا تانژانت وکتانژانت) و سپس هریك از این دو نسبت را برحسب پارامترهای موجود در دستگاه به‌دست می آوریم، مثلاً اگر پارامترهای دستگاه a و b باشند سینوس را برحسب a یا b وکسینوس را نیز برحسب a یا b یا هردو به دست می آوریم و سرانجام با استفاده از روابط و اتحادهای موجود بین سینوس وکسینوس مثل

$$sin^۲ x + cos^۲ x = ۱$$

ویا اگر دو نسبت مثلثاتی تانژانت وکتانژانت بودند بااستفاده از رابطهٔ $tg x \cdot cotg x = ۱$ و قراردادن مقادیر نسبتهای مثلثاتی برحسب پارامترها که قبلاً به‌دست آورده‌ایم در این اتحادها زاویه را حذف می کنیم. گاهی اوقات مجبور می‌شویم دریك دستگاه پارامتری برای حذف کمان یکی از نسبتها را مثلاً سینوس را برحسب کسینوس و برحسب یکی از پارامترها از یك معادله دستگاه به‌دست آورده و در معادلهٔ دیگر در همان دستگاه قرار دهیم و بدین ترتیب کسینوس برحسب یك پارامتر محاسبه شده و این مقدار را در رابطهٔ به‌دست آمدهٔ سینوس برحسب کسینوس قرار می‌دهیم و سینوس را نیز برحسب پارامتر محاسبه می کنیم.

مساله ۱۹ـ x را از دستگاه زیر حذف کنید.

$$\begin{cases} tg x + sin x = a \\ cotg x + cos x = b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{sin x}{cos x} + sin x = a \\ \frac{cos x}{sin x} + cos x = b \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{sin x + sin x cos x}{cos x} = a & (۱) \\ \frac{cos x + sin x cos x}{sin x} = b & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \Longrightarrow sin x(۱+cos x) = a cos x \Longrightarrow$$

$$sin x = \frac{a cos x}{۱+cos x} \qquad (۳)$$

حال رابطهٔ (۳) را در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم

$$\Longrightarrow \frac{cos x + \frac{a cos x}{۱+cos x} \cdot cos x}{\frac{a cos x}{۱+cos x}} = b \Longrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{\cos x+\cos^2 x+a\cos^2 x}{1+\cos x}}{\dfrac{a\cos x}{1+\cos x}}=b$$

$$\Longrightarrow \frac{\cos x+\cos^2 x+\alpha\cos^2 x}{a\cos x}=b \overset{\cos x\neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$\cos x(1+\cos x+a\cos x)=ab\cos x$$

$$\Longrightarrow \cos x(1+a)=ab-1 \Longrightarrow \boxed{\cos x=\frac{ab-1}{a+1}}$$

حال مقدار کسینوس را که برحسب پارامترهای a و b است در معادلهٔ ۳ قرار می‌دهیم خواهیم داشت

$$\sin x=\frac{a\cos x}{\cos x+1}=\frac{a\cdot\dfrac{ab-1}{a+1}}{\dfrac{ab-1}{a+1}+1}\Longrightarrow$$

$$\sin x=\frac{\dfrac{a(ab-1)}{a+1}}{\dfrac{ab-1+a+1}{a+1}}=\frac{a(ab-1)}{a(b+1)}\Longrightarrow$$

$$\sin x=\frac{ab-1}{b+1}$$

و داریم $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\Longrightarrow\left(\frac{ab-1}{b+1}\right)^2+\left(\frac{ab-1}{a+1}\right)^2=1$$

تمرین :

☐ عبارتهای مثلثاتی زیر را ساده کنید:

۱) $A=\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

۲) $B=\left(\dfrac{1}{\sin x}-\sin x\right)\left(\dfrac{1}{\cos x}-\cos x\right)$

۳) $C=\dfrac{tg^2 x-\sin^2 x}{cotg^2 x-\cos^2 x}$

۴) $D=\dfrac{\sec^2 x}{\sec^2 x-1}$

۵) $E=\dfrac{\sec\alpha\cdot\sin\alpha}{tg\alpha+cotg\alpha}$

۶) $F=(1-\sin^2\alpha)(1+tg^2\alpha)$

۷) $G=\dfrac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$

۸) $H=(\sec x-tg x)(cosec x+1)$

۹) $I=\dfrac{cosec x}{1+cosec x}-\dfrac{cosec x}{1-cosec x}$

☐ اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

۱) $\left(\dfrac{1+tg^2\alpha}{tg\alpha}\right)^2=\dfrac{1+tg^4\alpha}{tg^2\alpha}+2$

۲) $(tg\alpha+cotg\alpha)(tg\alpha-2cotg\alpha)=$
$\dfrac{tg^4\alpha+tg^2\alpha-1}{1+tg^2\alpha}-\dfrac{2cotg^4\alpha+2cotg^2\alpha+1}{1+cotg^2\alpha}$

۳) $(\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sqrt{5})(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\sqrt{5})=$
$-4(1+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$

۴) $\cos\alpha-\dfrac{tg\alpha}{\sin\alpha}+tg\alpha\cdot\sin\alpha=0$

۵) $\dfrac{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-1}{\sin^2\alpha}=\cot g\alpha-1$

۶) $(\sin\alpha+\cos\alpha)(tg\alpha+\cot g\alpha)=\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$

۷) $\sec^4\alpha-tg^4\alpha=\sec^2\alpha+tg^2\alpha$

۸) $\dfrac{1+\cot g\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}=\dfrac{1+tg\alpha}{\sec\alpha}$

۹) $\dfrac{tg\alpha}{1+\sec\alpha}+\dfrac{1+\sec\alpha}{tg\alpha}=2\operatorname{cosec}\alpha$

۱۰) $\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{tg^4\alpha}\right)^3\left(\dfrac{\operatorname{cosec}^3\alpha}{\cot g^6\alpha}\right)^2=1$

۱۱) $\dfrac{tg\alpha}{1-\cot g\alpha}+\dfrac{\cot g\alpha}{1-tg\alpha}=1+\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$

۱۲) $\dfrac{1+\sec\alpha}{\sin\alpha+tg\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$

۱۳) $\dfrac{\cos\alpha}{1-tg\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cot g\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha$

۱۴) $\dfrac{tg\alpha-\sin\alpha}{\sec\alpha}=\dfrac{\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha}$

۱۵) $\cot g\alpha\cdot\sec\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

۱۶) $\dfrac{\sec x-1}{\sec x+1}+\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}=0$

۱۷) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=2\sec\alpha$

۱۸) $\sec^4\alpha-\sec^2\alpha=\dfrac{1}{\cot g^4\alpha}+\dfrac{1}{\cot g^2\alpha}$

۱۹) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=tg\alpha-\cot g\alpha$

۲۰) $\dfrac{1}{\sec^2\alpha}+\sec^2\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{cossec}^2\alpha}-\dfrac{\sec^2\alpha}{\operatorname{cossec}^2\alpha}=2$

☐ عبارتهای زیر را با تغییر متغیر مناسب به عبارتهای مثلثاتی تبدیل کرده و ساده کنید:

۱) $A=\sqrt{a^2+x^2}$

۲) $B=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ (راهنمایی: قرار دهید $x=a\,tg\alpha$)

۳) $C=\dfrac{\sqrt[3]{(a^2+x^2)^3}}{x}$

۴) $D=\sqrt{x^2-a^2}$

---

۵) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$ (راهنمایی: قرار دهید $x=a\sec\alpha$)

۶) $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}$

☐ درستی نامساویهای زیر را تحقیق کنید (α و β زوایای حاده هستند).

۱) $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{2}\geqslant\sqrt{tg\alpha\, tg\beta}$

۲) $tg\alpha\cot g\beta+tg\beta\cot g\alpha\geqslant 2$

۳) $(tg^2\alpha+\cot g^2\alpha)^2\geqslant(tg\alpha-\cot g\alpha)^4$

۴) $\sin^2\alpha(\sin\alpha-1)<\cos^2\alpha(1-\cos\alpha)$

۵) $\sin^2\alpha+1<\sec^2\alpha$

۶) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\geqslant\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha+\sin\beta-1$

(راهنمایی: طرفین را در ۲ ضرب کنید)

---

۷) $tg\alpha_1<\dfrac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<tg\alpha_n$

$\left(0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(راهنمایی: از نامساوی $tg\alpha_1<tg\alpha_i<tg\alpha_n$ و ضرب طرفین آن در $\cos\alpha_i$ استفاده کنید و به i اعداد ۱ تا n داده و نامساویها را جمع کنید و...)

ـ این نکته هرقدر عجیب به نظر برسد حقیقت دارد که ﴿بسیاری از ریاضیدانان بزرگ استاد و معلم نبوده‌اند:عدهٔ کمی از ایشان از میان سربازان حرفه‌ای خارج شده‌اند﴾بسیاری دیگر از علوم الهی یا حقوق یا طب روی‌برتافته وارد در خط ریاضیات گردیده‌اند و یکی از بزرگترین ایشان به قدر اهل‌سیاست محیل و زیرك بود و حتی به خاطر نفع کشورش دروغ گفت و نیز چندتن از ایشان اصلاً شغل و حرفه‌ای نداشته‌اند. نکته‌ای عجیب‌تر از این نیز وجود دارد و آن اینکه: همهٔ معلمین ریاضی ریاضیدان نبوده‌اند یا نیستند، اما این نکته نباید ما را متعجب سازد زیرا کافی است ملاحظه کنیم که چه مغاك و فاصله‌ای یک نفر معلم شعر و ادب را، که حقوق بسیار خوبی دریافت می‌کند، از شاعری که از شدت گرسنگی در اتاق مخروبهٔ خود جان می‌سپارد، جدا می‌سازد.

اریك تمپل‌بل
ریاضیدانان نامی،
ترجمهٔ حسن صفاری



حساب و هندسه، در نگاه اول، چنین به‌نظر می‌رسند که حوزه‌هایی به‌طورکامل نامرتبط باشند. حساب برشمارش، یعنی مظهر جریانی گسسته[1] (یا رقمی[2]) بناشده‌است.

حقایق حساب را می‌توان به‌طور واضح به صورت نتایج جریانات شمارش خاصی دریافت، و شخص انتظارنمی‌برد که ماورای این هیچ گونه معنایی داشته‌باشند. از طرف دیگر، هندسه، به جای اشیاء گسسته، شامل اشیاء پیوسته‌ای[3]، چون خطوط، منحنیها، و سطوح است. اشیاءِ پیوسته را نمی‌توان از اعضای ساده‌تر، با استفاده از جریانات گسسته، بناکرد، و شخص انتظار دارد که به جای رسیدن به حقایق هندسی با استفاده از محاسبه، آنها را مشاهده کند.

قضیهٔ فیثاغورس اولین اشاره به رابطه‌ای ژرف‌تر و پنهان بین حساب و هندسه بوده، و به دارا بودن موقعیتی کلیدی بین این دو قلمرو در سرتاسر تاریخ ریاضیات ادامه داده است. موقعیت مزبور گاهی موقعیت همکاری بوده و گاهی، چنان که پس از کشف این موضوع که $\sqrt{2}$ گنگ* است پیش‌آمد، موقعیت نزاع بوده است.

ازکتاب: ریاضیات و تاریخش
تألیف: استیل‌ول
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

* اسم

1. discrete   2. digital   3. continuous

مسائل مسابقه‌ای

سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱- درصورتی‌که $x_۱$ و $x_۲$ و .... و x_n ریشه‌های معادلهٔ

$$x^n+x^{n-۱}+\dots+x+۱=۰$$

باشند مقدار عبارات زیر را حساب کنید.

$$S=\frac{x_۱}{x_۲}\sqrt[n]{\frac{x_۱}{x_۲}}+\frac{x_۲}{x_۳}\sqrt[n]{\frac{x_۳}{x_۳}}+\frac{x_۳}{x_۴}\sqrt[n]{\frac{x_۳}{x_۴}}+\dots+\frac{x_{n-۱}}{x_n}\sqrt[n]{\frac{x_{n-۱}}{x_n}}$$

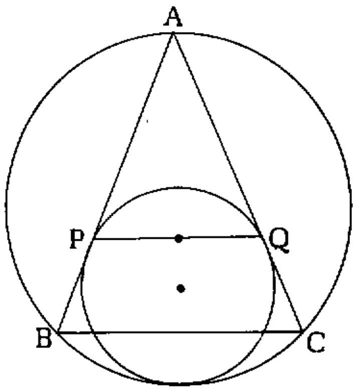
$$P=۱\times۱!\,x_۱^{n+۱}+۲\times۲!\,x_۲^{n+۱}+۳\times۳!\,x_۳^{n+۱}+\dots+n\times n!\,x_n^{n+۱}$$

۲- یک‌دسته ازجوابهای معادلهٔ مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$۸^{\cos x}+\sqrt[n]{۴}=۸^{\sin x}$$

مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی

۱۹۷۸/۴ — در مثلث ABC، $AB=AC$ است. دایره‌ای به دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس‌داخلی، همچنین به اضلاع AB و AC به ترتیب در نقاط P و Q مماس است. ثابت کنید که وسط پاره خط PQ مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است.



بیستمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۸

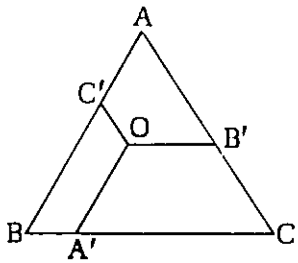
مسائل برای حل

(مورد استفادهٔ دانش آموزان سالهای اول تا چهارم دبیرستان)

● هندسه: محمد هاشم رستمی ● ریاضیات جدید: حمید رضا امیری
● جبر و مثلثات: محمد رضا هاشمی و محمد هاشم رستمی

مسائل هندسهٔ سال اول

۱ـ از نقطه O واقع در داخل مثلث متساوی الاضلاع ABC خطوطی به موازات اضلاع AB و BC و AC رسم می‌کنیم تا اضلاع BC و AC و AB را به ترتیب در نقاط

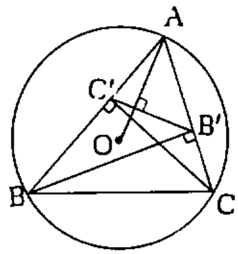


A′ و B′ و C′ قطع کنند. ثابت کنید که

$$OA'+OB'+OC'$$

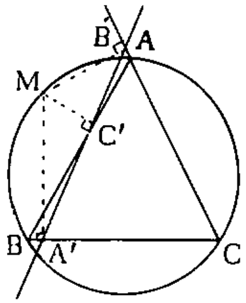
مقداری‌است ثابت که با تغییرمکان نقطه O در داخل‌مثلث، تغییر نمی‌کند.

۲ـ مثلث ABC مفروض‌است. ثابت کنید که شعاع OA از دایرهٔ‌محیطی این مثلث‌برخط B′C′ که نقاط B′ و C′ پای



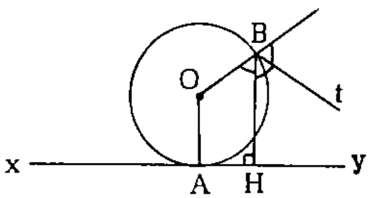
ارتفاعات رئوس B و C می‌باشند عمود است.

۳ـ ثابت کنید که تصاویر هر نقطه از دایرهٔ محیطی یک مثلث، روی اضلاع یا امتداد اضلاع آن مثلث، سه‌نقطه‌اند واقع



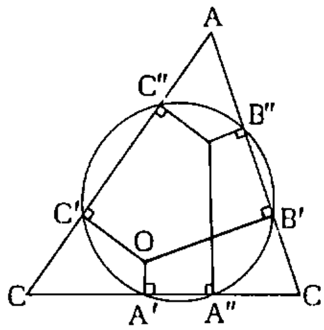
بریك خط‌است (خط سنسن یا خط سمسن).

۴ـ خط xy در نقطه A بر دایرهٔ به مرکز O مماس‌است. از نقطه متغیر B واقع‌بر این دایره، عمود BH را بر xy فرود



می‌آوریم. ثابت کنید که Bt نیمساز زاویهٔ مکمل ومجاورزاویهٔ OBH از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۵ـ ازنقطه O واقـع در داخل مثلث ABC عمودهای OA′ و OB′ و OC′ را به‌ترتیب بر اضلاع BC و AC و AB فرود می‌آوریم ودایرهٔ محیطی‌مثلث A′B′C′ را رسم‌می‌کنیم. اگر نقاط دیگر برخورد این دایره با اضلاع مثلث ABC را



A'' و B'' و C'' بنامیم ، ثابت کنید عمودهایی که در نقاط A'' و B'' و C'' بر اضلاع مثلث ABC اخراج می‌شوند از یك نقطه می‌گذرند.

تستهای هندسهٔ سال اول

۱ـ اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور ۶۵° است درصورتی‌که تفاضل این‌دو زاویه ۵۰° باشد زاویهٔ بزرگتر کدام است ؟

۱) ۶۵° ۲) ۷۵° ۳) ۹۰° ۴) ۱۰۵°

۲ـ زوایای A و B و C از مثلث ABC به ترتیب با اعداد ۸ و ۵ و ۲ متناسبند. کدام رابطه‌درست است؟

۱) زاویه B منفرجه‌است ۲) زاویه B قائمه‌است
۳) زاویه A قائمه است ۴) زاویه A منفرجه است

۳ـ در مثلث ABC ، $AB=۱۲$ و $AC=۸$ است. اندازهٔ میانهٔ AM درکدام رابطه‌صدق می‌کند ؟

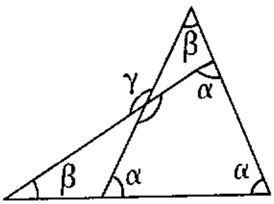
۱) $AM>۱۰$ ۲) $AM=۱۰$
۳) $AM<۱۰$ ۴) $AM=۲۰$

۴ـ اندازهٔ زاویه‌بین میانه وارتفاع وارد بروتر ازمثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲۰° است. اندازهٔزاویه‌حادهٔ کوچکتر این مثلث کدام است ؟

۱) ۵۵° ۲) ۴۵° ۳) ۳۵° ۴) ۲۵°

۵ـ درشکل‌زیر دو مثلث متساوی‌الساقین همان‌طوری‌که نشان داده شده است روی‌هم قرار گرفته‌اند. مقدار γ برحسب α و β کدام است ؟

۱) $\gamma=\alpha+\beta$ ۲) $\gamma=۲\alpha+\beta$



۳) $\gamma=\alpha+۲\beta$ ۴) $\gamma=\beta-\alpha$
۵) $\gamma=۲\beta-\alpha$

۶ـ مجموع‌فاصله‌های هرنقطه واقع بـرقاعده یك مثلث متساوی‌الساقین‌از دوساق‌آن مثلث‌همواره برابراست‌با:

۱) قاعده مثلث
۲) ساق مثلث
۳) ارتفاع وارد برقاعده مثلث
۴) ارتفاع وارد برساق مثلث

۷ـ تعداد اقطار یك n ضلعی محدب که مجموع زوایای داخلی‌آن ۳ برابرمجموع زوایای‌داخلی‌یك۷ضلعی محدب‌است کدام است ؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۱۹ ۳) ۱۱۸ ۴) ۱۱۷

۸ـ اقطارچهارضلعی $ABCD$ برهم‌عمود و باهم‌مساویند. چهار ضلعی حاصل از وصل کردن اوساط اضلاع متوالی این چهارضلعی‌کدام شکل‌است؟ (متوازی‌الاضلاع وارینیون چهار ضلعی $ABCD$).

۱) متوازی‌الاضلاع ۲) لوزی
۳) مستطیل ۴) مربع

۹ـ درمثلث ABC اندازهٔزوایای A وB به‌ترتیب °۷۰ و °۶۰ است. اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای درونی زوایای B و C کدام است؟

۱) °۱۱۵ ۲) °۱۲۰ ۳) °۱۲۵ ۴) °۱۳۰

۱۰ـ پاره‌خط AB به‌طول ۵cm وخط d موازی آن و بفاصلهٔ ۲cm ازآن مفروض‌است. روی‌خط d چندنقطه وجود داردکه ازآن‌نقاط پاره‌خط AB به زاویهٔ °۶۰ دیده شود.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱ـ زاویهٔ‌بین دومماس مرسوم‌از یك‌نقطه بریك دایره °۴۰ است . اندازهٔ قوس کوچکتر ایجاد شده در دایره چقدر است؟

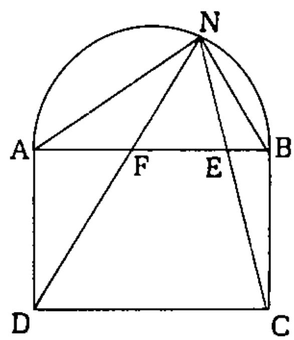
۱) °۸۰ ۲) °۱۴۰ ۳) °۱۱۰ ۴) °۲۲۰

۱۲ـ در چهارضلعی محاطی ABCD اندازهٔ دو زاویهٔ مقابل $\hat{A}=۳\alpha+۱۰^\circ$ و $\hat{C}=\alpha-۳۰^\circ$ است. اندازهٔ‌زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۲۰

مسائل هندسهٔ سال دوم ریاضی

۱ـ روی‌قطرAB ازنیمدایرهٔ ANB مستطیلی‌ساخته‌ایم که ارتفاع‌آن AD مساوی باضلع مربع محاطی‌دایرهٔ هم‌شعاع



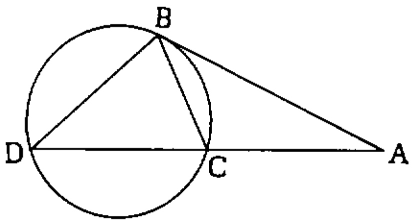
با نیمدایرهٔفوق است. اگررئوس C و D رابه نقطهٔ‌دلخواهN از نیمدایره وصل‌کنیم و خطوط CN و DN قطر دایره را در نقاط E و F قطع‌نمایند، ثابت‌کنیدکه:

(مسئله فرما)

$$AE^{۲}+BF^{۲}=AB^{۲}$$

۲ـ ازنقطهٔ A مماس AB و قاطع ACD نسبت به دایره‌ای‌رسم شده‌اند. ثابت‌کنیدکه:

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC^{۲}}{BD^{۲}}$$

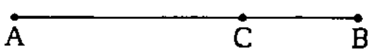


۳ـ ثابت‌کنیدکه اقطار هرپنج‌ضلعی منتظم یکدیگررا به نسبت‌طلایی تقسیم می‌کنند.

تعریف نسبت‌طلایی ـ هرگاه‌نقطهٔ Cروی پاره‌خط AB چنان قرار داشته باشدکه:

$$AC^{۲}=AB\cdot BC$$

باشد، گفته می‌شودکه نقطهٔ C پاره‌خط AB رابه نسبت طلایی یا به نسبت‌ذات وسط وطرفین تقسیم‌نموده است.



تستهای هندسهٔ سال دوم‌ریاضی

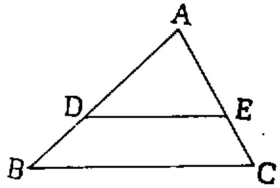
۱ـ اگر :

$$\frac{۲a+۲b}{۲a+۳b}=\frac{۴}{۵}$$

باشد نسبت $\frac{b}{a}$ چند است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۲ـ در مثلث ABC ، $DE \parallel BC$ و $۲BC = ۳DE$



است. درصورتی که $DB = ۴cm$ باشد اندازهٔ AB چند سانتی‌متر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۳ـ نسبت تشابه دو چندضلعی $\frac{۹}{۴}$ است. نسبت اقطار متناظر این دو چند ضلعی کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴ـ درمثلثی قائم‌الزاویه، تصویر میانهٔ وارد بر وتر روی وتر ۱/۵ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر وتر ۲ سانتی‌متر است. اندازهٔ وتر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۵

۵ـ چهار گوشهٔ یك مربع به ضلع ۱۰ سانتی‌متر را چنان تا می‌زنیم تا در مرکز مربع به‌هم برسند. اندازهٔ هرضلع مربع حاصل چند سانتی‌متر است؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

۶ـ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بردایره‌ای به‌شعاع R محیط است. حاصل‌ضرب اندازه‌های دوقاعدهٔ این ذوزنقه برابر است با:

۱) $R^۲$ ۲) $۲R^۲$ ۳) $۳R^۲$ ۴) $۴R^۲$

۷ـ دایره‌ای به قطر ۶ سانتی‌متر مفروض است. نقطهٔ A در درون دایره به‌فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر ازمحیط دایره حرکت می‌کند. نسبت مساحت ناحیه بین مسیر نقطهٔ A و محیط دایره، به‌مساحت دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۸ـ درمثلث ABC ، $AB = ۶$ و $AC = ۸$ و $BC = ۱۰$ است. اندازهٔ قطعهٔ بزرگتر ایجادشده به‌وسیله نیمساز زاویهٔ B روی ضلع AC کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲

۹ـ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره‌ای به شعاع ۸ سانتی‌متر کدام است؟

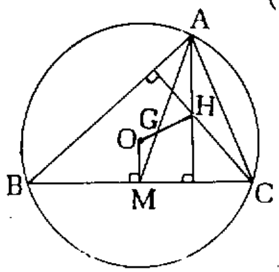
۱) $۱۶\sqrt{۳}$ سانتی‌متر ۲) ۱۶ سانتی‌متر
۳) $۸\sqrt{۳}$ سانتی‌متر ۴) $۴\sqrt{۳}$ سانتی‌متر

مسائل هندسهٔ سال سوم ریاضی

۱ـ ثابت کنید که در هر مثلث ABC ، نقطه O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعات مثلث و نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث سه نقطه‌اند واقع بر یك خط راست به قسمی که:

$$\overline{GH} = -۲\overline{GO}$$

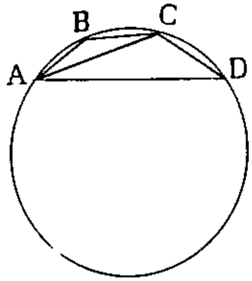
است (خط اولر).



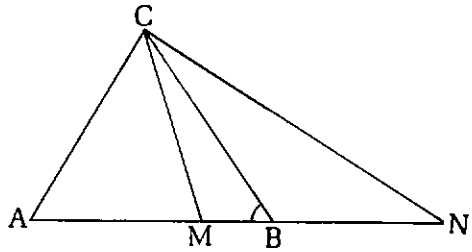
۲ـ اگر A و B و C و D رئوس متوالی یك چندضلعی

منتظم باشند، ثابت کنید که :

$$AC^2 - AB^2 = BC \cdot AD$$



۳ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطهٔ M را روی ضلع AB و نقطهٔ N را در امتداد ضلع AB چنان اختیار می‌کنیم که مثلث AMC با مثلث ANC متشابه باشد. ثابت کنید:



اولاً ـ دایرهٔ محیطی مثلث MNC بر ضلع AC مماس است.

ثانیاً ـ رابطه $BM \cdot NC = BN \cdot MC$ برقرار است.

۴ـ ثابت کنید که در هر چهارضلعی محاطی حاصل‌ضربهای فاصله‌های هر نقطه واقع برمحیط دایرهٔ محیطی، از هر دو ضلع غیرمجاور، با هم برابرند.

تستهای هندسهٔ سال سوم ریاضی

۱ـ از نقطهٔ A دو مماس بر دایره‌ای رسم کرده‌ایم. اندازهٔ وتر واصل بین نقاط تماس ۱۲ سانتی‌متر و طول هر مماس رسم شده ۱۵ سانتی‌متر است. شعاع دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۵   ۲) $\frac{۱۵}{۲}$ ۳) ۶   ۴) ۵

۲ـ دورترین و نزدیکترین فاصلهٔ یك نقطه واقع درخارج یك دایره از آن دایره برابر ۱۲ و ۳ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از این نقطه بر دایره کدام است؟

۱) ۱۲ سانتی‌متر   ۲) ۳ سانتی‌متر
۳) ۶ سانتی‌متر   ۴) ۱۵ سانتی‌متر

۳ـ اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۵ و ۱۲ و ۱۳ است. اندازهٔ ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۱۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۳}$ ۳) $\frac{۶۰}{۱۳}$ ۴) $\frac{۳۰}{۱۳}$

۴ـ در مثلث قائم الزاویه‌ای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه ۵ و ۱۲ سانتی‌متر است. طول نیمساز خارجی زاویهٔ قائمه چند سانتی‌متر است ؟

۱) $۶۰\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۶۰\sqrt{۲}}{۱۱}$
۳) $\frac{۳۰\sqrt{۲}}{۷}$ ۴) $\frac{۶۰\sqrt{۲}}{۷}$

۵ـ تفاضل مربعات دو ضلع مثلثی ۲۴ و اندازهٔ ضلع سوم آن ۶ است. تصویر میانهٔ وارد برضلع سوم روی ضلع سوم کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۰   ۴) ۸

۶ـ ترکیب دو تقارن محوری با محورهای موازی کدام است؟

۱) دوران   ۲) انتقال
۳) تقارن محوری   ۴) تقارن مرکزی

۷ـ اگر : $۲\overline{SA'} = ۲\overline{SA}$ و $۴\overline{SA''} = -۳\overline{SA}$

باشد، در این صورت نقطهٔ A'' مجانس نقطهٔ A' نسبت به مرکز S با چه نسبتی است؟

۱) $\frac{-۸}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{-۹}{۸}$

۸ــ در یک چند وجهی تعداد وجوه $F = ۱۲$ و تعداد یالها $A = ۳۰$ است. تعداد رئوس چند وجهی کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۹ــ هرم به‌حجم v را با صفحه‌ای موازی قاعده و به‌فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع از سطح قاعده، قطع کرده‌ایم. نسبت حجم هرم ناقص ایجاد شده، به‌حجم هرم اولی کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱۹}{۲۷}$ ۴) $\frac{۸}{۱۹}$

۱۰ــ پنج نیم‌خط همرسند وهیچ سه‌تای آنها در یک‌صفحه قرار ندارند. در نقطهٔ همرسی آنها چند کنج مشخص می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۱۵

۱۱ــ چند کنج منتظم به‌رأس S می‌توان داشت که هر زاویه‌اش ۴۵° باشد؟

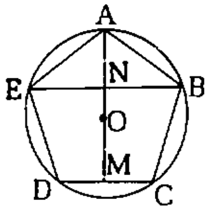
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲ــ سطح قاچ ۳۶° از یک کره برابر $۳/۶\pi$ است. حجم این کره چقدر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۱۸π ۴) ۳۶π

مسائل هندسهٔ سال چهارم ریاضی

۱ــ پنج‌ضلعی منتظم ABCDE محاط در دایرهٔ O مفروض است. نقطهٔ تقاطع AO با CD و BE (یک‌ضلع و قطر موازی آن از پنج‌ضلعی) را به ترتیب M و N می‌نامیم. ثابت کنید که



نقاط M و N پاره‌خط AO را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند.

۲ــ مختصات قرینهٔ نقطهٔ $M(-۲,۱,۳)$ را نسبت به‌صفحهٔ

$$P : ۲x - ۳y + z + ۱ = ۰$$

تعیین کنید.

۳ــ دو دایره:

$$C(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۶x + ۳ = ۰$$

و

$$C'(x,y) = x^۲ + y^۲ + ۴x + ۳ = ۰$$

مفروض‌اند.

اولاً ــ معادلهٔ دسته دایرهٔ شامل این‌دو دایره‌را بنویسید.

ثانیاً ــ معادلهٔ دوایری از این دسته‌را پیدا کنید که شعاعشان برابر ۴ باشد.

ثالثاً ــ نقاط پونسله دسته‌دایره (دوایر به‌شعاع صفر دسته) را تعیین کنید.

رابعاً ــ معادلهٔ دسته‌دایرهٔ مزدوج دسته‌دایرهٔ فوق‌را بنویسید.

۴ــ دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ مفروض A بگذرد و دایرهٔ $C(O , R)$ را نصف کند و بر دایرهٔ $C'(O' , R')$ عمود باشد.

۵ــ طول وتری از دایرهٔ به معادلهٔ:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۸y + ۱۰ = ۰$$

را که نقطهٔ $M(۱ , ۲)$ وسط آن می‌باشد به دست آورید.

تستهای هندسهٔ سال چهارم ریاضی

۱ـ اگر :

$\vec{v_2} = \vec{i} + 3\vec{k}$ و $\vec{v_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

باشد، تصویر بردار $(2\vec{v_1}) \wedge (-3\vec{v_2})$ روی محورzها کدام است ؟

۱) -54 ۲) -18
۳) -42 ۴) 42

۲ـ اگرفاصلهٔ نقطهٔ $A(a, 2a-1, 3a)$ ازصفحهٔ:

$P: 2x - y + 2z - 4 = 0$

برابر ۵ باشد مقدار a کدام است؟

۱) ۳ و ۲ـ ۲) ۳ و ۲
۳) ۳ـ و ۲ ۴) ۳ـ و ۲ـ

۳ـ دو نقطهٔ $A(-1, 2, 0)$ و $B(3, -2, 4)$ نسبت به صفحهٔ:

$P: 2x + 2y - z + 1 = 0$

چه وضعی دارند؟

۱) در دو طرف صفحه واقع‌اند.
۲) در یك‌طرف صفحه واقع‌اند.
۳) نقطه A روی‌صفحه ونقطهٔ B خارج آن‌است.
۴) دونقطه A و B هر دو روی‌صفحه واقع‌اند.

۴ـ دوصفحهٔ :

$P': 2x + z - 3 = 0$ و $P: x + 3y - z = 1$

مفروض‌اند.دونقطهٔ $A(0, 1, 2)$ و $B(-3, 1, -1)$ نسبت به‌این دوصفحه چه‌وضعی دارند؟

۱) روی صفحهٔ P واقع‌اند.
۲) در دوفرجه متقابل‌حاصل از دوصفحه واقع‌اند.
۳) داخل دوفرجهٔ مجاور حاصل‌از دوصفحه واقع‌اند.
۴) روی صفحهٔ P' واقع‌اند.

۵ـ به‌ازای چه مقداری‌از a خط:

$D: 3x = 2y - 1 = (2a-1)z$

با صفحهٔ:

$P: 3x + y + 3z = 1$

موازی است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۲ـ

۶ـ معادلهٔ تصویر خط:

$$D: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = -2t + 3 \end{cases}$$

روی صفحهٔ:

$P: 2x + y - z + 1 = 0$

کدام است؟

۱) $x = 6y - 3 = 2z$
۲) $3x = 2y - 1 = \frac{6}{5}z$
۳) $3x = y - 1 = z$
۴) $x = 2y - 1 = \frac{2}{5}z - \frac{3}{5}$

۷ـ معادلهٔصفحه‌ای‌که ازنقطهٔ $M(2,2,2)$ ومحور yها می‌گذرد کدام است؟

۱) $x + y = 0$ ۲) $x - z = 0$
۳) $y + z = 0$ ۴) $y - z = 0$

۸ـ اگر معادلهٔ محور اصلی دو دایره:

$c: x^2+y^2-2x-1=0$

و $c': x^2+y^2+ax=0$ خط $x=-\frac{1}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹ـ معادلهٔ دایرهٔ اصلی بیضی به معادلهٔ:

$$x^2+4y^2-2x+8y+1=0$$

کدام است؟

۱) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

۲) $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

۳) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

۴) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

۱۰ـ نقطهٔ $F(2, 1)$ کانون و خط:

$$\Delta: 3x+y=2$$

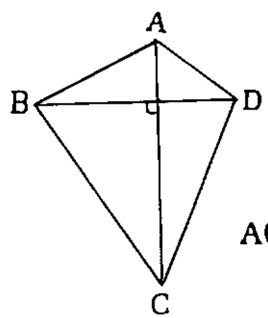
یك مجانب یك‌هذلولی است که محور کانونی آن موازی محور عرضها است. خروج‌از مرکز این هذلولی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

۳) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

مسائل هندسهٔ سال دوم تجربی

۱ـ ثابت‌کنیدکه اگر اقطار یك چهارضلعی برهم‌عمود باشند مجموع مربعات اضلاع مقابل آن باهم برابرند.

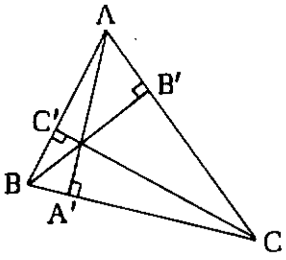


$$AC \perp BD \Longrightarrow AD^2+BC^2=AB^2+DC^2$$

۲ـ پاره‌خطهای AA' و BB' و CC' ارتفاعات‌مثلث ABC می‌باشند ثابت کنید که:

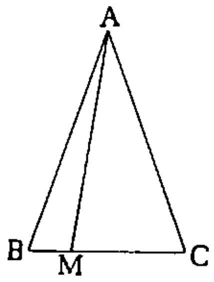
۱) $\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$

۲) $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'$



۳ـ اگر M نقطه‌ای واقع برقاعدهٔ BC ازمثلث‌متساوی‌الساقین ABC باشد ثابت‌کنیدکه:

$$AB^2-AM^2=MB \cdot MC$$



۴ـ ثابت‌کنیدکه اگر دریك متوازی‌الاضلاع یك‌زاویه برابر $45°$ باشد مربع حاصل ضرب اقطار، مساوی با مجموع توان‌چهارم اندازه‌های دوضلع مجاور آن است.

$$(d^2 \cdot d'^2 = a^4+b^4)$$

تستهای هندسه سال‌دوم تجربی

۱ـ در مثلث ABC:

$B'C' \| BC$ و $B'C'=\frac{3}{4}BC$ و $CC'=3$

است. اندازهٔ ضلع AC کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲ـ دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند. درصورتی که $a=۷$ و $b=۸$ و $c=۹$ ومحیط مثلث $A'B'C'$ مساوی ۷۲ باشد، کوچکترین ضلع مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱ ۴) ۱۴

۳ـ نسبت اندازه‌های قطرهای دوایر محیطی دو مثلث متشابه برابر $\frac{۲}{۳}$ است. نسبت شعاعهای دوایر محاطی داخلی این دو مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۳

۴ـ در مثلثی قائم‌الزاویه اندازهٔ وتر ۱۰ سانتی‌متر و تصویر یک ضلع زاویهٔ قائمه بروتر نیز ۶/۴ سانتی‌متر است. اندازهٔ ضلع دیگر کدام است؟

۱) ۲ سانتی‌متر ۲) ۴ سانتی‌متر

۳) ۶ سانتی‌متر ۴) ۱۰ سانتی‌متر

۵ـ نقاط M و N و P و Q، اوساط اضلاع مربع ABCD را متوالیاً بهم وصل می‌کنیم. اگر:

$$AB=x\ ,\ MN=y$$

باشد کدام یک از مقادیر زیر مساحت شکل MNPQ را نشان می‌دهد؟

I) $y^۲$ II) $x^۲$ III) $x^۲-y^۲$

۱) فقط I ۲) فقط II ۳) فقط III

۴) I و II ۵) II و III

۶ـ قطر مربعی مساوی $۴\sqrt{۲}$ سانتی‌متر است. اندازهٔ مساحت این مربع چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۷ـ سه ضلع مثلثی ۶ و ۸ و ۱۰ سانتی‌متر می‌باشند. مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۸ـ دورترین و نزدیکترین فاصلهٔ یک نقطه واقع در داخل یک دایره از آن دایره به ترتیب ۳ و ۱۲ سانتی‌متر است. اندازهٔ وتری به طول می‌نیمم که از آن نقطه در دایره رسم می‌شود چند سانتی‌متر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مسائل هندسه سال سوم تجربی

۱ـ نقاط:

$$A(-۲\ ,\ ۱)\ ,\ B(۴\ ,\ -۵)\ ,\ C(۷\ ,\ -۲)$$

رئوس مثلث ABC مفروض‌اند. اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل این مثلث را تعیین کنید.

۲ـ متوازی‌الاضلاع ABCD به مرکز O و نقطهٔ دلخواه M درصفحه آن را درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که همواره رابطهٔ

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=۴\overrightarrow{MO}$$

برقرار است.

۳ـ عدد اندازهٔ سطح یک کره ۳ برابر عدد اندازهٔ حجم آن می‌باشد. مساحت منطقه‌ای به ارتفاع $\frac{۱}{۲}$ از این کره را محاسبه کنید.

تستهای هندسهٔ سال سوم تجربی

۱ـ قرینه محوری یک لوزی کدام شکل است (قرینهٔ لوزی

نسبت به یك‌خط راست)؟

۱) مستطیل ۲) مربع

۳) متوازی الاضلاع ۴) لوزی

۲ــ ازنقطهٔ S وسط خط‌المرکزین دو دایـره متساوی ، قاطعی نسبت‌به دو دایره رسم می‌کنیم. نسبت‌اندازه‌های‌دو وتر ایجاد شده در دو دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳ــ نقاط $A(۳,۲)$ و $B(۵,۲)$ و $C(۵,۴)$ رئوس مثلث ABC مفروض‌اند. اندازهٔ‌بردار مکان محل‌تلاقی‌ارتفاعات این مثلث کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) ۱۳ ۴) $\sqrt{۲۹}$

۴ــ اگر :

$$\vec{b} = \frac{-\vec{a}}{۲} \quad \text{و} \quad |\vec{a}| = ۱۸$$

باشد اندازهٔ $\vec{a}\cdot(\vec{a}+۲\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۳۱۶ ۲) ۳۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۰

۵ــ تعداد چند وجهیهای منتظمی که می‌توان با پنج‌ضلعی منتظم ساخت کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶ــ دریك‌چند وجهی‌تعداد وجوه $F=۵$ و تعداد رئوس $S=۵$ است. تعداد یالهای آن کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۷ــ طول یـال یك چهاروجهی‌منتظم $۶\sqrt{۲}$ است. اندازهٔ حجم آن کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) $۳۶\sqrt{۲}$

۳) $۳۶\sqrt{۳}$ ۴) $۷۲\sqrt{۲}$

۸ــ استوانه دواری بـرمنشور منتظم شش پهلویی محیط شده است. نسبت سطح‌جانبی آنها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) π ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۹ــ مساحت‌سطح‌قاچ ۹۰° دریك‌کره برابر ۳۶π است. اندازهٔ حجم این کره چند است؟

۱) ۱۴۴π ۲) ۲۸۸π ۳) ۷۲π ۴) ۲۸۸

مسائل ریاضیات جدید سال اول

۱ــ عکس نقیض گزارهٔ شرطی زیر را به صورت شرط لازم یا کافی‌بیان‌کنید (فرد بودن عددصحیح a شرط کافی‌است برای فردبودن $a^۲$).

۲ــ اگر ارزش گـزارهٔ $(r\wedge\sim s) \Longleftrightarrow (p\vee\sim q)$ درست‌باشد و s نیز گزاره‌ای درست‌باشد دراین‌صورت‌ارزش گزارهٔ $(q\vee p) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow r)$ را تعیین‌کنید.

۳ــ اولاً، با استفاده ازجدول ارزشها ثابت‌کنید

$$(p \Longrightarrow q) \equiv \sim p\vee q$$

ثانیاً ، ثابت‌کنید گزارهٔ

$$([(p \Longrightarrow q)\wedge p] \Longrightarrow q)$$

یك‌گزارهٔ همیشه درست است.

۴ــ ثابت‌کنید

$$[(A-B)\cup(B-A)]\cap(A\cap B)=\varnothing$$

تستهای ریاضیات جدید سال اول

۱ـ اگر گزارهٔ $p \Longrightarrow (q \vee \sim p)$ گزاره‌ای نادرست باشد کدام گزاره همواره درست است؟

الف) $p \Longrightarrow q$ ب) $\sim q \Longrightarrow \sim p$

ج) $q \Longrightarrow \sim p$ د) $\sim q \Longrightarrow (\sim p \wedge q)$

۲) اگر p گزاره‌ای درست باشد در این‌صورت ارزش گزارهٔ $[(t \Longrightarrow r) \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)]$

الف) همواره نادرست است

ب) بستگی به ارزش t و r دارد

ج) همواره درست است

د) بستگی به ارزش t دارد

۳ـ عکس نقیض گزارهٔ $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$ کدام است؟

الف) $(r \Longrightarrow q) \Longrightarrow \sim p$

ب) $(\sim r \Longrightarrow q) \Longrightarrow \sim p$

ج) $(\sim r \Longrightarrow \sim q) \Longrightarrow \sim p$

د) $\sim(\sim q \vee r) \Longrightarrow \sim p$

۴ـ هرگاه برای هر گزارهٔ دلخواه مانند p، اگر p ارزش درست داشته باشد، داریم:

$f(p)=1$

و اگر ارزش p نادرست باشد، داریم:

$f(p)=0$

در این‌صورت کدام‌یك از گزینه‌ها **نادرست** است؟

الف) $f(p\vee q)=f(p)+f(q)-f(p)f(q)$

ب) $f(p\wedge q)=f(p)\cdot f(q)$

ج) $f(p\wedge q)=f(p)+f(q)$

د) $f(p)+f(\sim p)=1$

۵ـ مجموعهٔ

$A=\{\{\varnothing\}, \varnothing, \{a, \varnothing\}\}$

چند زیر مجموعه دارد؟

الف) ۳ زیرمجموعه ب) ۲ × ۳ زیر مجموعه

ج) 2^4 زیرمجموعه د) ۸ زیر مجموعه

۶ـ کدام درست است؟

الف) $x\in\{\{x, \{x\}\}, \{x, y\}\}$

ب) $\{x\} \subset \{\{x\}, \{x, \{x, y\}\}\}$

ج) $\{x\} \subset \{x, \{x\}\}$

د) $x \in \{\{x\}\}$

۷ـ اگر $p(A)$ مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های A باشد در این‌صورت $p(p(p(A)))$ چند عضو دارد، اگر A تك عضوی باشد.

الف) ۳ عضو دارد ب) ۸ عضو دارد

ج) ۱۶ عضو دارد د) ۳۲ عضو دارد

۸ـ هرگاه $A-B=A\cup B$ کدام درست است؟

الف) $A\subset B$ ب) $B\subset A$

ج) $B=\varnothing$ د) $A=\varnothing$

مسائل ریاضیات جدید سال دوم ریاضی

۱ـ اگر نقاط P و Q و R اوساط اضلاع مثلث ABC باشند ثابت کنید که بدازای هر نقطهٔ دلخواه O:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

۲ـ نشان‌دهید هیچ دو ماتریس ۲ × ۲ای مانند A و B نمی‌توان‌یافت به‌طوری‌که $AB-BA=I_2$

۳ـ اگر

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۵\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}$$

ماتریس X را از معادلهٔ زیر به دست آورید:

$$AX=B$$

۴ـ مطلوب است محاسبهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix}۲\sqrt{۲} & -۲\sqrt{۲}\\ ۲\sqrt{۲} & ۲\sqrt{۲}\end{bmatrix}^{۹۶}$$

تستهای ریاضیات جدید سال‌دوم ریاضی

۱ـ تابع $f: IR-\{۰\} \to IR$ با قانون

$$f(x)=\frac{|x|+۱}{x}$$

مفروض است،کدام گزاره درست است؟

الف) تابع یک‌بیک وپوششی است.

ب) تابع یک‌بیک است ولی پوششی نیست.

ج) تابع یک‌بیک نیست ولی پوششی‌است.

د) تابع نه‌یک‌بیک و نه‌پوششی است.

۲ـ برای اینکه ضرب دو ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

تعویض‌پذیر باشد داریم :

الف) $a=b$ و $c=d$

ب) $a=d$ و $b=c$

ج) $a=c$ و $b=-d$

د) $a=d$ و $b=-c$

۳ـ اگر

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}$$

در این‌صورت $A^{۶}$ برابر است با

الف) $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{-۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}\frac{۲۷}{۶۴} & \frac{-۱}{۶۴}\\ \frac{۱}{۶۴} & \frac{۲۷}{۶۴}\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

۴ـ نقطهٔ $M(۶ , -۱)$ تحت ماتریس A به نقطهٔ $M'(-۶ , ۱)$ تبدیل یافته ماتریس تبدیل A کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$

۵ـ اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$، آنگاه کدام‌درست‌نیست؟

الف) $A^{۲}=A^{-۱}$ ب) $A^{۳}=I$

ج) $A^{۲}=I$ د) $A^{۴}=A$

۶ـ مجموعهٔ $A=\{۱ , -۱\}$ باکدام زوج از اعمال

زیر تشکیل گروه می‌دهد؟

الف) ضرب و تقسیم ب) جمع و تفریق

ج) ضرب و جمع د) ضرب و تفریق

۷ــ عمل * در N به صورت

$$a*b = Max\{a , b\} - ۲$$

تعریف شده حاصل

$$[(۳*۵)*۶] + [۳*(۵*۶)]$$

کدام است؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۶ د) ۱۹

۸ــ اگر در Z داشته باشیم

$$x*y = x + y + ۵$$

در این صورت عضو بی‌اثر کدام است؟

الف) ۵ ب) $\frac{۱}{۵}$ ج) ۲۵ د) ۵−

۹ــ کدام یك زیر گروه (+ , Z) است؟

الف) اعداد طبیعی ب) اعداد زوج

ج) اعداد فرد د) اعداد اول

۱۰ــ عمل * درجدول مقابل تعریف شده‌است، کدام‌حکم در موردآن‌برقرار است؟

الف) عضو خنثی ۲ وجا به‌جایی دارد

ب) عضو خنثی ۱ و جا به‌جایی‌ندارد

ج) عضوخنثی‌ندارد و جا به‌جایی‌دارد

د) عضو خنثی ۳ وجا به‌جایی دارد

*	۲	۳	۴
۲	۴	۲	۳
۳	۲	۳	۴
۴	۳	۴	۲

مسائل ریاضیات جدید سال سوم ریاضی

۱ــ ۳زوج‌خواهر و برادر، سرمیزی‌نشسته‌اند(هرطرف ۳ نفر). این ۶ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینندکه همواره هرخواهر روبروی برادرخودش باشد.

۲ــ ۵زوج زن وشوهر به چند طریق می‌توانند دور یك میز گرد قرار بگیرند به طوری‌که هر زن درکنار شوهر خود باشد.

۳ــ چند عدد ۴ رقمی وجود داردکه در هریك از آنها دو رقم زوج و دو رقم‌فرد وجود داشته‌باشد.

۴ــ یك مجموعهٔ n عضوی چند زیر مجموعهٔ k عضوی دارد؟ $(k<n)$

۵ــ ۳ سکه موجود است‌که یکی سالم، دومی در هردو طرف‌آن خط و سومی طوری است‌که احتمال خط آمدن $\frac{۱}{۳}$ است. دو مجموعهٔ

$$B=\{۱,۲, \cdots , ۱۰\} \text{ و } A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

مفروض‌اند. قرارداد می‌کنیم پس از انتخاب یکی از سکه‌ها پرتاب‌آن اگرخط‌بیاید از اعداد مجموعهٔ A و اگر شیر بیاید از اعضای مجموعهٔ B یك‌عددرا انتخاب می‌کنیم (به‌تصادف) معین‌کنید احتمال آن راکه عدد برداشته شده **فرد** باشد.

۶ــ ثابت‌کنید اگر دریك مسألهٔ آماری داده‌های آماری را k برابر کنیم میانگین‌داده‌های‌جدیدk برابر وانحراف‌معیار داده‌های‌جدید تغییری نمی‌کند.

تستهای ریاضیات جدید سوم ریاضی

۱ـ a را چه‌عددی در نظر بگیریم تا بردارهای

$(-۶ , a+۱)$ و $(۲ , a)$

وابسته خطی باشند.

الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) -۴ د) $-\frac{۱}{۴}$

۲ـ از کیسه‌ای که محتوی ۴مهره‌قرمز و ۵ مهره آبی است ۴ مهره به‌تصادف و با هم‌بیرون می‌آوریم احتمال اینکه دومهره همرنگ نباشند کدام است؟

الف) $\frac{۱۰}{۱۷}$ ب) $\frac{۲۱}{۲۳}$ ج) $\frac{۲۰}{۲۱}$ د) $\frac{۶}{۱۲۶}$

۳ـ کدام یك از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) هرفضای‌برداری زیرفضای‌نابدیهی دارد.

ب) مجموعهٔ $\{۰\}$ نمی‌تواندزیر فضا باشد.

ج) فضای برداری IR روی‌خودش‌زیرفضای نابدیهی ندارد.

د) اعداد گویا روی IR یك فضای برداری است.

۴ـ به چندطریق می‌توان ۶ مهره‌رنگی‌راکنارهم‌چید به قسمی که دومهره مخصوص کنارهم واقع نشوند؟

الف) $۲!-۶!$ ب) $۲\times ۵!-۶!$

ج) $۵!\times ۲!$ د) $۶!\times ۲!$

۵ـ می‌خواهیم از بین ۱۲ نفرکه ۴نفر از آنها شیرازی هستندیك کمیسیون۴ نفری تشکیل دهیم به‌قسمی که‌رئیس کمیسیون شیرازی باشد، این‌عمل به چندطریق ممکن‌است.

الف) ۶۶۰ ب) ۵۴۰ ج) ۱۶۹ د) ۴۵۰

۶ـ در معدل گیری یك‌کلاس ۵۰نفری به اشتباه نمره ۹ را ۱۹ گرفته‌ایم، معدل ۱۶ به‌دست آمده‌است. میانگین واقعی کدام است؟

الف) ۱۶/۷ ب) ۱۵/۷

ج) ۱۶/۸ د) ۱۵/۸

۷ـ در بسط $(a+b+c)^۷$ ضریب جملهٔ $a^۴b^۲c$ کدام است؟

الف) ۲۱۰ ب) ۱۰۵

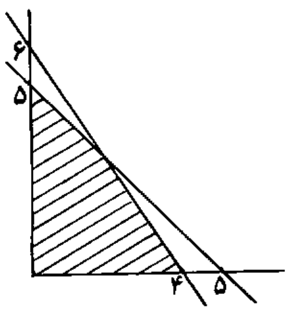
ج) ۳۰۵ د) ۴۱۰

۸ـ در کیسه‌ای ۴مهره‌قرمز و ۵مهره‌آبی وجود دارد. به چندطریق می‌توان‌از این کیسه ۴ مهره خارج کرد به طوری که لااقل ۳ مهره آبی‌باشد؟

الف) ۵۴ ب) ۴۵ ج) ۲۰۰ د) ۲۰۱

۹ـ بیشینهٔ $۳x+۲y$ که درشرایط نشان‌داده‌شده‌صدق می‌کند کدام‌است؟

الف) ۸ ب) ۷ ج) ۱۴ د) ۱۲



مسائل ریاضیات جدید سال چهارم ریاضی

۱ـ ثابت کنید اگر $(a , b)=۱$ آنگاه:

$(۲a+b , a+۲b)$

مساوی ۱ یا ۳ است.

۲ـ دو رقم سمت‌راست عدد $۱۳^{۱۰}$ را پیدا کنید.

۳ـ باقیمانده تقسیم $۲^{۱۱۳۷}$ برعدد ۱۷ را تعیین کنید.

۴ـ بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+md \end{vmatrix} = ۰$$

۵ـ ماتریس تقارن نسبت بـه خط $۳x - ۲y = ۰$ را بنویسید.

تستهای ریاضیات جدید چهارم ریاضی

۱ـ گزارهٔ $(p \Longrightarrow q) \vee [p \Longrightarrow (q \wedge r)]$ هم‌ارز است با:

الف) $\sim p \Longrightarrow q$ ب) $p \vee q$

ج) $p \Longrightarrow q$ د) $p \Longrightarrow \sim q$

۲ـ گزارهٔ $[p \Longrightarrow (q \vee r)] \wedge (\sim p \wedge r)$ هم‌ارز است با:

الف) $p \wedge q$ ب) $p \vee r$

ج) $\sim p \wedge r$ د) $p \wedge (q \vee r)$

۳ـ اگر U مجموعهٔ اعداد صحیح زوج باشد، U با دو عمل جمع وضرب معمولی:

الف) حلقه تعویض‌پذیر است.

ب) حلقه تعویض‌پذیر و یکدار است.

ج) حلقه دارای مقسوم علیه‌صفر است.

د) میدان است.

(سراسری ۶۵)

۴ـ در بحث مقابل کدام‌یك از گزاره‌های زیر را به جای «?» قراردهیم تا بحث معتبر شود؟

الف) $s \vee q$ ب) $q \wedge \sim p$

ج) $s \wedge q$ د) هرسه مورد درست است

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ s \Longrightarrow \sim p \\ \sim p \wedge s \\ \hline \therefore ? \end{array}$$

۵ـ Q مجموعهٔ اعدادگویا است و I یك ایده‌آل آن و $۲ \in I$ دراین‌صورت I کدام است؟

الف) اعداد صحیح ب) اعداد صحیح مثبت

ج) اعداد منطق د) اعداد منطق و مثبت

۶ـ کدام‌یك‌از دستگاههای‌زیر‌یك‌حوزهٔ‌درست نمی‌باشد؟

الف) $(Q, +, \times)$

ب) $(Z_۵, +, \times)$

ج) $(IR, +, \times)$

د) $(Z_۸, +, \times)$

۷ـ اگر ماتریسهای A و B پاد متقارن و تعویض‌پذیر باشند، کدام درست است؟

الف) AB پاد متقارن است.

ب) BA پاد متقارن است.

ج) AB متقارن است.

د) AB متقارن نیست.

۸ـ مقدار ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۰ ج) ۱− د) ۳−

(سراسری ۶۸)

۹ـ فرض کنیم A یك ماتریس متعامد باشد، $(A^{-1})^{\prime}$ برابر کدام است؟

الف) A ب) A^{-1} ج) $A^{\prime}$ د) I

(سراسری ۶۷)

۱۰ـ عدد $11^{10}-1$ مضرب کدام یك از اعداد زیر است؟

الف) ۹۹ ب) ۱۰۱ ج) ۱۰۰ د) ۹

۱۱ـ جواب معادلهٔ $2x \overset{7}{\equiv} 1$ کدام است؟

الف) $x=7k+4$ ب) $x=7k+5$

ج) $x=7k+1$ د) $x=7k+3$

۱۲ـ باقیمانده تقسیم $2^{2n+1}+13^{2n+1}$ بر ۷ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۱ ج) ۵ د) ۶

مسائل جبر سال اول

۱ـ حاصل هریك از عبارتهای زیررا حساب کنید.

A) $(\sqrt[7]{2-\sqrt{3}})(\sqrt[7]{2+\sqrt{3}})-(a\sqrt[4]{a^{-4}})=?$

B) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}+(\sqrt{\sqrt[5]{2}})^{3}-2^{0/3}-\sqrt[10]{8}=?$

C) $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=?$

۲ـ کسرهای زیررا گویا کنید.

A) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ B) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$

C) $\dfrac{c}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}$ D) $\dfrac{6}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$

۳ـ ریشه‌های معادلهٔ:

$$(2x^2+5)(x^3+1)(x^2-1)(x^2-3x+2)\times(2x-1)=0$$

را به‌دست آورید. و مجموعهٔ جوابهای معادله را بنویسید.

۴ـ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{8}{9}\\[2mm]\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}=\dfrac{7}{8}\end{cases}$$

را حل کنید.

۵ـ دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{2x+1}{3}>\dfrac{x-1}{6}\\[2mm]\dfrac{5x-1}{3}-\dfrac{x+2}{4}<\dfrac{2x-1}{12}\end{cases}$$

تستهای جبر سال اول

۱ـ معادلهٔ: $m(mx-1)=2x$ به‌ازای چه مقادیری از m جواب ندارد؟

الف) ۱ و -1 ب) $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

ج) ۲ و -2 د) $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$

۲ـ دریك تقسیم چندجمله‌ای اگردرجهٔ خارج قسمت و درجه باقی‌مانده باهم برابر باشند آنگاه‌درجهٔ مقسوم علیه‌برابر است با:

(n درجه چند جمله‌ای مقسوم است)

الف) $\dfrac{n-1}{2}$ ب) $n+1$

ج) $\dfrac{n+1}{2}$ د) $n-1$

۳ــ در معادله :

$$(x-3y)^8+(y^2-2x)^6=0$$

مقادیر (x,y) به‌ترتیب برابرند با:

الف) $(0,0)$ یا $(18,-6)$

ب) $(18,6)$ یا $(18,-6)$

ج) $(6,18)$ یا $(0,0)$

د) الف و ج صحیح.

۴ــ حاصل عبارت $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2}$ برابراست با:

الف) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ب) $5+2\sqrt{6}$

ج) $5-2\sqrt{6}$ د) هیچ‌کدام

۵ــ درصورتی‌که داشته باشیم:

$$2x+3y=21$$

مقادیر x و y را درعدد $\overline{34x3y}$ طوری تعیین‌کنیدکه این عدد بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

الف) $x=6$ ، $y=7$

ب) $x=3$ ، $y=5$

ج) $x=5$ ، $y=9$

د) $x=9$ ، $y=5$

۶ــ به‌ازای چه مقادیری‌از x عبارت:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^3-27}}}$$

دارای معنی است ؟

الف) $x\geqslant 27$ ب) $x\geqslant 60$

ج) $x\geqslant 3$ د) $x\geqslant 9$

۷ــ به‌ازای‌چه مقادیری‌از m دستگاه:

$$\begin{cases}3x-2my=2\\2y+x+4=0\end{cases}$$

جواب ندارد؟

الف) $\frac{-3}{2}$ ب) $\frac{-3}{4}$

ج) $\frac{-4}{3}$ د) $\frac{-9}{3}$

۸ــ حاصل عبارت :

$$\frac{(x^4-1)(x^4+x^2+1)}{x(x^2+1)(x^6-1)}$$

برابر است با :

الف) $\frac{1}{x^2-1}$ ب) $\frac{1}{x^3-1}$

ج) $\frac{1}{x^2}$ د) $\frac{1}{x}$

۹ــ حاصل :

$$(x^2+y^2-2xy)(1-\frac{2xy}{x^2+y^2})(x^2+y^2)^2\times$$

$$(x^2+y^2+2xy)(1-\frac{2xy}{(x+y)^2})$$

کدام است ؟

الف) ۱ ب) x^4-y^4

ج) $(x^4-y^4)^2$ د) هیچ‌کدام

۱۰ــ به عبارت :

$$\frac{x^2}{4}+4y^2$$

کدام‌یك ازمقادیر زیررا اضافه‌کنیم تا عبارت‌فوق‌به مربع‌کامل

تبدیل شود؟

الف) $\pm xy$ ب) $\pm ۲xy$

ج) $\pm ۴xy$ د) هیچ‌کدام

جبر و حساب سال دوم ریاضی

۱ـ معادلات زیررا حل کنید.

A) $(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^x+(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x=۲$

B) $\left(\frac{x+۱}{x}\right)^۲+\left(\frac{x}{x+۱}\right)^۲=۲$

C) $x^۳-۳x^۲+۳x-۶=۰$

D) $\sqrt{x^۲-x+۱}+\sqrt{x^۲-x+۲}=۳$

۲ـ ثابت کنید به‌ازای‌جمیع مقادیر m هریك ازخطوط زیر ازیك نقطهٔ ثابت می‌گذرند و مختصات آن نقطه را تعیین کنید.

A) $۲mx+(۱۰m-۳)y+۹-۲۶m=۰$

B) $(۴m^۲-۱)x+(۱۲m^۲+۴m+۱)y-۲۰m^۲-۸m-۳=۰$

۳ـ سه‌خط D و D' و D'' به معادلات:

$$\begin{cases} D: ax+y=-۱ \\ D': ay+bx=۱ \\ D'': ۲x-y=b \end{cases}$$

مفروض‌اند.

اولاً: a و b را چنان تعیین‌کنیدکه خط D' برخط D'' عمود وبا خط D موازی‌باشد ($ab\neq۰$).

ثانیاً: فاصلهٔ دوخط D و D' را حساب کنید.

ثالثاً: خط $y=mx+h$ را طوری تعیین‌کنیدکه از نقطهٔتقاطع D' و D'' بگذرد و با خط:

$$۲x+۳y+۱=۰$$

موازی باشد.

۴ـ جملهٔ nام یك رشته مساوی است با:

$$\frac{۴^n-۳}{۲^{n+۱}}$$

کدام جمله از این‌رشته مساوی با $\frac{۶۱}{۱۶}$ است.

۵ـ جملهٔ kام یك‌تصاعد حسابی مساوی S و جمله pام آن مساوی P است، این تصاعدرا مشخص‌کنید.

۶ـ اگرجملهٔ p ام یك‌تصاعدهندسی برابر R وجمله sام آن‌برابر T باشد تصاعد را مشخص کنید.

۷ـ آیا اعداد $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۷}$ می‌توانند جملاتی از یك‌تصاعد حسابی یا هندسی باشند.

۸ـ معادلات‌نمایی ولگاریتمی زیر را حل کنید.

A) $۲^x-۲^{۵-x}=۳$

B) $۳^{۴+۸+۱۲+\cdots+۴x}=۸۱$

C) $۲۵^x=۲۰^x+۱۶^x$

D) $۲^{\log x}+x^{\log ۲}=۲$

E) $\log_{\sqrt{۲}}x+\log_{\sqrt[۳]{۳}}x+\log_{\sqrt[۴]{۴}}x+\ldots+\log_{\sqrt[n]{n}}x=۱$

۹ـ حدود $|x|$ را بیابید.

$$\log_{\frac{۴}{۳}}(x^۲-۱)\geqslant-۲$$

۱۰ـ با فرض:

$$\log x=\log y=\log z=k$$

عبارت:

$$P=\sqrt[۷]{\frac{x^۵\sqrt[۳]{y^۲}}{\sqrt[۵]{x^۳y^۲z}}}$$

را برحسب k حساب کنید.

تستهای جبر سال دوم

۱ـ اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادله درجهٔ دوم:

$$x^2+2mx-3=0$$

باشند، مقدار عبارت $\dfrac{\log(ab)}{\log a \log b}$ برابراست با:

الف) $\dfrac{-2m}{3}$ ب) $\dfrac{3}{2m}$

ج) $\dfrac{2m}{3}$ د) $\dfrac{-3}{2m}$

۲ـ اگر $2-\sqrt{3}$ یك ریشهٔ معادلهٔ:

$$ax^2+bx+c=0$$

باشد وضرایب a و b و c گویا باشند، ریشهٔدیگرمعادله برابر است با:

الف) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ ب) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

ج) $-2+\sqrt{3}$ د) هیچ‌کدام

۳ـ اگر $(xyz\neq 0)$ $x^6+y^6+z^6=3x^2y^2z^2$ باشد، حاصل عبارت:

$$\frac{\sqrt[n]{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt[n]{x^2}+\sqrt[n]{y^2}+\sqrt[n]{z^2}}$$

برابر است با:

الف) $\sqrt[n]{3}$ ب) $\dfrac{\sqrt[n]{3}}{3}$

ج) $\sqrt[n]{9}$ د) $\dfrac{\sqrt[n]{9}}{3}$

۴ـ اگر $\dfrac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}=\dfrac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{x^{2n}}{x^{4n}+x^{2n}+1}$ برابر است با:

الف) $\dfrac{1}{2}$ ب) $\dfrac{1}{4}$ ج) $\dfrac{1}{8}$ د) $\dfrac{1}{16}$

۵ـ عبارت $\sqrt[4]{\log(x^2-3)}$ به ازای کدام مقادیر x تعریف‌نشده است؟

الف) $x\geqslant 3$ و $x\leqslant -3$

ب) $-2\leqslant x\leqslant 2$

ج) $x\geqslant 2$ و $x\leqslant -2$

د) $x\geqslant\sqrt{3}$ و $x\leqslant-\sqrt{3}$

۶ـ حاصل عبارت:

$$\frac{n}{\log_2^{n+1}}+\frac{n}{\log_{\frac{3}{2}}n+1}+\dots+\frac{n}{\log_{\frac{n+1}{n}}n+1}$$

برابر است با:

الف) $n\log_n n+1$ ب) $\log n$

ج) ۱ د) n

۷ـ دریك تصاعد حسابی، مجموع جملات:

$$S_n=6n^2+9\log_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

است. قدرنسبت وجمله‌اول تصاعد برابراست با:

الف) $a=3$ و $d=-12$

ب) $a=-3$ و $d=12$

ج) $a=3$ و $d=12$

د) هیچ‌کدام

۸ـ درمعادلهٔ $2x^2-mx+4=0$ ، ۵ و $x'+x''$ و

$x'x''$ به‌ترتیب تشکیل تصاعد عددی می‌دهند. m برابر است با:

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) هیچ کدام

۹ـ حاصل :

$$\left[(1-\frac{1}{3})^{2}(1-\frac{1}{4})^{2}(1-\frac{1}{5})^{2}\cdots(1-\frac{1}{n})^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

برابر است با :

الف) $1-\frac{1}{n}$ ب) ۱

ج) $\frac{2}{n}$ د) بی‌نهایت

۱۰ـ در صورتی که $log\,2 = 0/301$ باشد، 5^{25} چند رقمی است؟

الف) ۱۷ رقمی ب) ۱۸ رقمی

ج) ۱۹ رقمی د) ۲۰ رقمی

مسائل جبر سال سوم ریاضی

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$$

۲ـ مطلوب است محاسبهٔ حد هریك از توابع زیر در $x=1$:

A) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n}-1}{x-1}=?$

B) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^{n}-1)}{x^{2}-1}$

C) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

۳ـ هرکدام ازحدهای زیررا حساب کنید.

A) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^{3}}{2x^{2}-1}-\frac{x^{2}}{2x+1}\right)=?$

B) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^{2})tg\frac{\pi x}{2}=?$

C) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgtgtgtg\,x\;tg\,mx}{\sin\sin\sin x\,\sin nx}\right)=?$

۴ـ به‌ازای چه مقادیری از k، تابع f باضابطه‌های زیر پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}5-k^{2}x^{2} & x>-1\\ x+2 & x\leqslant -1\end{cases}$$

۵ـ مشتق توابع زیررا پیداکنید.

A) $y=\frac{x^{100}+3x^{75}+x^{51}}{x^{55}}$

B) $y=\sqrt[5]{x^{3}+x+1}$

۶ـ مطلوب است معادلهٔ خط قائم برمنحنی $y=\frac{x-1}{x+1}$، در نقطه‌ای به‌طول $x_0=1$.

۷ـ در تابع :

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

پارامترهای a و b و c و d را چنان تعیین کنید که اولاً مرکز تقارن منحنی $\omega(\frac{-۲}{۳}, ۲)$ باشد، ثانیاً برخط $y = x - ۱$ مماس باشد.

تستهای جبر سال سوم

۱ـ باقی‌ماندهٔ چندجمله‌ای:

$$p(x) = x^{۹۹۹} + x^{۸۸۸} + \dots + x^{۱۱۱} + ۱$$

بر $g(x) = x^{۹} + x^{۸} + \dots + x + ۱$ برابر چیست؟

الف) $R = g(x)$ ب) $R = x^{۱۰} - ۱$

ج) $R = ۰$ د) هیچ‌کدام

۲ـ به‌ازای چه مقادیری از $n \in N$ بسط دوجمله‌ای:

$$\left(\sqrt{x^{۲}} - \frac{۱}{\sqrt[۵]{x^{۳}}}\right)^{n}$$

دارای جملات مستقل از x است؟

الف) $n = ۱۹k$ ب) $n = ۹k$

ج) $n = ۱۹k - ۹$ د) هیچ‌کدام

۳ـ اگر دامنهٔ تابع $y = f(x)$، فاصله $(۰ , ۱)$ باشد دامنهٔ تابع $f([x+۱]\log x)$ کدام است؟

الف) $(۰ , ۱]$ ب) $[۱ , ۱۰)$

ج) $(۱ , ۱۰)$ د) $(۱ , ۱۰]$

۴ـ حد $\left(\frac{۱}{x^{۲}} - \frac{۱}{\sin^{۲}x}\right)$ وقتی $x \to ۰$ برابراست با:

الف) $-\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) ۰ د) $-\infty$

۵ـ معادلهٔ خط قائم بر منحنی $y = x^{۲} + \cos x$ در نقطهٔ $x = ۰$ چنین است:

الف) $x = ۱$ ب) $x = ۰$

ج) $y = ۰$ د) $y = ۱$

مسائل جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی

۱ـ حد تابع:

$$y = \frac{\sin \sin \sin \cdots\cdots \sin x}{tg\, tg\, tg \cdots\cdots tg\, x}$$

وقتی $x \to ۰$ چند است؟

۲ـ پیوستگی تابع زیر را در نقطهٔ $x_{۰} = ۱$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} + \frac{x-۱}{|x-۱|} + ۱ & \text{اگر } x \neq ۱ \\ ۱ & \text{اگر } x = ۱ \end{cases}$$

۳ـ در تابع:

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} + B & x < -۳ \\ -۴ & x = -۳ \\ Ax + ۵ & x > -۳ \end{cases}$$

مقادیر A و B را طوری تعیین کنید تا تابع در نقطهٔ $x_{۰} = -۳$ مشتق‌پذیر باشد.

۴ـ مشتق مرتبهٔ دوم $f(x^{۳} + x)$ را به دست آورید.

۵ـ اگر منحنی تابع:

$$y = \frac{۳x + ۶}{۳x^{۲} + kx + s}$$

فقط مجانب قائمی به معادلهٔ $x - ۲ = ۰$ داشته باشد k و s را بیابید.

۶ـ در تعداد ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^3-3x^2+4x+m=0$$

به‌ازای مقادیر مختلف m بحث کنید . سپس بـه‌ازای $m=2$ ریشه‌های حقیقی معادله‌را به دست آورید.

۷ـ انتگرالهای زیررا حساب کنید.

A) $\int \frac{x^3\sqrt[2]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}dx$ B) $\int \frac{cotg^{100}3x}{sin^2 3x}dx$

C) $\int \frac{(3x+1)dx}{(3x^2+2x+7)^9}$

۸ـ سطح محصور بین منحنی تابع :

$$y=\sqrt{5-5x^2}$$

و محور طولها را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم ایجاد شده چقدر است؟

۹ـ سطح محصور بین دومنحنی نمایش تغییرات توابع:

$$\begin{cases} y=x^2+3 \\ y=-x^2+5x \end{cases}$$

را بیابید .

۱۰ـ انتگرال معین زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+tg^n x}$$

تستهای جبر و آنالیز چهارم ریاضی

۱) اگر $(fog)(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$، آنگاه D_f کدام است؟

الف) $[1 , +\infty)$ ب) $(-\infty , 1)$

ج) $[-1 , 1]$ د) $(-\infty , +\infty)$

۲ـ قرینه منحنی تابع :

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$$

نسبت به نیمساز ربع اول و سوم کدام است؟

الف) $y=\sqrt[3]{x^3+1}$

ب) $y=-\sqrt[3]{x^3+1}$

ج) $y=\sqrt[3]{x^3-1}$

د) $y=-\sqrt[3]{x^3-1}$

۳ـ اگر داشته باشیم :

$$\text{حد}\,(\sqrt{x^2-4x+5}-ax-b)=0$$

مقدار $a+b$ برابراست با:

الف) ۱ ب) ۱ − ج) ۲ د) ۲ −

۴ـ در تابع :

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-b & x>-1 \\ -1 & x=-1 \\ ax+2b & x<-1 \end{cases}$$

مقدار $a+b$ را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه $x=-1$ پیوسته باشد.

الف) ۱ − ب) ۳ − ج) ۵ − د) ۷ −

۵ـ در تابع :

$$f(x)=\begin{cases} Ax+1 & x>1 \\ 3 & x=1 \\ Bx^2+2 & x<1 \end{cases}$$

مقدار $A-B$ را طوری تعیین کنید که تابـع در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد .

الف) ۱ − ب) ۱ ج) ۰ د) هیچ کدام

مسائل جبر سال سوم تجربی

۱ــ حد هریك‌از توابع زیررا در ازای مقدار داده‌شده محاسبه‌کنید.

الف) $\lim \dfrac{1+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{1+\sin x-\cos x} \quad , \quad x\to 0$

ب) $\lim \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} \quad , \quad x\to 0^+$

ج) $\lim \dfrac{\sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\cdots\sin\frac{x}{n}}{x^n} \quad , \quad x\to 0$

۲ــ اگر :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{a|x-1|+2x-1}{|3-x|+ax+3}=\frac{3}{4}$$

باشد، مقدار a را به دست آورید.

۳ــ مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax & , x>2\\ 3 & , x=2\\ bx+1 & , x<2\end{cases}$$

در نقطهٔ $x=2$ پیوسته باشد.

۴ــ اگر :

$$g(x)=tg x \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

باشد اندازهٔ مشتق‌تابع $(fog)(x)$ را درازای $x=\frac{\pi}{8}$ بــه دست آورید.

۵ــ تابع $y=\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+b}$ مفروض‌است. ثابت کنید که بین این تابع و مشتقهای آن رابطهٔ

$$\frac{2y'^2-yy''}{y^3}=\frac{2}{b-a}$$

برقرار است.

۶ــ مقدار a را به قسمی تعیین کنید که مجموع طول و عرض نقطهٔ می‌نیمم تابع $y=x^2+ax-1$ برابر $\frac{-7}{4}$ باشد.

۷ــ تابع $y=x^3+bx^2+cx-2$ مفروض است. ضرایب b و c را چنان‌تعیین‌کنید که نمودار تغییرات این‌تابع در نقطه‌ای به طول -2 برخط به معادلهٔ $x+y=2$ مماس باشد .

تستهای جبر سال سوم تجربی

۱ــ چهارنقطهٔ A و B و C و D روی یك محور قرار دارند ، حاصل عبارت :

$$\frac{\overline{CA}+\overline{AB}+2\overline{BC}}{\overline{BA}+\overline{AD}+\overline{DB}+3\overline{CB}}$$

کدام است ؟

۱) $\frac{-1}{3}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲ــ به ازای‌کدام مقدار m نقطهٔ :

$$A(m-1\ ,\ 2m+3)$$

برمبدأ مختصات منطبق می‌شود؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{3}{2}$

۳) $-\frac{3}{2}$ و ۱ ۴) هیچ مقدار

۳– مختصات نقطه‌ای از ربع دوم که روی خط به معادلهٔ:

$y+۲x-۱=۰$

واقع بوده و فاصلهٔ آن تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{۲}$ باشد کدام است ؟

۱) $\left(-\frac{۱}{۵}, \frac{۷}{۵}\right)$ ۲) $(۱ , -۱)$

۳) $\left(\frac{۱}{۵}, -\frac{۷}{۵}\right)$ ۴) $(-۱ , ۱)$

۴– در تابع :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{x-۱} , & x>۰\\ x+b , & x\leqslant ۰\end{cases}$$

اگر $f(۲)=۲$ و $f(-۲)=۰$ باشد ، $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵– تصویر نقطهٔ $A(۳ , ۵)$ روی نیمساز ربع اول و سوم کدام نقطه است ؟

۱) $A'(۵ , ۳)$ ۲) $A'(۴ , ۴)$

۳) $A'(۳ , ۵)$ ۴) $A'(-۴ , -۴)$

۶– حد $\frac{k\sin x\sin ۲x}{\cos ۳x(۱-\cos x)}$ وقتی $x\to۰$ کدام است؟

۱) $۴k$ ۲) $\frac{k}{۴}$ ۳) $۸k$ ۴) k

۷– اگر حد عبارت $\frac{۲x^۳+x+۱}{x^a+x^۲+۲}$ وقتی $x\to\pm\infty$ برابر صفر باشد، کدام رابطه درست است؟

۱) $a<۳$ ۲) $a\geqslant ۳$

۳) $a>۳$ ۴) $a\leqslant ۳$

۸– به ازای کدام مقدار a تابع:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a\sin x}{x} , & x\neq ۰\\ ۴a+۱ , & x=۰\end{cases}$$

در نقطه $x=۰$ پیوسته است ؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۳–

۹– در تابع :

$f(x)=ax^۳+bx^۲+cx-۱$

اگر : $f'(۱)=۰$ و $f''(-۲)=۶$ و $f'''(۲)=-۶$ باشد. اندازهٔ $۳a-۴b-c$ کدام است؟

۱) ۲– ۲) ۱– ۳) ۰ ۴) ۱

۱۰– اندازهٔ مشتق تابع :

$f(x)=tg\left(\cos\frac{x}{۲}\right)$

در نقطهٔ $x_۰=\pi$ کدام است؟

۱) ۲– ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{-۱}{۲}$

۱۱– کدام یك از توابع زیر همواره صعودی است ؟

۱) $y=\frac{۲}{x}$ ۲) $y=x^۲+۱$

۳) $y=-x^۲+۱$ ۴) $y=x^۳+x^۲+۵x$

۱۲– اگر نقطهٔ $S(-۲ , ۴)$ رأس سهمی به معادلهٔ:

$y=x^۲+ax+b$

باشد، اندازهٔ $۲a+b$ کدام است؟

۱) ۸– ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۶–

۱۳ـ ضریب‌زاویهٔ خط قائم برمنحنی به معادلهٔ:

$$y = -x^2 + 2x$$

درنقطه‌ای‌به عرض ۳ ـ واقع در ربع سوم کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) ۳- ۴) $\frac{1}{3}$

۱۴ـ اگرخط مماس برمنحنی تابع:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

درنقطه‌ای به طول ۲ ـ موازی محورطولها باشدکدام رابطه بین a و b برقرار است ؟

۱) $4a + b = 12$ ۲) $4a - b = 12$

۳) $4a - b = -12$ ۴) $-4a + b = 14$

مسائل جبر سال چهارم تجربی

۱ـ دایرهٔ به معادلهٔ :

$$x^2 + y^2 + ax + b = 0$$

مفروض است. ضرایب a و b را به قسمی تعیین‌کنیدکه طول مرکز این‌دایره برابر۱ باشد واین دایره ازخط به معادلهٔ :

$$3x - 4y + 12 = 0$$

وتری به طول ۸ جداکند.

۲ـ خطوط $x = 2$ و $y = -1$ به ترتیب محورهای کانونی و ناکانونی یك بیضی می‌باشند که خط واصل بین دو رأس A و B از آن به صورت: $3x + 2y - 10 = 0$ می‌باشد. معادلهٔ این بیضی‌را بنویسید.

۳ـ قطر اطول یك‌بیضی برقطر افقی‌دایره‌به معادلهٔ:

$$2x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - \frac{3}{2} = 0$$

منطبق‌است وفاصلهٔ کانونی آن‌برابر ۲ می‌باشد. معادله این بیضی را تعیین‌کنید.

۴ـ هذلولی به معادلهٔ :

$$y^2 - x^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

را رسم‌کنید.

نخست درعدهٔ نقاط تقاطع خط :

$$D : y = mx + 5$$

با هذلولی‌فوق بدازای‌جمیع مقادیر پارامتر m بحث کنید. سپس درحالتی‌که خط D هذلولی‌را در دو نقطهٔ M_1 و M_2 قطع‌می‌کند معادلهٔ‌مکان‌هندسی‌نقطهٔ I وسط پاره‌خط M_1M_2 را وقتی‌پارامتر m تغییر می‌کند، پیداکنید.

۵ـ خط $AA' : y - 2 = 0$ محورکانونی و خط :

$$\Delta : y = 7x - 1$$

مجانب ونقطهٔ $F(3, 2)$ کانون‌یك‌هذلولی‌می‌باشند. معادلهٔ این هذلولی‌را بنویسید.

۶ـ تابع اولیه هریك ازتوابع زیررا پیداکنید.

الف) $f(x) = \sin^2 x \sin 3x$

ب) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{(1 + \cos^2 x)^2}} + \frac{x + 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

۷ـ اگر :

$$F(x) = \int (x^2 - x - 1)^{\frac{3}{2}} dx$$

باشد، $F'(2)$ را محاسبه‌کنید.

۸ـ سطح محصور بین منحنی تابع

$$y = x^3 - 3x$$

ونیمساز ربع‌دوم وچهارم، آن‌قسمتی راکه‌درناحیهٔ‌دوم محورهای مختصات واقع‌است حساب‌کنید.

تستهای جبر سال چهارم تجربی

۱ـ اگر دو خط به معادلات :

$$2x-y-2=0 \quad \text{و} \quad ax+y+3=0$$

روی محور طولها متقاطع باشند اندازهٔ a کدام است؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) 2 ۴) -2

۲ـ مختصات نقطه‌ای از خط به معادلهٔ $y-2x-1=0$ که از خط:

$$\Delta: 3x-4y-1=0$$

به فاصلهٔ ۲ باشد کدام است؟

۱) $(3, 5)$ ۲) $(-3, -5)$
۳) $(-3, 5)$ ۴) $(3, -5)$

۳ـ اگر :

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$$ و

$$g(x)=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$$

باشد، حاصل $f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $2x$ ۳) 2 ۴) $-2x$

۴ـ اگر :

$$f'(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

باشد مشتق $f(tgx)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{\cos 2x}$ ۲) $\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{\sin 2x}$
۳) $\frac{1}{\sin^2 x}\sqrt{\cos 2x}$ ۴) $\frac{1}{\sin^2 x}\sqrt{\sin 2x}$

۵ـ ضریب‌زاویهٔ خط‌قائم برمنحنی نمایش تغییرات تابع

$$y=-2x^3+x^2$$

در نقطهٔ عطفش کدام است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) -2 ۴) -1

۶ـ تابع :

$$y=x^3+ax^2+3x-1$$

به‌ازای چه مقادیری از a همواره صعودی است؟

۱) $-3<a<3$ ۲) $a>3$
۳) $a<-3$ ۴) $a\geqslant 3$

۷ـ معادلهٔ :

$$(x-1)^3+(4-2x)^3+(x-3)^3=0$$

چند ریشه دارد؟

۱) 3 ۲) 2 ۳) 1 ۴) 0

۸ـ برمنحنی نمایش تغییرات تابع :

$$y=x^3-3x^2+2$$

دو مماس به موازات محور xها رسم‌شده است. فاصله بین این دوخط مماس چقدر است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۹ـ معادلهٔ مکان هندسی مرکز تقارن منحنی تابع:

$$y=\frac{(m-1)x+2}{x-2m}$$

وقتی پارامتر m تغییر می‌کند کدام است؟

۱) $y=x-1$ ۲) $y=\frac{x}{2}-1$
۳) $y=2x-1$ ۴) $y=\frac{x}{2}+1$

۱۰ـ اگر از نقطهٔ $M(a-2, b+1)$ قائمهای بی‌شماری بر دایره به معادلهٔ :

$$x^۲+y^۲-۲x+y+۱=۰$$

بتوانیم رسم کنیم، مقدار $a+۲b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۱ـ اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره به معادلات:

$$(x-۴)^۲+(y+۳)^۲=۱ \quad \text{و} \quad x^۲+y^۲=۴$$

کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲ـ معادلهٔ بیضی که مرکزش نقطهٔ $C(۲\ ,\ -۳)$ و برمحورهای مختصات مماس می‌باشد کدام است؟

۱) $\frac{(x+۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۳)^۲}{۴}=۱$

۲) $\frac{(y+۳)^۲}{۹}+\frac{(x-۲)^۲}{۴}=۱$

۳) $\frac{y^۲}{۹}+\frac{x^۲}{۴}=۱$

۴) $\frac{(y+۳)^۲}{۴}+\frac{(x-۲)^۲}{۹}=۱$

۱۳ـ نقاط $F(۱\ ,\ ۱)$ و $F'(-۳\ ,\ ۱)$ کانونهای یک بیضی می‌باشند که برمحورxها مماس است. طول قطر بزرگ این بیضی کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۴ـ نقطهٔ $F(۱\ ,\ ۵)$ کانون یک هذلولی است که محور کانونیش موازی محورعرضها و خط $\Delta: ۲y-x=۳$ یک مجانب آن است. عرض مرکز این هذلولی کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵ـ نقاط :

$$F(۱+\sqrt{۲}\ ,\ -۱) \quad \text{و} \quad F'(۱-\sqrt{۲}\ ,\ -۱)$$

کانونهای یک هذلولی متساوی‌الساقین می‌باشند. معادلهٔ این هذلولی کدام است؟

۱) $x^۲-y^۲-۲x=۱$

۲) $x^۲-y^۲+۲x-۲y=۱$

۳) $x^۲-y^۲-۲x-۲y=۱$

۴) $x^۲-y^۲+۲x-۲y=۱$

۱۶ـ معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود برهم برسهمی به معادلهٔ :

$$(y-۱)^۲=-۲(x+۲)$$

می‌توان رسم نمود کدام است؟

۱) $۲x+۱=۰$ ۲) $۲x+۳=۰$

۳) $-۲x+۵=۰$ ۴) $۲y+۳=۰$

۱۷ـ اگر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=۱$ برمحورxها مماس و $f''(x)=۶x$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^۳-۲x+۱$ ۲) $x^۳-۳x+۲$

۳) $x^۳-۳x^۲+۱$ ۴) $۲x^۳-x^۲+۱$

۱۸ـ مساحت سطح محصور بین دوسهمی به معادلات:

$$x^۲=۲py \ ,\ y^۲=۲px$$

کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}p^۳$ ۲) $\frac{۴}{۳}p^۲$

۳) $\frac{۳}{۴}p^۲$ ۴) $\frac{۳}{۴}p^۳$

مسائل مثلثات دوم تجربی و ریاضی

۱ـ معادلات مثلثاتی زیررا حل کنید. [رشته تجربی]

الف) $cosec^4 2x - 4 = 0$

ب) $cotg x + tg x = cosec x + sec x$

ج) $2\sin^3 x + \sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$

د) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

۲ـ معادلات مثلثاتی زیررا حل کنید. [رشته ریاضی]

الف) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

ب) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

۳ـ از دستگاه زیر x را حذف کنید:

$$\begin{cases} cosec x - \sin x = a \\ \sec x - \cos x = b \end{cases}$$

۴ـ ثابت کنید ماکزیمم و می‌نیمم عبارت مثلثاتی:

$y = a\sin x + b\cos x$

به ترتیب عبارت است از:

$-\sqrt{a^2+b^2}$ و $\sqrt{a^2+b^2}$

تستهای مثلثات سال دوم تجربی و ریاضی

۱ـ انتهای کمانهای مثلثاتی $\frac{3k\pi}{5} + \alpha$ دردایرهٔ مثلثاتی رئوس کدام شکل‌اند؟

۱) پنج‌ضلعی منتظم ۲) مثلث متساوی‌الاضلاع

۳) پنج‌ضلعی غیرمشخص ۴) ده‌ضلعی منتظم

۲ـ اگر $\frac{\sin\alpha}{tg\alpha} > 0$ باشد انتهای کمان α درکدام ربع دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) فقط ربع اول ۲) فقط ربع‌دوم

۳) ربعهای‌اول وسوم ۴) ربعهای‌اول وچهارم

۳ـ در صورتی که:

$$\frac{-\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

باشد حداکثرمقدار عبارت $\sin^2 x - 2\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{11}{4}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۴ـ عبارت:

$$\sin\frac{217\pi}{6}\cos\left(\frac{-217\pi}{6}\right)tg\left(\frac{-137\pi}{6}\right)$$

مساوی کدام مقدار است؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{-1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۵ـ حاصل عبارت:

$$cotg\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - tg\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(7\pi + x)$$

کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sin 2x}$ ۲) $\frac{2}{\sin 2x}$

۳) $\frac{1}{\cos 2x}$ ۴) $\frac{2}{\cos 2x}$

۶ـ اگر: $cotg\varphi = m - 1$

$(m \leqslant -2 \ , \ m \geqslant 0) \ , \ \sin\varphi = \frac{1}{m+1}$

باشد، $\cos\varphi$ چقدر است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{-3}{5}$ ۴) $\frac{-4}{5}$

۷ـ حاصل عبارت:

$$\frac{\sin^2 x\, tg^2 x}{1+tg^2 x}+\frac{\cos^2 x\, cotg^2 x}{1+cotg^2 x}+2\sin^2 x\cos^2 x$$

کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۱− ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۲−

۸ـ مجموع جوابهای معادلهٔ:

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

که درفاصله $[0 \;,\; \pi]$ واقع‌اند کدام است؟

۱) $\frac{6\pi}{5}$ ‏ ۲) $\frac{11\pi}{9}$ ‏ ۳) $\frac{13\pi}{9}$ ‏ ۴) $\frac{15\pi}{9}$

مسائل مثلثات سال سوم تجربی و ریاضی

۱ـ هریك‌از معادله‌های زیر را حل‌کنید:

الف) $2\sin x-4\sin^3 x=\cos 3x+\cos x$

ب) $1-4\cos^4\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 6x$

ج) $Arc\; tg\,\frac{x+1}{x^2+1}+2Arc\cos\frac{1}{2}-Arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)=Arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲ـ هریك‌از عبارتهای زیر را به مجموع تبدیل‌کنید.

الف) $4\sin^2 2x\cos 3x$

ب) $4\cos x\cos(60-x)\cos(60+x)$

۳ـ مشتق هریك‌از توابع زیررا به دست‌آورید.

الف) $y=\sin^2\sqrt[5]{x^2+x-1}$

ب) $y=tg\sqrt{x}+\sqrt{tg x}$

ج) $y=\cos\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$

د) $y=tg^3 2x\cdot cotg^5(x+\sqrt{x})$

۴ـ اگر :

$$y=\sin^3 2x\cos 2x-\cos^3 2x\sin 2x$$

باشد ثابت‌کنیدکه $y''-64y=0$ است.

تستهای مثلثات سال سوم تجربی و ریاضی

۱ـ حاصل عبارت:

$$\sin x+\cos x-|\sin x-\cos x|$$

وقتی $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{8}$ باشدکدام است؟

۱) $2\sin x$ ‏ ۲) $2\cos x$

۳) $\sin x$ ‏ ۴) $\cos x$

۲ـ اگر :

$$\cos 4x=3m-2 \quad و \quad \frac{-\pi}{12}<x\leqslant\frac{\pi}{12}$$

باشد حدود m کدام است؟

۱) $\frac{5}{6}<m<1$ ‏ ۲) $\frac{5}{6}<m\leqslant 1$

۳) $\frac{5}{6}\leqslant m<1$ ‏ ۴) $\frac{5}{6}\leqslant m\leqslant 1$

۳ـ در صورتی که :

$$\cos x<0 \quad و \quad \sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

باشد $tg\frac{x}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ‏ ۲) $\sqrt{3}$ ‏ ۳) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ ‏ ۴) $-\sqrt{3}$

۴ـ معادلهٔ :

$$2(\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x)=1$$

در فاصلهٔ $[\pi\ ,\ 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵ـ عبارت $tg10^\circ tg50^\circ tg70^\circ$ با کدام یك از مقادیر زیر برابر است؟

۱) $tg80^\circ$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $tg40^\circ$ ۴) $\sqrt{3}$

۶ـ عبارت $\sin 42+\cos 72$ برابر کدام یك از عبارتهای زیر است؟

۱) $\sqrt{3}\cos 12$ ۲) $\cos 24$

۳) $\cos 12$ ۴) $\sqrt{3}\cos 24$

۷ـ حاصل عبارت :

$$\sin\left[3\mathrm{Arc}\cos\frac{1}{2}+2\mathrm{Arc}\,tg(1)+\mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}-2\mathrm{Arc}\,cotg(-\sqrt{3})\right]$$

کدام است ؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

۸ـ حاصل عبارت:

$$\sin x\cos x+\sin x\cos 3x+\sin x\cos 5x+\sin x\cos 7x-\frac{1}{2}\sin 8x$$

کدام است ؟

۱) $\sin 9x$ ۲) $\sin 8x$

۳) $\sin 7x$ ۴) ۰

مسائل مثلثات سال چهارم تجربی

۱ـ در صورتی که :

$$0<x<\frac{\pi}{2} \quad و \quad \sin 2x=\frac{1}{4}$$

باشد $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ را به دست آورید.

۲ـ معادلهٔ :

$$(m-2)\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=m+3$$

مفروض است .

اولاً ـ حدود m را به‌قسمی بیابید که معادله‌دارای‌جواب باشد .

ثانیاً ـ مقدار m را طوری تعیین‌کنید که یك جواب معادله $x=\frac{\pi}{2}$ باشد.

ثالثاً ـ مقدار m را چنان بیابید که $tg\frac{x}{4}=2$ باشد.

۳ـ هریك‌از معادله‌های زیررا حل‌کنید.

$$\sin^2 2x-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)=1$$

$$cotg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{2}=2\sqrt{3}$$

$$2\sin\frac{x}{2}+\sin x=1+2\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos 3x\cos 2x=\sin 3x\sin 2x-1$$

۴ـ مقدار a را به قسمی تعیین کنید که خط $x=\frac{2\pi}{3}$ یك مجانب قائم منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=\frac{a\sin x}{a+2\cos 2x}$$

باشد .

۵ـ اگر :

$$\cos C=\frac{3}{5} \quad \text{و} \quad b=4 \quad \text{و} \quad a=10$$

باشد مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۶ـ نوع مثلثی را که درآن رابطهٔ $b=2a\cos C$ برقرار است تعیین کنید .

۷ـ اندازهٔ مینیمم تابع:

$$y=\frac{\cos x}{2\cos x-1}$$

را درفاصلهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ به‌دست آورید.

تستهای مثلثات سال چهارم تجربی

۱ـ اگر :

$$2\pi < x < 3\pi \quad \text{و} \quad tg\frac{x}{2}=2-\sqrt{3}$$

باشد، اندازهٔ $tg4x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) 1 ۴) -1

۲ـ حاصل کسر :

$$\frac{\sin(\pi-x)+2\sin 2x-\cos(\frac{\pi}{2}+3x)}{\cos(2\pi-x)+2\cos 2(x+\pi)+\cos 3x}$$

کدام است؟

۱) tgx ۲) $tg2x$ ۳) $\sin x$ ۴) $\sin 2x$

۳ـ مجموع جوابهای معادلهٔ :

$$tg\frac{x}{2}+cotg\frac{x}{2}=4$$

درفاصلهٔ $[\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

۴ـ به‌ازای کدام مقدار m معادلهٔ:

$$m\sin x+(m-3)\cos x=2-m$$

دارای جواب است؟

۱) هیچ مقدار ۲) ۳

۳) ۲ ۴) همه مقادیر

۵ـ بیشترین مقدار عبارت $1-\cos^2x+3\cos x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶ـ کوچکترین دورهٔ تناوب تابع :

$$f(x)=\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

کدام است ؟

۱) π ۲) 2π ۳) 4π ۴) 6π

۷ـ یک جواب کلی معادلهٔ :

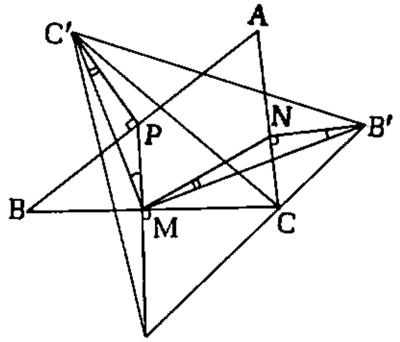
$$8\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{12}\sin\frac{x}{12}=1$$

کدام است؟

۱) $x=3k\pi+\frac{3\pi}{4}$ ۲) $x=3k\pi+\frac{\pi}{4}$

۳) $x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$ ۴) $x=2k\pi+\pi$

حل۱ - اولاً ـ نقطهٔ M را به نقاط N و P وصل می‌کنیم. دومثلث MPC' و MNB' به‌حالت برابری دوضلع و زاویهٔ بین متساوی‌اند زیرا :



$$MP \parallel AC\ ,\ MP=\frac{AC}{۲}=NB'$$

$$MN \parallel AB\ ,\ MN=\frac{AB}{۲}=PC'$$

$$M\hat{P}C'=M\hat{N}B'=۹۰^\circ+\hat{A}$$

(چهار ضلعی $ANMP$ متوازی الاضلاع است)

در نتیجه $MB'=MC'$ یعنی مثلث $MB'C'$ متساوی‌الساقین است. ازطرفی چون زاویهٔ $CNB'=۹۰^\circ$ است پس‌در مثلث MNB' داریم :

$$B'\hat{M}N+M\hat{B}'N+C\hat{N}M=۹۰^\circ$$

اما $N\hat{B}'M=P\hat{M}C'$ و $C\hat{N}M=N\hat{M}P$

در نتیجه : $B'\hat{M}N+P\hat{M}C'+N\hat{M}P=۹۰^\circ$

$$\Longrightarrow\ B'\hat{M}C'=۹۰^\circ$$

لذا مثلث $MB'C'$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است .

ثانیاً ـ دومثلث $MA'B'$ و MCC' باهم برابرند زیرا:

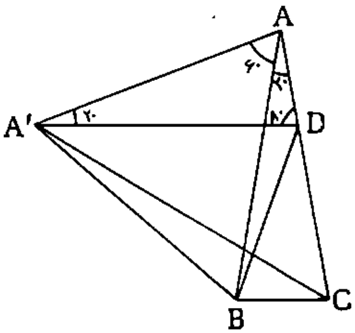
$MB'=MC'$ و $MA'=MC=\frac{BC}{۲}$ و

$$A'\hat{M}B'=C\hat{M}C'=۹۰^\circ+C\hat{M}B'$$

پس $CC'=A'B'$ و $M\hat{C}'C=M\hat{B}'A'$ است و چون دوضلع دو زاویهٔ اخیر برهم‌عمودند ($MC'\perp MB'$) پس $CC'\perp A'B'$ است.

ثالثاً ـ بنابه قسمت ثانیاً $CC'\perp A'B'$ است یعنی $C'C$ ارتفاع رأس C' ازمثلث $A'B'C'$ است: به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شود که خطوط AA' و BB' نیز دو ارتفاع دیگر مثلث $A'B'C'$ می‌باشند، پس خطوط AA' و BB' و CC' متقارب‌اند.

حل ۲- مثلث متساوی الساقین $A'AD$ را مساوی مثلث متساوی‌الساقین ABC چنان‌رسم می‌کنیم که قاعده‌اش پاره‌خط AD باشد. از نقطهٔ A' به‌نقاط B و C وصل‌می کنیم‌مثلث $AA'B$ متساوی‌الاضلاع است زیرا داریم:



$$A'A=A'D=AB=AC$$

$$A'\hat{A}B=۸۰^\circ-۲۰^\circ=۶۰^\circ$$

پس $A'B=A'A=AB$ و $A'\hat{B}A=A\hat{A}'B=۶۰^\circ$ است در نتیجه $A'B=A'D$ و $D\hat{A}'B=۴۰^\circ$ است . در مثلث متساوی الساقین $DA'B$ چون اندازهٔ زاویهٔ رأس $D\hat{A}'B=۴۰^\circ$ است پس هریک‌از زوایای مجاور به‌قاعدهٔ آن برابر ۷۰° می‌باشد یعنی :

$$A'\hat{B}D=A'\hat{D}B=۷۰^\circ$$

است و چون $A'\hat{D}A=A\hat{B}C=۸۰^\circ$ است پس:

$$B\hat{D}C=۱۸۰^\circ-(۸۰^\circ+۷۰^\circ)=۳۰^\circ$$

حل مسائل

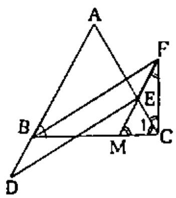
حل مسائل هندسهٔ سال اول

حل ۱- امتداد FE ضلع BC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. دو مثلث MEC و FEC متساوی‌الساقین‌اند زیرا:

$BD = EC$ و $BD = EF$

پس $EF = EC$ است. از طرفی $FM \parallel AB$ ،

پس $\hat{M} = \hat{B}$ ، اما $\hat{B} = \hat{C}_1$ پس $\hat{M} = \hat{C}_1$ لذا $EM = EC$ می‌باشد. در نتیجه $EC = EM = EF$ است. چون در مثلث

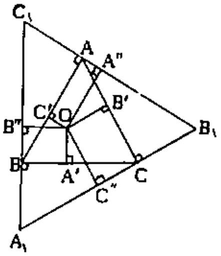


MFC میانهٔ وارد بر ضلع MF نصف آن ضلع است، این مثلث قائم‌الزاویه در رأس C است یعنی:

$F\hat{C}M = ۹۰°$

و در نتیجه FC بر BC عمود است.

حل ۲- در نقاط A و B و C خطوطی عمود بر اضلاع AB و BC و AC رسم می‌کنیم تا در نقاط A_1 و B_1 و C_1 یکدیگر را قطع نمایند. مثلث $A_1B_1C_1$ نیز متساوی‌الاضلاع است زیرا سه مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC_1 و BCA_1 و ACB_1 باهم برابرند. حال اگر از نقطهٔ O عمودهای OA'' و OB'' و OC'' را بر اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ فرود آوریم می‌دانیم که $OA''+OB''+OC''$ مقداری ثابت مساوی ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ است اما چهارضلعیهای $OC'AA''$ و $OA'BB''$ و $OB'CC''$ مستطیل می‌باشند لذا



$OA'' = AC'$ و $OB'' = A'B$ و $OC'' = CB'$ است پس داریم:

$$AC' + BA' + CB' = OA'' + OB'' + OC'' = C$$

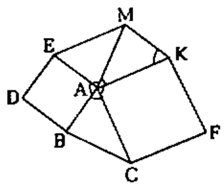
نکته: مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مقداری است ثابت، مساوی ارتفاع آن مثلث.

حل ۳- دو مثلث AMK و ABC به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین باهم مساوی‌اند زیرا:

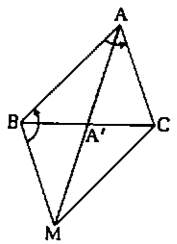
$AB = AE = MK$ و $AC = AK$

$$B\hat{A}C = M\hat{K}A = ۱۸۰ - E\hat{A}K$$

پس $AM = BC$ است.



حل ۴- در مثلث ABC میانه AA' را از طرف نقطهٔ A' به اندازهٔ خود تا نقطهٔ M امتداد می‌دهیم و از M به نقاط B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABMC متوازی‌الاضلاع است پس $MB = AC$ و دو زاویهٔ ABM و BAC مکمل یکدیگرند.



حال اگر:

$$AA' = \frac{BC}{۲}$$

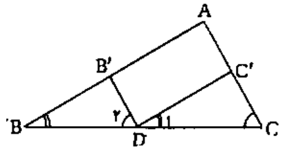
باشد، $AM = ۲AA' = BC$ خواهد بود و در نتیجه متوازی‌الاضلاع ABMC دو قطر مساوی خواهند بود پس ABMC مستطیل می‌باشد و در نتیجه $B\hat{A}C = ۹۰°$ خواهد بود. درصورتی که $AA' > \frac{BC}{۲}$ باشد، $AM > BC$ و در دو مثلث ABM و ABC که $AB = AB$ و $MB = AC$، چون $AM > BC$ است، پس $A\hat{B}M > B\hat{A}C$ و چون این دو زاویه مکمل‌اند پس $B\hat{A}C < ۹۰°$ خواهد بود. به همین ترتیب ثابت می‌شود که اگر $AA' < \frac{BC}{۲}$ باشد:

$$B\hat{A}C > ۹۰°$$

است.

حل ۵- چهار ضلعی $AB'DC'$ متوازی‌الاضلاع است پس $AB'=DC'$ و $AC'=DB'$ و $\hat{D}_1=\hat{B}$ و $\hat{C}=\hat{D}_2$ است. چون $AB>AC$ است پس $\hat{C}>\hat{B}$ می‌باشد. در مثلث DBB' داریم:

$$\hat{D}_2=\hat{C}>\hat{B} \Rightarrow DB'<BB'$$



ازطرفی $DC'=AB'$ است. از این‌دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$DB'+DC'<BB'+AB'=AB$$

و در مثلث DCC' داریم:

$$\hat{C}>\hat{D}_1=\hat{B} \Rightarrow DC'>CC'$$

از طرفی $DB'=AC'$ پس:

$$DC'+DB'>CC'+AC'=AC$$

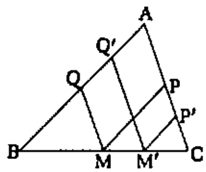
در نتیجه $AC<DB'+DC'<AB$.

حل مسائل هندسهٔ سال دوم ریاضی فیزیک

حل ۱- بنا به خاصیت خطوط متوازی که دوخط را قطع کرده‌اند داریم:

$$AB\|PM\|P'M' \Rightarrow \frac{PP'}{MM'}=\frac{AC}{BC} \quad (۱)$$

$$AC\|Q'M'\|QM \Rightarrow \frac{QQ'}{MM'}=\frac{AB}{BC} \quad (۲)$$



از تقسیم روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

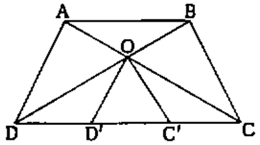
$$\frac{PP'}{QQ'}=\frac{AC}{AB}$$

حل ۲- در مثلث ADC داریم:

$$OD'\|AD \Rightarrow \frac{DD'}{DC}=\frac{AO}{AC} \quad (۱)$$

و در مثلث BDC داریم:

$$OC'\|BC \Rightarrow \frac{CC'}{CD}=\frac{OB}{BD} \quad (۲)$$



از طرفی در ذوزنقه ABCD داریم:

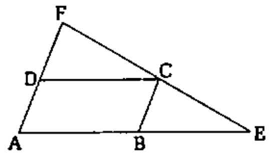
$$\frac{AO}{AC}=\frac{BO}{BD} \quad (۳)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $\frac{DD'}{DC}=\frac{CC'}{DC}$ ودرنتیجه $DD'=CC'$ است.

حل ۳- در مثلث AEF داریم:

$$BC\|AF \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{FC}{FE} \quad (۱)$$

$$DC\|AE \Rightarrow \frac{AD}{AF}=\frac{CE}{EF} \quad (۲)$$

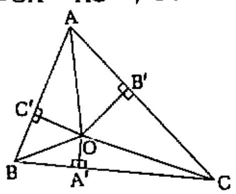


از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{FC+CE}{EF}=\frac{EF}{EF}=1$$

حل ۴- ازنقطهٔ O به رئوس مثلث وصل می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC' و OBC' داریم:

$$OC'^2=OA^2-AC'^2 \ , \ OC'^2=OB^2-BC'^2$$



در نتیجه خواهیم داشت:

$$OA^2-AC'^2=OB^2-BC'^2$$

و یا

$$AC'^2-BC'^2=OA^2-OB^2 \quad (۱)$$

وبه طریق مشابه خواهیم داشت:

$$CB'^2-AB'^2=OC^2-OA^2 \quad (۲)$$

و

$$BA'^2-CA'^2=OB^2-OC^2 \quad (۳)$$

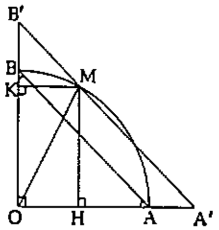
از جمع روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$AC'^2-BC'^2+CB'^2-AB'^2+BA'^2-CA'^2=0$$

و از آنجا:

$$AC'^2+CB'^2+BA'^2=BC'^2+AB'^2+CA'^2$$

حل ۵- ازنقطهٔ M عمودهای MH و MK را به‌ترتیب بر OA و OB فرود می‌آوریم واز M به O وصل می‌کنیم. مثلثهای MHA' و MKB' قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین می‌باشند زیرا زوایای A' و B' هرکدام‌مساوی ۴۵° می‌باشند. (مثلث OAB قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین است و $A'B'\|AB$ و $O\hat{A}B=O\hat{B}A=45°$ است.) در نتیجه $MH=HA'$ و $MK=KB'$ است.



در مثلثهای قائم الزاویهٔ MHA' و MKB' می‌توان نوشت:

$$MA'^2=MH^2+HA'^2=2MH^2 \quad (۱)$$

و

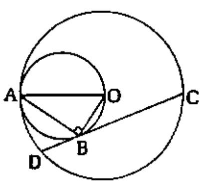
$$MB'^2=MK^2+KB'^2=2MK^2 \quad (۲)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow MA'^2+MB'^2=2(MH^2+MK^2)=2OM^2=2R^2=(\sqrt{2}R)^2=AB^2$$

حل مسائل هندسهٔ سال سوم ریاضی فیزیک

حل ۱- ازنقطهٔ O به‌نقطهٔ B وصل می‌کنیم بنابه تعریف قوت یك‌نقطه نسبت‌به یك‌دایره داریم:

$$\overline{BD}\cdot\overline{BC}=d^2-R^2 \Rightarrow$$
$$BD\cdot BC=R^2-d^2=OA^2-OB^2$$

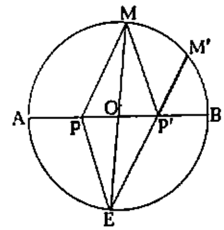


اما مثلث OAB قائم‌الزاویه در رأس B است لذا:

$$OA^2-OB^2=AB^2$$

پس داریم: $BD\cdot BC=AB^2$ (با رعایت اندازهٔ جبری می‌توان نوشت $\overline{BD}\cdot\overline{BC}=-AB^2$).

حل ۲- از نقطهٔ M به O مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره‌را درنقطهٔ E قطع کند. از E به نقاط P و P' وصل می‌کنیم. چهار ضلعی MPEP' متوازی‌الاضلاع است‌زیرا اقطار آن منصف‌یکدیگرند پس $PM = P'E$ است. ازطرفی $M'P'E$ خط راست است زیرا:



$P'E \parallel PM$ و $P'M' \parallel PM$

می‌باشد. پس اگر قوت نقطهٔ P' را نسبت به دایرهٔ O بنویسیم خواهیم داشت:

$$\overline{P'M'}\cdot\overline{P'E}=\overline{P'A}\cdot\overline{P'B}$$

و با توجه به اینکه:

$$\overline{P'A}\cdot\overline{P'B}=P'O^2-R^2 \quad , \quad P'E=PM$$

است داریم:

$$\overline{P'M'}\cdot\overline{PM}=R^2-P'O^2=C^{te}$$

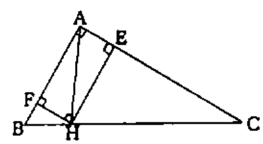
بنابراین حاصلضرب $PM \cdot P'M'$ مقداری‌است ثابت‌که با تغییر امتداد خطوط متوازی PM و P'M' تغییر نمی‌نماید.

حل ۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^2=BH\cdot BC \text{ و } AC^2=CH\cdot BC \Longrightarrow$$

$$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{CH\cdot BC}{BH\cdot BC} \Longrightarrow \frac{AC^2}{AB^2}=\frac{CH}{BH} \Longrightarrow$$

$$\frac{AC^4}{AB^4}=\frac{CH^2}{BH^2} \quad (1)$$



ازطرفی در دومثلث قائم‌الزاویهٔ AHB و AHC داریم:

$$BH^2=BF\cdot AB \quad , \quad CH^2=CE\cdot AC$$

پس اگردررابطهٔ (۱) به‌جای CH^2 و BH^2 مقادیرمساوی‌شان را قراردهیم خواهیم داشت:

$$\frac{AC^4}{AB^4}=\frac{CE\cdot AC}{BF\cdot AB} \Longrightarrow \frac{AC^3}{AB^3}=\frac{CE}{BF}$$

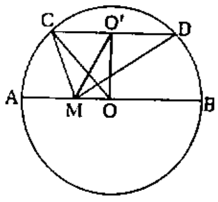
حل ۴- از نقطهٔ O به‌نقطهٔ O' وسط‌وتر CD وصل‌می‌کنیم. می‌دانیم‌که OO' عمود منصف‌وتر CD است. همچنین از O به C وصل می‌کنیم. بنابه‌خاصیت‌میانه درمثلث MCD می‌توان نوشت:

$$MC^2+MD^2=2MO'^2+\frac{CD^2}{2}$$

$$=2MO'^2+2O'C^2=2(MO'^2+O'C^2)$$

$$=2(OM^2+OO'^2+O'C^2)=2(OM^2+OC^2)$$

$$=2OM^2+2R^2 \quad (1)$$



ازطرفی:

$$MB=OB+OM=R+OM$$

$$MA=OA-OM=R-OM \quad , \quad OA=OB=R$$

است پس:

$$MA^2+MB^2=(R-OM)^2+(R+OM)^2$$

$$=2OM^2+2R^2 \quad (2)$$

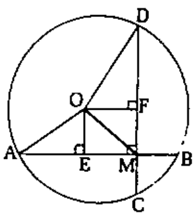
از مقایسهٔ روابط(۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$MC^2+MD^2=MA^2+MB^2$$

حل ۵- عمودهای OE و OF را ازمرکز دایره‌به‌ترتیب بروترهای AB و CD فرود می‌آوریم واز O به نقاط M و A و D وصل می‌کنیم. می‌دانیم‌که $AE=EB$ و $DF=FC$ و چهار ضلعی OEMF مستطیل است. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAE و OFD می‌توان نوشت:

$$AE^2=OA^2-OE^2=R^2-OE^2$$

$$DF^2=OD^2-OF^2=R^2-OF^2$$



ازجمع این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$AE^2+DF^2=2R^2-(OE^2+OF^2)$$

اما درمستطیل OEMF.

$$OE^2+OF^2=OM^2$$

است پس $AE^2+DF^2=2R^2-OM^2$ ، از طرفی:

$$DF=\frac{CD}{2} \quad , \quad AE=\frac{AB}{2}$$

است پس خواهیم داشت:

$$AB^2+CD^2=4(AE^2+DF^2)$$

$$=8R^2-4OM^2=C^{te}$$

با توجه به‌اینکه R و OM مقادیر ثابتی می‌باشند پس:

$$AB^2+CD^2$$

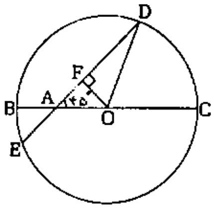
مقداری ثابت است.

حل ۶- از O عمود OF را بر وتر DE رسم می‌کنیم $FE=FD$ ومثلث AOF ، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است پس $AF=OF$ می‌باشد. حال می‌توان نوشت:

$$AD=AF+FD=OF+FD$$

و

$$AE=EF-AF=FD-OF$$



از آنجا خواهیم داشت:

$$AD^2+AE^2=(OF+FD)^2+(FD-OF)^2$$

$$=2(OF^2+FD^2)=2OD^2 \Longrightarrow$$

$$AD^2+AE^2=2R^2$$

حل مسائل هندسهٔ سال‌چهارم ریاضی فیزیک

حل ۱:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}(1\ ,\ 3\ ,\ -2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_B-x_A=1 \\ y_B-y_A=3 \\ z_B-z_A=-2 \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5}{2} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1}{2} \\ z_M=\frac{z_A+z_B}{2}=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_A+x_B=5 \\ y_A+y_B=1 \\ z_A+z_B=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B-x_A=1 \\ x_A+x_B=5 \end{cases} \Longrightarrow x_A=2 \text{ و } x_B=3$$

$$\begin{cases} y_B-y_A=3 \\ y_A+y_B=1 \end{cases} \Longrightarrow y_A=-1 \text{ و } y_B=2$$

$$\begin{cases} z_B-z_A=-2 \\ z_A+z_B=4 \end{cases} \Longrightarrow z_A=3 \text{ و } z_B=1$$

$$\Longrightarrow A(2\ ,\ -1\ ,\ 3)\ ,\ B(3\ ,\ 2\ ,\ 1)$$

حل ۲-

$$\sum_{i=1}^{3}\vec{v_i}=\vec{0} \Longrightarrow \vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}=\vec{0}$$

$$\Longrightarrow \vec{v_1}+\vec{v_2}=-\vec{v_3}$$

(الف) $(\vec{v_1}+\vec{v_2})\cdot(\vec{v_1}+\vec{v_2})=(-\vec{v_3})\cdot(-\vec{v_3})$

$$\Rightarrow |\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2+2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)=|\vec{v}_3|^2$$
$$\Rightarrow 9+4+2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)=25$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=6$$

ب) $(\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3)^2=0$

$$\Rightarrow |\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2+|\vec{v}_3|^2+2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3)=0 \Rightarrow$$
$$9+4+25+2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1)=0$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_3\cdot\vec{v}_1=-19$$

ج) $\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3)=\vec{v}_1\cdot(-\vec{v}_1)$

$$=-|\vec{v}_1|^2=-9$$

حل ۳- فرض می‌کنیم $\vec{v}(X\,,\,Y\,,\,Z)$ باشد. با توجه به اینکه زاویهٔ بردار v با محور zها منفرجه‌است داریم:

$$\vec{v}\perp\vec{v}_1 \Rightarrow 3X+2Y+2Z=0$$
$$\vec{v}\perp\vec{v}_2 \Rightarrow 18X-22Y-5Z=0$$
$$|\vec{v}|=14 \Rightarrow \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=14$$
$$\Rightarrow X^2+Y^2+Z^2=196$$
$$\begin{cases}3X+2Y+2Z=0\\18X-22Y-5Z=0\\X^2+Y^2+Z^2=196\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X=4\\Y=6\\Z=-12\end{cases}$$
$$\Rightarrow \vec{v}(4\,,\,6\,,\,-12)$$

حل ۴ - راه‌اول: معادلهٔ صفحه‌ای‌راکه از سه‌نقطه از نقاط فرق می‌گذرد می‌نویسیم. مختصات نقطهٔ چهارم در معادلهٔ این صفحه نباید صدق کند.

$$A\begin{vmatrix}5\\5\\4\end{vmatrix}\quad B\begin{vmatrix}2\\-1\\1\end{vmatrix}\quad C\begin{vmatrix}4\\1\\3\end{vmatrix} \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-3\\-6\\-3\end{vmatrix}\quad \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}-1\\-4\\-1\end{vmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}6-12=-6=a\\3-3=0=b\\12-6=6=c\end{vmatrix} \Rightarrow$$

بردار عمود برصفحهٔ ABC $\vec{v}\begin{vmatrix}-6\\0\\6\end{vmatrix} \Rightarrow$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow$$
$$-6(x-5)+0(y-5)+6(z-4)=0 \Rightarrow$$
$$-6x+6z+6=0 \Rightarrow -x+z+1=0$$

معادلهٔ صفحهٔ ABC

$$D(3\,,\,2\,,\,-1) \xrightarrow{\text{درمعادلهٔ صفحه } ABC} -3-1+1=0$$
$$\Rightarrow -3\neq0$$

پس نقطهٔ D روی صفحهٔ ABC نیست.

درنتیجه چهار نقطه روی یک صفحه قرار ندارند.

راه دوم: تصاویر بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ را به‌دست می‌آوریم وحاصل‌ضرب مختلط این سه‌بردار را محاسبه می‌کنیم اگر این‌حاصل‌ضرب مساوی‌صفر باشد چهار نقطه روی یک‌صفحه قرار دارند و اگر مخالف صفر باشد چهار نقطه روی یک‌صفحه نیستند.

$$A\begin{vmatrix}5\\5\\4\end{vmatrix}\quad B\begin{vmatrix}2\\-1\\1\end{vmatrix}\quad C\begin{vmatrix}4\\1\\3\end{vmatrix}\quad D\begin{vmatrix}3\\2\\-1\end{vmatrix} \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-3\\-6\\-3\end{vmatrix}\quad \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}-1\\-4\\-1\end{vmatrix}\quad \overrightarrow{AD}\begin{vmatrix}-2\\-3\\-5\end{vmatrix}$$

اما حاصل ضرب مختلط سه بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ به صورت‌زیر تعریف می‌شود.

$$(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3)=\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2\wedge\vec{v}_3)$$

بنابراین داریم:

$$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD})$$

اما: $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}(17\,,\,-3\,,\,-5)$

$$\overrightarrow{AB}(-3\,,\,-6\,,\,-3)$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD})$$
$$=17(-3)+(-3)(-6)+(-5)(-3)$$
$$=-18\neq0$$

پس چهارنقطهٔ A و B و C و D روی‌یک صفحه‌قرار ندارند.

حل ۵- نقطهٔ برخورد میانه‌ها

$$G\begin{vmatrix}x=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{5-1+2}{3}=2\\[2mm] y=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{0+3+0}{3}=1\\[2mm] z=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{-1+1+3}{3}=1\end{vmatrix}$$

معادلهٔ صفحات عمود برمحور yها به‌صورت $y=k$ است‌پس معادلهٔ‌صفحهٔ مطلوب به صورت $y=1$ است.

حل ۶-

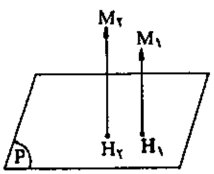
$A(-3\,,\,1\,,\,2)$ و $B(2\,,\,-4\,,\,-6)$

$$2\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{-3}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{-3}{2} \Rightarrow$$
$$x_M=\frac{kx_B-x_A}{k-1}=\frac{-\frac{3}{2}(2)-(-3)}{-\frac{3}{2}-1}=0$$
$$y_M=\frac{ky_B-y_A}{k-1}=\frac{-\frac{3}{2}(-4)-1}{-\frac{3}{2}-1}=-2$$
$$z_M=\frac{kz_B-z_A}{k-1}=\frac{-\frac{3}{2}(-6)-4}{-\frac{3}{2}-1}=-2$$
$$\Rightarrow M(0\,,\,-2\,,\,-2)$$
$$\overrightarrow{AB}(2+3\,,\,-4-1\,,\,-6-4) \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}(5\,,\,-5\,,\,-10)$$
$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow 5(x-0)-5(y+2)-10(z+2)=0$$
$$\Rightarrow P: 5x-5y-10z-30=0 \Rightarrow$$
$$x-y-2z-6=0$$

حل ۷- اگر از دونقطهٔ M_1 و M_2 عمودهای M_1H_1 و M_2H_2 را برصفحهٔ P فرودآوریم برای‌تعیین وضع‌دونقطهٔ M_1 و M_2 نسبت به صفحهٔ P کافی است $\overline{H_1M_1}$ و $\overline{H_2M_2}$ را محاسبه‌کنیم. اگر این‌دو مقدار متحدالعلامه باشند نقاط M_1 و M_2 دریکطرف‌صفحهٔ P واقع‌اند واگر مختلف‌العلامه‌باشند این دو نقطه در دوطرف صفحهٔ P قرار دارند.

$M_1(1\,,\,-2\,,\,2)$ و $M_2(0\,,\,3\,,\,-1)$

$$P: 2x-y+2z-5=0$$
$$\overline{H_1M_1}=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$
$$\frac{2(1)-(-2)+2(2)-5}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{+3}{3}=+1$$
$$\overline{H_2M_2}=\frac{2(0)-(3)+2(-1)-5}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{-10}{3}$$



پس دونقطهٔ M_1 و M_2 در دوطرف‌صفحهٔ P قرار دارند.

برای‌تعیین‌مختصات‌نقطهٔ‌برخوردصفحهٔ P وخط M_1M_2 باید معادلهٔ M_1M_2 را نوشته وبا معادلهٔ‌صفحهٔ P قطع دهیم.

$$M_1M_2 / \frac{x-1}{0-1}=\frac{y+2}{3+2}=\frac{z-2}{-1-2} \Longrightarrow$$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-2}{-3}$$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-2}{-3}=t \\ 2x-y+2z-5=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}x=-t+1\\ y=5t-2\\ z=-3t+2\end{array}\right. \xrightarrow{\text{درمعادلهٔ صفحهٔ } P}$$

$$2(-t+1)-(5t-2)+2(-3t+2)-5=0$$

$$\Longrightarrow -13t+3=0 \Longrightarrow t=\frac{3}{13} \Longrightarrow$$

$$N\left(-\frac{3}{13}+1\ ,\ +\frac{15}{13}-2\ ,\ -\frac{9}{13}+2\right)$$

مختصات نقطهٔ برخورد $M_1\,,\,M_2$ وصفحهٔ P

$$N\left(\frac{10}{13}\ ,\ \frac{-11}{13}\ ,\ \frac{17}{13}\right)$$

تبصره: برای‌تعیین وضع دونقطهٔ M_1 و M_2 نسبت به صفحهٔ $P(x\ ,\ y\ ,\ z)=0$ کافی است علامت:

$$P(M_1)\cdot P(M_2)$$

را تعیین‌کنیم. اگر

$$P(M_1)\cdot P(M_2)>0$$

باشد نقاط M_1 و M_2 دریك طرف صفحهٔ P واقع‌اند و اگر

$$P(M_1)\cdot P(M_2)<0$$

باشد نقاط M_1 و M_2 در دو طرف صفحهٔ P قرار دارند. در مسألهٔ فوق داریم:

$$P(M_1)\cdot P(M_2)=(+3)(-10)=-30<0$$

$\Longrightarrow$ M_1 و M_2 در دوطرف صفحهٔ P می‌باشند.

حل ۸- $A(-2\ ,\ 1\ ,\ 3)$ و $B(0\ ,\ 1\ ,\ -1)$

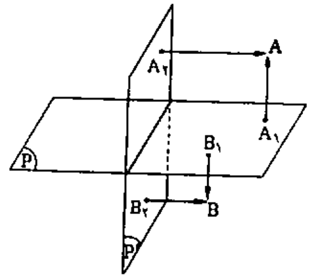
$$P: x-y-z+2=0$$

$$P': 2x+y+z+3=0$$

$$P(A)\cdot P(B)=(-2-1-3+2)\times(0-1+1+2)=-8<0 \Longrightarrow$$

نقاط A و B در دوطرف صفحهٔ P واقع‌اند

$$P'(A)\cdot P'(B)=(-4+1+3+3)\times(0+1-1+3)=+9>0 \Longrightarrow$$



نقاط A و B دریکطرف‌صفحهٔ P' واقع‌اند

پس دونقطهٔ A و B در دوفرجهٔ مجاور ازفرجه‌های‌حاصل بین صفحات P و P' قرار دارند.

حل ۹- نقاط برخورد صفحهٔ P بامحورهای مختصات‌را تعیین می‌کنیم.

$$P: 2x-3y+6z-12=0 \Longrightarrow$$

$A(6\ ,\ 0\ ,\ 0)$ و $B(0\ ,\ -4\ ,\ 0)$ و $C(0\ ,\ 0\ ,\ 2)$

مساحت مثلث ABC را با معلوم بودن مختصات رئوس آن محاسبه می‌کنیم.

$\overrightarrow{AB}(-6\ ,\ -4\ ,\ 0)$ و $\overrightarrow{AC}(-6\ ,\ 0\ ,\ +2)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-8\ ,\ 12\ ,\ -24)$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{64+144+576}=14$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات ازصفحهٔ P راکه ارتفاع وارد بـرقاعدهٔ ABC ازچهار وجهی‌است محاسبه می‌کنیم.

$$h=OH=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$

$$\frac{|-12|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{12}{7}$$

$$v_{\text{چهار وجهی}}=\frac{1}{3}h\times S_{ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{12}{7}\times 14=8$$

$\Longrightarrow$ $v=8$ واحد حجم چهار وجهی

نکته: اگر p و q و r طول‌از مبدأ، عرض از مبدأ و ارتفاع از مبدأصفحه‌ای باشند، حجم‌هرم حاصل‌ازآن صفحه و صفحات مختصات برابر است با

$$v=\frac{1}{6}|p\cdot q\cdot r|$$

در این مسئله:

$$v=\frac{1}{6}|6\times -4\times 2|=8 \quad \text{واحد حجم}$$

حل ۱۰- فاصلهٔ‌بین‌دوصفحهٔ P و P' برابر باضلع‌مکعب است پس:

$$P: 2x+y-2z-5=0$$

$$P': 4x+2y-4z-6=0$$

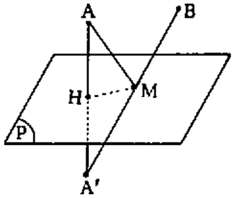
$$P: 4x+2y-4z-10=0$$

$$d=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-10+6|}{\sqrt{16+4+16}}=$$

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=a \quad \text{اندازهٔ ضلع‌مکعب}$$

$$\text{حجم مکعب } v=a^3 \Longrightarrow v=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27} \text{واحدحجم}$$

حل ۱۱- قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت‌به صفحهٔ P بـه دست آورده A' می‌نامیم. از A' به B وصل می‌کنیم تاصفحهٔ P را درنقطهٔ M قطع‌کند. این نقطه جواب مسأله است.



$$A(0\ ,\ -1\ ,\ 1)\ ,\ B(2\ ,\ 0\ ,\ 3)$$

$$P: 2x-3y+3z-17=0$$

$\vec{v}(2\ ,\ -3\ ,\ 3)$ بردار نرمال صفحهٔ P $\Longrightarrow$

$$AA' / \frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{3}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{3}\\ 2x-3y+3z-17=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$H\left(1\ ,-\frac{5}{2}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$ مختصات نقطهٔ H وسط AA'

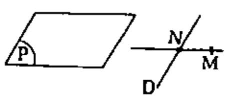
$$\Longrightarrow A'(2\ ,\ -4\ ,\ 4) \Longrightarrow$$

$A'B: \begin{cases}x=2\\ \frac{y}{-4}=\frac{z-3}{1}\end{cases}$ معادلهٔ خط A'B

$$\begin{cases}x=2\\ y=-4z+12\\ 2x-3y+3z-17=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$M\left(2\ ,\ \frac{-16}{15}\ ,\ \frac{49}{15}\right)$ مختصات نقطهٔ مطلوب

حل ۱۲- اگر نقطهٔ تقاطع خط مطلوب با خط D را N بنامیم ومعادلات پارامتری‌خط D را بنویسیم داریم:



$$D: \frac{x}{2}=y=\frac{z-1}{-1}=t \Longrightarrow$$

$$N\left|\begin{array}{l}x=2t\\ y=t\\ z=-t+1\end{array}\right. \Longrightarrow \overrightarrow{MN}\left|\begin{array}{l}2t-2\\ t-1\\ -t+3\end{array}\right.$$

$\vec{v}\left|\begin{array}{l}1\\ 1\\ -1\end{array}\right.$ بردار نرمال‌صفحهٔ P $\ ,\ \overrightarrow{MN}\perp\vec{v} \Longrightarrow$

$$2t-2+t-1+t-3=0 \Longrightarrow$$

$$t=\frac{3}{2} \Longrightarrow N\left(3\ ,\frac{3}{2}\ ,\ \frac{-1}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$MN / \frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{z+2}{\frac{-1}{2}+2} \Longrightarrow$$

معادلهٔ خط مطلوب $\frac{x-۲}{۱}=\frac{y-۱}{\frac{۱}{۲}}=\frac{z+۲}{\frac{۳}{۲}}$

حل ۱۳-

$$\begin{cases} x+y=۲ \\ ۲y-z=۵ \\ ۳x-y+z-۱=۰ \end{cases} \Longrightarrow B(۲\,,۰\,,-۵)$$

نقطهٔ برخورد خط D با صفحهٔ P

$$\begin{cases} x+y=۲ \\ ۲y-z=۵ \\ ۳x-y+z=۵ \end{cases} \Longrightarrow C(۴\,,-۲\,,-۹)$$

نقطهٔ برخوردخط D با صفحهٔ P′

$M(۳\,,-۱\,,-۷)$ وسط پاره خط BC $\Longrightarrow$

$$AM/\frac{x+۳}{۳+۳}=\frac{y-۱}{-۱-۱}=\frac{z-۲}{-۷-۲} \Longrightarrow$$

$$AM/\frac{x+۳}{۶}=\frac{y-۱}{-۲}=\frac{z-۲}{-۹}$$ معادلهٔ خط مطلوب

حل ۱۴- خطوط D و D′ متنافرند، زیرا دستگاه دو معادلهٔ یک‌مجهولی حاصل از معادلات این دو خط جواب ندارد.

$$D:\begin{cases} x=t-۱ \\ y=-t+۲ \\ z=۳t+۵ \end{cases} \quad D':\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{۳}=z$$

$$\frac{t-۱-۱}{۲}=\frac{-t+۲+۲}{۳}=۳t+۵ \Longrightarrow$$

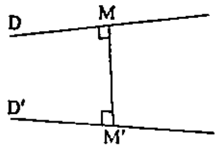
$$\begin{cases} \frac{t-۲}{۲}=\frac{-t+۴}{۳} \Longrightarrow t=۲/۸ \\ \frac{t-۲}{۲}=۳t+۵ \Longrightarrow t=-۲/۴ \end{cases}$$

بنابراین برای تعیین کوتاهترین فاصلهٔ بین‌این‌دوخط بایدطول عمود مشترک آنها رابه دست آوریم.

$$M\in D \Longrightarrow M\left|\begin{array}{l} t-۱ \\ -t+۲ \\ ۳t+۵ \end{array}\right.$$

$$M'\in D' \Longrightarrow M'\left|\begin{array}{l} x=۲t'+۱ \\ y=۳t'-۲ \\ z=t' \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{MM'}\left|\begin{array}{l} ۲t'+۱-t+۱=۲t'-t+۲ \\ ۳t'-۲+t-۲=۳t'+t-۴ \\ t'-۳t-۵=t'-۳t-۵ \end{array}\right.$$



$$\overrightarrow{MM'}\perp D \Longrightarrow ۱(۲t'-t+۲)+(-۱)(۳t'+t-۴)+۳(t'-۳t-۵)=۰ \Longrightarrow ۲t'-۱۱t-۹=۰$$

$$\overrightarrow{MM'}\perp D' \Longrightarrow ۲(۲t'-t+۲)+۳(۳t'+t-۴)+۱(t'-۳t-۵)=۰ \Longrightarrow ۱۴t'-۲t-۱۳=۰$$

$$\begin{cases} ۲t'-۱۱t=۹ \\ ۱۴t'-۲t=۱۳ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=\frac{-۲}{۳} \\ t'=\frac{۵}{۶} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{MM'}\left(\frac{۱۳}{۳}\,,\frac{-۱۳}{۶}\,,\frac{-۱۳}{۶}\right) \Longrightarrow$$

$$|\overrightarrow{MM'}|=\sqrt{\frac{۱۶۹}{۹}+\frac{۱۶۹}{۳۶}+\frac{۱۶۹}{۳۶}}=\frac{۱۳\sqrt{۶}}{۶}$$

طول عمود مشترک خطوط D و D′

حل ۱۵-

$$\begin{cases} \frac{x+۲}{۳}=۲(y-۱)=z+۲=t \\ x-۲y+z-۳=۰ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} x=۳t-۲ \\ y=\frac{t}{۲}+۱ \\ z=t-۲ \end{array}\right.$$

$$۳t-۲-۲\left(\frac{t}{۲}+۱\right)+t-۲-۳=۰ \Longrightarrow$$

$$t=۳ \Longrightarrow M(۷\,,۲/۵\,,۱)$$

حل ۱۶- معادلهٔ صفحهٔ P راکه از نقطهٔ A عمود برخط D رسم می‌شود می‌نویسیم و مختصات نقطهٔ تقاطع صفحهٔ P و خط D رابه دست‌می‌آوریم اگر این نقطه‌را H بنامیم نقطهٔ A′ قرینه نقطهٔ A نسبت‌به نقطه H را باید پیداکنیم.

$$A(۰\,,۱\,,-۲)\quad,\quad D:\frac{x}{۲}=\frac{y+۳}{-۱}=\frac{z-۱}{۳}$$

$\vec{v}(۲\,,-۱\,,۳)$ بردار نرمال صفحهٔ P $\Longrightarrow$

$$۲(x-۰)-۱(y-۱)+۳(z+۲)=۰ \Longrightarrow$$

$۲x-y+۳z+۷=۰$ معادلهٔ صفحهٔ P

$$\begin{cases} ۲x-y+۳z+۷=۰ \\ \frac{x}{۲}=\frac{y+۳}{-۱}=\frac{z-۱}{۳} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$H\left(\frac{-۱۲}{۷}\,,\frac{-۲۹}{۱۴}\,,\frac{-۲۵}{۱۴}\right) \Longrightarrow$$

$A'\left(\frac{-۲۶}{۷}\,,\frac{-۳۶}{۷}\,,\frac{-۱۱}{۷}\right)$ قرینه نقطهٔ A

حل ۱۷- اگر نقطهٔ $M'(x_۱\,,y_۱\,,z_۱)$ تصویر قائم نقطهٔ M روی‌صفحهٔ P باشد، داریم:

$$x_۱-۲y_۱+z_۱-۲=۰$$

$$\overrightarrow{MM'}(x_۱-۳\,,y_۱+۱\,,z_۱)$$

$\vec{v}(۱\,,-۲\,,۱)$ بردار نرمال صفحهٔ P

$$\overrightarrow{MM'}\parallel\vec{v} \Longrightarrow \frac{x_۱-۳}{۱}=\frac{y_۱+۱}{-۲}=\frac{z_۱}{۱} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_۱-۳=\frac{y_۱+۱}{-۲}=z_۱=t \\ x_۱-۲y_۱+z_۱-۲=۰ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$M'\left(\frac{۵}{۲}\,,۰\,,-\frac{۱}{۲}\right)$$

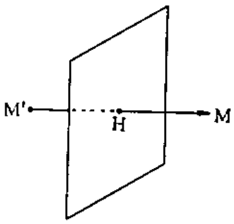
حل ۱۸: اگر قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به صفحهٔ P را M′ و وسط پاره‌خط MM′ را H بنامیم داریم:

$$P: x+y-z-۳=۰ \Longrightarrow$$

$\vec{v}(۱\,,۱\,,-۱)$ بردار نرمال صفحهٔ P

$$M(۳\,,۲\,,-۱) \Longrightarrow$$

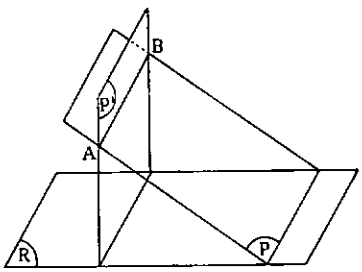
$\frac{x-۳}{۱}=\frac{y-۲}{۱}=\frac{z+۱}{-۱}$ معادلهٔ MM′



$$\begin{cases} x-۳=y-۲=-z-۱=t \\ x+y-z-۳=۰ \end{cases} \Longrightarrow t=-۱$$

$$\Longrightarrow H(۲\,,۱\,,۰) \Longrightarrow M'(۱\,,۰\,,۱)$$

حل ۱۹- معادلهٔ دسته‌صفحه‌ای‌راکه شامل‌دوصفحهٔ P و P′ است می‌نویسیم واز بین‌صفحات این دسته‌صفحه‌ای راکه عمود برصفحهٔ R باشد مشخص می‌سازیم.



$$\alpha(۲x-y+۳z-۲)+\beta(x+y+۳)=۰ \Longrightarrow$$

$$(۲\alpha+\beta)x+(\beta-\alpha)y+۳\alpha z-۲\alpha+۳\beta=۰$$

معادلهٔ دسته‌صفحه

$$aa'+bb'+cc'=۰ \Longrightarrow$$

$$-(۲\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)+۶\alpha=۰ \Longrightarrow ۳\alpha=۰$$

$$\Longrightarrow \alpha=۰ \Longrightarrow x+y+۳=۰$$

معادلهٔ صفحهٔ جواب مسئله

در این مسئله: صفحهٔ جواب همان صفحهٔ P' می‌باشد ولی باید توجه داشت که همواره چنین نیست. (از ابتدا نیز مشخص بود که صفحهٔ جواب در این مسأله صفحهٔ P' است زیرا صفحهٔ:

$$P' : x+y+2=0$$

بر صفحه

$$R : -x+y+2z=1$$

عمود است.

$$aa'+bb'+cc'=0 \Rightarrow$$
$$-1+1+0=0 \Rightarrow 0=0)$$

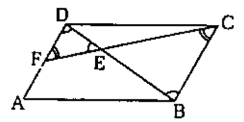
حل مسائل هندسهٔ سال‌دوم علوم تجربی

حل ۱ - دومثلث BEC و DEF متشابه می‌باشند.

پس: $\frac{DE}{EB}=\frac{DF}{BC}$ اما $\frac{DE}{EB}=\frac{1}{3}$ و $BC=AD$ است؛ پس $\frac{DF}{AD}=\frac{1}{3}$ در نتیجه $\frac{DF}{AF}=\frac{1}{2}$ ، یعنی:

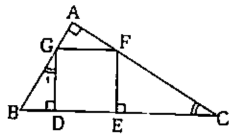
$$AF=2DF$$

است.



حل ۲- دو مثلث قائم الزاویهٔ BDG و EFC متشابهند

زیرا: $\hat{E}=\hat{D}=90°$ و $\hat{C}=\hat{G}_1$



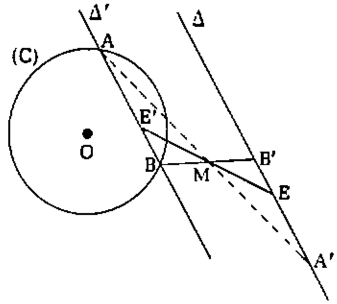
پس داریم: $\frac{DB}{EF}=\frac{DG}{EC}$ که اگر به جای DG و EF مقدار مساوی‌شان DE را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{DB}{DE}=\frac{DE}{EC} \Rightarrow DE^2=DB\cdot EC$$

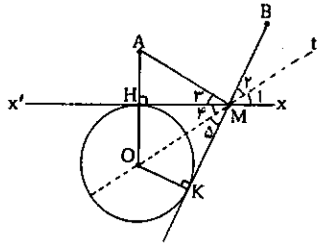
حل مسائل هندسهٔ سال‌سوم علوم تجربی

حل ۱- قرینهٔ خط Δ نسبت به نقطهٔ M را رسم می‌کنیم و Δ' می‌نامیم، نقطهٔ برخورد Δ' با دایرهٔ (C) را A و B می‌نامیم. این دو نقطه جواب مسأله می‌باشند.

بنابراین که خط Δ' دایره (C) را در دو نقطه قطع کند و یا بر آن مماس باشد و یا آن را قطع نکند مسأله به‌ترتیب، دارای دوجواب، یک‌جواب است و یا جواب ندارد.



حل ۲- فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و نقطهٔ M جواب مسأله باشد یعنی $B\hat{M}x=2A\hat{M}x'$ باشد خط Mt نیمساز زاویهٔ BMx را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خطی را که از نقطهٔ A بر x'x عمود می‌شود در نقطهٔ O قطع کند.



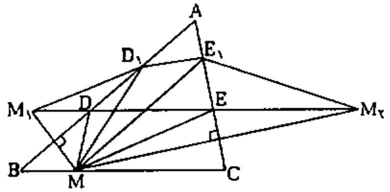
چون $\hat{M}_1=\hat{M}_2=\hat{M}_3=\hat{M}_4=\hat{M}_5$ است، پس نقطهٔ O قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط x'x می‌باشد (زیرا درمثلث MAO خط Mx' نیمساز زاویهٔ AMO و ارتفاع وارد بر AO است) ونقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔ x'MK است پس دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OH=OK براضلاع زاویهٔ x'MK مماس می‌باشد.

بنابراین برای حل مسأله قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط x'x را به دست می‌آوریم و نقطهٔ O می‌نامیم، آن‌گاه به مرکز O و به شعاع OH (فاصلهٔ نقطهٔ O از خط x'x) دایره‌ای رسم می‌کنیم و از نقطهٔ B مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم (مماس BK). نقطهٔ تقاطع این مماس با خط x'x نقطهٔ M جواب مسأله است یعنی داریم:

$$A\hat{M}x'=\frac{1}{2}B\hat{M}x$$

حل ۳- قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به اضلاع AB و AC را به ترتیب M_1 و M_2 می‌نامیم. از M_1 به M_2 وصل می‌کنیم ونقاط برخورد M_1M_2 با اضلاع AB و AC را به‌ترتیب D و E می‌نامیم. از M به D و E وصل می‌کنیم مثلث MDE جواب مسأله است. زیرا اگر مثلث دیگری به رأس M مانند مثلث MD_1E_1 درمثلث ABC محاط شده باشد ثابت می‌شود که محیط مثلث MD_1E_1 از محیط مثلث MDE بیشتر است زیرا:

$$D_1M=D_1M_1 \quad , \quad E_1M=E_1M_2$$



$$DM=DM_1 \quad , \quad EM=EM_2$$

اما:

محیط مثلث MDE $=MD+DE+EM=$

$DM_1+DE+EM_2=M_1M_2$

محیط مثلث $MD_1E_1 = MD_1+ME_1+D_1E_1=$

$M_1D_1+D_1E_1+E_1M_2=M_1D_1E_1M_2$

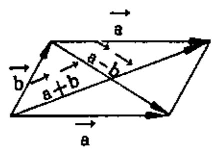
ازطرفی محیط خط‌شکسته $M_1D_1E_1M_2$ از پاره‌خط M_1M_2 بزرگ‌تر است، یعنی $M_1D_1E_1M_2>M_1M_2$ پس:

محیط مثلث MD_1E_1 > محیط مثلث MDE

بنابراین مثلث MDE بین مثلثهای به رأس نقطهٔ ثابت M و محاط درمثلث ABC ، کمترین محیط را داراست.

حل ۴-

$$|\vec{a}|=2 \quad , \quad |\vec{b}|=3 \quad , \quad (\vec{a} , \vec{b})=\frac{\pi}{3}$$



$$(-3\vec{a})\cdot(2\vec{b})=-6(\vec{a}\cdot\vec{b})=$$
$$-6\times|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a} , \vec{b}) \Rightarrow$$
$$(-3\vec{a})\cdot(2\vec{b})=-6\times2\times3\cos\frac{\pi}{3}=-18$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+$$
$$2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a} , \vec{b})=$$
$$4+9+2\times2\times3\times\frac{1}{2}=19 \Rightarrow$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a} , \vec{b})=$$
$$4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{2}=7 \Rightarrow$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$$
$$\frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{19}{7}}$$

جواب سؤالات ریاضیات جدید اول

جواب سؤال ۱:

الف) نادرست، زیرا:

$0\in \mathbb{R}\ ,\ 0^2 \not> 0$

ب) نادرست، زیرا:

$1\in N\ ,\ 1-1=0\notin N$

ج) درست، زیرا :

$0\in Z\ ,\ 0^2=0\notin N$

د) درست

جواب سؤال ۲:

الف) نادرست

ب) درست (به‌انتفای مقدم) چون مقدم نادرست ارزش گزاره درست است.

ج) نادرست، زیرا:

$(p\wedge \sim p)\equiv F\ ,\ (p\wedge \sim p)\equiv T$

د) درست، زیرا : تالی گزاره شرط اگر درست باشد ارزش گزاره درست است.

ه) نادرست، زیرا: دو طرف رابطهٔ دو شرطی هم ارز نیستند.

جواب سؤال ۳:

$q\equiv T \Longrightarrow (q\vee r)\equiv T$

$\overset{\text{با توجه به فرض}}{\Longrightarrow} (p\wedge q)\equiv T$ یا $(p\wedge q)\equiv F$

اگر $\rightarrow (p\wedge q)\equiv T \overset{q\equiv T}{\Longrightarrow} p\equiv T \Longrightarrow$

$(p \Longleftrightarrow q)\equiv T \overset{p\equiv T}{\Longrightarrow} [(p \Longleftrightarrow q)\wedge p]\equiv T$

$\Longrightarrow ((p\wedge s) \Longrightarrow \overbrace{[(p \Longleftrightarrow q)\wedge p]}^{T})\equiv T$

اگر $\rightarrow (p\wedge q)\equiv F \overset{q\equiv T}{\Longrightarrow} p\equiv F$

$\Longrightarrow (p\wedge s)\equiv F \Longrightarrow ((\overbrace{p\vee s}^{F})$

$\Longrightarrow [(p \Longleftrightarrow q)\wedge p])\equiv T$

یعنی در هرصورت ارزش گزارهٔ شرطی:

$(p\wedge s) \Longrightarrow [(p \Longleftrightarrow q)\wedge p]$

یک بار به دلیل درست بودن تالی و یک بار به دلیل نادرست بودن مقدم درست است.

جواب سؤال ۴:

با توجه به فرض

$q\equiv F \Longrightarrow (q \Longrightarrow s)\equiv F \Longrightarrow$

$(p\wedge r)\equiv F \Longrightarrow p\equiv F\ ,\ r\equiv F$

و با توجه به ارزشهای به‌دست آمده ارزش گزارهٔ:

$(r\wedge s) \Longleftrightarrow (\sim p\vee \sim q)$

به دلیل نادرست بودن گزارهٔ $(r\wedge s)$ و درست بودن گزارهٔ $(\sim p\vee \sim q)$، نادرست است.

جواب سؤال ۵:

متوازی الاضلاع است $\Longleftarrow$ اگر شکلی مستطیل باشد : می‌دانیم پس «متوازی‌الاضلاع بودن شرط لازم است برای مستطیل بودن»

جواب سؤال ۶:

n طبیعی است $\Longleftarrow$ اگر n اول باشد : می‌دانیم

بنابراین «اول بودن عدد n شرط کافی است برای طبیعی بودن»

جواب سؤال ۷ :

چون مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است پس $8=2^3$ زیر مجموعه دارد و گزارهٔ $(\{a\}\in A)\wedge(\{a\}\subseteq A)$ یک گزارهٔ درست است زیرا:

اولاً $\{a\}$ عضوی از A است و ثانیاً هر عضو مجموعهٔ $\{a\}$ یعنی a نیز عضو مجموعهٔ A است.

جواب سؤال ۸ :

تعداد اعضای A $=x$

تعداد اعضای B $=y$

$\boxed{x+y=10}\ ,\ 2^x=4\times 2^y \Longrightarrow \frac{2^x}{2^y}=4$

$\Longrightarrow 2^{x-y}=4 \Longrightarrow \boxed{x-y=2} \Longrightarrow$

$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x=6 \\ y=4 \end{matrix}$

جواب سؤال ۹ :

$A=\left\{\frac{2}{2^n}\ \middle|\ 1\leqslant n\leqslant 5\ ,\ n\in N\right\}$

$B=\{\ x\in z \mid (x^2-9)(x^2-4)=0\ \}$

جواب سؤال ۱۰ :

طبق فرض داریم : $A\cup B=M\quad ,\quad A\cap B=\varnothing$

$B=B\cup\varnothing=B\cup(A\cap A')$

$=(B\cup A)\cap(B\cup A')=M\cap(B\cup A')$

$=(B\cup A') \overset{\text{ثابت شد}}{\Longrightarrow} B=B\cup A' \Longrightarrow$

$A'\subseteq B \qquad (1)$

$B=B\cap M=B\cap(A\cup A')$

$=(B\cap A)\cup(B\cap A')=\varnothing\cup(B\cap A')$

$=(B\cap A') \overset{\text{ثابت شد}}{\Longrightarrow} B=B\cap A' \Longrightarrow$

$B\subseteq A' \qquad (2)$

$(1)\ ,\ (2) \Longrightarrow B=A'$

جواب سؤال ۱۱ :

$A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\varnothing\cap B)=A\cup\varnothing=A$

$\overset{\text{ثابت شد}}{\Longrightarrow} A\cap(A\cup B)=A$

از طرفی

$A\cup(A\cap B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)$

$=A\cap(A\cup B)=A$

$\overset{\text{پس ثابت شد}}{\Longrightarrow} A\cup(A\cap B)=A$

جواب سؤالات ریاضیات جدید دوم ریاضی

جواب سؤال ۱:

الف)

فرض کنیم : $[(x\ ,\ y)\in[A\times(B-C)] \overset{\text{تعریف ضرب}}{\Longleftrightarrow}$

$x\in A \wedge y\in(B-C)$

$\overset{\text{تعریف تفاضل}}{\Longleftrightarrow} x\in A \wedge (y\in B \wedge y\notin C)$

$\Longleftrightarrow (x\in A \wedge x\in A)\wedge(y\in B \wedge y\notin C)$

$\overset{\text{شرکت‌پذیری و جابجایی}}{\Longleftrightarrow} (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in A \wedge y\notin C)$

$\overset{\text{تعریف ضرب}}{\Longleftrightarrow} (x\ ,\ y)\in A\times B \wedge (x\ ,\ y)\notin A\times C$

$\overset{\text{تعریف تفاضل}}{\Longleftrightarrow} (x\ ,\ y)\in[(A\times B)-(A\times C)]$

$\Longrightarrow A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

ب)

$[(x\ ,\ y)\in(A\times C) \overset{\text{تعریف ضرب}}{\Longrightarrow} x\in A \wedge y\in C$

$\overset{A\subseteq B}{\Longrightarrow} x\in B \wedge y\in C$

$\overset{\text{تعریف ضرب}}{\Longrightarrow} (x\ ,\ y)\in(B\times C)]$

$\Longrightarrow (A\times C)\subseteq(B\times C)$

جواب سؤال ۲ :

$A=\{2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\}$

الف) $R_1=\{(2\ ,\ 3)\ ,\ (3\ ,\ 4)\}$

فقط خاصیت پاد تقارنی دارد (به‌انتفای مقدم)

ب) $R_2=\{(2\ ,\ 3)\ ;\ (3\ ,\ 2)\}$

فقط خاصیت تقارنی دارد

ج) $R_3=\{(2\ ,\ 3)\ ,\ (3\ ,\ 4)\}$ مانند الف

د) $R_4=\{(2\ ,\ 3)\ ,\ (3\ ,\ 2)\}$ مانند ب

ه) $R_5=\{(2\ ,\ 2)\}$

رابطهٔ R_5 دارای خواص تقارنی ـ پادتقارنی و تراگذری است، در واقع رابطه‌ای که فقط خواص تقارنی و پادتقارنی داشته باشد روی A نمی‌توان تعریف کرد.

و) $R_6=\{(2\ ,\ 2)\ ,\ (3\ ,\ 3)\ ,\ (4\ ,\ 4)\ ,\ (5\ ,\ 5)\ ,\ (2\ ,\ 3)\ ,\ (3\ ,\ 4)\}$

فقط خواص بازتابی و پاد تقارنی دارد

جواب سؤال ۳ :

۱) $\forall a\ ,\ b\in N\ ;\ a+b=a+b$

$\Longleftrightarrow (a\ ,\ b)R(a\ ,\ b)$ بازتابی

۲) فرض کنیم $(a\ ,\ b)R(c\ ,\ d) \Longrightarrow$

$a+d=b+c \Longrightarrow c+b=d+a \Longrightarrow$

$(c\ ,\ d)R(a\ ,\ b)$ تقارنی

۳) فرض کنیم $(a\ ,\ b)R(c\ ,\ d)\wedge(c\ ,\ d)R(e\ ,\ f)$

$\Longrightarrow a+d=b+c \wedge c+f=d+e \Longrightarrow$

$$a+\underbrace{(c+f-e)}_{d}=b+\underbrace{(d+e-f)}_{c}$$
$$\Rightarrow (a+f)+(c-e)=(b+e)+(d-f)$$
$$\xRightarrow{c-e=d-f} (a+f)=(b+e) \Rightarrow$$
$(a\ ,\ b)R(c\ ,\ f)$ ترا‌گذری

بنابراین R یک‌رابطه هم‌ارزی است.

$$[(3,5)]=\{(x,y)\in N\times N|(x,y)R(3,5)\}$$
$$=\{(x,y)\in N\times N|x+5=y+3\}$$
$$=\{(x,y)\in N\times N|x-y=-2\}$$
$$\Rightarrow [(3,5)]=$$
$$\{\cdots,(0,2),(-2,0),(3,5),\cdots\}$$

جواب سؤال ۴ :

$$A=\{a\ ,\ \{a\}\ ,\ \{a\ ,\ \{a\}\}\}$$
$$A_1=\{a\}\quad ,\quad A_2=\{\{a\}\}\quad ,\quad A_3=\{\{a\ ,\ \{a\}\}\}$$
(مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 ، A را افراز می‌کنند)

جواب سؤال ۵ :

۱) $\forall x,y\in IR\ ;\ x=1\times x\ ,\ y=1\times y$
$\Rightarrow (x,y)R(x,y)$

لذا R خاصیت بازتابی دارد $(\lambda=1)$

۲) فرض کنیم: $(x,y)R(x',y') \xRightarrow{\exists\lambda>0}$
$x=\lambda x'\quad ,\quad y=\lambda y'$
$$\xRightarrow{\frac{1}{\lambda}>0} x'=\frac{1}{\lambda}x,\ y'=\frac{1}{\lambda}y$$
$$\Rightarrow (x'\ ,\ y')R(x\ ,\ y)$$

خاصیت تقارنی نیز برقرار است

۳) فرض کنیم: $(x,y)R(x',y')\wedge(x',y')R(x'',y'')$
$$\Rightarrow(x=\lambda x',y=\lambda y')\wedge(x'=\lambda' x'',y'=\lambda' y'')$$
$$\lambda,\lambda'>0$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\lambda x'=\lambda(\lambda' x'')=\overbrace{(\lambda\lambda')}^{\lambda''}x''\\ \Rightarrow x=\lambda'' x''\\ y=\lambda y'=\lambda(\lambda' y'')=\underbrace{(\lambda\lambda')}_{\lambda''}y''\\ \Rightarrow y=\lambda'' y''\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$(x,y)R(x'',y'')$

پس‌خاصیت ترا‌گذری‌نیز دارد بنابراین R هم‌ارزی است.

$$[(1,2)]=\{(x,y)\in IR^2\ |\ (x,y)R(1,2)\}=$$
$$\{(x,y)\in IR^2\ |\ x=\lambda\times 1\quad ,\quad y=\lambda\times 2\}\Rightarrow$$
$$\lambda=\frac{1}{2}$$
$$[(1,2)]=\{\cdots,(1,2),(2,4),\left(\frac{1}{2},1\right),\cdots\}$$

جواب سؤال ۶ :

می‌دانیم‌به‌اندازه تعداد زیرمجموعه‌های یک‌حاصل‌ضرب می‌توان رابطه روی‌آن تعریف‌کرد پس‌اگر مثلاً $n(A)=K$ دراین‌صورت $n(A\times A)=K\times K=K^2$ پس‌به تعداد 2^{K^2} زیرمجموعه داریم و به‌همین تعداد نیز می‌توانیم رابطه‌روی A تعریف‌کنیم.

جواب سؤال ۷ :

چون $n(A)>n(B)$ بنابراین اگـر تابعی روی همه اعضای A اثر کند ناچاراً عـلاوه بـر اینکه مجموعه B را می‌پوشاند به‌اندازهٔ $n(A)-n(B)$ عضواز B را ممکن‌است بیش‌از یک‌بار بپوشاند و چنین‌تابعی نمی‌تواند یک‌بیک باشد.

جواب سؤال ۸ :

برای اثبات وارون‌پذیری f کافی است نشان دهیم‌که f تابعی یک‌بیک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\xRightarrow{x_1,x_2>0}\frac{2\sqrt{x_1}-1}{\sqrt{x_1}+6}=\frac{2\sqrt{x_2}-1}{\sqrt{x_2}+6}$$
$$\Rightarrow 2x_1x_2+12\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}-6$$
$$=2x_1x_2-\sqrt{x_1}+12\sqrt{x_2}-6$$
$$\Rightarrow 13\sqrt{x_1}-13\sqrt{x_2}=0$$
$$\Rightarrow 13(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})=0$$
$$\Rightarrow \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}$$
$$\xRightarrow{x_1,x_2>0} x_1=x_2$$
$$y=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+6}\Rightarrow y\sqrt{x}+6y=2\sqrt{x}-1$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}(y-2)=-1-6y$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{-1-6y}{y-2}$$
$$\Rightarrow x=\left(\frac{-1-6y}{y-2}\right)^2\Rightarrow$$
$f^{-1}(x)=\left(\frac{-1-6x}{x-2}\right)^2 \leftarrow$ ضابطه‌تابع وارون

جواب سؤال ۹ :

بلی تابع است زیـرا : اصلاً نقطهٔ مشترکی در دامنه هرضابطه بادوضابطه‌دیگر وجودنداردکه بتوان‌به‌ازای‌آن نقطه مشترک به دومقدار متفاوت ازبرد رسید.

جواب سؤال ۱۰:

درتوابع چندضابطه‌ای برای‌بررسی یک‌بیکی آنها، باید اولاً یک‌بیکی را برای هرضابطه بررسی‌کنیم و ثانیاً بردهای ضابطه‌ها نباید نقطه مشترکی‌داشته باشند.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & x\geq 0\\[2mm] \dfrac{x}{1-x} & x<0\end{cases}$$

اگر x_1 و $x_2\geq 0$ و $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$
$$\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{1+x_2}\Rightarrow$$
$$x_1+x_1x_2=x_2+x_1x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

اگر $x_2<0$ و x_1 باشد و داشته باشیم:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2}{1-x_2}\Rightarrow$$
$$x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

ازطرفی اگر $x\geq 0$ برد تابع $f_1(x)=\frac{x}{1+x}$ مجموعهٔ $IR^+\cup\{0\}$ است در حالی‌که اگر $x<0$ برد تابع:
$$f_2(x)=\frac{x}{1-x}$$
مجموعهٔ IR^- می‌باشدکه باهم اشتراکی ندارند لذا تابع یک بیک است.

جواب سؤال ۱۱:

$$f(x_1\ ,\ y_1)=f(x_2\ ,\ y_2)\Rightarrow(x_1+y_1,x_1+y_1)$$
$$=(x_2+y_2\ ,\ x_2+2y_2)\Rightarrow$$
$$\begin{cases}x_1+y_1=x_2+y_2\\ x_1+2y_1=x_2+2y_2\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}(x_1-x_2)=(y_2-y_1)\\ (x_1-x_2)=2(y_2-y_1)\end{cases}\Rightarrow$$
$$(y_2-y_1)=2(y_2-y_1)\Rightarrow y_2-y_1=0$$
$$\Rightarrow\boxed{y_2=y_1}\Rightarrow\boxed{x_1=x_2}\Rightarrow$$
$(x_1\ ,\ y_1)=(x_2\ ,\ y_2)$ تابع یک‌بیک‌است

اگر $(x_1\ ,\ y_1)=(x+y\ ,\ x+2y)$ ، و $(x_1\ ,\ y_1)\in IR^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=x+y\\ y_1=x+2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1=-x-y\\ y_1=x+2y\end{cases}$$
$$\Rightarrow\boxed{y_1-x_1=y}$$
$$\Rightarrow -x_1=-x-(y_1-x_1)$$
$$\Rightarrow\boxed{x=2x_1-y_1}$$

پس‌برای‌هرزوج‌مرتب‌از IR^2 مانند (x_1,y_1) می‌توان از IR^2 زوج مرتب :
$$(x\ ,\ y)=(2x_1-y_1\ ,\ y_1-x_1)$$
را به دست آورد به قسمی‌که:
$$f(x\ ,\ y)=(x_1\ ,\ y_1)$$

جواب سؤال ۱۲:

اگر $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$
$$\frac{2x_1-1}{x_1(1-x_1)}=\frac{2x_2-1}{x_2(1-x_2)}$$
$$\Rightarrow 2x_1x_2-2x_1x_2^2-x_2+x_2^2$$
$$=2x_1x_2-2x_2x_1^2-x_1+x_1^2$$
$$\Rightarrow -2x_1x_2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)+(x_2^2-x_1^2)=0$$

$\Rightarrow (x_2-x_1)(-2x_1x_2-1+x_2+x_1)=0$

و با توجه به‌اینکه $x_1 , x_2\in A$ لذا $x_2<1$ و $x_1>0$ پس $(-2x_1x_2-1+x_2+x_1)\neq 0$ است!

لذا باید $x_2-x_1=0$ یعنی $x_2=x_1$ پس تابع یك بیك است.

حال اگر $y\in IR \Rightarrow y=\frac{2x-1}{x(1-x)}$

$\Rightarrow yx-yx^2=2x-1$

$\Rightarrow yx^2+(2-y)x-1=0 \Rightarrow$

$$x=\frac{-(2-y)\pm\sqrt{(2-y)^2-4\times y\times(-1)}}{2y}$$

$$\Rightarrow x=\frac{y-2\pm\sqrt{4+y^2}}{2y}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود ضابطهٔ اخیر نشان‌دهندهٔ این مطلب است که‌هرعضو از IR به‌جزعددصفر توسط تابع‌پوشیده‌می‌شود ودر مورد عددصفر نیز اگر قراردهیم $x=\frac{1}{2}$ داریم:

$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{2\times(\frac{1}{2})-1}{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}=0$$

جواب سؤال ۱۳ :

$f(2 , -4)=$
$(2\times2+(-4) , 6\times2+3\times(-4))$
$\Rightarrow f(2 , -4)=(0 , 0)$
$f(3 , -6)=$
$(2\times3+(-6) , 6\times3+3\times(-6))$
$\Rightarrow f(3 , -6)=(0 , 0)$

لذا تابع یك‌بیك نیست.

ازطرفی تابع‌پوشا نیزنمی‌باشد مثلاً اگر $(1,1)\in IR^2$ دراین صورت تابع فوق (۱ ، ۱) را نمی‌پوشاند، زیرا اگر:

$(1 , 1)=(2x+y , 6x+3y)$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x+y=1\\6x+3y=1\end{cases}$$

و این‌دستگاه جواب ندارد.

جواب سؤال ۱۴ :

شبیه به‌جواب سؤال ۱۰ است و به همان صورت بررسی می‌شود.

جواب سؤالات ریاضیات جدید سوم ریاضی

جواب سؤال ۱ :

با یك مثال نقض حکم کلی‌را می‌توان ردکرد اگرفرض کنیم:

$w_1=\{(x,y) \mid x+y=0\}$

$w_2=\{(x,y) \mid x-y=0\}$

واضح است که w_1 و w_2 هردو زیرفضای IR^2 هستند حال ثابت می‌کنیم $w_1\cup w_2$ نسبت به عمل جمع بسته‌نیست‌لذازیر فضا نمی‌باشد.

$w_1\cup w_2=\{(x,y) \mid x+y=0 \vee x-y=0\}$

$(1 , -1)\in w_1 \Rightarrow (1 , -1)\in w_1\cup w_2$

$(1 , 1)\in w_2 \Rightarrow (1 , 1)\in w_1\cup w_2$

$(1 , -1)+(1 , 1)=(2 , 0)\in w_1$

$(2 , 0)\notin w_2 \Rightarrow (2 , 1)\in w_1\cup w_2$

جواب سؤال ۲ :

واضح است که $w\subseteq R^3$ بنابراین‌کافی‌است نشان دهیم که w نسبت‌به جمع وضرب اسکالر بسته است.

$(x_1 , y_1 , z_1) , (x_2 , y_2 , z_2)\in w$

$$\Rightarrow \begin{cases}ax_1+by_1+cz_1=0\\ ax_2+by_2+cz_2=0\end{cases}$$

$(x_1 , y_1 , z_1)+(x_2 , y_2 , z_2)$
$=(x_1+x_2 , y_1+y_2 , z_1+z_2)\in w$

زیرا: $a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)$
$=\underbrace{(ax_1+by_1+cz_1)}_{0}+\underbrace{(ax_2+by_2+cz_2)}_{0}=0$

پس نسبت به جمع بسته است

حال اگر $(x,y,z)\in w \Rightarrow ax+by+cz=0$

$r(x,y,z)=(rx,ry,rz)\in w$

زیرا: $arx+bry+crz$
$=r(ax+by+cz)=r0=0$

نسبت به‌ضرب اسکالرنیز بسته‌است لذا طبق‌قضیه زیرفضااست.

جواب سؤال ۳ :

هرگاه v_1 و v_2 و . . . و v_{n+1} ، (n+1) بردار در فضای برداری IR^n باشند داریم

اگر: $a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_{n+1}v_{n+1}$
$=(0 , 0 , 0 , \ldots , 0)$ ← n تا صفر

$\Rightarrow a_1(b_1 , b_2 , \ldots , b_n)+a_2(c_1 , c_2 , \ldots , c_n)$
$+\cdots+a_{n+1}(t_1 , t_2 , \ldots , t_n)=(0 , 0 , \ldots , 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases}a_1b_1+a_2c_1+\cdots+a_{n+1}t_1=0\\ a_1b_2+a_2c_2+\cdots+a_{n+1}t_2=0\\ \vdots\\ a_1b_n+a_2c_n+\cdots+a_{n+1}t_n=0\end{cases}$$

دستگاه بالا دستگاهی است با n معادله و (n+1) مجهول که این‌دستگاه همواره دارای بی‌نهایت جواب مخالف‌صفر است لذا این (n+1) بردار طبق‌تعریف وابسته خطی‌اند.

جواب سؤال ۴ :

اگر W یك زیرفضای V باشد چون‌خود یك فضا است لذا نسبت‌به جمع وضرب اسکالر بسته‌است بنابراین‌رابطهٔ:

$\forall r_1 , r_2\in IR \ , \ \forall w_1 , w_2\in W$

$r_1w_1+r_2w_2\in W$

همواره برقرار است.

حال اگر رابطهٔ‌فوق برقرارباشد ثابت می‌کنیم W زیر فضا است وچون W زیرمجموعهٔ V است کافی‌است بااستفاده از رابطهٔ فوق ثابت کنیم نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

اگر: $w_1 , w_2\in W \xRightarrow{\text{بنابر رابطهٔ فرض}} r_1=r_2=1$

$\Rightarrow 1\cdot w_1+1\cdot w_2\in W \Rightarrow w_1+w_2\in W$

نسبت‌به جمع بسته است.

اگر: $w_1\in W \xRightarrow{\text{بنابر رابطهٔ فرض}} r_1=r \ , \ r_2=0$

$\Rightarrow r\cdot w_1+0\cdot w_2\in W \Rightarrow rw_1\in W$

نسبت به ضرب اسکالر بسته است.

جواب سؤال ۵:

چون‌طبق‌فرض بردارهای x و y و z مستقل‌خطی‌اندلذا هرترکیب خطی‌از این ۳ بردارکه مساوی‌صفر تشکیل شود باید ضرایب آن صفر باشند.

حال اگر: $a(x-2y+z)+b(x+y-z)$
$+c(2x-y+z)=\bar{0}$

$\Rightarrow ax-2ay+az+bx+by-bz$
$+2cx-cy+cz=\bar{0}$

$\Rightarrow (a+b+2c)x+(-2a+b-c)y$
$+(a-b+c)z=\bar{0}$

وچون بردارهای x و y و z طبق‌فرض مستقل خطی‌اند پس:

$$\begin{cases}a+b+2c=0\\ -2a+b-c=0\\ a-b+c=0\end{cases} \Rightarrow a=b=c=0$$

$\Longrightarrow$ بردارهای حکم مسأله مستقل خطی‌اند

جواب سؤال ۶ :

(الف) $z(x+y')+z'x+(z+y')z'$
$=zx+zy'+z'x+zz'+y'z'$
$=x(z+z')+y'(z+z')+0=x+y'$

(ب) $(u+v+x+y)(u+v+y)(u+x)$
$=[(u+v+y)+x](u+v+y)(u+x)$
$=([(u+v+y)+x](u+v+y))(u+x)$
$\overset{\text{قانون جذب}}{=}(u+v+y)(u+x)$
$=uu+uv+uy+ux+vx+xy$
$=(u+uv)+uy+ux+vx+xy$
$\overset{\text{قانون جذب}}{=}(u+uy)+ux+vx+xy$
$\overset{\text{قانون جذب}}{=}(u+ux)+vx+xy\overset{\text{قانون جذب}}{=}u+vx+xy$

جواب سؤال ۷:

$T=(xyzt)+(xyzt')+(xyz't)+(xy'zt)$
$+(x'yzt)$

که مدار را پس‌از ساده‌شدن رسم می‌کنیم

	مرد	مرد	زن	زن	
	x	y	z	t	T
	1	1	1	1	1
	1	1	1	0	1
	1	1	0	1	1
	1	1	0	0	1
	1	0	1	1	1
	1	0	1	0	0
	1	0	0	1	0
	1	0	0	0	0
	0	1	1	1	1
	0	1	1	0	0
	0	1	0	1	0
	0	1	0	0	0
	0	0	1	1	0
	0	0	1	0	0
	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0

جواب سؤال ۸:

$$[(x+y)(x+y')(x'+y')]'$$
$$=(x+y)'+(x+y')'+(x'+y')'$$
$$=x'y'+x'y+xy=x'y'+\underbrace{(x'+x)}_{1}y$$
$$=x'y'+y=(x'+y)\cdot\underbrace{(y'+y)}_{1}=(x'+y)$$

جواب سؤال ۹:

$$(a+b)[a+b'(a+b)]$$
$$=(a+b)[a+(b'a)+(b'b)]$$
$$=(a+b)[a+(b'a)]$$
$$=(a+b)[(a+b')\cdot\underbrace{(a+a)}_{a}]$$
$$\overset{\text{قانون جذب}}{=}(a+b)a\overset{\text{قانون جذب}}{=}a$$

جواب سؤال ۱۰:

الف) $(aSa)S(cSa)=(a'+a')S(a'+a')$
$=a'Sa'=(a')'+(a')'=a+a=a$

ب) $aSa=a'+a'=a'$

ج) $aSb=a'+b'$

د) $(a+b)S(a+b)=(a+b)'+(a+b)'$
$=(a+b)'$

هـ) ابتدا $(a'+b)$ را با توجه به مدار S به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{[(aSa)S(aSa)]}_{a}\ S\underbrace{(bSb)}_{b'}=Sab'$$
$$=a'Sb\Rightarrow(a'+b)S(a'+b)$$
$$=(a'+b)'+(a'+b)'=(a'+b)'=ab'$$

جواب سؤالات ریاضیات جدید چهارم ریاضی

جواب سؤال ۱:

الف) $\exists x\forall y\,(x+1=2)\wedge[(x\neq 2)\vee y\neq 0]$

ب) $\exists x\exists y\,(x\geqslant y\wedge y<x)$

ج) $\exists x\forall y\,(x+y=0\wedge x\neq -y)$

د) $\forall x\exists y[|x|=|y|\wedge(x^2\neq y^2\wedge x^3\neq y^3)]$

جواب سؤال ۲:

الف) ۱) $(p\wedge q)\Rightarrow[p\Rightarrow(s\wedge r)]$
۲) $(p\wedge q)\wedge t$
$\therefore\ s\vee r$
۳) $p\wedge q$ ← استفاده از ۲ و حذف عاطف
۴) $p\Rightarrow(s\wedge r)$ ← استفاده‌از ۳و۱وقانون‌انتزاع
۵) p ← استفاده‌از ۳ وحذف عاطف
۶) $s\wedge r$ ← استفاده‌از ۴ و ۵ و انتزاع
۷) s ← استفاده از ۶ و حذف عاطف
۸) $s\vee r$ ← استفاده از ۷ و ادخال فاصل

توجه: استنتاج زیر همواره معتبر است

$$(q\Rightarrow s)\wedge(r\Rightarrow t)$$
$$\frac{q\vee r}{\therefore\ s\vee t}$$

نام قانون بالا را قانون C.D می‌گذاریم

۱) $q\Rightarrow s$
۲) $r\Rightarrow t$
۳) $\sim r\Rightarrow q$
$\therefore\ \sim r\Rightarrow s$ ← ۱ و ۳ وقیاس
$\sim t\Rightarrow\ \sim r$ ← ۲ و عکس نقیض
$\therefore\ \sim t\Rightarrow s\equiv t\vee s$ قیاس

ب) ۱) $q\vee(q\vee r)$
۲) $(q\Rightarrow s)\wedge(r\Rightarrow t)$
۳) $(s\vee t)\Rightarrow(p\vee r)$
۴) $\sim p$
$\therefore\ r$
۵) $q\vee r$ ← با توجه‌به ۱ و ۴ و نقیض‌انتزاع

اثبات:

۶) $s\vee t$ ← C.D با توجه به ۲ و ۵ و
۷) $p\vee r$ ← با توجه‌به ۳ و ۶ و انتزاع
$\therefore\ \sim t\Rightarrow s\equiv t\vee r$ قیاس
۸) r ← با توجه به ۴ و ۷ ونقیض انتزاع

به طریق مشابه می‌توان اثبات کرد که استنتاج زیر نیز همواره معتبر است که نام آن‌را قانون D.D می‌گذاریم

$$(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)$$
$$\frac{\sim q\vee\sim r}{\therefore\ \sim p\vee\sim s}$$

ج) ۱) $p\Rightarrow q$
۲) $q\Rightarrow r$
۳) $(s\Rightarrow r)\wedge(t\Rightarrow q)$
۴) $(\sim r\vee\sim q)\wedge(\sim u\vee\sim p)$
$\therefore\ (\sim s\vee\sim t)\wedge(\sim u\vee\sim p)$
۵) $\sim r\vee\sim q$ ← با توجه‌به ۴ و حذف‌عاطف
۶) $\sim s\vee\sim t$ ← D.D باتوجه‌به ۳و۵ وقانون
۷) $\sim u\vee\sim p$ ← باتوجه به ۴ و حذف عاطف
۸) $\therefore(\sim s\vee\sim t)\wedge(\sim u\vee\sim p)$ ← از ۶ و ۷

جواب سؤال ۳:

می‌دانیم میدان حلقه‌ای است تعویض‌پذیر که با عمل‌دوم (ضرب) نیز گروه جابجایی‌است پس‌قانون‌حذف در آن برقرار است لذاطبق‌قضیه یك‌حوزهٔ‌درست‌است. اما عکس‌مطلب برقرار نیست یعنی‌در حالت‌کلی هرحوزهٔ درست نمی‌تواند یك میدان باشد مثلاً $(Z,+,\circ)$ یك‌حوزهٔ درست‌است (حلقه‌ای‌تعویض‌پذیر راست و مقسوم علیه صفر نـدارد) اما اعضای‌آن وارون ضربی‌ندارند لذا یك میدان‌نیست.

جواب سؤال ۴:

فرض‌کنیم $U=\{a|a=3m\ ,\ m\in Z\}$

واضح‌است‌که $U\subseteq Z$ حال‌برای ایده‌آل‌بودن‌آن ابتدا ثابت می‌کنیم U با عمل‌جمع زیرگروه $(Z,+)$ است.

$a,b\in U\Rightarrow a=3m_1\ ,\ b=3m_2$ فرض‌کنیم
$\Rightarrow a-b=3m_1-3m_2$
$3\underbrace{(m_1-m_2)}_{m_3}\Rightarrow a-b=3m_3\in U$

حال ثابت می‌کنیم برای هر $u\in U$ و هر $r\in Z$ ؛ $ur\in U$ و ru

$r\in Z$ و $u\in U\Rightarrow u=3m$ فرض‌کنیم
$\Rightarrow ru=r3m=3\underbrace{(rm)}_{m_1}=3m_1\in U$
$ur=3mr=3\underbrace{(rm)}_{m_1}=3m_1\in U$

پس U یك ایده‌آل دوطرفه Z است.

جواب سؤال ۵:

اگر قرار دهیم:

$$Z\sqrt{2}=\{m+n\sqrt{2}\mid m\ ,\ n\in Z\}$$

واضح‌است‌که $(Z\sqrt{2}\text{ و }+)$ یك‌گروه‌جابجایی‌است (بررسی آن به‌عهدهٔ دانش‌آموز) ونیز نسبت‌به ضرب‌بسته ـ شرکت‌پذیر وضرب درجمع ازچپ و راست توزیع‌پذیر است لذا:

$$(Z\sqrt{2}\ ,\ +\ ,\ \times)$$

یك‌حلقه‌است ازطرفی چون‌اعضای $Z\sqrt{2}$ همگی اعداد حقیقی هستند لذا دراین‌حلقه قاعدهٔ‌حذف‌نیز برقرار است لذاطبق‌قضیه یك‌حوزهٔ درست است.

جواب سؤال ۶:

توسط استقرای ریاضی می‌خواهیم ثابت‌کنیم برای هر $n\in N$ ، عدد $a=4^n+15n-1$ برعدد۹ بخش‌پذیراست.

$$p(1): 4+15-1=18=9m$$

فرض استقراء $p(k): 4^k+15k-1=9m_1$

$p(k+1): 4^{k+1}+15(k+1)-1=9m_2$ حکم استقراء

سمت چپ حکم استقراء $=4\times 4^k+15k+15-1$

$=4(9m_1-15k+1)+15k+14$

$=36m_1-60k+15k+18$

$=9(4m_1-5k+2)=9m_2$

جواب سؤال ۷:

توسط استقرا می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$$

$$p(1): \sin x=\frac{\sin\frac{1+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=\sin x$$

$$p(k): \sin x+\sin 2x+\cdots+\sin kx$$

فرض استقراء :
$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}$$

با توجه به فرض
$$\Rightarrow \sin x+\sin 2x+\cdots+\sin kx$$

$$+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}$$

$$+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}$$

$$+2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x$$

$$=\frac{\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{k+1}{2}x=p(k+1)$$

زیرا :

$$\left(2\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{k+2}{2}x-\sin\frac{kx}{2}\right)$$

جواب سؤال ۸:

$[a\ ,\ b]=48\ ,\ (a\ ,\ b)=d\ ,\ a=a'd\ ,\ b=b'd$

$(a'\ ,\ b')=1\ ,\ ab=48d \Longrightarrow a'b'd^2=48d$

$\Longrightarrow a'b'=\frac{48}{d}$

حال چون طبق فرض ab مربع کامل است پس $\frac{48}{d}$ نیز مربع کامل است پس $d=3$ یا $d=12$.

اگر : $d=3 \Longrightarrow a'b'=16$ و $(a'\ ,\ b')=1$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a'=1\Longrightarrow a=3\\ b'=16\Longrightarrow b=48\end{cases}$$

اگر : $d=12\Longrightarrow a'b'=4$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a'=1\Longrightarrow a=12\\ b'=4\Longrightarrow b=48\end{cases}$$

جواب سؤال ۹:

$$\begin{cases}(a\ ,\ 4)=2\\ (b\ ,\ 4)=2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2\mid a\ ,\quad 4\nmid a\\ 2\mid b\ ,\quad 4\nmid b\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=4k+2\\ b=4k'+2\end{cases}$$

(a و b باید زوج باشند و چون ب.م.م آنها با عدد ۴ عدد ۲ است پس نباید مضرب ۴ باشند، پس باید به‌صورت ۴k+۲ باشند.)

$\Longrightarrow a+b=4(k+k'+1)\Longrightarrow 4\mid a+b$

$\Longrightarrow (a+b\ ,\ 4)=4$

جواب سؤالات جبر سال اول

جواب سؤال ۱:

عبارت $A(x)$ از سه جمله تشکیل یافته است که هر یک باید معین باشند تا $A(x)$ معین باشد. جملهٔ $\sqrt{x+1}$ نتیجه می‌دهد که باید: $x+1\geqslant 0$ باشد و یا $x\geqslant -1$ باشد. جملهٔ $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ نتیجه می‌دهد که باید : $x^2-1\neq 0$ باشد و یا به عبارت‌دیگر: $x\neq\pm 1$ باشد. و جمله $\frac{3x+3}{x(x^2-2)}$ نتیجه می‌دهد که باید $x(x^2-2)\neq 0$ باشد. و یا به‌عبارت‌دیگر باید داشته باشیم: $x\neq 0$ و $x^2-2\neq 0 \Longrightarrow x\neq\pm\sqrt{2}$ و بنابراین در اینجا از اشتراک قلمرو سه‌جمله نتیجه می‌شود که مقدار $A(x)$ نقطه به‌ازای مقادیر زیر حقیقی است و به ازای مجموعهٔ اعداد مقابل تعریف‌شده است. قلمرو یا دامنهٔ‌تعریف $A(x)$ را با D_A نمایش می‌دهیم: بنابراین داریم:

$$D_A=R-\{x \mid x=\pm\sqrt{2} \text{ و } x=\pm 1 \text{ و } x<-1\}$$

و یا به عبارت‌دیگر می‌توان نوشت،

$$D_A=\{x \mid x\neq\pm 1 \text{ و } 0 \text{ و } x\neq\pm\sqrt{2} \text{ و } x>-1\}$$

مقدار $A(-1)$ برابر ÷ است که مبهم نامیده می‌شود. مقدار $A(-3)$ نامعین‌است زیر $\sqrt{x+1}$ به‌ازای $x=-3$ به‌شکل $\sqrt{-2}$ درمی‌آید که این عددی است غیر حقیقی و نامعین واز طرفی‌دیگرمی‌توان گفت که $x=-3$ جزو قلمرو $A(x)$ نیست وبدیهی است که مقدارمعینی بدست نخواهدداد.

جواب سؤال ۲ :

a) عبارت $\frac{A^2C}{B}$ را حساب می‌کنیم. داریم:

$A^2=(2a^2b^3cx^3y^4z^5)^2$

$A^2=4a^4b^6c^2x^6y^8z^{10}$

$C=-6a^3bd^2xyz$

$B=-4ab^2c^2x^2y^3z^7$

$$\frac{A^2C}{B}=\frac{(4a^4b^6c^2x^6y^8z^{10})(-6a^3bd^2xyz)}{(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)}$$

$=6a^6b^5d^2x^5y^6z^4$

درجهٔ $\frac{A^2C}{B}$ نسبت به x و y و z و t و a و b و c، abc و xyzt به‌ترتیب ازدرجهٔ ۵ ، ۶ ، ۴ ، ۰ ، ۶ ، ۵ ، ۰ ، ۱۱ ، ۱۵ می‌باشد.

b) حاصل نسبت :

$$\frac{A^3}{BC}+\frac{B^3}{AC}+\frac{C^3}{AB}$$
و یا
$$\frac{A^4}{ABC}+\frac{B^4}{ABC}+\frac{C^4}{ABC}$$
و یا
$$\frac{A^4+B^4+C^4}{ABC}$$
چنین‌است:

$$\frac{A^3}{BC}=\frac{(2a^2b^3cx^3y^4z^5)^3}{(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)(-6a^3bd^2xyz)}$$

$$=\frac{8a^6b^9c^3x^9y^{12}z^{15}}{24a^4b^3c^2d^2x^3y^4z^8}$$

$$\frac{B^3}{AC}=\frac{(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)^3}{(2a^2b^3cx^3y^4z^5)(-6a^3bd^2xyz)}$$

$$=\frac{-64a^3b^6c^6x^6y^9z^{21}}{-12a^5b^4cd^2x^4y^5z^6}$$

$$\frac{C^3}{AB}=\frac{(-6a^3bd^2xyz)^3}{(2a^2b^3cx^3y^4z^5)(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)}$$

$$=\frac{-216a^9b^3d^6x^3y^3z^3}{-8a^3b^5c^3x^5y^7z^{12}}$$

پس‌از ساده‌کردن عبارتهای فوق داریم:

$$\frac{A^3}{BC}=\frac{a^2b^6cx^6y^8z^7}{3d^2}$$

$$\frac{B^3}{AC}=\frac{16b^2c^5x^2y^4z^{15}}{3d^2a^2}$$

$$\frac{C^3}{AB}=\frac{27a^6d^6}{b^2c^3x^2y^4z^9}$$

بنابراین مجموع عبارتهای اخیر برابر است با:

$$\frac{A^3}{BC}+\frac{B^3}{AC}+\frac{C^3}{AB}=\frac{a^2b^6cx^6y^8z^7}{3d^2}$$
$$+\frac{16b^2c^5x^2y^4z^{15}}{3a^2d^2}+\frac{27a^6d^6}{b^2c^3x^2y^4z^9}$$

c) عامل مشترك عبارت $A^3+B^3+C^3$ چنین است :

$$(2a^2b^3cx^3y^4z^5)^3+(-4ab^2c^2x^2y^3z^7)^3$$
$$+(-6a^3bd^2xyz)^3=$$
$$8a^6b^9c^3x^9y^{12}z^{15}-64a^3b^6c^6x^6y^9z^{21}$$
$$-216a^9b^3d^6x^3y^3z^3=$$
$$8a^3b^3x^3y^3z^3(a^3b^6c^3x^6y^9z^{12}-8b^3c^6x^3y^6z^{18}$$
$$-27a^6d^6)$$

بنابراین عامل مشترك عبارت فوق:

$(2abxyz)^3$ و یا $8a^3b^3x^3y^3z^3$

می‌باشد.

d) بزرگترین عامل مشترك (ب. م. م) و کوچکترین مضرب مشترك (ك. م. م) بین A و B و C چنین است:

$(\text{ب. م. م})=2abxyz$ و

$\Leftarrow (\text{ك. م. م})=12a^3b^3c^2d^2x^3y^4z^7$

جواب سوال ۳:

a) از اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ استفاده می‌کنیم و سپس صورت و مخرج را در $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ یعنی مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{2})^3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{5-2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

b) در عبارت :

$$(??+2pq^2)^2=9y^2+?+4p^2q^4$$

با توجه به طرف‌دوم نتیجه می‌شود که به جای ?? باید جذر $9y^2$ گذاشته شود. یعنی باید داشته باشیم :

$$??=3y$$

پس بنابراین به جای ? باید $2(3y)(2pq^2)$ گذاشته شود. و دراین صورت عبارت به شکل‌زیر کامل می‌شود.

$$(3y+2pq^2)^2=9y^2+12pq^2y+4p^2q^4$$

c) در عبارت :

$$(x-??)^2=x^2-4a^2b^2x+?$$

با توجه به طرف‌دوم می‌توان نتیجه‌گرفت‌که اگر جملهٔ وسط را بر $2x$ تقسیم‌کنیم جملهٔ ?? بدست خواهد آمد. بنابراین:

$$??=2a^2b^2$$

و با مجذور کردن $2a^2b^2$ عبارت ? به دست خواهد آمد و در نتیجه عبارت‌فوق بشکل زیرکامل می‌شود.

$$(x-2a^2b^2)^2=x^2-4a^2b^2x+4a^4b^4$$

d) پرانتز اول و دوم‌را ساده‌می‌کنیم و سپس‌حاصل دو عامل‌را در هم‌ضرب می‌کنیم.

$$1+\frac{2x^ny^n}{x^{2n}+y^{2n}}=\frac{x^{2n}+y^{2n}+2x^ny^n}{x^{2n}+y^{2n}}$$

$$=\frac{(x^n+y^n)^2}{x^{2n}+y^{2n}}$$

$$1-\frac{2x^ny^n}{(x^n+y^n)^2}=\frac{(x^n+y^n)^2-2x^ny^n}{(x^n+y^n)^2}$$

$$=\frac{x^{2n}+y^{2n}}{(x^n+y^n)^2}$$

دوعبارت معکوس یکدیگرند وبنابراین حاصلضربشان برابر ۱ می‌شود. ودر نتیجه داریم:

$$?=1$$

e) کافی‌است عبارت $4x^2$ را اضافه وکم کنیم.

$$1+4x^4=1+4x^4+4x^2-4x^2$$

$$1+4x^4=(1+2x^2)^2-4x^2$$

$$=(1+2x^2-2x)(1+2x^2+2x)$$

$$\Rightarrow ?=1-2x+2x^2$$

f)

$$\begin{array}{l|l}
x^5+1 & x+1 \\ \hline
\pm x^5 \pm x^4 & x^4-x^3+x^2-x+1 \\ \hline
-x^4+1 & \\
\mp x^4 \mp x^3 & \\ \hline
x^3+1 & \\
\pm x^3 \pm x^2 & \\ \hline
-x^2+1 & \\
\mp x^2 \mp x & \\ \hline
x+1 & \\
\pm x \pm 1 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow ?=x^4-x^3+x^2-x+1$$

g) عبارت سمت‌راست را به x نمایش می‌دهیم:

$$x=\sqrt[5]{3\sqrt[5]{2\sqrt[5]{3\sqrt[5]{\cdots}}}}=?$$

طرفین را به توان۵ می‌رسانیم:

$$x^5=3\sqrt[5]{2\sqrt[5]{3\sqrt[5]{\cdots}}}\Rightarrow$$

$$\frac{x^5}{3}=\sqrt[5]{2\sqrt[5]{3\sqrt[5]{\cdots}}}$$

باز هم طرفین‌را به‌توان ۵ می‌رسانیم:

$$\left(\frac{x^5}{3}\right)^5=2\underbrace{\sqrt[5]{3\sqrt[5]{2\sqrt[5]{\cdots}}}}_{x}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{x^5}{3}\right)^5=2x$$

$$\frac{x^{25}}{3^5}=2x\Rightarrow\frac{x^{25}}{729}-2x=0$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{x^{24}}{729}-2\right)=0\Rightarrow x\neq 0$$

$$\frac{x^{24}}{729}-2=0\Rightarrow\frac{x^{24}}{729}=2$$

$$\Rightarrow x^{24}=2\times 729=1458$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[24]{1458}=?$$

h) عبارت سمت‌چپ را به x نمایش می‌دهیم:

$$x=-2+\cfrac{3}{\underbrace{-2+\cfrac{3}{-2+\cdots}}_{x}}$$

بنابراین داریم:

$$x=-2+\frac{3}{x}$$

$$x+2=\frac{3}{x}\Rightarrow x(x+2)=3$$

$$x^2+2x-3=0\Rightarrow(x-1)(x+3)=0$$

$$\Rightarrow x=1\ ,\ x=-3\Rightarrow ?=-3$$

عدد $x=1$ قابل‌قبول‌نیست زیراکسربه ۳− میل می‌کند. بـه عنوان مثال می‌توان با گرفتن چند جملهٔ‌کسر مقدار تقریبی‌کسر را تا یك‌رقم اعشار محاسبه‌کرد.

$$x\approx-2+\cfrac{3}{-2+\cfrac{3}{-2+\cfrac{3}{-2}}}$$

$$=-2+\cfrac{3}{-2+\cfrac{3}{\frac{4+3}{-2}}}=-2+\frac{3}{-2-\frac{6}{7}}$$

$$-2+\frac{3}{\frac{-14-6}{7}}=-2+\frac{21}{-20}$$

$$=-2-\frac{21}{20}=-3\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow x\approx-3/05\approx-3$$

بنابراین کسر میل می‌کند بـه عدد ۳− (بنابراین $x=-3$ برای‌کسر قابل‌قبول است).

i)

$$(1-x^2)(1+x^2)=1-x^4$$

$$(1-x^4)(1+x^4)=1-x^8$$

$$(1-x^8)(1+x^8)=1-x^{16}$$

$$(1-x^{16})(1+x^{16})=1-x^{32}\ ,\cdots,$$

$$(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow ?=x^{2^{n+1}}$$

j) طرفین رابطه‌را در $x-a$ ضرب‌می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$(x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ .....$$

$$(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})=?$$

$$(x-a)(x+a)=x^2-a^2\ ,$$

$$(x^2-a^2)(x^2+a^2)=x^4-a^4\ ,\cdots,$$

$$(x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})=x^{2^n}-a^{2^n}$$

$$\Rightarrow ?=x^{2^n}-a^{2^n}$$

جواب سؤال ۴ :

a)
$$\begin{cases}A=x^2+x+1\\B=2x^2-3x+2\\C=3x^2+x-4\end{cases}$$

$$3A-B+2C=3(x^2+x+1)-(2x^2-3x+2)+2(3x^2+x-4)$$
$$=3x^2+3x+3-2x^2+3x-2+6x^2+2x-8$$
$$=7x^2+8x-7$$

b) شرط مسئله‌را برقرار می‌کنیم یعنی باید داشته باشیم:

$$A+B=C$$
$$x^2+x+1+2x^2-3x+2=3x^2+x-4$$
$$3x^2-2x+3=3x^2+x-4$$
$$-2x-x=-4-3 \Longrightarrow$$
$$-3x=-7 \Longrightarrow x=\frac{7}{3}$$

c) برای تجزیهٔ عبارت:

$$B^2-4A^2$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$B^2-4A^2=(B-2A)(B+2A)$$
$$=[2x^2-3x+2-2(x^2+x+1)][2x^2-3x+2+2(x^2+x+1)]$$
$$=(2x^2-3x+2-2x^2-2x-2)(2x^2-3x+2+2x^2+2x+2)$$
$$=(-5x)(4x^2-x+4)$$

d) مقدار ABC به‌ازای $x=-1$ چنین می‌شود:

$$\begin{cases}A(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1\\B(-1)=2(-1)^2-3(-1)+2=7\\C(-1)=3(-1)^2+(-1)-4=-2\end{cases}$$
$$\Longrightarrow A(-1)B(-1)C(-1)$$
$$=1\times7\times(-2)=14$$
$$ABC=-14$$

e) درجهٔ عبارت: $C(B-2A)$ برابر ۳ است زیرا:

$$C(B-2A)=BC-2AC$$
$$=(2x^2-3x+2)(3x^2+x-4)$$
$$-2(x^2+x+1)(3x^2+x-4)$$
$$=6x^4+2x^3-8x^2-9x^3-3x^2+12x+6x^2$$
$$+2x-8-(2x^2+2x+2)(3x^2+x-4)$$
$$=6x^4-7x^3-5x^2+14x-8$$
$$-(6x^4+2x^3-8x^2+6x^3+2x^2-8x$$
$$+6x^2+2x-8)$$
$$=6x^4-7x^3-5x^2+14x-8$$
$$-(6x^4+8x^3-6x-8)$$

$$=6x^4-7x^3-5x^2+14x-8-6x^4-8x^3$$
$$+6x+8=-15x^3-5x^2+20x$$

مرتب برحسب قوای نزولی

مرتب برحسب قوای صعودی $=20x-5x^2-15x^3$

جواب سؤالات جبر سال دوم ریاضی

جواب سؤال ۱ :

$$D: 4y-2x-1=0 \Longrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$
$$\Longrightarrow m=\frac{1}{2} \text{ و } mm'=-1$$
$$\frac{1}{2}\times m'=-1 \Longrightarrow m'=-2$$

ضریب زاویهٔ خطی که برخط D عمود است.

$$A(2\ ,\ -2)$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ A می‌گذرد و برخط D عمود است:

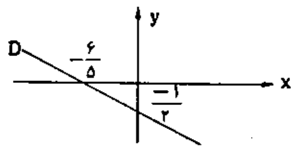
$$y+2=-2(x-2) \Longrightarrow y=-2x+2$$

جواب سؤال ۲ :

$$\boxed{D: 2y-3px+1=0 \text{ و } A(-1\ ,\ 1)}$$

$$\Longrightarrow AD=\frac{|-3p(-1)+2(1)+1|}{\sqrt{4+9p^2}}=1$$
$$|3p+3|=\sqrt{9p^2+4} \Longrightarrow$$
$$9p^2+4=9p^2+18p+9 \Longrightarrow$$
$$18p=-5 \Longrightarrow p=\frac{-5}{18}$$

$$D: 2y+\frac{5}{6}x+1=0 \Longrightarrow 12y+5x+6=0$$



جواب سؤال ۳:

a و b را باید طوری تعیین کنیم که

$$\begin{cases}D: ax+y+1=0\\D': ay+bx-1=0\\D'': 2x-y-b=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\text{اولاً: } D'\perp D''\\\text{ثانیاً: } D'\parallel D\end{cases}$$

همچنین ضریب‌زاویه‌های خطوط چنین است:

$$m_{D''}=2 \quad \text{و} \quad m_{D'}=\frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad m_D=-a$$

طبق شرایط مسئله داریم:

$$D'\perp D'' \Longrightarrow m_{D'}m_{D''}=-1$$

$$D'\parallel D \Longrightarrow m_{D'}=m_D$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\left(\frac{-b}{a}\right)(2)=-1\\-\frac{b}{a}=-a\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}a=2b\\b=a^2\end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix}a=\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{4}\end{vmatrix}$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ دوخط D و D' ابتدا یک نقطهٔ دلخواه از D یا D' انتخاب کرده و سپس فاصلهٔ این نقطه که مثلاً روی خط D است را از خط D' محاسبه می‌کنیم. این فاصله در واقع فاصلهٔ دوخط موازی D و D' است. نقطه‌ای مانند A را روی خط D در نظر می‌گیریم.

$$D: \frac{1}{2}x+y+1=0 \Longrightarrow A\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$$

فاصلهٔ AD' در واقع فاصلهٔ دوخط D و D' است.

$$D': \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0$$

$$AD'=\frac{\left|\frac{1}{4}x_A+\frac{1}{2}y_A-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}}$$
$$=\frac{\left|\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{2}(-1)-1\right|}{\frac{\sqrt{5}}{4}}$$
$$=\frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{\frac{\sqrt{5}}{4}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

برای تعیین خط: $y=mx+h$

که از نقطهٔ تقاطع D' و D'' بگذرد و با خط:

$$2x+3y+1=0$$

موازی باشد. ابتدا باید نقطهٔ تلاقی دو خط D' و D'' را به دست آورد.

$$\begin{cases}D': \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0\\D'': 2x-y-\frac{1}{4}=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0\\2x-y-\frac{1}{4}=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}x+y-2=0\\2x-y-\frac{1}{4}=0\end{cases}$$

$$۲x+\frac{۱}{۲}x-۲-\frac{۱}{۴}=۰ \Longrightarrow \frac{۵}{۲}x=\frac{۹}{۴} \Longrightarrow$$

$$x=\frac{۹}{۱۰}=۰/۹ \Longrightarrow y=\frac{۳۱}{۲۰}=۱/۵۵$$

خط مفروض باید از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۰/۹\\ ۱/۵۵\end{matrix}\right.$ یعنی نقطهٔ تلاقی دوخط D' و D'' بگذرد.

و با خط $۲x+۳y+۱=۰$ با ضریب زاویه‌ای $m=\frac{-۲}{۳}$ موازی باشد.

بنابراین نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۰/۹\\ ۱/۵۵\end{matrix}\right.$ باید درخط مفروض صدق کند.

و ضریب زاویهٔ خط مفروض باید برابر $m=\frac{-۲}{۳}$ باشد.

$$۰/۹m+h=۱/۵۵ \Longrightarrow m=-\frac{۲}{۳}=-۰/۶۶$$

$$۰/۹\left(-\frac{۲}{۳}\right)+h=۱/۵۵ \Longrightarrow$$

$$h=۱/۵۵+\frac{۱/۸}{۳}=\frac{۴/۶۵+۱/۸}{۳}$$

$$=\frac{۶/۴۵}{۳}=۲/۱۵$$

$$\Longrightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+۲/۱۵$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ تقاطع دو خط D' و D'' عبور می‌کند و با خط به معادلهٔ $۲x+۳y+۱=۰$ موازی است.

جواب سؤال ۴:

ضریب زاویهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A(\sqrt{۳},۳)$ و $B(۰,۲)$ می‌گذرد:

$$m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۳-۲}{\sqrt{۳}-۰}$$

$$m=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Longrightarrow$$

$$y-y_B=m(x-x_B) \Longrightarrow y-۲=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۰)$$

خط گذرنده از A و B:

$$y-۲=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x \Longrightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+۲$$

زاویهٔ خط با محور طولها:

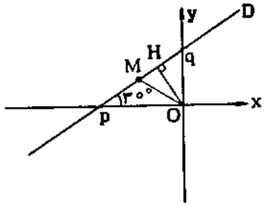
$$tg\,\alpha=m=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=tg۳۰° \Longrightarrow \alpha=۳۰°$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \beta=۹۰°-۳۰°=۶۰° \Longrightarrow$$

زاویهٔ خط با محور عرضها: $\beta=۶۰°$

$$x_M=\frac{x_p+x_q}{۲}=\frac{-۲\sqrt{۳}+۰}{۲}=-\sqrt{۳}$$

$$p\left|\begin{matrix}-۲\sqrt{۳}\\ ۰\end{matrix}\right. \text{ و } q\left|\begin{matrix}۰\\ ۲\end{matrix}\right.$$



$$y_M=\frac{y_p+y_q}{۲}=\frac{۰+۲}{۲}=۱ \Longrightarrow M\left|\begin{matrix}-\sqrt{۳}\\ ۱\end{matrix}\right.$$

$$OM=\sqrt{x_M^۲+y_M^۲}=\sqrt{(-\sqrt{۳})^۲+۱}=۲$$

خط ارتفاع از مبدأ گذشته و برخط D عمود است، بنابراین:

$$y=-\sqrt{۳}\,x$$

(ثابت می‌شود: $OM=Mp=Mq=۲$)

جواب سؤال ۵:

چون نقطهٔ A روی قطر AC قرار دارد پس مختصات آن در معادلهٔ AC صدق می‌کند لذا:

$$x_A=۴ \Longrightarrow ۴-۲y_A=۰ \Longrightarrow$$

$$y_A=۲ \Longrightarrow A\left|\begin{matrix}۴\\ ۲\end{matrix}\right.$$

ازطرفی قطر AC دارای ضریب زاویهٔ برابر با $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد

وچون در مربع قطر، نیمساز زاویه نیز هست پس:

$$\angle CAD=۴۵°$$

بنابراین با در دست داشتن ضریب زاویهٔ AC و زاویهٔ بین AC و AD می‌توان ضریب زاویهٔ AD را از فرمول

$$tg\alpha=\frac{m-m'}{۱+mm'}$$

به دست آورد.

$$tg۴۵°=۱=\frac{m-\left(\frac{۱}{۲}\right)}{۱+m\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{m-\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{m}{۲}}$$

$$\Longrightarrow ۱+\frac{m}{۲}=m-\frac{۱}{۲} \Longrightarrow m_{AD}=۳$$

و داریم:

$$A\left|\begin{matrix}۴\\ ۲\end{matrix}\right. \Longrightarrow AD:(y-۲)=۳(x-۴) \Longrightarrow$$

$$AD:\ \boxed{y=۳x-۱۰}$$

به همین ترتیب می‌توان معادلهٔ ضلع AB را به دست آورد.

ازطرفی باتوجه به اینکه $\overline{AC}=۲\sqrt{۵}$ پس داریم:

$$\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=۲\sqrt{۵}$$

$$\Longrightarrow (۴-x_C)^۲+(۲-y_C)^۲=۲۰$$

$$\Longrightarrow \boxed{x_C^۲+y_C^۲-۸x_C-۴y_C=۰} \qquad (۱)$$

وچون نقطهٔ C روی قطر AC است پس مختصاتش در معادلهٔ AC صدق می‌کند یعنی داریم:

$$\boxed{x_C-۲y_C=۰} \qquad (۲)$$

وبا توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$C\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right. \text{ یا } C\left|\begin{matrix}\frac{۲۰}{۳}\\ \frac{۱۰}{۳}\end{matrix}\right.$$

حال با داشتن مختصات نقطهٔ C، مثلاً $C\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right.$ و اینکه ضلع BC موازی با AD است می‌توان معادلهٔ ضلع BC را نوشت و با توجه به اینکه ضلع DC موازی ضلع AB است می‌توان معادلهٔ DC را نیز به دست آورد که محل برخورد دو به دوی این خطوط همان رئوس مربع است.

جواب سؤال ۶:

محل برخورد میانه‌های مثلث همان مرکز ثقل مثلث است که مختصات این نقطه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳}=\frac{۱+۱+(-۳)}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}=\frac{۲+(-۲)+۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Longrightarrow G\left|\begin{matrix}-\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۳}\end{matrix}\right.$$

حال برای نوشتن معادلهٔ خط مزبور نیاز به ضریب زاویهٔ نیمساز زاویهٔ A یعنی AA' داریم: ابتدا با در دست داشتن ضریب زاویه‌های AB و AC زاویهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{-۲-۲}{۱-۱} \Longrightarrow m_{AB} \text{ تعریف نشده است} \Longrightarrow$$

AB برمحور xها عمود است

$$m_{AC}=\frac{۱-۲}{-۳-۱}=\frac{-۱}{-۴}=\frac{۱}{۴} \Longrightarrow$$

$\alpha=Arc\ tg\frac{۱}{۴}$ زاویه‌ای که ضلع AC با محور xها می‌سازد

$$\Longrightarrow \hat{A}=\frac{\pi}{۲}-Arc\ tg\frac{۱}{۴}$$

$$\Longrightarrow \frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\pi}{۴}-\frac{Arc\ tg\frac{۱}{۴}}{۲}$$

$$tg\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{m_{AC}-m_{AA'}}{۱+m_{AC}m_{AA'}}$$

$$\Longrightarrow m_{AA'}=\frac{m_{AC}-tg\frac{\hat{A}}{2}}{m_{AC}tg\frac{\hat{A}}{2}+1}=\frac{\frac{1}{2}-tg\frac{\hat{A}}{2}}{\frac{1}{2}tg\frac{\hat{A}}{2}+1}$$

پس معادلهٔ‌خط مطلوب چنین است:

$$(y-y_C)=-\frac{1}{m_{AA'}}(x-x_C)$$

جواب سؤالات جبر سال سوم ریاضی

جواب سؤال ۱ :

چون چند جمله‌ای x^3+mx^2+nx-3 بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است بنابراین باقیماندهٔ آن صفر است. و داریم :

$$x-1=0 \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow$$
$$R=1+m+n-3=0 \Longrightarrow m+n=2$$

و چون باقیماندهٔ آن بر $(x+1)$ برابر -2 است بنابراین داریم :

$$x+1=0 \Longrightarrow x=-1$$
$$R=(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)-3=-2$$
$$\Longrightarrow -1+m-n-3=-2 \Longrightarrow m-n=2$$
$$\begin{cases}m+n=2\\ m-n=2\end{cases} \Longrightarrow 2m=4 \Longrightarrow m=2\ ,\ n=0$$

چند جمله‌ای مطلوب: $\Longrightarrow x^3+2x^2-3$

جواب سؤال ۲ :

باقیماندهٔ $A(x)$ را بر $4x^2-2kx+s$ به دست آورده و متحد باصفر قرار می‌دهیم.

ابتدا مقسوم‌علیه‌را برابرصفر قرار می‌دهیم واز آن برای به دست‌آوردن باقیمانده استفاده می‌کنیم.

$$4x^2-2kx+s=0 \Longrightarrow 4x^2=2kx-s$$
$$A(x)=16x^4+4 \Longrightarrow A(x)=(4x^2)^2+4$$
$$\Longrightarrow R(x)=(2kx-s)^2+4$$
$$R(x)=4k^2x^2-4ksx+s^2+4$$
$$=k^2(2kx-s)-4ksx+s^2+4$$
$$R(x)=(2k^3-4ks)x+s^2-k^2s+4\equiv 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases}2k^3-4ks=0\\ s^2-k^2s+4=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}k=0\\ \text{یا}\\ k^2=2s\end{cases}$$

اگر $k=0$ اختیارشود جوابی‌در مجموعهٔ اعدادحقیقی وجود ندارد. اما اگر در معادلهٔ دوم دستگاه قرار دهیم:

$$k^2=2s$$

خواهیم داشت :

$$-s^2+4=0$$

و یا داریم :

$$s=\pm 2$$

که $s=-2$ قابل‌قبول نیست زیرا داریم :

$$s=\frac{k^2}{2} \quad \text{و یا} \quad k^2=2s$$

که نتیجه می‌شود : $s>0$. بنابراین تنها جواب $s=2$ قابل قبول است و به ازای این‌مقدار s دو مقدار برای k به دست می‌آید و جوابها چنین می‌شوند:

$$\begin{cases}s=2\\ k=2\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}s=2\\ k=-2\end{cases}$$

جواب سؤال ۳ :

در بسط $(a+b)^n$ جملهٔ $k+1$ ام یعنی T_{k+1} به‌صورت:

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

می‌باشد. بنابراین برای پیداکردن ضریب x^{-10} در بسط:

$$(x^4-x^{-3})^{15}$$

جملهٔ $k+1$ ام را می‌نویسیم و توان x را مساوی -10 قرار می‌دهیم و k را بـه دست می‌آوریم. پس از تعیین k ضریب جمله مطلوب را به دست می‌آوریم.

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{15}{k}(x^4)^{15-k}(x^{-3})^k$$
$$=(-1)^k\binom{15}{k}x^{60-7k} \Longrightarrow 60-7k=-10$$
$$7k=70 \Longrightarrow k=10 \Longrightarrow$$
$$T_{11}=(-1)^{10}\binom{15}{10}x^{-10}$$
$$=\frac{15!}{10!(15-10)!}x^{-10}=3003x^{-10}$$

جواب سؤال ۴ :

برای‌تحقیق اینکه‌جملهٔ مستقل‌از x وجوددارد ابتداجملهٔ عمومی بسط را می‌نویسیم و سپس‌توان x را برابر صفر قرار می‌دهیم؛ زیرا جملهٔ مستقل‌از x فاقد x است.

$$T_{k+1}=\binom{7}{k}(\sqrt{x})^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k \quad \text{و} \quad (k\in N)$$
$$T_{k+1}=\binom{7}{k}x^{\frac{7-k}{2}}\times x^{\frac{-2k}{3}}=\binom{7}{k}x^{\frac{7-3k}{3}}$$
$$\Longrightarrow \frac{7-3k}{3}=0 \Longrightarrow 7-3k=0$$

بنابراین جملهٔ مستقل از x وجود ندارد زیرا :

$$k=\frac{7}{3}\notin N$$

جواب سؤال ۵ :

برای‌به دست‌آوردن $f(x)$ از رابطهٔ :

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=x$$

کافی است x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل‌کنیم و رابطهٔ فوق‌را با رابطهٔ به‌دست‌آمده دریک دستگاه قراردهیم و از دستگاه حاصله $f(x)$ را حساب کنیم.

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=x \Longrightarrow x\to\frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{1}{x}$$

$$\begin{matrix}-a\\ b\end{matrix}\begin{cases}af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=x\\ af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{1}{x}\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}-a^2f(x)-abf\left(\frac{1}{x}\right)=-ax\\ baf\left(\frac{1}{x}\right)+b^2f(x)=\frac{b}{x}\end{cases}$$

$$(a^2-b^2)f(x)=ax-\frac{b}{x} \Longrightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\frac{a}{a^2-b^2}x-\frac{b}{a^2-b^2}\,\frac{1}{x}}$$

برای‌اینکه $f(x)$ معین باشد، باید داشته باشیم:

$$a^2\neq b^2 \quad \text{و یا} \quad a^2-b^2\neq 0$$

و اگر داشته باشیم:

$$\boxed{a=\pm b} \quad \text{و یا} \quad a^2=b^2 \quad \text{و یا} \quad a^2-b^2=0$$

تابع $f(x)$ نامعین است.

جواب سؤال ۷ :

دامنهٔ تعریف تابع :

$$f(x)=\frac{x}{x-1}+\sqrt{x(x-1)}+\frac{1}{x}$$

چنین است:

$$\begin{cases}x-1\neq 0 \Longrightarrow x\neq 1\\ x(x-1)\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases} \Longrightarrow$$

x	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x(x-1)\geqslant 0$	$+$	$-$	$+$
	جواب	جواب جواب	جواب

بنابراین از اشتراک سه‌دامنه داریم:

$$D_f=]-\infty\ ,\ 0[\ \cup\ ]1\ ,\ +\infty[$$

جواب سؤال ۷ :

دامنه‌های توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ چنین می‌باشند:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$fog(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-1}}$$

$$=x-1 \Longrightarrow D_{fog}=R$$

داریم:

$$g(x)=\frac{1}{x-1}\ ,\ f(x)=\frac{1}{x}$$

بنابراین داریم:

$$D_f=R-\{0\}\quad ,\quad D_g=R-\{1\}$$

با استفاده از تعریف D_{fog} نیز داریم:

$$D_{fog}=\{x\in R-\{1\}\ |\ \frac{1}{x-1}\in R-\{0\}\}=R$$

به‌طور مشابه داریم:

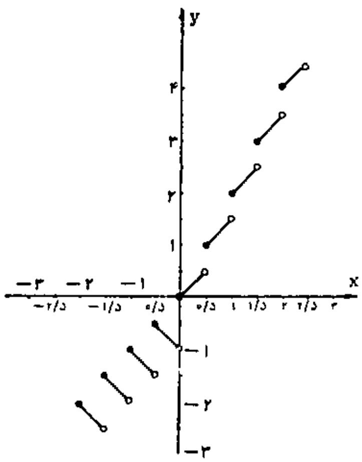
$$D_{gof}=\{x\in D_f\ |\ f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\in R-\{0\}\ |\ \frac{1}{x}\in R-\{1\}\}$$
$$D_{gof}=R-\{1\}\ ,\ gof(x)=g(f(x))$$
$$=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x}{1-x}$$

جواب سؤال ۸:

رسم تابع $f(x)=[2x]+|x|$ در بازهٔ $]-2 , 2[$ چنین است:

تعریف: $n\leqslant x<n+1 \Rightarrow [x]=n$

$$-2\leqslant x<-1/5 \Rightarrow -4\leqslant 2x<-3$$
$$\Rightarrow f(x)=-4-x$$
$$-1/5\leqslant x<-1 \Rightarrow -3\leqslant 2x<-2$$
$$\Rightarrow f(x)=-3-x$$
$$-1\leqslant x<-0/5 \Rightarrow -2\leqslant 2x<-1$$
$$\Rightarrow f(x)=-2-x$$
$$-0/5\leqslant x<0 \Rightarrow -1\leqslant 2x<0$$
$$f(x)=-1-x$$
$$0\leqslant x<0/5 \Rightarrow 0\leqslant 2x<1 \Rightarrow f(x)=x$$
$$0/5\leqslant x<1 \Rightarrow 1\leqslant 2x<2$$
$$\Rightarrow f(x)=1+x$$



$$1\leqslant x<1/5 \Rightarrow 2\leqslant 2x<3$$
$$\Rightarrow f(x)=2+x$$
$$1/5\leqslant x<2 \Rightarrow 3\leqslant 2x<4$$
$$\Rightarrow f(x)=3+x$$
$$2\leqslant x<2/5 \Rightarrow 4\leqslant 2x<5$$
$$\Rightarrow f(x)=4+x$$
$$2/5\leqslant x<3 \Rightarrow 5\leqslant 2x<6$$
$$\Rightarrow f(x)=5+x$$

جواب سؤال ۹:

تعریف حد چنین است:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$$
$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

برای اثبات حد:

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$$

از تعریف فوق استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

بنابراین داریم:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-1|<\delta \Rightarrow$$
$$|3x-2-1|<\varepsilon$$
$$|3x-3|<\varepsilon \Rightarrow 3|x-1|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

درنتیجه برای برقراری رابطهٔ شرطی فوق‌کافی است $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ اختیار شود. و چون رابطهٔ بین δ و ε به دست‌آمد بنابراین از طرفین نقطهٔ $x_0=1$ بی‌نهایت می‌توان به ۱ نزدیک شد و در نتیجه حد در این نقطه وجود دارد. باید توجه داشت‌که با اختیار $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ می‌توان عملیات عکس بالا را انجام داد و به طرف‌دوم رسید به‌شکل زیر:

$$|x-1|<\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$$
$$3|x-1|<\varepsilon \Rightarrow |3x-3|<\varepsilon \Rightarrow$$
$$|3x-2-1|<\varepsilon$$

جواب سؤال ۱۰:

برای اینکه تابع:

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 1\\ 5-kx^2 & x>1\end{cases}$$

پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

بنابراین با برقراری شرایط پیوستگی k را تعیین می‌کنیم، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(5-kx^2)\\ \qquad =5-k \quad \text{و} \quad f(1)=0\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow 5-k=0 \Rightarrow k=5$$

بنابراین اگر $k=5$ اختیار شود تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است. ودر نتیجه تابع به شکل زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 1\\ 5-5x^2 & x>1\end{cases}$$

جواب سؤال ۱۱:

از آنجاکه تابع:

$$f(x)=a[x]+b[x-1]+c[|x+2|]$$

باید درنقطهٔ $M(-2 , 1)$ پیوسته باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

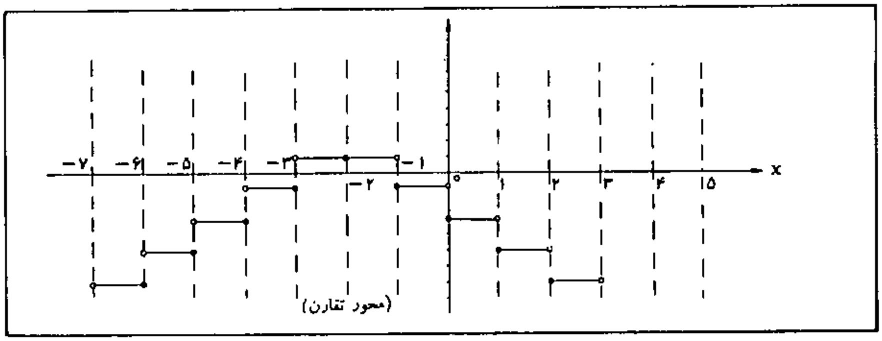
$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-} f(x)=f(-2)$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=$$
$$\lim_{x\to -2^+}(a[x]+b[x-1]+c[|x+2|])$$
$$=-2a-3b$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=$$
$$\lim_{x\to -2^-}(a[x]+b[x-1]+c[|x+2|])$$
$$=-3a-4b$$
$$f(-2)=-2a-3b=1$$
$$\Rightarrow \begin{matrix}-3\\2\end{matrix}\begin{cases}-2a-3b=1\\ -3a-4b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6a+9b=-3\\ -6a-8b=2\end{cases}$$

بنابراین از حل دستگاه اخیر داریم:

$$b=-1 \quad \text{و} \quad a=1$$

ازطرفی نقطهٔ $N(-\frac{1}{2} , -1)$ روی منحنی تـابـع است بنابراین مختصات آن در تابع صادق است ودر نتیجه مقدار c نیز محاسبه می‌شود، یعنی:

$$f(-\frac{1}{2})=a[-\frac{1}{2}]+b[-\frac{1}{2}-1]$$
$$+c[|-\frac{1}{2}+2|]=-1$$
$$f(-\frac{1}{2})=-a-2b+c=-1 \Rightarrow$$
$$-a-2b+c=-1 \Rightarrow \boxed{c=-2}$$



$$f(x)=[x]-[x-1]-2[|x+2|]$$
$$=[x]-[x]+1-2[|x+2|]$$

تابع f(x) با چند ضابطه:

$$f(x)=1-2[|x+2|]$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}1-2[x+2] & x>-2\\ 1 & x=-2\\ 1-2[-x-2] & x<-2\end{cases}$$

تابع f(x) را به شکل ساده‌تر نیز می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}-3-2[x] & x>-2\\ 1 & x=-2\\ 5-2[-x] & x<-2\end{cases}$$

ابتدا تابع را در بازهٔ]۳ و ۵−[رسم می‌کنیم وسپس برای کلیهٔ اعداد حقیقی دیگر نیز به‌طور مشابه تابع‌را ترسیم می‌کنیم. تابع f(x) نسبت‌به محور $x=-2$ متقارن است و در نقطهٔ $M(-2\ ,\ 1)$ پیوسته می‌باشد. اصطلاحاً ایـن نوع تابع را تابع پلهٔ متقارن می‌نامیم.

$-5<x\leqslant-4$: $f(x)=5-2[-x]=5-2(4)=-3$

$-4<x\leqslant-3$: $f(x)=5-2[-x]=5-2(3)=-1$

$-3<x\leqslant-2$: $f(x)=5-2[-x]=5-2(2)=1$

$-2\leqslant x<-1$: $f(x)=-3-2[x]=-3-2(-2)=1$

$-1\leqslant x<0$: $f(x)=-3-2[x]=-3-2(-1)=-1$

$0\leqslant x<1$: $f(x)=-3-2[x]=-3-2(0)=-3$

$1\leqslant x<2$: $f(x)=-3-2[x]=-3-2(1)=-5$

$2\leqslant x<3$: $f(x)=-3-2[x]=-3-2(2)=-7$

جواب سؤالات جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی

جواب سؤال ۱:

دامنهٔ تعریف تابع:

$$y=\frac{x-2}{x-4}+\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}$$

ازحل دستگاه توأم زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases}x-4\neq0 \Rightarrow x\neq4\\ 1-x^2\geqslant0 \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant1\\ 1-x>0 \Rightarrow x<1\end{cases}$$

از اشتراک سه‌رابطهٔ دستگاه نتیجه می‌شود:

$$-1\leqslant x<1$$

بنابراین داریم:

$$D_f=[-1\ ,\ 1[\quad \text{(دامنهٔ تابع)}$$

جواب سؤال ۳:

برای تعیین دامنهٔ تعریف تابع:

$$f(x)=\frac{x}{1+[x]}+\frac{x+1}{[x]+[-x]}$$

دوحالت درنظر می گیریم. حالتی‌که $x\in z$ وحالتی که $x\notin z$ دراین دوحالت داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{x+1}{x-x} & x\in z \ \text{(اعداد صحیح)}\\[2mm] \dfrac{x}{1+[x]}+\dfrac{x+1}{-1} & x\notin z\end{cases}$$

(اگر x صحیح نباشد داریم:

$$([x]+[-x]=-1)$$

به طور خلاصه داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{0} & x\in z\\[2mm] \dfrac{x}{1+[x]}-(x+1) & x\notin z\end{cases}$$

بنابراین در حالتی‌که $x\in z$ باشد f(x) نامعین است . و

درحالتی‌که $x\notin z$ دامنهٔ تعریف تابع چنین است:

$$[x]+1\neq0 \Rightarrow [x]\neq-1 \Rightarrow$$
$$x>0\ ,\ x<-1$$

بنابراین داریم:

$$D_f=\{x|x\notin z\ ,\ x>0\ ,\ x<-1\}$$

به عبارت‌دیگر دامنهٔتابع برابر اعداد غیرصحیح مثبت واعداد غیرصحیح کوچکتر از ۱− می‌باشد.

جواب سؤال ۳:

دورهٔ تناوب تابع:

$$y=\sin^2\frac{2x}{3}+tg\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}$$

چنین است:

$$y=\frac{1-\cos\frac{4x}{3}}{2}+tg\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\cos\frac{4x}{3}\rightarrow T_1=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow T_1=\frac{9\pi}{6}\\[2mm] \cos\frac{x}{2}\rightarrow T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi\Rightarrow T_2=\frac{24\pi}{6}\\[2mm] tg\frac{3x}{2}\rightarrow T_3=\frac{\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow T_3=\frac{4\pi}{6}\end{cases}$$

دورهٔ تناوب تابع: $T=\frac{72\pi}{6}=12\pi$

جواب سؤال ۴:

یك‌تابع وقتی معکوس‌پذیر است کـه یك‌بـه‌یك بـاشد یـا در دامنه‌اش پیـوسته و اکیداً یکنوا باشد. چون تابع f(x) یك به‌یك است پس وارون‌پذیر است.

و ضابطه تابع معکوس تابع:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+2}$$

چنین است:

$$f^3(x)=x^3+2\Rightarrow x=\sqrt[3]{f^3(x)-2}$$
$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3-2}$$

جواب سؤال ۵:

تعریف حد:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L$$

$$\forall\beta>0\ \exists\alpha>0: 0<|x-x_0|<\alpha\Rightarrow$$
$$|f(x)-L|<\beta$$

الف)

$$\lim_{x\to-1}(x^2-4)=-3\Rightarrow$$

$$\forall\beta>0\ \exists\alpha>0: |x+1|<\alpha\Rightarrow$$
$$|x^2-4+3|<\beta$$
$$|x^2-4+3|<\beta\Rightarrow|x^2-1|<\beta\Rightarrow$$
$$|x-1|\,|x+1|<\beta$$

با استفاده از خاصیت همسایگی ($\alpha \le 1$) داریم:

$$-2<x<0 \Rightarrow -1<x+1<1 \Rightarrow |x+1|<1$$

(نامعادلهٔ کمکی که درفرض استلزام ضرب می‌شود)

$$|x-1|\times 1<\beta \Rightarrow |x-1|<\beta \Rightarrow \alpha=\min(1,\beta)$$

چون عملیات معکوس‌پذیر است و رابطهٔ‌بین α و β بـه دست آمده‌است پس بنابراین حد فوق صادق است. لازم به توضیح است که تعریف‌حد یك‌رابطهٔ شرطی‌است واز فرض‌باید‌حکم‌را نتیجه گرفت یعنی باید تابعی از β را جایگزین α نمود تا حکم نتیجه شود. دراین مسئله چنین‌نتیجه شدکه اگر $\alpha\le\beta$ اختیار شود و‌نامعادلهٔ‌کمکی $|x+1|<1$ را در فرض استلزام یعنی $|x-1|<\alpha\le\beta$ ضرب‌کنیم حکم نتیجه خواهد شد.

ب) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \Rightarrow$$

$$\forall N>0\ \exists \alpha>0 : 0-\alpha<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<-N$$

$$\frac{1}{x}<-N \Rightarrow \frac{-1}{N}<x<0 \Rightarrow 0<\alpha\le\frac{1}{N}$$

پس اگر هرعدد مثبت‌کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{N}$ را جایگزین α کنیم یعنی:

$$0<\alpha\le\frac{1}{N}$$

استلزام فوق برقرار است وداریم:

$$\frac{-1}{N}<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<-N$$

لازم به توضیح است‌که تابع $f(x)=-\frac{1}{x}$ وقتی‌که x بـه سمت‌صفرمیل می‌کند حد ندارد زیرا حدچپ و راست‌آن باهم مساوی نیستند.

ج) $$\lim_{x\to+\infty}(x^6+x+1)=+\infty \Rightarrow$$

$$\forall N>0\ \exists M>0 : x>M \Rightarrow (x^6+x+1)>N$$

$$(x^6+x+1)>N \xRightarrow[\text{هم‌ارزی}]{x\to+\infty} x^6>N \Rightarrow$$

$$x>\sqrt[6]{N} \Rightarrow M\ge\sqrt[6]{N}$$

عکس عملیات فوق صادق‌است بنابراین استلزام منطقی برقرار است و حد فوق ثابت می‌شود.

د) $$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\infty \Rightarrow$$

$$\forall N>0\ \exists \alpha>0 : 0<|x-2|<\alpha \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x+1}{x-2}\right|>N$$

$$\left|\frac{x+1}{x-2}\right|>N \Rightarrow \frac{|x+1|}{|x-2|}>N \Rightarrow$$

$$|x-2|<\frac{|x+1|}{N} \xRightarrow[(\alpha<1)]{\text{همسایگی}} 1<x<3$$

$$2<x+1<4 \Rightarrow -4<2<x+1<4 \Rightarrow$$

$$-4<x+1<4 \Rightarrow |x+1|<4 \Rightarrow$$

(نامعادله کمکی که درفرض ضرب می‌شود)

$$|x-2|<\frac{4}{N} \Rightarrow \alpha=\min\left(1,\frac{4}{N}\right)$$

عملیات عکس‌صادق است پس استلزام منطقی است.

ه) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x}{3x-5}=-\frac{2}{3}$$

$$\forall \beta>0\ \exists M>0 : |x|>M \Rightarrow |f(x)-L|<\beta$$

$$\left|\frac{1-2x}{3x-5}+\frac{2}{3}\right|<\beta \Rightarrow \left|\frac{-7}{3(3x-5)}\right|<\beta$$

$$|3x-5|>\frac{7}{3\beta} \xRightarrow[\text{هم ارزی}]{x\to\pm\infty} |3x|>\frac{7}{3\beta} \Rightarrow$$

$$|x|>\frac{7}{9\beta} \Rightarrow M\ge\frac{7}{9\beta}$$

عکس عملیات فـوق نیز صادق است. بنابراین رابطه شرطی استلزام منطقی‌است وودر نتیجه تعریف‌حد برقرار است.

و) توجه‌صورت مسئله‌در شمارهٔ(۱) اشتباه‌چاپی‌دارد و دراصل چنین است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-4x^2}{2x+1}=\mp\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (I) : \lim_{x\to+\infty}\frac{3-4x^2}{2x+1}=-\infty \\ (II) : \lim_{x\to-\infty}\frac{3-4x^2}{2x+1}=+\infty \end{cases}$$

$$(I): \forall N>0\ \exists M>0 : x>M \Rightarrow f(x)<-N$$

$$\frac{3-4x^2}{2x+1}<-N \Rightarrow$$

$$-2x+1+\frac{2}{2x+1}<-N \xRightarrow[\text{هم ارزی}]{x\to+\infty}$$

$$-2x+1<-N$$

$$-2x<-N-1 \Rightarrow x>\frac{N+1}{2} \Rightarrow$$

$$M\ge\frac{N+1}{2}$$

عکس این عملیات نیز صادق‌است. بنابراین‌رابطهٔ شرطی(I) یك استلزام منطقی است.

$$(II) : \forall N>0\ \exists M>0 : x<-M \Rightarrow f(x)>N$$

$$\frac{3-4x^2}{2x+1}>N \Rightarrow -2x+1+\frac{2}{2x+1}>N$$

$$\xRightarrow[\text{هم ارزی}]{x\to-\infty} -2x+1>N$$

$$-2x>N-1 \Rightarrow x<\frac{1-N}{2} \Rightarrow$$

$$-M\le\frac{1-N}{2} \Rightarrow M\ge\frac{N-1}{2}$$

از آنجاکـه عملیات عکس نیز صادق است. بنابرایـن رابطه شرطی (II) نیز یك استلزام منطقی است. درنتیجه تعریف حد برقرار است.

جواب سؤال ۶:

الف) حد تابع:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\sqrt[3]{x^3+x-2}-\sqrt{x^2-2x+3}$$

با استفاده از هم‌ارزی به سادگی محاسبه می‌شود یعنی:

$$\sqrt[3]{x^3+x-2}\equiv x \quad (x\to+\infty)$$

$$\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{(x-1)^2+2} \quad (x\to+\infty)$$

$$=|x-1|\sqrt{1+\frac{2}{(x-1)^2}}=x-1 \quad (x\to+\infty)$$

$$\Rightarrow y=x-(x-1)=1 \quad (x\to+\infty)$$

ب) محاسبهٔ:

$$\text{حد}_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^n x}-\frac{1}{x^n}\right)$$

با قراردادن صفر حالت مبهم $(\infty-\infty)$ نتیجه می‌شودکه با گرفتن مخرج مشترك داریم:

$$\text{حد}_{x\to 0}\left(\frac{x^n-\sin^n x}{x^n\sin^n x}\right)$$

اینك با قراردادن صفرحالت مبهم $(\frac{0}{0})$ پیش می‌آیدکه برای رفع ابهام‌کافی است ازقاعدهٔ هوپیتال استفاده‌کنیم. اما قبل‌از این عمل بهتراست‌از رابطه‌هم‌ارزی استفاده‌کنیم و به‌جای‌مخرج کسر عبارت $x^n\sin^n x\approx x^{2n}$ را قراردهیم زیراوقتی $x\to 0$ داریم:

$$\sin^n x\approx x^n$$

بنابراین دراینجا پس از جایگزینی x^{2n} بـه جای مخرج کسر قاعدهٔ هوپیتال‌را اجرا می‌کنیم. یعنی:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^n-\sin^n x}{x^n\sin^n x}\right)\overset{\text{هم ارزی}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^n-\sin^n x}{x^{2n}}\right)$$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{nx^{n-1}-n\sin^{n-1}x\cos x}{2nx^{2n-1}}\right)$$

پس از ساده کردن کسر فوق به n کافی است یک‌بار دیگر قاعدهٔ هوپیتال را اجرا کنیم. بنابراین داریم:

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(n-1)x^{n-2}-(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2x+\sin^n x}{2(2n-1)x^{2n-2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(n-1)x^{n-2}-(n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)+\sin^n x}{2(2n-1)x^{2n-2}}\right)$$

$$\overset{\text{هم ارزی}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(n-1)x^{n-2}-(n-1)x^{n-2}(1-x^2)+x^n}{2(2n-1)x^{2n-2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{nx^n}{2(2n-1)x^{2n-2}}\right)$$

به ازای هر n بالاخره محاسبهٔ حد چنین می‌شود:

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{n}{2(2n-1)x^{n-2}}\right)$$

$$=\begin{cases}0 & n<2\\ \frac{1}{3} & n=2\\ +\infty & n>2\end{cases}$$

درصورتی که $2n-1=0$ یعنی $n=\frac{1}{2}$ باشد عبارت اخیر مبهم می‌شود که دراین‌حالت مستقلاً مقدار حد را حساب می‌کنیم.

$$n=\frac{1}{2}:\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x\sin x}}\right)$$

$$\overset{\text{هم ارزی}}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{x}\right)$$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{1}\right)$$

$$\overset{\text{هم ارزی}}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{2\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\overset{\text{هم ارزی}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{4\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}}{4}\implies$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}}{4}=0$$

ج)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}\right)\implies \frac{0}{0}\ \text{حالت مبهم}$$

برای رفع ابهام قاعدهٔ هوپیتال را اعمال می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{x}{2\sqrt{\cos x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\sqrt{x}}\right)=0$$

د)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2^n+3^n+4^n+5^n}{6^n+7^n+8^n+9^n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n[(\frac{1}{5})^n+(\frac{2}{5})^n+(\frac{3}{5})^n+(\frac{4}{5})^n+1]}{9^n[(\frac{6}{9})^n+(\frac{7}{9})^n+(\frac{8}{9})^n+1]}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n=0\quad (n\in N)$$

از آنجاکه هرکسر کوچکتر از یک است بنابراین حد هر کسر وقتی‌به توان بی‌نهایت مثبت برسد برابر صفر است. وحد کسر وقتی $n\to\infty$ برابر صفر است.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\sum_{k=1}^{n}k^3}{\sum_{k=1}^{n}k^2\sum_{k=1}^{n}k}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{n(n+1)}{2}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^5}{4}}{\frac{2n^5}{12}}=\frac{3}{2}\qquad (n\in N)$$

ه)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[5]{x-1}}\right)=\frac{0}{0}\ \text{حالت مبهم}$$

برای رفع ابهام کافی است از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم.

پس از اعمال قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\implies\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}+\frac{1}{5\sqrt[5]{(x-1)^4}}}\right)=0$$

و) ازآنجاکه $\left|\sin\frac{1}{x^n}\right|<1$ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^n\sin\frac{1}{x^n}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 0}x^n}_{0}\times\underbrace{\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^n}}_{\text{عددی}}=0$$

عددی بین ۱− و ۱ می‌باشد

ز)

$$\lim_{x\to 1}(1+x^2)^{\log_{x^2}2}=\lim_{x\to 1}\left[(1+x^2)^{\frac{\log 2}{\log x^2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[(1+x^2)^{\frac{\log 2}{2\log x}}\right]=\left\{\lim_{x\to 1^+}(1+x^2)^{\log_{x^2}2}\right.$$

$$=\frac{\log 2}{\log 1^+}=\frac{\log 2}{0^+}=+\infty$$

بنابراین تابع در نقطهٔ $x=1$ حد ندارد زیرا حد چپ با حد راست برابر نیست.

ح) می‌دانیم اگر a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد مثبت باشند داریم:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$$

اگر اعداد طبیعی را به ترتیب به a_1 و a_2 و ... و a_n نسبت دهیم داریم:

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}\geqslant\sqrt[n]{1\times2\times3\times\cdots\times n}$$

$$\implies\begin{cases}1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\\ 1\times2\times3\times\cdots\times n=n!\ (n\in N)\end{cases}$$

$$\frac{n(n+1)}{2n}\geqslant\sqrt[n]{n!}$$

بنابراین اگر $n\to\infty$ مقدار عبارت:

$$\frac{n+1}{2}\geqslant\sqrt[n]{n!}\implies\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$$

کران‌دار است و ماکزیمم آن برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

(ماکزیمم عبارت فوق وقتی است که $n=1$ باشد.)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}\right) \times \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

ضرب بین $\frac{1}{2}$ و صفر می‌باشد 0

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2+n}\right) = 0$$

حل مسائل جبر دوم تجربی

جواب سؤال ۱:

ریشه‌های معادله:

$$x^2(x^2-1)(x^3+1)(x^2-3x+2)=0$$

عبارتند از:

$x^2=0 \Rightarrow x=0$ ریشهٔ مضاعف

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

دو ریشهٔ قرینه

$x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=-1$

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow$

$$(x-1)(x-2)=0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ ریشه‌های معادله چنین است:

$$R=\{x \mid \overset{\text{مضاعف}}{x=0},\ \overset{\text{مکرر}}{x=\pm 1},\ x=2\}$$

جواب سؤال ۲:

معادله مفروض: $x^2-2m^2x+m=0$

a) شرط اینکه معادلهٔ فوق ریشهٔ مضاعف داشته باشد این است که مبین آن صفر باشد. بنابراین داریم:

$$\Delta'=m^4-m=0 \Rightarrow m^4-m=0 \Rightarrow$$

$$m(m^3-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$$

b) وقتی معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد که مبین آن مثبت باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta'=m^4-m>0$$

$$m(m^3-1)>0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases} \Rightarrow$$

m	$-\infty$	0	1	$+\infty$
m	$-$	0 $+$		$+$
m^3-1	$-$		$-$ 0	$+$
Δ'	$+$		$-$	$+$

$$\Rightarrow \Delta'>0 \begin{cases} m<0 \\ m>1 \end{cases}$$

بنابراین اگر m منفی (یا کوچکتر از صفر) باشد و یا m بزرگتر از یک باشد Δ' مثبت و معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

c) بدیهی است اگر $\Delta'=m^4-m<0$ باشد معادله ریشه حقیقی ندارد. به عبارت دیگر اگر $0<m<1$ باشد معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

d) اگر یک ریشهٔ معادله $x=1$ باشد بنابراین m چنین است:

$$x=1:\ 1-2m^2+m=0 \Rightarrow$$

$$2m^2-m-1=0$$

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4} \Rightarrow$$

$$m=1 \quad , \quad m=-\frac{1}{2}$$

e) شرط اینکه معادله دو ریشهٔ مثبت داشته باشد این است که اولاً $\frac{c}{a}>0$ و ثانیاً $-\frac{b}{a}>0$ باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{c}{a}=\frac{m}{1}=m>0 \quad \text{و} \quad -\frac{b}{a}=\frac{-(-2m^2)}{1}$$

شرط اینکه دو ریشه مثبت داشته باشد:

$$=2m^2>0 \Rightarrow m>0$$

f) شرط اینکه معادله دو ریشهٔ معکوس هم داشته باشد این است که $\frac{c}{a}=1$ باشد. بنابراین:

$$\frac{c}{a}=\frac{m}{1}=1 \Rightarrow m=1$$

جواب سؤال ۳:

شرط اینکه دو نقطهٔ A و B نسبت به M قرینه باشند این است که:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \quad , \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$A\begin{vmatrix} -n \\ m \end{vmatrix} ,\ B\begin{vmatrix} 2m \\ -2 \end{vmatrix} ,\ M\begin{vmatrix} 2n-1 \\ m+n \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2n-1=\frac{2m-n}{2} \\ m+n=\frac{m-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7n-2m=2 \\ 2n+m=-2 \end{cases}$$

دستگاه فوق دارای جواب است و به‌ازای m و n دستگاه نقاط A و B نسبت به M قرینهٔ یکدیگرند یعنی:

$$\begin{cases} m=\frac{-18}{11} \\ n=\frac{-2}{11} \end{cases}$$

جواب سؤال ۴:

برای اینکه معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت باشد اولاً باید $\Delta>0$، ثانیاً باید $-\frac{b}{a}>0$ و ثالثاً باید $\frac{c}{a}>0$.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta'>0 \Rightarrow b'^2-ac>0 \Rightarrow$$

$$16-(m+1)^2>0 \Rightarrow 16-m^2-2m-1>0$$

$$\Rightarrow -m^2-2m+15>0$$

از طرفی: $\frac{-b}{a}>0 \Rightarrow \frac{8}{m+1}>0 \Rightarrow$

$$m+1>0 \Rightarrow \boxed{m>-1}$$

$$\frac{c}{a}=\frac{m+1}{m+1}=1>0$$

پس داریم: $\begin{cases} -m^2-2m+15>0 \Rightarrow -5<m<3 \\ m>-1 \end{cases}$

و جواب مشترک این دو مجموعه حدود m را مشخص می‌کند که $\boxed{-1<m<3}$ می‌باشد.

جواب سؤال ۵:

فرض کنیم x_1 و x_2 دو ریشهٔ معادلهٔ:

$$4x^2-15x+k=0$$

باشند پس باید مثلاً $x_1=x_2^2$. از طرفی داریم:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow x_2^2+x_2=\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow 4x_2^2+4x_2=15 \Rightarrow$$

$$x_2=\frac{-5}{2} \quad \text{یا} \quad x_2=\frac{3}{2}$$

$$x_1 \times x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_2^2 \times x_2=\frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow x_2^3=\frac{k}{4}$$

اگر $x_2=\frac{-5}{2} \Rightarrow \left(\frac{-5}{2}\right)^3=\frac{k}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{k=\frac{-125}{2}}$$

اگر $x_2=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{k}{4} \Rightarrow \boxed{k=\frac{27}{2}}$

حل مسائل جبر سال سوم علوم تجربی

حل ۱:

اولاً) $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{۲}{۳}$, $x_A=۴$, $x_B=-۶$

$$\Rightarrow x_M=\frac{kx_B-x_A}{k-۱}=\frac{(-\frac{۲}{۳})(-۶)-۴}{-\frac{۲}{۳}-۱}=۰$$

ثانیاً) $\overline{MA}=۲\overline{AB} \Rightarrow x_A-x_M=۲(x_B-x_A)$

$$\Rightarrow ۴-x_M=۲(-۶-۴) \Rightarrow x_M=۲۴$$

حل ۲:

الف) $[+۲ , ۴[$ ، ب) $[-۴ , ۵[$

حل ۳:

$$\begin{cases} a+۲b+۳=۰ \\ ۲a-b-۱=۰ \end{cases} \Rightarrow a=\frac{-۱}{۵} \text{ و } b=\frac{-۷}{۵}$$

حل ۴:

چون دستگاه دومعادلهٔ یك مجهولی متوافق نیست پس به ازای هیچ مقداری از m نقطهٔ A برمبدأمختصات نمی‌تواند منطبق باشد.

$$\begin{cases} ۲m-۱=۰ \Rightarrow m=\frac{۱}{۲} \\ ۳m+۶=۰ \Rightarrow m=-۲ \end{cases}$$

حل ۵:

$$\begin{cases} ۲b+۱=\frac{-۲+۲a-۱}{۲} \\ a-b=\frac{۱+a+۲b}{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ۲a-۴b=۵ \\ a-۴b=۱ \end{cases} \Rightarrow a=۴ \text{ و } b=\frac{۳}{۴}$$

حل ۶:

$A(\alpha , -\alpha)$, $M(-۲ , ۴)$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۵}=\sqrt{(\alpha+۲)^۲+(-\alpha-۴)^۲} \Rightarrow$$

$$۲\alpha^۲+۱۲\alpha=۰ \Rightarrow \alpha=۰ , \alpha=-۶ \Rightarrow$$

$A_۱(۰ , ۰)$ و $A_۲(-۶ , ۶)$

حل ۷:

$$x+۲=-۲ \Rightarrow x=-۴ \Rightarrow$$

$$f(-۴)=-۴+\sqrt{-۴+۵}=-۳$$

حل ۸:

$f(\sqrt{۲})=(\sqrt{۲})^۲+۱=۳$, $f(۵)=۳$

$$f(\sqrt{۲}-۱)=۳-۲(\sqrt{۲}-۱)=۵-۲\sqrt{۲}$$

حل ۹:

الف) $y=\sqrt[۵]{\frac{۳}{x^۲-۳x-۴}}$, $D=R-\{-۱ , ۴\}$

ب) $y=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{\sqrt{|x|-x}}$, $D=\begin{cases} ۴-x^۲\geqslant ۰ \\ |x|-x>۰ \end{cases}$

$$\Rightarrow D=[-۲,۰[$$

ج) $y=\frac{۲x}{\sqrt{۹-x^۲}}$, $D=\{x|۹-x^۲>۰\}$

$$\Rightarrow D: -۳<x<۳$$

د) $y=\sqrt{x-|x|}+\sqrt{۴x^۲-۱}$,

$$D=\begin{cases} x-|x|\geqslant ۰ \\ ۴x^۲-۱\geqslant ۰ \end{cases} \Rightarrow D: x\geqslant\frac{۱}{۲}$$

حل ۱۰:

راه اول) $f\left(\frac{x-۱}{x+۲}\right)=\frac{x+۲}{x-۱}=\frac{۱}{\frac{x-۱}{x+۲}}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{x}$$

راه دوم) $\frac{x-۱}{x+۲}=t \Rightarrow x=\frac{۲t+۱}{۱-t}$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{\frac{۲t+۱}{۱-t}+۲}{\frac{۲t+۱}{۱-t}-۱}=\frac{۱}{t} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{x}$$

حل ۱۱:

$$(fog)(۳)=f[g(۳)]=f(۲\sqrt{۶}+۳)$$
$$=(۲\sqrt{۶}+۳)^۲-۳(۲\sqrt{۶}+۳)$$

حل ۱۲:

راه اول) $g(x)=x+۱$,

$$(fog)(x)=x^۲+۴x-۲$$
$$=(x+۱)^۲+۲(x+۱)-۵$$
$$\Rightarrow (fog)(x)=[g(x)]^۲+۲g(x)-۵$$
$$\Rightarrow f(x)=x^۲+۲x-۵$$

راه دوم) $g(x)=x+۱=u \Rightarrow x=u-۱$

$$\Rightarrow f[g(x)]=f(u)=(u-۱)^۲+۴(u-۱)-۲$$
$$=u^۲+۲u-۵ \Rightarrow f(u)=u^۲+۲u-۵ \Rightarrow$$
$$f(x)=x^۲+۲x-۵$$

حل ۱۳:

$$f(x)=\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow (fof)(x)=\frac{۱}{\left(\frac{۱}{x^۲}\right)^۲}=x^۴$$

حل ۱۴:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$$

۱) $y\to -y \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱=۰$

۲) $x\to -x \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۴y+۱=۰$

۳) $x\to y$ و $y\to x \Rightarrow$

$$y^۲+x^۲-۲y+۴x+۱=۰$$

۴) $x\to ۲-x \Rightarrow (۲-x)^۲+y^۲-۲(۲-x)+۴y+۱=۰ \Rightarrow$

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$$

۵) $y\to ۴-y \Rightarrow$

$$x^۲+(۴-y)^۲-۲x+۴(۴-y)+۱=۰$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۱۲y+۳۳=۰$$

۶) $\lambda=\frac{x-۲y-۵}{۱+۴}=\frac{x-۲y-۵}{۵}$

$$x\to x-۲a\lambda=x-۲\times\frac{x-۲y-۵}{۵}$$
$$=\frac{۳x+۴y+۱۰}{۵}$$

$$y\to y-۲b\lambda$$
$$=y+۴\times\frac{x-۲y-۵}{۵}=\frac{۴x-۳y-۲۰}{۵}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۳x+۴y+۱۰}{۵}\right)^۲+\left(\frac{۴x-۳y-۲۰}{۵}\right)^۲$$
$$-۲\left(\frac{۳x+۴y+۱۰}{۵}\right)+۴\left(\frac{۴x-۳y-۲۰}{۵}\right)$$
$$+۱=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$$

۷) $O'(۱,-۲) \Rightarrow \begin{vmatrix} x\to ۲-x \\ y\to -۴-y \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow (۲-x)^۲+(-۴-y)^۲-۲(۲-x)$$
$$+۴(-۴-y)+۱=۰$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$$

حل ۱۵:

راه اول:

$A(۳ , -۱)$, $\Delta: ۲x+y-۱=۰ \Rightarrow$

$$\lambda=\frac{۶-۱-۱}{۴+۱}=\frac{۴}{۵}$$

$$A'\begin{vmatrix} x_۱-۲a\lambda=۳-۴\left(\frac{۴}{۵}\right)=\frac{-۱}{۵} \\ y_۱-۲b\lambda=-۱-۲\left(\frac{۴}{۵}\right)=\frac{-۱۳}{۵} \end{vmatrix}$$

قرینه نقطهٔ A نسبت به خط Δ

$$B\begin{vmatrix} a+b \\ b-۲a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{-۱}{۵} \\ b-۲a=\frac{-۱۳}{۵} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a=\frac{۴}{۵} \text{ , } b=-۱$$

راه دوم: اگر نقطهٔ $A'\begin{vmatrix}\alpha \\ \beta\end{vmatrix}$ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط Δ

باشد، اولاً ـ نقطهٔ M وسط AA' روی خط Δ قرار دارد، ثانیاً ـ خط AA' بر Δ عموداست. با استفاده از این دوشرط مقادیر α و β محاسبه می‌شود.

حل ۱۶:

$$M\left|\begin{array}{l}-۳\\ \frac{۱}{۲}\end{array}\right. \Rightarrow A\left|\begin{array}{l}p\\ ۰\end{array}\right. ,\quad B\left|\begin{array}{l}۰\\ q\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow p=-۶\ ,\ q=۱$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-۶}+\frac{y}{۱}=۱ \Rightarrow -x+۶y=۶$$

$$\Rightarrow x-۶y+۶=۰$$ معادلهٔ AB

حل ۱۷:

$$A(۳\ ,\ ۴) \text{ و } \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱ \Rightarrow \frac{۳}{p}+\frac{۴}{q}=۱$$

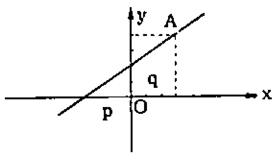
$$\Rightarrow ۳q+۴p=pq \qquad (۱)$$

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}|\overline{OA}\cdot\overline{OB}|=\frac{۱}{۲}|\ p\cdot q\ |=۳$$

$$\Rightarrow p\cdot q=+۶ \quad (۲) \quad \text{و} \quad pq=-۶ \quad (۳)$$

$$\begin{cases}۳q+۴p=pq\\ p\cdot q=۶\end{cases} \Rightarrow ۴p^۲-۶p+۱۸=۰$$

جواب ندارد



$$\begin{cases}۳q+۴p=pq\\ pq=-۶\end{cases} \Rightarrow ۴p^۲+۶p-۱۸=۰$$

$$\Rightarrow p=-۳ \text{ و } p=\frac{۳}{۲} \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}p=-۳\\ q=۲\end{array}\right. \Rightarrow \frac{x}{-۳}+\frac{y}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow -۲x+۳y=۶$$ معادلهٔ خط مطلوب

$$\left|\begin{array}{l}p=\frac{۳}{۲}\\ q=-۴\end{array}\right. \Rightarrow \frac{x}{\frac{۳}{۲}}+\frac{y}{-۴}=۱$$

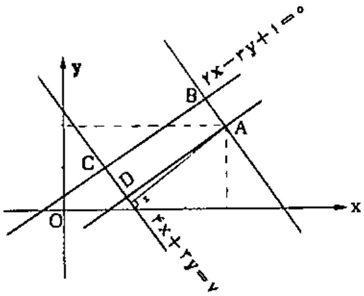
$$\Rightarrow ۸x-۳y=۱۲$$ معادلهٔ خط مطلوب

حل ۱۸:

$$A(۴\ ,\ ۲)\ ،\ ۲x-۳y+۱=۰\ ,\ ۴x+۳y=۷$$

۱) معادلات خطوطی راکه از رأس A به‌موازات هریک از دوضلع داده‌شدهٔ متوازی‌الاضلاع رسم‌می‌شوند می‌نویسیم

$$۲x-۳y+۱=۰ \Rightarrow m=\frac{۲}{۳} \text{ و } A(۴,۲)$$



$$\Rightarrow y-۲=\frac{۲}{۳}(x-۴)$$

$$\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۲}{۳}$$ معادلهٔ AD

$$۴x+۳y=۷ \Rightarrow m=\frac{-۴}{۳} \text{ و } A(۴,۲)$$

$$\Rightarrow y-۲=\frac{-۴}{۳}(x-۴)$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۴}{۳}x+\frac{۲۲}{۳}$$ معادلهٔ AB

۲) مختصات محل برخورد دوضلع داده‌شده‌را پیدامی کنیم (نقطه C). سپس مختصات وسط AC را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}۲x-۳y+۱=۰\\ ۴x+۳y=۷\end{cases} \Rightarrow C\left|\begin{array}{l}x=۱\\ y=۱\end{array}\right. \text{ و } A\left|\begin{array}{l}۴\\ ۲\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \text{مرکز متوازی الاضلاع } O'\left|\begin{array}{l}x=\frac{۱+۴}{۲}=\frac{۵}{۲}\\ y=\frac{۱+۲}{۲}=\frac{۳}{۲}\end{array}\right.$$

۳) اگر از A عمود AH را برضلع CD فرودآوریم، داریم:

$$S_{ABCD}=CD\times AH$$

پس باید مختصات رأس D و از آنجا طول CD را محاسبه کنیم.

$$\begin{array}{l}CD\\ AD\end{array}\begin{cases}۴x+۳y=۷\\ y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۲}{۳}\end{cases} \Rightarrow D\left|\begin{array}{l}\frac{۳}{۲}\\ \frac{۱}{۳}\end{array}\right. \text{ و } C\left|\begin{array}{l}۱\\ ۱\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$CD=\sqrt{\left(\frac{۳}{۲}-۱\right)^۲+\left(\frac{۱}{۳}-۱\right)^۲}=\frac{۵}{۶}$$

$$AH=\frac{|۴(۴)+۳(۲)-۷|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=CD\times AH=\frac{۵}{۶}\times ۳=\frac{۵}{۲}$$

واحد سطح

حل ۱۹:

$$\Delta':\ \begin{cases}۲x-y=۶\\ y=۰ \text{ محورxها}\end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{l}x=۲\\ y=۰\end{array}\right. \xrightarrow{\text{درمعادلهٔ } \Delta}$$

$$۲\lambda-۴=۰ \Rightarrow \lambda=۲$$

حل ۲۰:

$$A(-۲\ ,\ ۱)\ ,\ ۵x-۱۲y-۱۷=۰ \Rightarrow$$

$$d=\frac{|-۱۰-۱۲-۱۷|}{۱۳}=۳=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow a=۳\sqrt{۲}$$ ضلع مربع

$$\Rightarrow S=a^۲=۱۸$$ مربع

حل مسائل جبر سال چهارم علوم تجربی

حل ۱:

$$\text{الف)}\ y'=\frac{۳}{۲}\cos x-\frac{۵(۲x-۲)}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۲x)^۲}}\times$$

$$(۱+cotg^۲\sqrt[۳]{x^۲-۲x})cotg^۴\sqrt[۳]{x^۲-۲x}$$

$$\text{ب)}\ y'=\frac{-۵}{۳(۲x-۱)^۲\sqrt[۳]{\left(\frac{x+۲}{۲x-۱}\right)^۲}}\times$$

$$\cos\sqrt[۳]{\frac{x+۲}{۲x-۱}}$$

$$\text{ج)}\ y=۴\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۴}\sin\frac{x}{۴}=$$

$$۲\cos\frac{x}{۲}\sin\frac{x}{۲}=\sin x \Rightarrow y'=\cos x$$

$$\text{د)}\ y'=-۲\sin x\cos x\cos(\cos^۲x)$$

$$-۲\sin x\cos x\sin(\sin^۲x)$$

حل ۲:

$$y=\sqrt[۵]{(۲+tg۲x)^۳} \Rightarrow y'=\frac{۶(۱+tg^۲۲x)}{۵\sqrt[۵]{(۲+tg۲x)^۲}}$$

$$x=\frac{۳\pi}{۸} \Rightarrow y'=\frac{۱۲}{۵}$$

حل ۳:

$$z=f^۳(x)+\frac{۳}{f(x)} \Rightarrow$$

$$z'=۳f'(x)f^۲(x)-\frac{۳f'(x)}{f^۲(x)} \Rightarrow$$

$$z'_a=۳f'(a)f^۲(a)-\frac{۳f'(a)}{f^۲(a)}$$

$$=۳\times۴\times\frac{۱}{۴}-\frac{۳\times۴}{\frac{۱}{۴}}=۳-۴۸=-۴۵$$

حل ۴:

$$(x+y)^۳-۲x^۲y+x^۲-y^۲-۱=۰$$

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{3(x+y)^2-4xy+2x}{3(x+y)^2-2x^2-2y}$$

$$x'_y=-\frac{f'_y}{f'_x}=\frac{1}{y'_x}=-\frac{3(x+y)^2-2x^2-2y}{3(x+y)^2-4xy+2x}$$

حل ۵:

$$\begin{cases}x=t-2\\ y=3t^2+t\end{cases}$$

راه اول: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{6t+1}{1}=6t+1$,

$t=x+2 \Rightarrow y'_x=6(x+2)+1$

$\Rightarrow y'_x=6x+13$

راه دوم: $t=x+2 \Rightarrow$

$y=3(x+2)^2+(x+2) \Rightarrow$

$y=3x^2+12x+14 \Rightarrow y'_x=6x+13$

حل ۶:

$y=a\sin 2x \Rightarrow y'=2a\cos 2x \Rightarrow$

$y''=-4a\sin 2x \Rightarrow y'''=-8a\cos 2x$

$\Rightarrow 4=-8a\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow a=-1$

حل ۷:

$y=\cos(\pi\sin x) \Rightarrow \left|\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}\\ y=0\end{array}\right.$

$y'=-\pi\cos x\sin(\pi\sin x) \Rightarrow$

مماس $m=-\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{-\pi\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

قائم $m=\frac{2}{\sqrt{3}\,\pi} \Rightarrow$

$y=\frac{-\pi\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ معادلهٔ خط مماس

$y=\frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ معادلهٔ خط قائم

حل ۸:

$y=mx^3+x^2+mx-1 \Rightarrow$

$y'=3mx^2+2x+m$

$y'>0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta'<0\\ a>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-3m^2<0\\ 3m>0\end{cases}$

$\Rightarrow m>\frac{\sqrt{3}}{3}$

حل ۹:

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و $M\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$,

$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow$

مماس $m=-\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}}=-1 \Rightarrow$ قائم $m=1$

$\Rightarrow y-\frac{1}{4}=1\left(x-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$

$y=x$ معادله خط قائم

حل ۱۰:

$y=ax^3+bx^2+cx+d$

Max یا Min $\left|\begin{array}{l}x=-1\\ y=4\end{array}\right.$ نقطهٔ عطف $\left|\begin{array}{l}x=1\\ y=-12\end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l}-1\\ 4\end{array}\right. \xrightarrow{\text{درتابع}} -a+b-c+d=4 \quad (1)$

$y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow$

$3a-2b+c=0 \quad (2)$

$\left|\begin{array}{l}1\\ -12\end{array}\right. \xrightarrow{\text{درتابع}} a+b+c+d=-12 \quad (3)$

$y''=6ax+2b \Rightarrow 6a+2b=0 \quad (4)$

$(1),(2),(3),(4) \Rightarrow$

$a=1,\ b=-3,\ c=-9,\ d=-1$

حل ۱۱:

$y=x^2+2mx+m-1,$

$\left|\begin{array}{l}x=1\\ y=1+2m+m-1=3m\end{array}\right. \Rightarrow$

نقطهٔ تماس $\left|\begin{array}{l}x=1\\ y=3m\end{array}\right.$

$y'=2x+2m \Rightarrow$ مماس $m=2+2m \Rightarrow$

$y-3m=(2+2m)(x-1)$ معادلهٔ خط مماس

$A\left|\begin{array}{l}x=0\\ y=m-2\end{array}\right. \quad B\left|\begin{array}{l}x=\frac{-m+2}{2+2m}\\ y=0\end{array}\right.$

$S_{OAB}=\frac{1}{2}\left|\overline{OA}\cdot\overline{OB}\right| \Rightarrow$

$3=\frac{1}{2}\left|(m-2)\times\frac{-m+2}{2+2m}\right|$

$\Rightarrow m^2+8m+16=0 \Rightarrow m=-4$

و $m^2-16m-8=0 \Rightarrow m=8\pm6\sqrt{2}$

حل ۱۲:

$x^2-(m^2-m-2)x+2m+1=0 \Rightarrow$

$S=\frac{-b}{a}=m^2-m-2$ مجموع ریشه‌های معادله

$S=m^2-m-2 \quad , \quad S'=2m-1 \ , \ S'=0$

$\Rightarrow m=\frac{1}{2} \Rightarrow S=\frac{-9}{4}$ می‌نیمم مجموع ریشه‌ها

حل ۱۳:

$y=(m+1)x^2-2mx+m-3 \Rightarrow$

$$S\left|\begin{array}{l}x=\frac{2m}{2(m+1)}=\frac{m}{m+1}\\ y=\frac{4(m+1)(m-3)-4m^2}{4(m+1)}=\frac{-2m-3}{m+1}\end{array}\right.$$

$mx+x=m \Rightarrow m(x-1)=-x \Rightarrow$

$m=\frac{x}{1-x} \Rightarrow y=x-3$

حل ۱۴:

$y=x^3+mx^2+(1+m)x+2 \Rightarrow$

$y'=3x^2+2mx+1+m$

$3x^2+2mx+1+m=0$

معادلهٔ طولهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم

$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-2m}{3}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow m=-1 \Rightarrow y=x^3-x^2+2$

$y=x^3-x^2+2 \Rightarrow y'=3x^2-2x$,

$y'=0 \Rightarrow x=0$ و $x=\frac{2}{3}$,

$\left|\begin{array}{l}x=0\\ y=2\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{50}{27}\end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l}x=-1\\ y=0\end{array}\right. \Rightarrow$

$x^3-x^2+2=0 \Rightarrow$

$(x+1)(x^2-2x+2)=0 \Rightarrow$

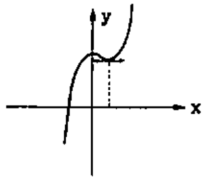
$x=-1$ و $x^2-2x+2=0$ ، $\Delta'=-1<0$

ریشه ندارد

$\left|\begin{array}{l}x=\pm\infty\\ y=\pm\infty\end{array}\right.$

x	y
$y'=0 \begin{cases}0\\ \frac{2}{3}\end{cases}$	2 $\frac{50}{27}$
0	2
-1	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$

x	$-\infty$	-۱	۰	$\frac{۲}{۳}$	$+\infty$
y'		+	۰ − ۰	+	
y	$-\infty$ ↗ ۰	↗ ۲	↘ $\frac{۵۰}{۲۷}$	↗	$+\infty$



حل ۱۵ :

$۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۵=۰,$

$y=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۵ \Rightarrow$

$y'=۶x^۲-۶x-۱۲ \;,\; y'=۰ \Rightarrow$

$۶x^۲-۶x-۱۲=۰ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow$

$x=۲$ و $x=-۱$

$\text{Min}\left|\begin{matrix}x=+۲\\ y_۱=-۱۵\end{matrix}\right.$ و $\text{Max}\left|\begin{matrix}x=-۱\\ y_۲=۱۲\end{matrix}\right.$

$y_۱\cdot y_۲=-۱۵\times ۱۲=-۱۸۰<۰ \Rightarrow$
معادله سه ریشه دارد

حل ۱۶:

$y=\frac{mx+۳}{x+۲m-۲} \Rightarrow O'\left|\begin{matrix}x=-۲m+۲\\ y=m\end{matrix}\right.$

$\xrightarrow{\text{در معادله خط}} ۲(-۲m+۲)-m+۳=۰$

$\Rightarrow -۵m+۷=۰ \Rightarrow m=\frac{۷}{۵}$

حل ۱۷ :

$y=\frac{x+a}{ax+a+۲} \Rightarrow y'=\frac{a+۲-a^۲}{(ax+a+۲)^۲}$

۱) $a+۲-a^۲=۰ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow$

$a=۲$ و $a=-۱$

۲) $a=۰$

۳) $-\frac{۱}{۲}=\frac{a+۲-a^۲}{(-a+a+۲)^۲} \Rightarrow$

$a^۲-a-۴=۰ \Rightarrow a=\frac{۱\pm\sqrt{۱۷}}{۲}$

حل ۱۸ :

$y=\frac{ax+b}{cx-۲}$

$x=۱ \Rightarrow y=۲-۳=-۱ \Rightarrow O'\left|\begin{matrix}x=۱\\ y=-۱\end{matrix}\right.$

$\left|\begin{matrix}x=۱=\frac{۲}{c} \Rightarrow c=۲\\ y=-۱=\frac{a}{c} \Rightarrow a=-c=-۲\end{matrix}\right.$

$\Rightarrow y=\frac{-۲x+b}{۲x-۲}$ ، $y'=\frac{۴-۲b}{(۲x-۲)^۲}$

$\Rightarrow -۱=\frac{۴-۲b}{۴} \Rightarrow b=۴$

حل مسائل مثلثات دوم تجربی و ریاضی

جواب سؤال ۱ :

طبق فرض مسأله داریم :

$۲/۱G+D=۴۵ \Rightarrow D=۴۵-۲/۱G$

از طرفی : $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \xRightarrow{\text{با توجه به فرض}} \frac{۴۵-۲/۱G}{۹}=\frac{G}{۱۰}$

$\Rightarrow ۴۵۰-۲۱G=۹G \Rightarrow ۴۵۰=۳۰G$

$\Rightarrow G=۱۵۰ \Rightarrow \boxed{\alpha=۱۵۰_{gr}}$

$\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱۵۰}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow$

$R=\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{۳\pi}{۴}\text{rad}}$

جواب سؤال ۲:

طبق فرض مسأله داریم:

$R=\frac{۵\pi}{D}$

از طرفی : $\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \Rightarrow \frac{\frac{۵\pi}{D}}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \Rightarrow$

$\frac{۵\pi}{D\pi}=\frac{D}{۱۸۰} \Rightarrow ۹۰۰=D^۲ \Rightarrow$

$\boxed{D=\pm۳۰}$ و $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow \frac{\pm۳۰}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow$

$\boxed{G=\pm۳۳/۳}$

جواب سؤال ۳ :

طبق فرض مسأله داریم :

$۹۰۰\pi\left(\frac{۱}{D}-\frac{۱}{G}\right)=۲R$

از طرفی : $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰} \Rightarrow D=\frac{۹G}{۱۰} \Rightarrow$

$۹۰۰\pi\left(\frac{۱}{\frac{۹G}{۱۰}}-\frac{۱}{G}\right)=۲R \Rightarrow$

$۹۰۰\pi\left(\frac{۱۰}{۹G}-\frac{۱}{G}\right)=۲R \Rightarrow$

$۹۰۰\pi\left(\frac{۱}{۹G}\right)=۲R \Rightarrow \frac{۱۰۰\pi}{G}=۲R \Rightarrow$

$R=\frac{۵۰\pi}{G}$

و داریم :

$\frac{R}{\pi}=\frac{G}{۲۰۰} \Rightarrow \frac{\frac{۵۰\pi}{G}}{\pi}=\frac{G}{۲۰۰} \Rightarrow$

$\frac{۵۰\pi}{\pi G}=\frac{G}{۲۰۰} \Rightarrow G^۲=۱۰۰۰۰ \Rightarrow$

$G=\pm۱۰۰ \Rightarrow \boxed{\alpha=\pm۱۰۰_{gr}}$

جواب سؤال ۴ :

اگر: $\frac{\pi}{۲}<x<\pi \Rightarrow -۱<\cos x<۰$

$\Rightarrow -۱<۲m-۱<۰$

اگر: $۲m-۱<۰ \Rightarrow ۲m<۱ \Rightarrow$

$\boxed{m<\frac{۱}{۲}}$ (۱)

اگر: $۲m-۱>-۱ \Rightarrow ۲m>۰ \Rightarrow$

$\boxed{m>۰}$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \boxed{۰<m<\frac{۱}{۲}}$

جواب سؤال ۵ :

$\frac{tgx\cdot cotg^۲x}{(۱-\cos x)}<۰ \xRightarrow{cotg^۲x>۰} \frac{tgx}{(۱-\cos x)}<۰$

$\xRightarrow{(۱-\cos x)>۰} tgx<۰$

پس x می‌تواند زاویه‌ای درناحیهٔ دوم یا چهارم باشد.

جواب سؤال ۶ :

$A=\sin^۲x-۲\sin x+۵ \Rightarrow$

$A=(\sin x-۱)^۲+۴$

می‌دانیم کمترین مقدار A زمانی است که داخل پرانتز صفر باشد؛ پس کمترین مقدار A برابر است با ۴ و بیشترین مقدار A زمانی است که داخل پرانتز بیشترین مقدار باشد و آن زمانی است که

$\sin x=-۱$

پس :

بیشترین مقدار A $=(-۱-۱)^۲+۴=۸$

جواب سؤال ۷ :

می‌دانیم :

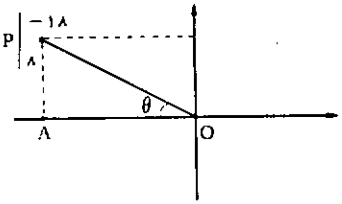
$OA=-۱۵ \quad , \quad AP=۸$

از طرفی : $OP^۲=OA^۲+AP^۲ \Rightarrow$

$OP^۲=۲۲۵+۶۴=۲۸۹ \Rightarrow OP=۱۷$

$\sin\theta=\frac{AP}{OP}=\frac{۸}{۱۷}$

$\cos\theta=\frac{OA}{OP}=\frac{-۱۵}{۱۷} \xRightarrow{\theta \text{ حاده است}} \cos\theta=\frac{۱۵}{۱۷}$



$$tg\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{8}{15} \qquad cotg\theta = \frac{1}{tg\theta} = \frac{15}{8}$$

$$sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{17}{15} \quad \text{و} \quad cosec\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{17}{8}$$

جواب سؤال ۸:

$$tg\alpha = \frac{1}{x+1} \quad \text{و} \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{y}{y-1}} \Longrightarrow$$

$$cotg\alpha = x+1$$

می‌دانیم:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+cotg^2\alpha}} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{y}{y-1}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+(x+1)^2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{y}{y-1} = \frac{1}{1+(x+1)^2} \Longrightarrow$$

$$\frac{y}{y-1} = \frac{1}{x^2+2x+2} \Longrightarrow$$

$$\boxed{y-1 = y(x^2+2x+2)}$$

جواب سؤال ۹:

$$a^{\cos^2 x} + a^{\sin^2 x} = a+1$$

می‌دانیم:

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x \Longrightarrow$$

$$a^{\cos^2 x} + a^{(1-\cos^2 x)} = a+1 \Longrightarrow$$

$$a^{\cos^2 x} + \frac{a}{a^{\cos^2 x}} = a+1$$

اگر $a^{\cos^2 x} = y \Longrightarrow y + \frac{a}{y} = a+1 \Longrightarrow$

$$y^2 + a = ay + y \Longrightarrow$$

$$y^2 - (a+1)y + a = 0$$

$$\Longrightarrow y = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4a}}{2}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2}}{2}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{a+1 \pm |a-1|}{2}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{2a}{2} = a \quad \text{یا} \quad y = \frac{2}{2} = 1$$

اگر $1: y = a \Longrightarrow a^{\cos^2 x} = a \Longrightarrow \cos^2 x = 1$

$$\Longrightarrow \cos x = \pm 1 \Longrightarrow$$

$$\boxed{x = 2k\pi} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = (2k+1)\pi}$$

اگر $2: y = 1 \Longrightarrow a^{\cos^2 x} = 1 \Longrightarrow \cos^2 x = 0$

$$\Longrightarrow \cos x = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}}$$

جواب سؤال ۱۰:

الف) $\cos\alpha - \frac{tg\alpha}{\sin\alpha} + tg\alpha \cdot \sin\alpha$

$$= \cos\alpha - \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{1-1}{\cos\alpha} = 0$$

ب) $sec^4\alpha - tg^4\alpha = \frac{1}{\cos^4\alpha} - \frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha} = \frac{1-\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}$

$$= \frac{(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)}{\cos^4\alpha} = \frac{\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)}{\cos^4\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha} + \frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = sec^2\alpha + tg^2\alpha$$

ج) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\overbrace{\sin^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha}^{1} + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos^2\alpha)}\right) = \frac{1}{\sin\alpha}$$

از طرفی: $cotg\alpha \cdot sec\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \times \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$

دو طرف تساوی با یک مقدار مشترک برابر هستند، لذا اتحاد برقرار است.

د) $\frac{1}{sec^2\alpha} + sec^2\alpha + \frac{1}{cosec^2\alpha} - \frac{sec^2\alpha}{cosec^2\alpha}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} + \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

$$= \overbrace{\cos^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha}^{1} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha = 1 + 1 = 2$$

$$\left(1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha = 1\right)$$

جواب سوال ۱۱:

الف) فرض کنیم نامساوی برقرار باشد $\Longleftarrow$

$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{2} \geqslant \sqrt{tg\alpha tg\beta}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{tg\alpha + tg\beta}{2}\right)^2 \geqslant tg\alpha tg\beta$$

$$\Longleftrightarrow (tg^2\alpha + tg^2\beta + 2tg\alpha tg\beta) \geqslant 4tg\alpha tg\beta$$

$$\Longleftrightarrow (tg^2\alpha + tg^2\beta - 2tg\alpha tg\beta) \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow (tg\alpha - tg\beta)^2 \geqslant 0$$

نامساوی همیشه برقرار است، لذا می‌توان روابط را به‌عقب برگشت و به‌خود نامساوی رسید و به‌این صورت نامساوی به‌دست می‌آید.

ب) فرض کنیم نامساوی برقرار باشد $\Longleftarrow$

$$(tg^2\alpha + cotg^2\alpha)^2 \geqslant (tg\alpha - cotg\alpha)^4$$

$$\Leftarrow \quad (tg^2\alpha + cotg^2\alpha) \geqslant (tg\alpha - cotg\alpha)^2$$

$$\Leftarrow \quad tg^2\alpha + cotg^2\alpha \geqslant (tg^2\alpha + cotg^2\alpha - 2\overbrace{tg\alpha cotg\alpha}^{1})$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 \leqslant 0 \quad \text{نامساوی همیشه برقرار است}$$

حل مسائل مثلثات سال سوم علوم تجربی و ریاضی

حل ۱- فرض می‌کنیم عدد اندازهٔ زاویهٔ بزرگتر برحسب گراد α و عدد اندازهٔ زاویهٔ کوچکتر برحسب درجه β باشد در این صورت داریم:

$$\alpha = 10\beta \qquad (1)$$

از طرفی مجموع دو زاویه برابر $\frac{7\pi}{9}$ رادیان است پس:

$$\text{مجموع دو زاویه به‌درجه} = \frac{7 \times 180^\circ}{9} = 140^\circ$$

$$\text{اندازهٔ زاویهٔ بزرگتر برحسب درجه} = \alpha \times \frac{9}{10}$$

$$\Longrightarrow \frac{9\alpha}{10} + \beta = 140^\circ \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha = 10\beta \\ \frac{9\alpha}{10} + \beta = 140^\circ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\beta = 14^\circ \ , \ \alpha = 140g = 126^\circ$$

حل ۲-

$$\cos x = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos(2x - 5\pi) = \cos(\pi + 2x)$$

$$= -\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos(2x-5\pi)=\frac{7}{25}$$

حل ۳-

$$\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}=\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}$$

$$\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}\Rightarrow\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{5\pi}{6}\Rightarrow$$

$\cos\frac{x}{2}<0$ و $\frac{1}{2}\leqslant\sin\frac{x}{2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}=-2\sin\frac{x}{2}$$

$$\text{Max}:-2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$

حل ۴-

$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2}{5}$ و $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$

$$A=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+2\cos\alpha\cos\beta$$
$$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$\Rightarrow A=2\left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$$
$$=\frac{-12}{25}+\frac{1}{5}=\frac{-7}{25}$$

حل ۵-

الف) طرف اول $=\sin 7x\cos 5x-\sin^2 7x+\cos 7x\sin 5x-\cos^2 7x-\sin 12x=$
$\sin(7x+5x)-(\sin^2 7x+\cos^2 7x)-\sin 12x$
$=\sin 12x-1-\sin 12x=-1=$ طرف دوم

ب) طرف اول $=\cos\alpha+\cos\alpha\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\alpha\cos\frac{4\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{4\pi}{3}=$
$\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=0=$ طرف دوم

ج) (اتحاد را با علامت + درنظر می‌گیریم.)

$$tg\alpha+tg\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+tg\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=3tg3\alpha$$

طرف اول $=tg\alpha+\frac{tg\alpha+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,tg\alpha}+\frac{tg\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,tg\alpha}$
$=\frac{3(3tg\alpha-tg^3\alpha)}{1-3tg^2\alpha}=3tg3\alpha=$ طرف دوم

د) طرف اول $=\cos\left[-\frac{\pi}{4}+3\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2\pi}{3}+2\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}=$ طرف دوم

ه) $tg[\text{Arc}\,tg2+\text{Arc}\,tg3]=tg\frac{3\pi}{4}\Longrightarrow$

$$\frac{2+3}{1-2\times 3}=-1\Rightarrow\frac{5}{-5}=-1\Longrightarrow$$
$$-1=-1$$

و) طرف اول $=\sin(\alpha+2\beta)-\sin(\alpha-2\beta)$
$=2\sin 2\beta\cos\alpha=4\cos\alpha\cos\beta\sin\beta=$ طرف دوم

حل ۶-

$$\alpha+\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}\Longrightarrow tg(\alpha+\beta)$$
$$=tg\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$
$$=tg\left(\frac{-\pi}{4}\right)=-1\Longrightarrow$$
$$tg\alpha+tg\beta=-1+tg\alpha tg\beta$$
$$\Longrightarrow 1-tg\alpha-tg\beta+tg\alpha tg\beta=2$$
$$\Longrightarrow(1-tg\alpha)-tg\beta(1-tg\alpha)=2$$
$$\Longrightarrow(1-tg\alpha)(1-tg\beta)=2$$

حل ۷-

$\sin 2\alpha=2\sin^2\beta$ و $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos 2\beta$

$$\Longrightarrow 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos 2\beta$$
$$\Longrightarrow 1-\sin 2\alpha=1-2\sin^2\beta\Longrightarrow\sin 2\alpha=2\sin^2\beta$$

پس رابطهٔ موردنظر برقرار است.

حل ۸-

الف) $2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)=.$

$$2+2\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\Longrightarrow$$
$$2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)=$$
$$\left(1+\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$$

ب) $\left(\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\cos\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2=$

$$\sin^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}+2tg\alpha+\cos^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}+2cotg\alpha$$
$$=1+1+tg^2\alpha+2tg\alpha+1+cotg^2\alpha+2cotg\alpha$$
$$=3+tg^2\alpha+cotg^2\alpha+2tg\alpha+2cotg\alpha$$
$$=(1+tg\alpha+cotg\alpha)^2$$

حل ۹-

الف) $\frac{2\sin 2x\sin x}{2\cos 2x\cos x}-\frac{2\sin 3x\sin x}{2\cos 3x\cos x}=$

$$tgx(tg2x-tg3x)=tgx\times\frac{\sin(2x-3x)}{\cos 3x\cos 2x}$$

$$=\frac{-\sin^2x}{\cos x\cos 2x\cos 3x}$$

ب) $\frac{2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=$

$$\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos\alpha+\cos 2\alpha}=2\cos\alpha$$

ج) $\cos^2\beta-\frac{1}{4}(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-\cos^4\alpha=$

$$\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha=$$
$$\cos^2\beta-\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$
$$=\frac{1+\cos 2\beta-1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)=$$
$$\frac{1}{2}\times-2\sin\frac{2\beta+2\alpha}{2}\sin\frac{2\beta-2\alpha}{2}=$$
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

د) $\frac{2\cos^2x-2\sin x\cos x}{2\cos^2x+2\sin x\cos x}=$

$$\frac{2\cos x(\cos x-\sin x)}{2\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=$$
$$cotg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

ه) $2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+$

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}+C\right)\cos\frac{A+B}{2}=$$
$$2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B+2C}{2}\right)=$$
$$4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$

حل ۱۰-

الف) طرف اول $=\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+2\beta)+\cos 2\beta-\cos(2\beta+2\alpha)-\cos 2\alpha]$
$=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)=$
$\frac{1}{2}(2\cos^2\beta-1-2\cos^2\alpha+1)=$
$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha=$ طرف دوم

ب) طرف اول $=\frac{1}{2}\left(\cos 6\beta-\cos 2\alpha-\cos 6\beta+\cos\frac{2\alpha}{3}\right)=\frac{1}{2}\times-2\sin\frac{4\alpha}{3}\sin\frac{-2\alpha}{3}$
$=\sin\frac{4\alpha}{3}\sin\frac{2\alpha}{3}=$ طرف دوم

ج) طرف اول اتحاد را در $2\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم.

$$\text{طرف اول}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}=\text{طرف دوم}$$

حل ۱۱ -

الف) $4\sin x\sin 2x\sin 3x=2\sin x(\cos x-\cos 5x)$

$=2\sin x\cos x-2\sin x\cos 5x=$

$\sin 2x-[\sin(x+5x)+\sin(x-5x)]$

$=\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x$

ب) $\sin 20\sin 40\sin 80=$

$\frac{1}{2}\sin 20(\cos 40-\cos 120)=$

$\frac{1}{2}\left(\sin 20\cos 40+\frac{1}{2}\sin 20\right)=$

$\frac{1}{4}[\sin(-20)+\sin 60+\sin 20]$

$=\frac{1}{4}(-\sin 20+\sin 60+\sin 20)=\frac{\sqrt{3}}{8}$

حل ۱۲ -

الف) $tg\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+cotg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\Rightarrow$

$tg\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-cotg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=$

$tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=tg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)\Rightarrow$

$3x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\Rightarrow$

$\frac{5x}{2}=k\pi+\frac{7\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{7\pi}{30}$

ب) $2\cos^2 2x+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow$

$\cos 4x=-\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \cos 4x=\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$

$4x=2k\pi\pm\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$

$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ x=\frac{2k\pi}{7}-\frac{\pi}{28}$

ج) $\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x=1\Rightarrow$

$\cos^2 2x+\sin 2x\cos 2x=0\Rightarrow$

$\cos 2x(\cos 2x+\sin 2x)=0$

$\cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\ ,\ \cos 2x+\sin 2x=0\Rightarrow$

$tg 2x=-1=tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

د) $tg\left(\frac{x}{3}+1\right)tg\left(1-\frac{x}{4}\right)=-1\Rightarrow$

$tg\left(\frac{x}{3}+1\right)=-cotg\left(1-\frac{x}{4}\right)=$

$tg\left(\frac{\pi}{2}+1-\frac{x}{4}\right)\Rightarrow$

$\frac{x}{3}+1=k\pi+\frac{\pi}{2}+1-\frac{x}{4}\Rightarrow$

$\frac{7x}{12}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{12k\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}$

ه) $\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow$

$\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x+\frac{\pi}{6}\right)=$

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-3x\right)\Rightarrow$

$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}-3x\Rightarrow$

$x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{11\pi}{60}\ ,$

$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{2\pi}{3}+3x\Rightarrow$

$x=-2k\pi-\frac{7\pi}{12}$ یا $x=2k'\pi-\frac{7\pi}{12}$

و) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0\Rightarrow$

اسامی تعدادی از عزیزانی که حلّ مسائل مسابقه‌ای و مسائلی برای حل را در زمان تعیین شده برای ما فرستاده‌اند.

(پس از بررسی در صورت صحیح بودن جوابها جوایزی برای آنها ارسال می‌شود)

۱ ـ علی عابدینی
(سال دوّم ریاضی از تهران)

۲ ـ عباس نجفی‌زاده
(سال دوّم ریاضی از قم)

۳ ـ امیر حسن نافعی
(سال سوّم ریاضی از تهران)

۴ ـ نبی‌اله ابوالفتحی
(سال چهارم ریاضی از تهران)

۵ ـ فریبرز سیّدلو
(سال چهارم ریاضی از تهران)

۶ ـ عزیز مهاجری
(دبیر ریاضی دبیرستانهای تهران)

۷ ـ بهرام فرجی
(سال چهارم ریاضی از تهران)

۸ ـ جابر عامری
(دبیر ریاضی دبیرستانهای اهواز)

$$2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x=0 \Longrightarrow$$
$$\sin 3x(2\cos 2x+1)=0$$
$$\sin 3x=0 \Longrightarrow 3x=k\pi \Longrightarrow$$
$$x=\frac{k\pi}{3}\ ,\ \cos 2x=\frac{-1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \Longrightarrow$$
$$2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Longrightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

ز) $\sin 7x+\sin 3x+2\sin^2 x=1 \Longrightarrow$

$$2\sin 5x\cos 2x-\cos 2x=0$$
$$\cos 2x(2\sin 5x-1)=0 \Longrightarrow \cos 2x=0 \Longrightarrow$$
$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$
$$2\sin 5x-1=0 \Longrightarrow \sin 5x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 5x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ 5x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{30} \\ x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ح) $\sin 3x\sin x+\cos 6x\cos 2x+\cos 5x=0$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}[\cos 2x-\cos 4x+\cos 8x+\cos 4x]$$
$$+\cos 5x=0 \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 8x)+\cos 5x=0 \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{2}\times 2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x=0 \Longrightarrow$$
$$\cos 5x(\cos 3x+1)=0 \Longrightarrow \cos 5x=0 \Longrightarrow$$
$$5x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\ ,$$
$$\cos 3x=-1=\cos\pi \Longrightarrow 3x=2k\pi+\pi \Longrightarrow$$
$$x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$$

حل ۱۳ -

$$a\sin^2(3x-\frac{\pi}{4})=1\ \ ,\ \ x=\frac{5\pi}{4} \Longrightarrow$$
$$a\sin^2(\frac{15\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=1 \Longrightarrow$$
$$a\sin^2\frac{7\pi}{2}=1 \Longrightarrow a=1$$
$$a=1 \Longrightarrow \sin^2(3x-\frac{\pi}{4})=1 \Longrightarrow$$
$$\frac{1-\cos(6x-\frac{\pi}{2})}{2}=1 \Longrightarrow$$
$$1-\cos(\frac{\pi}{2}-6x)=2 \Longrightarrow$$
$$1-\sin 6x=2 \Longrightarrow \sin 6x=-1=\sin(\frac{-\pi}{2})$$
$$\Longrightarrow 6x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$
$$x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$$

حل ۱۴ -

$$\cos^2 x-2\cos x=(\cos x-1)^2-1$$

ماگزیمم این عبارت وقتی است که قدر مطلق $\cos x-1$ بیشترین مقدار ممکن باشد و این درصورتی است که

$$\cos x=-1$$

باشد. پس حداکثر مقدار عبارت فوق برابر است با:

$$(-1-1)^2-1=3$$

وحداقل مقدار عبارت فوق وقتی است که

$$(\cos x-1)^2=0$$

باشد یعنی $\cos x=1$ پس کمترین مقدار عبارت فوق برابر است با:

$$0-1=-1$$

In the name of God

Borhān

Vol.I. No.2

Executive Editor H.R. Amiri

April 1992

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning high school education in Iran.

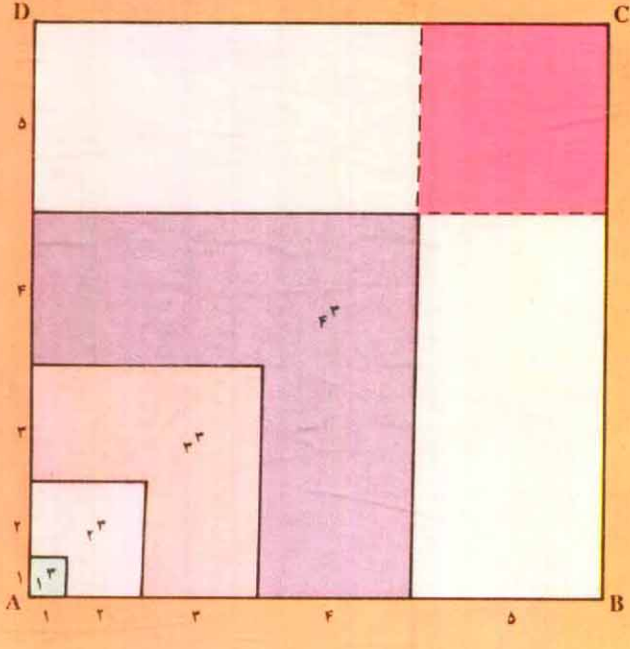
All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e-Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

1. You, too, may be successful in your mathematics lesson — Parviz Shahryari
2. A brief history of persian mathematics journals — Gholamreza Yassipour
3. Sequences (arithmetic progression) — Ahmad Ghandehari
4. Equations — Seyyed Mohammad Reza Hashemi Moosavi
5. Modern logic and mathematics — Gholamreza Yassipour
6. Trigonometric identities, trigonometric inequalities — Hamid Reza Amiri
7. Solutions of contest problems of No. 1 — Mohammad Hashem Rostami
8. Answers of problems of No. 1
9. Contest problems — Rostami, Amiri, Hashemi
10. Problems (including some tests)

ابوبکر محمد کرجی، ریاضیدان ایرانی همعصر با بیرونی و رازی و ابن سینا



روش اثبات ابوبکر محمد کرجی برای دستور

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳=\frac{۱}{۴}n^۲(n+۱)^۲$$

(شکل مقابل، برای $n=۵$)

مربع ABCD را به ضلع $۱+۲+۳+...+n$

در نظر می‌گیریم (در شکل $n=۵$) و مساحت این

مربع را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

۱) ضلع مربع برابر است با $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$، پس $S_{ABCD}=\frac{۱}{۴}n^۲(n+۱)^۲$.

۲) مربع را به صورتی که در شکل دیده می‌شود، به نوارهای گونیایی تقسیم می‌کنیم و مثلاً نوار گونیایی nام را

در نظر می‌گیریم. این نوار شامل یک مربع به ضلع برابر n و دو مستطیل، هر یک به طول $\frac{۱}{۲}n(n+۱)-n$ و به

عرض n، می‌باشد، بنابراین مساحت آن چنین است:

$$\text{مساحت نوار گونیایی nام} = n^۲+۲[\frac{۱}{۲}n(n+۱)-n]n=n^۳$$

بنابراین

$$S_{ABCD}=۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳$$

با برابر قرار دادن دو مقداری که برای مساحت مربع به دست آوردیم، به دستور مورد نظر می‌رسیم.

مجله ریاضی

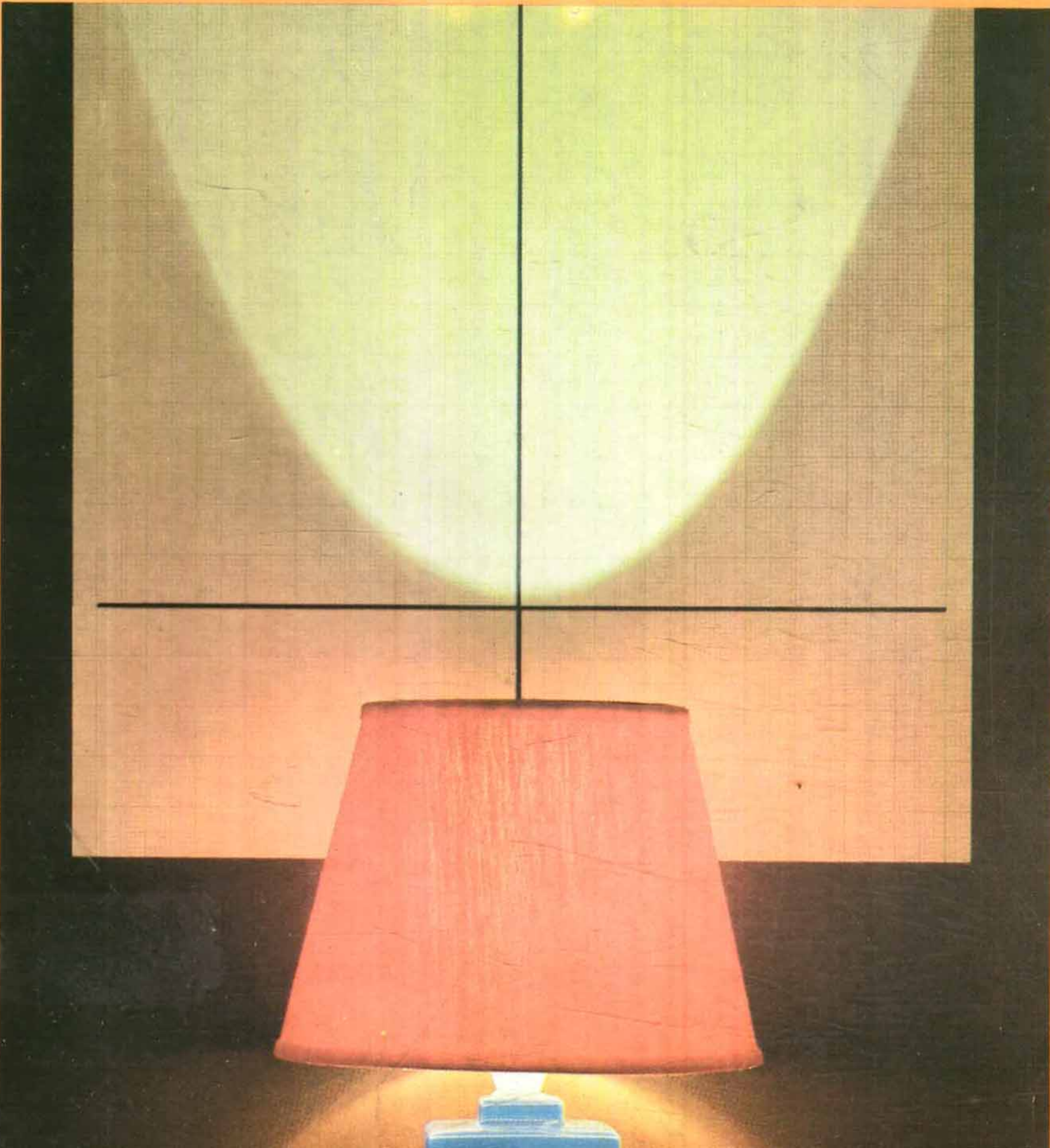
برهان

برای دانش‌آموزان دبیرستان

۳

سال اول، تابستان ۱۳۷۱ بهاء ۵۰۰ ریال

چاپ چهارم



بسم الله الرحمن الرحیم

● صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

● مدیر مسئول: عبدالعظیم فریدون

● سردبیر: حمیدرضا امیری

● مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی

● صفحه‌آرا و رسام: سیدمحسن طرازانی

● حروفچینی: یگانه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن

۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ ـ طرح معماهای ریاضی

۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه ولطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

● مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

● هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاداست.

● مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۸، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش تلفن: ۸۲۶۰۰۷

انتشارات مدرسه

مطالب این شماره

● سخن سردبیر	۱
● شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۳) پرویز شهریاری	۲
● هندسه تحلیلی محمد عابدی	۱۲
● تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۲) غلامرضا یاسی‌پور	۲۶
● تصاعد هندسی احمد قندهاری	۳۲
● قواعد استنتاج غلامرضا یاسی‌پور	۴۰
● محاسبه نسبتهای مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه حمید رضا امیری	۴۸
● مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان ترجمهٔ غلامرضا یاسی پور	۵۰
● طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور	۵۳
● معرفی کتابهای ریاضی	۵۵
● مسائل مسابقه‌ای و مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی سیدحسین سیدموسوی	۵۸
● مسائل برای حل	۵۹
● حل مسائل مسابقه‌ای	۶۵
● حل مسائل شماره ۲	۶۷

سخن سردبیر

مخاطبین مجلهٔ برهان:

راستی مخاطبین مجلهٔ «برهان» چه کسانی هستند؟ همان‌طور که قبلاً هم متذکر شدیم مخاطبین اصلیِ مجلهٔ «برهان» آن دسته از دانش‌آموزان‌اند که دسترسی چندانی به معلمان ورزیده حتی کتب مناسب ندارند. ما مجلهٔ «برهان» را برای دانش‌آموزی منتشر می‌کنیم که علاقه به آموختن ریاضیات دارد اما به منابع و مآخذ آن دسترسی ندارد. دبیر ریاضی ندارد یا کم دارد. کتاب ریاضی جنب درسی ندارد یاکم دارد. چنین دانش‌آموزی مشکلاتش را باکه در میان بگذارد و از که صلاح و مصلحت جوید؟ مجلهٔ ریاضی «برهان» در وهلهٔ اول برای چنین دانش‌آموزی است و به‌عبارت دیگر «برهان» در مرحلهٔ اول یک مجلهٔ تعلیمی است، آن هم تعلیم دانش‌آموزان با بنیهٔ علمی متوسط، اما این بدان معنی نیست که مطالب علمی آن ضعیف باشد یا مجله مایل به داشتن خوانندگانی از گروه دیگر نباشد.

سعیِ گردانندگان و نویسندگان مجلهٔ براین است که مقالات و مطالب و مسائل آن را چنان تنظیم کنند که به کار دانش‌آموزانِ با امکانات بیشتر و دبیران ریاضی نیز بیاید و آنان نیز سهمی از مطالب آن داشته باشند، و این هدف، البته صعب‌الوصول است و جز با یاری و تذکر و انتقاد صاحب نظران و تجربه آموختگان و به‌طور کلّی شما عزیزانِ خواننده ممکن نیست، و ما، ضمن اینکه امیدواریم که در هر شمارهٔ جدید قدمی دیگر به سوی این هدف برداشته باشیم، بار دیگر از خوانندگان عزیز تقاضا می‌کنیم که ندای یاری ما را بی‌جواب نگذارند.

اما، دراین شماره، همان‌طور که ملاحظه خواهیدکرد، سه بخش جدید به مجله افزوده‌ایم. این سه بخش عبارت‌اند از:

۱ ـ طرح و حل مسائل اساسی به روشهای مقدماتی

۲ ـ معرفی کتب ریاضی

۳ ـ مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان

امیدواریم درحالی‌که به آوردن این سه‌بخش در شماره‌های آینده ادامه می‌دهیم، دو بخش مستمر دیگر «مصاحبه با معلمین شما» و «مصاحبه با دانش‌آموزان و دانشجویان ممتاز و موفق» را نیز از شماره‌های آینده آغاز کنیم.

نیز از این شماره بخش «مسائل برای حل» را تغییر داده‌ایم و مسائل آن را براساس سالِ تحصیلی و رشتهٔ تحصیلی، و نه برحسب عنوان درس، انتخاب کرده‌ایم.

امیدمان به خداست و چشم‌مان در انتظار دریافت ارشادات و انتقادات شما عزیزان.

ما بدان مقصد عالی نتوانیم رسید

هم مگر پیش نهد لطف شماگامی چند

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۳)

پرویز شهریاری

سخنان بودا و دکارت را خواندید. چقدر به هم نزدیک‌اند! بودا، روحانی و حکیمی از شرق، و دکارت، فیلسوف و ریاضیدانی از غرب است. فاصلهٔ زمانی بین زندگی آنها هم کوتاه نیست. بودا در سدهٔ ششم پیش از میلاد می‌زیسته و دکارت در سدهٔ هفدهم بعد از میلاد، یعنی نزدیک به ۲۳۰۰ سال، آنها را از هم جدا می‌کند. با وجود این، توصیه‌های آنها، چنان به هم شباهت دارد که به نظر می‌رسد، دو مترجم مختلف، متن واحدی را ترجمه کرده‌اند. چرا به قول دکارت «نباید چیزی را جست‌وجو کنیم که دیگران فکر می‌کنند» و چرا به قول بودا «نباید گفته‌ای را، به صرف این که دیگران گفته‌اند، باور کنیم»؟

ابتدا، این سخن ابن سینا را، در مقدمه «شفا» بشنویم و، سپس، دلیلهای خود را بیاوریم:

«... همچنین، از جست‌وجوی رابطه‌ای بین اوضاع و احوال آسمان خواص روح و بعدهای موسیقی خودداری می‌کنیم وگرنه روش کسانی را که از حقیقت علم آگاهی ندارند (منظور ابن‌سینا، برخی دانشمندان یونانی، مثل فیثاغورث و افلاطون و پیروان آنهاست) پیروی‌کرده باشیم. اینان وارث فلسفه‌ای کهنه و سست می‌باشند و ویژگیهای اصلی چیزها را با کیفیتهای اتفاقی آنها، به جای هم گرفته‌اند؛ خلاصه کنندگان نیز از آنها تقلید کرده‌اند. ولی کسانی که فلسفه حقیقی را فهمیده و ویژگیهای درست چیزها را درک کرده‌اند (منظور ابن‌سینا، فارابی و پیروان اوست)، اشتباههایی را که در اثر تقلید رخ می‌دهد، تصحیح کرده و خطاهایی را که زیباییهای اندیشه‌های کهنه را می‌پوشاند، پاک کرده‌اند. اینان سزاوار تحسین‌اند...»

اول، به این دلیل که قانونهای حاکم بر طبیعت و جامعه، چنان بغرنج‌اند که هرگز، یک یا چند بررسی، یک یا چند دیدگاه و یک یا چند سند، نمی‌تواند ماهیت و حقیقت یک قانون را روشن کند. باآن که دانش، بسیار پیش‌رفته و بسیاری از رازها را گشوده است، انسان هنوز در آغاز راه است و تارسیدن به حقیقت واقع، راه درازی در پیش دارد. با دانشی که امروز داریم و باآگاهیهایی که در اختیار ماست، می‌توان به نتیجه‌هایی رسید که گاه با هم متضادند و انسان پژوهشگر و اندیشمند، تنها باید با آنها آشنا شود، دربارهٔ آنها بیندیشد و مسیرهای تازه‌ای برای بررسی آنها پیدا کند. به این دو اظهارنظر توجه کنید. آیا در برخورد اول، هر دوی آنها را درست نمی‌پندارید؟

کارل چاپک، نویسندهٔ نکته سنج «چک»، نزدیک به هفتاد سال پیش نوشت:

«انسان وقتی می‌تواند به طبیعت دست یابد که به کاری غیر از آن چه در طبیعت وجود دارد، بپردازد. تا زمانی که انسان تلاش می‌کرد، همچون پرنده یا پروانه، بال بزند، تمام کوششهای او در زمینهٔ پرواز، با ناکامی مواجه شد. وقتی می‌خواست با سرعت بیشتری روی زمین بدود، به جای این که مثل گوزن یا اسب، چهار دست و پا راه برود، یا دو پای اضافی برای خود درست کند، چرخ را ساخت. وقتی از دندانهای طبیعی و ثابت خود

راضی نبود، دندانهای مصنوعی قابل جابه‌جا شدن را برای خود ساخت که می‌توانست آنها را در «تیردان» خود جای دهد. ریسمان باف، ضمن بافتن ریسمان، عقب عقب می‌رود یعنی به طریقی عمل می‌کند که درست عکس حرکت عنکبوت، هنگام بافتن تار است. اگر آدمی می‌خواست از عنکبوت تقلید کند، هرگز نمی‌توانست دستگاه بافندگی را اختراع کند. تمام هنر صنعتی بشر در این است که، برای انجام هرکاری، نه در جهتی که در طبیعت وجود دارد، بلکه درست در جهت متضاد با آن حرکت می‌کند.»

اکنون نظر یک دانشمند، ای. ب. تی بی نتسکی را در کتاب «بیونیک» (۱۹۷۶) بشنوید:

«همهٔ نمونه‌ها، به طور قانع کننده‌ای ثابت می‌کنند که، از دورترین دورانهای پیش از تاریخ، طبیعت زنده، الهام بخش آدمی در کشش او به سمت پیشرفت علمی و صنعتی بوده است. در جریان هزاران سال، انسان از طبیعت آموخته است و کشفها و اختراعهای خود را، از روی آن برداشته است. صنعت، که در واقع ابزار مصنوعی کار به شمار می‌رود، چیزی نیست جز تقلیدی از اندامهایی از دستگاههای زنده.»

وقتی که شما می‌خواهید با دورانهای تکامل ریاضیات آشنایی پیدا کنید، با دو دیدگاه متفاوت روبه رو می‌شوید. گروهی، ریاضیات را تنها «ریاضیات نظری» و مفهومها و رابطه‌های انتزاعی آن می‌دانند و «ریاضیات کاربردی» را، به عنوان بخشی از ریاضیات به حساب نمی‌آورند. به همین جهت، دورانی از تاریخ بشر را، که بیشتر در جهت ریاضیات کاربردی تلاش شده است، دوران رکود دانش ریاضی می‌دانند. برخی از دانشمندان، پا را از این هم فراتر گذاشته‌اند و ریاضیات را، تنها محصول ذهن بشر می‌دانند که، کاربرد برخی از قانونهای آن در عمل، تنها امری تصادفی است. گروه «نیکلای بورباکی» که عده‌ای از بهترین ریاضیدانان معاصر فرانسوی را شامل می‌شود و کتابهای خود را، که بسیار هم با ارزش‌اند، زیر همین نام مستعار «بورباکی» منتشر می‌کنند، از این دسته‌اند و «ریاضیات کاربردی» را، اصلاً «ریاضیات» نمی‌دانند. اما گالیله عقیدهٔ دیگری دارد:

ـ «جهان کتابی است پر از فلسفه. این جهان در برابر چشمان ما گشوده است. ولی تنها وقتی می‌توان از آن سردرآورد که با نشانه‌ها، نمادها و زبان این کتاب آشنا باشیم. این زبان، ریاضیات و این نشانه‌ها، مثلثها و دایره‌ها و دیگر شکلها هستند.»

و گنه دنکو، ریاضیدان و فیلسوف معاصر و عضو آکادمی علوم اوکراین، ریاضیات را عنصری لازم برای زندگی امروزی می‌داند و در مقالهٔ «ریاضیات کاربردی و چشم انداز آینده» می‌نویسد:

«روشهای ریاضی در تمامی زندگی ما نفوذ کرده است. ریاضیات امروزی، تنها زمینه‌ای برای محاسبه نیست، بلکه به‌صورت سلاحی نیرومند برای تحقیق درآمده و بارها و بارها بر تجربه پیشی گرفته است. با وجود این، جوانان جست و جوگر امروزی، حداکثر با چنان سطحی از پیشرفت ریاضیات سروکار دارند که، در بهترین شرایط، مربوط به صد سال پیش است و همین جوانان، فردا باید بتوانند دانشهای طبیعی، صنعت و اقتصاد را تکامل دهند. همین جوانان امروزی‌اند که باید رازهای اندیشه را بگشایند، به فضای دوردست کیهانی راه یابند، روندهای صنعتی را ادامه دهند و روشهای مؤثری برای تشخیص بیماریها و درمان آنها پیدا کنند.»

دربارهٔ دورانهای تکامل ریاضیات صحبت می‌کردیم و گفتیم، گروهی تنها به ریاضیات نظری توجه دارند. بنابراین دیدگاه، تاریخ ریاضیات، تاکنون از سه مرحله گذشته است: ریاضیات مقدماتی (یا ریاضیات کمیتهای ثابت)، ریاضیات کمیتهای متغیر و، سرانجام، ریاضیات امروزی. ولی گروهی دیگر، ایرادهایی جدی به این تقسیم‌بندی دارند. آنها می‌گویند، در این تقسیم بندی، یکپارچگی و وحدت ریاضیات را، که هم شامل ریاضیات نظری و هم شامل ریاضیات کاربردی باشد، به هم می‌زند. از این گذشته، با این تقسیم‌بندی، دوره‌های کاملی از تکامل بشر، کنار گذاشته می‌شود. در

واقع، در تاریخ بشر، دو دورهٔ کم و بیش طولانی وجود دارد که، در آنها، توجه اصلی دانشمندان، به ریاضیات کاربردی بوده‌است: ۱) دوران پیش از ریاضیات یونانی و ۲) دوران سده‌های میانه، که مرکز ثقل همهٔ دانشها (و از آن جمله ریاضیات)، در شرق و به ویژه در ایران بوده است. البته، خود این دو دوره با هم فرق دارند. در دوران پیش از ریاضیات یونانی، در مصر، بابل، سرزمین عیلام، چین و سایر جاها، تلاش عمده در حل مسأله‌های به طور نسبی ساده‌ای از ریاضیات کاربردی، مثل تقسیم زمین برای کشت، ساختن انبارها، راهها و قلعه‌ها، توسعهٔ بازرگانی، فراهم کردن توشهٔ سربازانی که در جنگ به سر می‌برند،... بوده‌است؛ حل این گونه مسأله‌ها، نیاز به محاسبه، شناخت ویژگیهای بعضی شکلها و غیر آن داشته است. و همین‌ها، زمینه را برای به وجودآمدن «ریاضیات نظری» فراهم کرد. در دورهٔ دوم برتری «ریاضیات کاربردی»، مسأله‌های بغرنج‌تری در برابر ریاضیدانان قرار داشت و آنها ناچار بودند، ابتدا قانون مندیهای کلی را پیداکنند و سپس، به کمک آنها مسأله‌های کاربردی را حل کنند. مثلاً خوارزمی، ریاضیدان ایرانی، کتاب «جبر» خود را، که نخستین کتاب جبر در تاریخ ریاضی است، به خاطر حل مسأله‌هایی نوشته است که، در زمان او، دشواریهایی به وجود آورده بودند، مثل مسأله‌های مربوط به تقسیم ارث و عمل کردن به وصیتها. اغلب این مسأله‌ها، منجر به حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شدند، به همین مناسبت، خوارزمی ابتدا انواع معادله‌های درجه دوم را می‌آورد، برای هریک از آنها راه حل کلی (آلگوریتم) پیدا می‌کند، سپس، کاربرد آنها را، در مسأله‌های عملی، با ذکر مثالهای فراوان، توضیح می‌دهد.

به این علتهاست که گروه دیگری از دانشمندان، دورانهای تکامل ریاضیات را به این نحو در نظر گرفته‌اند که، همیشه، به دنبال دورانی که «ریاضیات کاربردی» تسلط داشته است، دورانی فرا می‌رسد که، در آن «ریاضیات نظری» مسلط می‌شود. بعداز دوران «ریاضیات کاربردی» ملتهای باستانی، ریاضیات نظری یونانیها، سپس دوباره ریاضیات کاربردی ملتهای مشرق زمین و دوباره، بعد از رونسانس، ریاضیات نظری، حالتی مسلط پیدا می‌کند و امروز، این طور به نظر می‌رسد که داریم به دوران تازه‌ای از ریاضیات کاربردی وارد می‌شویم. چنین است، دو دیدگاه متفاوت درباره تنظیم تاریخ ریاضیات.

دوم، به این دلیل که اغلب، و به ویژه در دوران ما، که نظام سودجوی سرمایه‌داری حاکم بر جهان است، به نام دانش، خبرها و «داستان»های هیجان‌آوری منتشر می‌شود که با دانش، فاصله بسیار دارند و، در برخی موردها، به‌صورت نوعی شیادی در می‌آید. دستگیرهٔ این کارهای «شبه علمی» و یا بهتر بگوییم «ضد علمی»، عنوانهای پر هیاهویی از قبیل «مثلث برمودا»، «بیگانه‌های غیر زمینی»، «نخستین انسانی که از میمون زاده‌شد»، «بشقاب‌های پرنده»، «عمل جراحی با دستهای برهنه»،... است. روی جلد و تیترهای درشت برخی مجله‌ها و روزنامه‌ها و حتی گاهی، به اصطلاح «مجله‌های علمی» جهان، با این عنوانها و عنوانهای مشابه آنها پر می‌شود و دریغ که گاهی، به نشریه‌ها و رسانه‌های درونی هم نفوذ می‌کنند. تنها به یکی از این نمونه‌ها اشاره می‌کنیم.

در ژانویهٔ سال ۱۹۸۲، تلویزیون فرانسه، برنامه هیجان انگیزی در بارهٔ «روان شناسی تجربی» پخش کرد. این برنامه، با این هدف تنظیم شده بود تا بینندهٔ تلویزیون را قانع کند که، گویا مسأله‌هایی از نوع «روشن بینی»، «دور آگاهی (تله پاتی)» و «انتقال فکر» (بدون هیچ حامل شناخته شده‌ای)، در حوزهٔ دانش قرار دارد و امروز، در مورد این پدیده‌ها، هیچ تردیدی وجود ندارد.

میشل روزه، گزارشگر مجلهٔ علمی «علم و زندگی» چاپ پاریس دربارهٔ این گفتار تلویزیونی مقاله‌ای نوشت که برخی از جنبه‌های نادرست این برنامه را فاش می‌کند. بخش بسیار کوتاهی از نوشتهٔ میشل روزه را می‌آوریم.

در برنامه تلویزیونی تأکید شد که «روانشناسی تجربی»، به عنوان یک دانش رسمی پذیرفته شده است و، در زمان ما، در بیشتر دانشگاهها جزو برنامه‌های درسی قرار دارد. گردانندهٔ برنامه گفت: «امروزه شخصیتهای بسیار جدی، روانشناسی تجربی را در محدودهٔ بررسیهای خود قرار داده‌اند و از آن به عنوان یکی از رشته‌های دانش نام می‌برند.» و گوینده، از دانشمندانی، به عنوان این گونه شخصیتها نام برد. ابتدا نام پروفسور واسیلی یف از فرهنگستان علوم دانشگاه لنینگراد را آورد. ولی باید گفت که اولاً جایی به نام «فرهنگستان علوم دانشگاه لنینگراد» وجود ندارد. اگر منظور «فرهنگستان علوم

اتحاد شوروی» است، در مسکو واقع است نه در لنینگراد؛ ثانیاً مرحوم ل.ل. واسیلی یف، عضور فرهنگستان نبود و تنها کُرسی فیزیولوژی انسان را در دانشگاه لنینگراد اداره می‌کرد. او البته، از هواداران «دور آگاهی» بود و کتابی هم به نام «تسلط بزفاصله‌ها» در این باره نوشت. ولی این نظریه‌های او را، نباید خیلی جدی گرفت؛ از این گذشته، نظریه‌های شخصی واسیلی یف، به هیچ وجه نظر رسمی دانش شوروی نیست.

گوینده، به عنوان شخصیت دوم، از «ای یولی نیون» نام برد که گویا کرسی روانشناسی تجربی را در دانشگاه تولوز اداره می‌کند. بنابه اظهار گوینده، او بنیانگذار آزمایشگاه روانشناسی تجربی در این دانشگاه است. ولی در دانشگاه تولوز، نه کرسی روانشناسی تجربی وجود دارد و نه، در این زمینه، آزمایشگاهی در آن پیدا می‌شود. آقای «لی نیون» هم اصلاً استاد نیست. او تنها آسیستان است و کار او، تدریس کاربرد ریاضیات در آمار است.

شخصیت سوم، پروفسور «رمی‌شوون»، متخصص مشهور رفتار زنبورهای عسل و مورچگان بود. ولی او هرگز به طور رسمی، روی روانشناسی تجربی کار نکرده است و همچون «واسیلی یف» و «لی نیون» او را هم نمی‌توان نماینده دانش رسمی دانست که برروانشناسی تجربی مُهر تأیید گذاشته باشد...

گمان می‌کنم، همین چند سطر، برای روشن کردن ماهیت «بحث علمی تلویزیونی» کافی باشد.

در سال ۱۹۵۳، در آزمایشگاه علمی - پژوهشی «نول سو» (کمپانی «جنرال الکتریک») مجلسی تشکیل شد که «ایروینگ لنگ‌مور» (۱۹۸۷ - ۱۸۵۱)، دانشمند سرشناس امریکایی و برندهٔ جایزهٔ نوبل، زیر عنوان «دانش پدیده‌هایی که در واقع وجود ندارند» سخنرانی کرد و پرده از روی بسیاری ادعاهای به اصطلاح علمی برداشت. «لنگ‌مور» این گونه نظریه‌ها را «دانش بیمار» می‌نامد. متن این سخنرانی بسیار جالب و آموزنده است، ولی به دلیل تخصصی بودن آن، و هم به دلیل این که کم وبیش طولانی است، در این جا تنها بخش پایانی این سخنرانی راکه به «بشقابهای پرنده» مربوط می‌شود، می‌آوریم.

«من خیلی خودم را آماده نکرده‌ام تا روی موضوع بشقابهای پرنده، بحثی مفصل داشته باشم و تنها دربارهٔ یک جنبهٔ آن صحبت می‌کنم؛ بشقابهای پرنده، در واقع، یک موضوع علمی نیست، گرچه بعضی از دانشمندان هم، چیزهایی دربارهٔ آن نوشته‌اند. بعداز جنگ، من عضو یک شورای مشورتی بودم. در یکی از نشستهای کاملاً محرمانهٔ آن، طرح مورد بحث قرار می‌گرفت. همه چیز اسرارآمیز بود. صحبت کردن دربارهٔ آن دشوار است. گفت و گو از همین بشقابهای پرنده بود، از جمع آوری اظهارات گواهان و از برآورد و ارزیابی همهٔ آگاهیهایی که دربارهٔ بشقابهای پرنده وجود دارد. به ما گفتند: «می‌دانید! وضع خیلی جدی است. مثل این که واقعاً چیزی وجود دارد.» آن وقت، من دربارهٔ نمونه‌هایی از «کشف»هایی که می‌شناسیم، برای آنها صحبت کردم. گفتم که بشقابهای پرنده هم پدیده‌ای است که مرا به یاد همان به اصطلاح کشفها می‌اندازد. خواهش کردم تنها سی یا چهل نفر از بهترین گواهان را انتخاب کنند و پیش من بیاورند؛ من نیازی به صدها گواهی که در اختیار شماست، ندارم. بیشتر موردها، مربوط به مشاهدهٔ زهره در هوای تیره و گرفته بود. اگر فقط بدانیم به کجا باید نگاه کنیم، زهره را حتی در وسط روز هم می‌توان دید. این وضع، بارها موجب هراس و ولوله شده است. مثلاً در نیویورک، به خاطر دیدن زهره در نزدیکی یک ساختمان، راه بندان واقعی به‌وجود آمد. مردم گمان می‌کردند که این، یک ستارهٔ دنباله‌دار است که همین الان با زمین برخورد می‌کند؛ یا این که کسی از مریخ آمده است و یا چیزهای دیگری از این قبیل. این حادثه مربوط به سالهای قبل است، سی یا چهل سال پیش. ولی همین زهره، تا امروز، داستانهای زیادی دربارهٔ بشقابهای پرندهٔ به‌وجود آورده است. بین مدرکهایی که ارائه شد، تنها دو عکس وجود داشت که به وسیلهٔ یک نفر گرفته شده بود. در برخورد اول، به نظرم رسید که در عکسها، تکه‌ای از یک کارتُن قیر آلود دیده می‌شود؛ در ضمن، چیزی که در دو عکس دیده می‌شد، به کلی با هم متفاوت بود. من به جمع‌آوری جزئیات اضافی پرداختم: وضع هوا در آن موقع چگونه بود؟

روزنامه‌های کهنه را در آوردم، معلوم شد عکسها موقعی برداشته شده است که پانزده یا بیست دقیقه از توفان قوی پررعد و برقی گذشته بوده‌است. خوب، در چنین وضعی، چه چیزی طبیعی‌تر از وجود یک قطعه کارتُن قیرآلود است که، در اثر گردباد، بلند می‌شود و به طرف ابرها می‌رود و حالا، خیلی ساده دارد، پایین می‌افتد. چه رازی در این مسأله وجود دارد؟ به من می‌گفتند: «این شیء با سرعتی حیرت‌انگیز حرکت می‌کرد.» ولی شخصی که همهٔ اینها را دیده بود، کمترین تصوری در این باره نداشت که، این شیء، در چه فاصله‌ای از او بوده است و روشن است که، در چنین وضعی، همه چیز دشوار می‌شود. وقتی شما چیزی در آسمان می‌بینید، هیچ‌گونه تصوری دربارهٔ اندازه‌های آن در شما پدید نمی‌آید و، به همین مناسبت، ممکن است هر گونه حدسی دربارهٔ سرعت آن بزنید. سعی کنید اندازه‌های واقعی ماه را، با توجه به صورت ظاهری آن، حدس بزنید. آیا حجمی به اندازهٔ مُشت دارد یا توپ یا خانه؟ وقتی به‌طور ساده به ماه نگاه می‌کنید، هیچ چیز دربارهٔ این مطالب نمی‌توانید بگویید. پس چگونه می‌شود اندازه‌های یک بشقاب پرنده را فهمید؟ به هر حال، با وجودی که همهٔ سندها را بررسی کردم حتی یک نمونه پیدا نکردم که دست‌کم ذره‌ای معنا داشته باشد. بین آنها، هیچ گونه هماهنگی وجود نداشت. همهٔ آنها از همان نوعی بودند که شرح دادم و البته، همراه با تلقیهایی ذهنی و خیال‌بافانه. در واقع هیچ کس با دقت نمی‌داند که با چه معیاری باید سرعت شیء را در آسمان پیدا کرد و، اگر چیزی ناشناخته است، در چه فاصله‌ای از ما قرار دارد؟ ولی همهٔ این گواهیها، یک وجه مشترک داشتند: فقدان استدلال قانع کننده در آنها... بعدها داستان این شورای محرمانه، فاش و در روزنامه‌ها چاپ شد. به نظر می‌رسد، این مسأله خاتمه یافته است. ولی البته روزنامه‌ها، به هیچ وجه اجازه نمی‌دهند، هیجان مردم در این باره، فروکش کند.»

سوم، به این دلیل که دانش رو به تکامل است و ما هم باید در این تکامل سهمی داشته باشیم. روزاپتر (۱۹۰۵ - ۱۹۷۷)، ریاضیدان و عضو سابق آکادمی علوم مجارستان، در پایان کتاب زیبای خود «بازی با بی‌نهایت» می‌گوید:

«بدون تردید، پیشرفت آیندهٔ ریاضیات، دامنهٔ آن را وسعت خواهد داد. گرچه دورنمای این پیشرفت، از دید امروز ما پنهان است. یک چیز را باید، یکبار برای همیشه، بفهمیم: ریاضیات پدیده‌ای ساکن و بسته نیست، ریاضیات دانشی زنده و پر تحرک است که پیوسته راه خود رابه طرف جلو می‌گشاید. هر وقت خواسته‌اند ریاضیات را در درون محدودهٔ بسته‌ای زندانی کنند، دیر یا زود توانسته است راهی به سوی آزادی بجوید و قابلیت زنده بودن خود را نشان دهد.»

به همین دلیل، نباید تصور کنیم، آن چه از ریاضیات می‌دانیم و یا به‌طور کلی، آن چه در ریاضیات وجود دارد، دقتی مطلق دارد و بی‌تغییر و جاویدان است. تعریفها، مفهومها و نظریه‌های ریاضی، ضمن پیشرفت ریاضیات، دقیق‌تر و کاراتر می‌شوند. اگر یک قانون ریاضی، در گذشته، در محدوده‌ای تنگ کاربرد داشته است، با پیشرفت ریاضیات و دقیق‌تر شدن مفهومها و نظریه‌ها، این محدودهٔ تنگ شکافته می‌شود و به میدانی گسترده‌تر تبدیل می‌شود. بنابراین، نمی‌توان و نباید کار قانونها و مفهومهای ریاضی را، پایان یافته دانست. شَك، موجب پیشرفت دانش و موجب نزدیکتر شدن به حقیقت واقع است. هیچ چیز را نباید به‌صورت قطعی پذیرفت. طرز تفکری که دانش موجود را کمال مطلوب می‌داند، مانعی برای پیشرفت است. نظریهٔ نسبیت، چیزی از ارج و ارزش نیوتون نمی‌کاهد، ولی اگر همهٔ دانشمندان، به نیوتون، به عنوان دانشمندی که حرف آخر را زده است، می‌نگریستند، نه ریاضیات تکامل می‌یافت و نه قانون‌مندیهای فضای کیهانی کشف می‌شد. دو مثال از ریاضیات بیاوریم.

مثال اول. در سرزمین عیلام (جنوب و جنوب غربی ایران)، در بابل و در مصر، در هزاره‌های پیش از میلاد، برای محاسبهٔ ساخت یک چهار ضلعی، نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دو ضلع دیگر ضرب می‌کردند، قاعده‌ای که تنها برای

مستطیل درست است. در آن زمانها، بیشتر به کاربرد عملی ریاضیات توجه داشتند و محاسبهٔ مساحت، بیشتر برای تقسیم زمینهای کشاورزی به کار می‌رفت. چون در عمل، زمین را به صورتی تقسیم می‌کردند که، کم و بیش، مستطیل شکل بودند، این نوع محاسبه، تفاوت چندانی با واقعیت پیدا نمی‌کرد. بعدها، در دورهٔ تکامل ریاضیات کاربردی، ریاضیدانان ایرانی با شکلهای گوناگونتری سروکار پیدا کردند و به ناچار، محاسبهٔ مساحت را، برمبنای دقیقتری گذاشتند. مثلاً در کتاب «الایضاح عن اصول صناعة المساح» تألیف ابومنصور تمیمی که در اواخر سدهٔ چهارم و اوایل سدهٔ پنجم هجری قمری در نیشابور و به عربی نوشته شده و ابوالفتوح اصفهانی آن را به فارسی برگردانده است، انواع چهار ضلعی را ۹ قسم دانسته: مربع، مستطیل، ذوزنقه قائم الزوایه، لوزی، شبه لوزی (چهار ضلعی که دو قطر آن بر هم عمود باشند ویکی از قطرها به وسیلهٔ دیگری نصف شود)، متوازی الاضلاع، ذوزنقهٔ متساوی الساقین، ذوزنقهٔ غیر مشخص و سرانجام، چهار ضلعی غیر مشخص، در کتاب تقریباً در همهٔ حالتها، محاسبهٔ مساحت با دقت انجام گرفته، تنها در حالت چهار ضلعی غیر مشخص (یعنی چهار ضلعی که یکی از هشت حالت دیگر نباشد) دو راه برای محاسبهٔ مساحت آورده است. در یکی از روشها، چهار ضلعی را با رسم قطر به دو مثلث تقسیم می‌کند و توصیه می‌کند، مساحت هر مثلث را به طور جداگانه محاسبه، سپس، با هم جمع کنید. ولی در روش دوم نوعی عدم دقت به چشم می‌خورد. او می‌گوید: برای «مربعی مختلف الاضلاع و القطرین و الزوایا...طریق مساحتش آن بُود که نیمهٔ جوانب، جمله برگیرند و فضل آن بر هر ضلعی بدانند و فضل‌ها، بعضی در بعضی زنند. جذر آنچ برسد، مساحتش بُود». [توجه کنیم، دراین جا، منظور از «مربع» چهار ضلعی و منظور از «جوانب» محیط است.] به زبان امروزی، یعنی «هر ضلع را از نصف محیط کم کنیم و جذر حاصل ضرب چهار عدد حاصل را به دست آوریم». اگر طول ضلعهای چهار ضلعی را a ، b، c و d و اندازهٔ نصف محیط را p بنامیم، به این دستور می‌رسیم:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ولی می‌دانیم، این دستور، برای محاسبهٔ مساحت یک چهار ضلعی قابل محاط در دایره درست است، نه هر چهار ضلعی غیرمشخص. محاسبهٔ دقیقتر شده، ولی هنوز به دقت کامل نرسیده.

جالب این است که هنوز هم، دهقانان ایرانی، در بیشتر جاها، مساحت قطعه‌های زمین را با همان روشی انجام می‌دهند که عیلامی‌ها در چهار هزار سال پیش انجام می‌دادند.

مثال دوم. در ریاضیات، برای هر مفهومی و هر شکلی، باید تعریفی داشته باشیم. ولی «تعریف» مجموعه‌ای از واژه‌هاست: «مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه، که از نقطه ثابتی به یک فاصله باشند، دایره نامیده می‌شود». این، یک تعریف است، تعریف دایره، ولی، در این تعریف واژه‌هایی وجود دارد که اگر معنای آنها را ندانیم، از خود «تعریف» سردر نمی‌آوریم: «مجموعه»، «نقطه» ، «صفحه» ، «نقطه ثابت»، «فاصله». ولی همان دو واژهٔ اول را نمی‌توانیم تعریف کنیم: برای «مجموعه» و یابرای «نقطه» تعریفی وجود ندارد. البته، اقلیدس در کتاب «مقدمات» خود، نقطه را تعریف کرده است: «نقطه چیزی است که بدون بُعد باشد». در این «تعریف» دو مُشکل وجود دارد: اول واژهٔ «چیز» ، «چیزی است» یعنی چه؟ در این جا، «چیز» چه معنایی دارد؟ دوم «بُعد» یعنی چه؟ لازم است گفته شود که مفهوم و تعریف «بُعد» تنها در دهه‌های اخیر روشن شده است، آن هم به شرطی که خیلی از مفهومهای هندسی، و از آن جمله مفهوم «نقطه» را بشناسیم. عجب! نقطه را به کمک مفهوم بُعد و بُعد را به کمک مفهوم نقطه تعریف کنیم؟ مثل این است که بگوییم «پرستو نوعی پرنده است» و بعد، وقتی از ما بپرسند پرنده یعنی چه؟ در پاسخ بگوییم «پرنده چیزی مثل پرستو است». این نوع داوری یاتعریف را، در منطق قدیم، «دور باطل» می‌گفتند. «دور باطل»، یعنی تعریف یک موضوع، سرانجام به خود آن موضوع برگردد. و تعریف اقلیدس از نقطه، منجر به دور باطل می‌شود.

در مورد عملهای ریاضی هم، وضع به همین گونه است. مثلاً عمل جمع را نمی‌توان تعریف کرد. جمع یعنی چه؟ تعریف عمل جمع چیست؟ درکتابها، گاه به چنین جمله‌هایی برمی‌خوریم: «عمل جمع، یعنی افزودن دو یا چند عدد به یکدیگر» یا «عمل جمع، یعنی

روی هم ریختن واحدهای دو یا چند عدد». خوب دقت کنید. در این تعریفها، تنها کاری که کرده‌اند، به جای واژهٔ «جمع» از واژهٔ «افزودن» یا واژهٔ «روی هم ریختن» استفاده کرده‌اند. اگر بخواهیم هر کدام از این تعریفها را، با زبانی ساده بیان کنیم، باید بگوییم «جمع یعنی جمع»!

ریشهٔ دشواری در کجاست؟ ذهن آدمی، برای این که چیزی را بشناسد یا دربارهٔ آن داوری کند، به تکیه‌گاهی نیاز دارد. شما اول از دوستتان می‌پرسید: «آیا قبول داری که ...» و اگر او قبول کرد آن وقت با تکیه بر آن و براساس آن، سعی می‌کنید نظر خود را توضیح دهید. ولی اگر به هر موضوع روشنی اشاره کنید، دوستتان از قبول آن سرباز زند و هیچ چیز را قبول نکند، در بیان نظر خود و در استدلال خود در می‌مانید. گفت وگو و بحث بین دو نفر، وقتی به جایی می‌رسد که آگاهیهای مشترکی داشته باشند. همین آگاهیهای مشترک (که هر دو طرف دربارهٔ آنها توافق دارند)، مبنا و تکیه‌گاه گفت و گوی آنهاست.

در ریاضیات، برای تعریف «نقطه» یا «عدد» یا «عمل جمع»، تکیه‌گاهی نداریم و تعریف را از «هیچ» نمی‌توان آغاز کرد. ولی اگر معنای «جمع» را بدون تعریف بپذیریم و مثلاً بگوییم «معنای آن روشن است» یا «معنای آن در خودش پنهان است»، آن وقت می‌توانیم، «عمل تفریق» و «عمل ضرب» را با تکیه بر آن تعریف کنیم.

به همین ترتیب در مورد داوری و استدلال هم، به تکیه‌گاههایی نیاز داریم که قابل اثبات نیستند. می‌گوییم «نقطه C را روی پاره خط راست AB و بین دو نقطهٔ A و B انتخاب می‌کنیم». اگر کسی از شما بپرسد: «مگر بین دو نقطه A و B، همیشه می‌توان نقطهٔ دیگری پیدا کرد؟» و شما بخواهید وجود این نقطهٔ سوم را برای او ثابت کنید، در استدلال خود درخواهید ماند. می‌گویید «اگر خط راستی دو ضلع مثلث را قطع کند، یا با ضلع سوم موازی است و یا امتداد ضلع سوم را در نقطه‌ای قطع می‌کند». و کسی از شما می‌پرسد: «مگر نمی‌شود یک خط راست هر سه ضلع مثلث را قطع کند؟» و شما بخواهید ثابت کنید، اگر خط راستی از یک رأس مثلث عبور نکند، نمی‌تواند هر سه ضلع آن را قطع کند، درمانده می‌شوید.

در ریاضیات، مفهومهایی داریم که قابل تعریف نیستند و گزاره‌هایی داریم که باید، درستی یا نادرستی آنها را، براساس تجربهٔ زندگی و بدون استدلال بپذیریم. ولی آیا آنچه را امروز می‌پذیریم، ثابت و جاوانی است؟ اقلیدس در «مقدمات» خود می‌گفت: «هرکُل از جزء خود بزرگتر است» و این، اصلی درست و بی‌عیب، در طول بیش از دو هزار سال به حساب می‌آمد. ولی وقتی ژرژ کانتور (۱۸۴۵ - ۱۹۱۸)، ریاضی‌دان آلمانی، نظریهٔ مجموعه‌ها را ساخت و تعریف دقیقتری، برای برابری تعداد عضوهای دو مجموعه (به ویژه، دو مجموعهٔ نامتناهی) آورد، معلوم شد، این اصل بدیهی و روشن (که هر عقل سلیمی آن را قبول داشت) در مورد مجموعه‌های نامتناهی درست نیست و مثلاً، تعداد عضوهای مجموعهٔ عددهای طبیعی، با تعداد عضوهای مجموعهٔ عددهای فرد، برابر است، در حالی که مجموعهٔ عددهای فرد، زیر مجموعه‌ای یا جزئی از کُل مجموعهٔ عددهای طبیعی است. امروز باید اصل اقلیدس را تغییر داد و به این صورت، تصحیح کرد: «هر کُل از جزء خود بزرگتر است، به شرطی که نامتناهی نباشد».

انسان، هرروز به تجربهٔ خود و در نتیجه به آگاهیهای خود می‌افزاید و در زندگی پیشرفته‌تر خود، نیازهایی پیدا می‌کند که برای پدران او مطرح نبوده‌اند و، به همین مناسبت به ابزارهای تازه، مفهومهای تازه، تعریفها و داوریهای تازه نیاز دارد و این یعنی تکامل علم و تکامل انسان.

اگر گمان کنیم، آنچه از گذشته به ما رسیده، کامل و بی‌نقص است و اگر با دید شک و انتقادی به آن‌چه می‌خوانیم و می‌شنویم، نگاه نکنیم، به معنای این است که نخواسته‌ایم در این راه پرتکاپوی پیشرفت، گامی برداریم و خود را محکوم به توقف و، در نتیجه نیستی کرده‌ایم.

اگر دگرگونیهایی را که در طول تاریخ بشر، در مورد یکی از ساده‌ترین مفهومهای ریاضی، یعنی مفهوم عدد، به وجود آمده است، مطالعه کنیم (و امیدواریم در یکی از بحثهای خود، به آن بپردازیم)، متوجه می‌شویم که با همهٔ ارزش و نبوغی که مثلاً ارشمیدس داشته است، ما خیلی بیشتر، بهتر و دقیقتر از او، عدد را می‌شناسیم و، به همین ترتیب است، دگرگونیهایی که در مفهوم حد یا مفهوم تابع پدید

آمده است.

چهارم، به این دلیل که حتی ریاضیدانان بزرگ هم دچار اشتباه می‌شوند. پیرفرما (۱۶۰۱ - ۱۶۶۱)، ریاضیدان فرانسوی، گمان می‌کرد عدد $۲^{۲^n} + ۱$ ، به ازای هر مقدار درست و غیر منفی n ، عددی اول است. او استدلال خود را شرح نداده است، ولی گمان می‌رود، به شیوهٔ استقرایی، برای چند عدد نخستین آزمایش کرده باشد:

$$n = ۰ \Rightarrow ۲^{۲^n} + ۱ = ۲^{۲^۰} + ۱ = ۲^۱ + ۱ = ۳ ;$$

$$n = ۱ \Rightarrow ۲^{۲^n} + ۱ = ۲^۲ + ۱ = ۵$$

به همین ترتیب، به ازای $n = ۲$ به عدد ۱۷، به ازای $n = ۳$ به عدد ۲۵۷، به ازای $n = ۴$ به عدد ۶۵۵۳۷ می‌رسیم که همهٔ آنها عددهایی اول‌اند. ولی به ازای $n = ۵$ چطور؟ می‌توان حدس زد که فرما، آزمایش خود را ادامه نداده است و یا در مورد عدد بزرگ $۲^{۳۲} + ۱$ دچار اشتباه شده و گمان کرده است که باید عددی اول باشد. ولی این عدد، بر ۶۴۱ بخش پذیر است. لازم نیست عدد ۲ را به توان ۳۲ برسانیم و با عمل تقسیم قانع شویم که عدد $۲^{۳۲} + ۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است. $۲^{۳۲}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۲^{۳۲} = ۲^{۱۳} \times ۲^{۱۳} \times ۲^{۶} = ۸۱۹۲ \times ۸۱۹۲ \times ۶۴$$

باقی ماندهٔ تقسیم ۸۱۹۲ بر ۶۴۱، برابر ۵۰۰ است، بنابراین باید باقی ماندهٔ تقسیم عدد

$$۵۰۰ \times ۵۰۰ \times ۶۴ = ۲۵۰۰۰ \times ۶۴۰$$

را بر ۶۴۱ پیدا کنیم. باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۵۰۰۰ بر ۶۴۱ برابر ۱ و بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم عدد $۲^{۳۲}$ بر ۶۴۱ برابر ۶۴۰ می‌شود و این، به معنای آن است که $۲^{۳۲}+۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است. فرما اشتباه کرده بود.

برنارداولر (۱۷۰۷ - ۱۷۸۳)، ریاضیدان نامدار سویسی هم، دربارهٔ یکی از کشفهای خود می‌نویسد:

«من هیچ استدلال دیگری جز استقرای طولانی ندارم. آزمایشهای طولانی، برای من شکی در مورد درستی قانون باقی نگذاشته ... و به نظر می‌رسد که وقتی قانونی، مثلاً برای ۲۰ مورد متوالی آن درست باشد، ممکن نیست برای موردهای بعدی نادرست از آب در آید».

ولی در واقع این طور نیست. به ویژه در نظریهٔ عددها، می‌توان به نمونه مسأله‌هایی برخورد که نه تنها برای ۲۰ موردمتوالی، بلکه برای صدها مورد متوالی نتیجه‌ای را تأیید می‌کنند، در حالی که، این نتیجه، در حالت کلی درست نیست. مثلاً تا مدتها گمان می‌کردند عدد $۹۹۱n^۲ + ۱$، به ازای عددهای طبیعی n، هرگز برابر با مجذور کامل یک عدد درست نمی‌شود. حتی اگر این مسأله را به کامپیوتر بدهید و با طرح برنامهٔ مناسب، از آن بخواهید، با آزمایش عددهای طبیعی متوالی، نخستین عددی را پیدا کند که، به ازای آن، $۹۹۱n^۲ + ۱$ مجذور کامل باشد، به زودی به جواب نمی‌رسد. می‌دانید چرا؟ برای این که، کوچکترین عدد n ، در این مورد، یک عدد ۲۹ رقمی است. این عدد n ، چنین است:

$$n = ۱۲۰۵۵۷۳۵۷۹۰۳۳۱۳۵۹۴۴۷۴۴۲۵۳۸۷۶۷$$

هر عدد طبیعی دیگری که کوچکتر از این عدد n باشد، عبارت $۹۹۱n^۲ + ۱$ را مجذور کامل نمی‌کند.

آزمایش و روش استقرایی در دانشهای تجربی، نقش بزرگی به عهده دارد، ولی در ریاضیات، تنها می‌تواند وسیله‌ای برای حدس و گمان باشد. برای این که به درستی حکمی قانع شویم، باید با استدلال به آن برسیم. کارهای فرما، اولر و دیگران نشان داد که، در ریاضیات، نمی‌توان روش استقرایی رابه همان صورت عادی خود، مورد استفاده قرار داد. لازم بود تغییری در این روش داده شود تا بتواند در ریاضیات هم کاربرد داشته باشد. ما امروز، این روش را می‌شناسیم: روش استقرای ریاضی. کسانی که بیش از همه برای یافتن این روش تلاش کردند، بلز پاسکال (۱۶۲۳ - ۱۶۶۲)، رنه‌دکارت (۱۵۹۶

۱۶۵۰) و ژاکوب برنولی (۱۶۵۴ - ۱۷۰۵) بودند.

به اشتباه دیگری از یک ریاضیدان بزرگ اشاره می‌کنیم. فوریه (ژان باتیست ژوزف، ۱۷۶۸ - ۱۸۳۰)، ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی، در کتاب «نظریهٔ تحلیلی گرما» (۱۸۲۹) مقدار

$$S = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \cdots$$

را برابر $\frac{۱}{۲}$ دانسته است. دو استدلال برای اثبات «درستی» این حکم می‌توان آورد. می‌دانیم، برای $|x| < ۱$ داریم:

$$۱ + x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + \cdots = \frac{۱}{۱-x}$$

(سمت چپ برابری، مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی نامتناهی با قدر نسبت $-۱<x<۱$ و سمت راست برابری، حد مجموع آن است؛ در ضمن، با تقسیم ۱ بر $x - ۱$ هم می‌توان، به‌طور مستقیم، به عبارت سمت راست رسید). اگر در این برابری $x= -۱$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - \cdots = \frac{۱}{۲}$$

در استدلال دوم، می‌توان S را این طور نوشت:

$$S = ۱-(۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \cdots) = ۱ - S \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}$$

ولی، این نتیجه‌گیری نادرست است، زیرا S، رشته‌ای متباعد است و حدی ندارد. برناردبولتسانو (۱۷۸۱ - ۱۸۴۸)، فیلسوف و ریاضیدان چك، برای رد نظر فوریه، مقدار S را به‌دو گونهٔ دیگر به دست آورد:

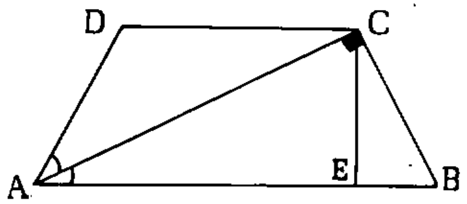
$$۱)\ S = (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + \cdots = ۰$$

$$۲)\ S = ۱ - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - \cdots = ۱$$

که اگر آنها را بپذیریم، باید به ناچار پذیرفت: $\frac{۱}{۲} = ۱ = ۰$

پنجم، به این دلیل که گاهی شکل ما را فریب می‌دهد. دیدید که چگونه «استدلال» فوریه را فریب داد؛ اکنون به این مسأله و حل آن توجه کنید (در «آشنایی با ریاضیات» شماره ۳۲، نمونه‌های دیگری از این نوع مسأله‌ها را می‌توانید پیدا کنید):

مسأله. مساحت ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که بر دایره‌ای به شعاع برابر R محیط شده است، به شرطی که بدانیم، یکی از زاویه‌های مجاز به قاعدهٔ آن برابر ۶۰ درجه است؛ در ضمن، قطری از ذوزنقه که از رأس این زاویه می‌گذرد، زاویه را نصف می‌کند و بر یکی از ساقهای ذوزنقه عمود است.



حل. با توجه به صورت مسأله و با توجه به شکل داریم:

$$\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = ۳۰^\circ ,\ \widehat{ACB} = ۹۰^\circ$$

در ضمن $|CE| = ۲R$ ، زیرا در هر ذوزنقه‌ای که بر دایره‌ای محیط باشد، طول ارتفاع برابر با قطر دایره است.

در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ضلع BC روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه و برابر نصف طول وتر AB است، یعنی

$$|AB|^۲ = \left(\frac{|AB|}{۲}\right)^۲ + |AC|^۲ \qquad (۱)$$

ولی $|AC| = ۴R$ ، زیرا در مثلث قائم الزاویهٔ AEC ، ضلع CE رو به رو زاویهٔ ۳۰ درجه و بنابراین، برابر نصف وتر، یعنی AC است. در نتیجه از (۱) به دست می‌آید:

$$\frac{۳|AB|^۲}{۴} = ۱۶R^۲ \Rightarrow |AB| = \frac{۸R\sqrt{۳}}{۳}$$

مثلث ACD متساوی الساقین است، زیرا زاویهٔ DCA با زاویهٔ CAB (که برابر ۳۰ درجه است) برابر است. به این ترتیب $|DC| = |AD|$. اگر از رأس D ، ارتفاع ذوزنقه را (که برابر ۲R است) رسم کنیم و آن را DF بنامیم، از مثلث قائم الزاویهٔ ADF به سادگی به دست می‌آید: $|AD| = |CD| = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. با در دست داشتن طولهای دو قاعده و طول ارتفاع ذوزنقه، مساحت آن به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{8R\sqrt{3}}{3} + \frac{4R\sqrt{3}}{3}\right) \circ 2R = 4R^2\sqrt{3}$$

مسأله حل شد؛ مساحت ذوزنقه به دست آمد؛ مسألهٔ ساده‌ای بود. در ضمن، وقتی مسأله را حل می‌کردیم، همهٔ داده‌های مسأله مورد استفادهٔ ما قرار گرفت: محیطی بودن ذوزنقه (آن جاکه ارتفاع ذوزنقه را برابر ۲R گرفتیم)، $\hat{A} = 60°$ ، $[AC] \perp [BC]$ ؛ همچنین قطر AC را نیمساز زاویهٔ به حساب آوریم. مشکل خاصی وجود ندارد. مسأله به سادگی حل شد.

ولی اگر اندکی دقت کنیم، معلوم می‌شود، مساحت شکلی را به دست آورده‌ایم که در واقع، وجود ندارد. از آن جاکه چهار ضلعی محیطی است، باید داشته باشیم:

$$|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$$

و چون $|AD| = |CD|$ ، پس $|BC| = |AB|$ ، یعنی باید در مثلث قائم الزاویه ABC، طول وتر با طول یکی از دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه برابر باشد و این، ممکن نیست. شکل ما را فریب داده بود.

□

گمان می‌کنم همین نمونه‌های کوتاه ولی آموزنده، کافی باشد تا به درستی سخنان بودا و دکارت پی ببریم. بیش از هر چیز به اندیشه و خرد خود اعتماد کنید و آن چه را می‌بینید و می‌شنوید، با محک اندیشه و خرد و دانش خود بسنجید، خودتان آزمایش کنید، خودتان استدلال کنید، دربارهٔ واژه‌ها، تعریفها، مفهومها، استدلالها و شکلها بیندیشید. از خودتان بپرسید: «آیا شکل را درست رسم کرده‌ام؟» ، «آیا در این تعریف یا این استدلال نقصی وجود ندارد؟» ، «آیا راهی برای آزمایش درستی جواب وجود دارد؟» ، «آیا ممکن است مثالی پیدا کرد که حکم واستدلال ما را نقض کند؟» ، «آیا...».

مقاله را با سخن ابونصر فارابی ، ریاضیدان، فیلسوف، منجم و روش‌شناس بزرگ ایرانی که در سده‌های سوم و چهارم هجری قمری می‌زیسته، از مقدمهٔ «کتاب بزرگ موسیقی» او پایان می‌دهیم:

«برای این که اندیشمند خوبی در تنظیم نظریه‌ها باشیم، بدون این که ارتباطی به دانش ویژه‌ای داشته باشد، باید سه شرط را داشته باشیم: ۱) همهٔ قاعده‌ها را به خوبی بدانیم؛ ۲) توانایی نتیجه گیریهای ضروری را، از این قاعده‌ها و از داده‌هایی که در این دانش وجود دارد، داشته باشیم؛ ۳) توانایی پاسخگویی به نظریه‌های نادرست را داشته باشیم و بتوانیم اندیشه‌ها و دیدگاههای دیگران را تجزیه و تحلیل کنیم، درست را از نادرست جدا و اشتباهها را اصلاح کنیم.»

تا بعد

ادب ریاضی

زبان ریاضیات دشوار ولی فناناپذیر است. من گمان نمی‌کنم هیچ یک از محققین کنونی در ادب یونانی بتواند لطایف نهفته در دیالوگهای افلاطون یا طنزهای آریستو فانس را بدان تمامی و کمال که یک ریاضیدان هر معنی و مقصودی را در کارهای ارشمیدس می‌فهمد درک کند.

م. ه. ا. نیومن

دکتر غلامحسین مصاحب

تئوری مقدماتی اعداد

هندســـه تحلیـــلی

(قسمت اول ـ تا معادلهٔ صفحه)

محمد عابدی

مورد استفاده دانش‌آموزان چهارم ریاضی

۱ـ مختصات فضایی

کنج سه وجهی سه‌قائمه $(Ox\ ,\ Oy\ ,\ Oz)$ یاکنج سه قائمه $O\ xyz$ و $(x\hat{o}y = y\hat{o}z = z\hat{o}x = 90^\circ)$ را در نظر گرفته‌نقطه O را مبدأ مختصات و Ox و Oy و Oz رامحورهای مختصات می‌نامند. سه وجهی Oxyz را مستقیم نامند هـر گاه بیننده‌ای درروی محور Oz بایستد به‌طوری که پایش درنقطه O و سرش به طرف z باشد، چون Ox را نگاه‌کند Oy را در سمت چپ خود ببیند .

اگر نقطه‌ای مانند M درفضا درنظر بگیریم وازنقطه M صفحاتی بر Ox (صفحه MHPA) و بر Oy (صفحه MHQB) و بر oz (صفحه MARB) عمودنماییم دراین‌صورت اندازه‌های جبری $\overline{OP}$ و $\overline{OQ}$ و $\overline{OR}$ رابه ترتیب طول وعرض‌وارتفاع نقطهٔ M نامند وچنین‌نمایش می‌دهند :

$$M(\overline{OP} = x\ ,\ \overline{OQ} = y\ ,\ \overline{OR} = z)$$

ضمناً اگر بردارهای یکه‌محورهای xها و yها و zها رابه ترتیب

$$\vec{k}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{i}$$

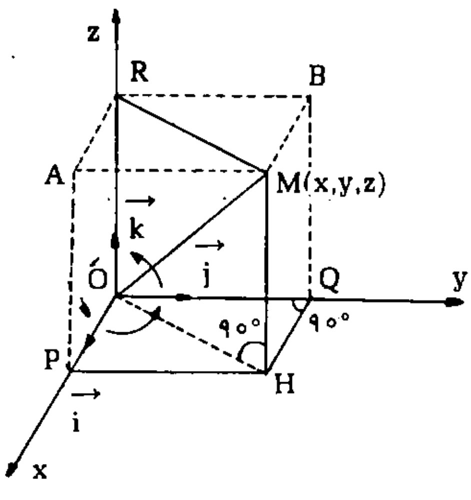
درنظر بگیریم ($\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهایی‌می‌باشند به ترتیب‌در روی xها و yها و zها به طولهای واحد وجهت مثبت آنهادر جهت مثبت محورها می‌باشد) داریم:

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OQ} = y\vec{j}\ ,\ \overrightarrow{OR} = z\vec{k}$$

از طرفی $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OR}$ و نیز در متوازی OPHQ داریم $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ پس:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} =$$

$$\boxed{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$



شکل ۱

با توجه‌به شکل(۱) $OR = HM$ یعنی‌ارتفاع نقطه M اندازه جبری‌فاصله نقطه M ازصفحه xy (یعنی $\overline{HM}$) و چون

$$PH = Q = AM$$

می‌باشد بنابراین عرض نقطه M برابر است با اندازه جبری فاصله نقطه M ازصفحه xz (یعنی $\overline{AM}$) و نیز چون

$$OP = HQ = MB$$

می‌باشد پس طول نقطه M برابر است با اندازه جبری فاصله نقطه M ازصفحه yz (یعنی $\overline{MB}$) و برای به‌دست آوردن طول و عرض و ارتفاع نقطه M ازنقطه M عمود HM را برصفحه xy فرود آورده وازنقطه H خطوط HQ و HP را به‌موازات محورهای yها و xها رسم نموده داریم:

$$M(\overline{OP} = x\ ,\ \overline{OQ} = y\ ,\ \overline{HM} = z)$$

۲- محاسبه‌اندازه یک‌بردار برحسب تصاویر آن‌بردار

با توجه به شکل(۱) چون‌تصویر نقطه M روی‌محورهای xها و yها و zها به ترتیب P و Q و R می‌باشد بنابراین تصویر بردار $\overrightarrow{OM}$ روی محورها به ترتیب x و y و z است وچون خط HM برصفحه xy عمود است پس برکلیه خطوط صفحه منجمله برخط OH عمود بوده ومثلث OHM در زاویه $\hat{H}$ قائمه می‌باشدبنابراین $OM^2 = OH^2 + HM^2$ ازطرفی در مثلث قائم‌الزاویه OHQ ($\hat{Q} = 90°$) داریم:

$$OH^2 = OQ^2 + QH^2$$

پس:

$$OM^2 = OH^2 + HM^2 = OQ^2 + QH^2 + HM^2$$
$$\Longrightarrow OM^2 = OQ^2 + OP^2 + HM^2 = y^2 + x^2 + z^2$$

اگر اندازه بردار $\overrightarrow{OM}$ رابه‌صورت $|\overrightarrow{OM}|$ نشان‌دهیم‌داریم:

$$\boxed{|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

بخصوص اگر $A(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)$ و $B(x_2\ ,\ y_2\ ,\ z_2)$ باشد تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\ ,\ z_2 - z_1)$$

بوده و اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است با:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال ۱ : مطلوب‌است معادله‌کره‌ای‌که مرکزش نقطه $C(\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma)$ بوده وشعاعش R می‌باشد.

حل : نقطه‌$M(x, y, z)$ ازکره‌را درنظر گرفته داریم:

$$CM = R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2}$$

بخصوص اگرمبدأ مختصات برمرکز کره منطبق باشد معادله‌کره‌به صورت $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ می‌باشد.

مثال ۲ : اگرنقاط $A(1, 2, 3)$ و $B(-3, 0, 5)$ باشد معادله‌مکان هندسی‌نقاطی‌را بیابیدکه از آن نقاط پاره خط AB به زاویهٔ قائمه رؤیت‌شود.

حل : این مکان کره‌ای‌است‌به قطر AB زیرا اگر از قطر AB صفحه دلخواهی مرور دهیم این صفحه‌کره را در دایره عظیمه‌ای قطع نموده و اگر نقطه M را روی این دایره در نظربگیریم زاویه محاطی $A\hat{M}B$ که روبروی‌قطرمی‌باشد قائمه است و چون C مرکزکره وسط پاره خط AB است داریم:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1$$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+0}{2}=1$$

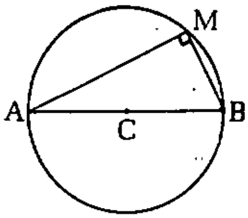
$$z_C=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{3+5}{2}=4$$

$$C(\alpha=-1\ ,\ \beta=1\ ,\ \gamma=4)$$

$$CA=R=\sqrt{(1+1)^2+(2-1)^2+(3-4)^2}$$
$$=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

معادله کره : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

$$\Rightarrow \boxed{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=6}$$

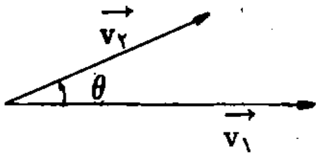


شکل ۲

۳ـ حاصلضرب داخلی دو بردار

مطابق تعریف حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ عددی است جبری که آن را به صورت $\vec{V_1}\circ\vec{V_2}$ نمایش داده و اندازه آن برابر است با اندازه بردار $\vec{V_1}$ ضرب در اندازه بردار $\vec{V_2}$ ضرب در کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$. اگر اندازه بردار $\vec{V}$ را به صورت $|\vec{V}|$ نمایش دهیم داریم: (شکل ۳)

$$\vec{V_1}\circ\vec{V_2}=|\vec{V_1}|\ |\vec{V_2}|\cos\theta$$



شکل ۳

۴ـ خواص حاصلضرب داخلی دو بردار

۱ـ می‌دانیم اگر $(\widehat{\vec{V_1}\ ,\ \vec{V_2}})=\theta$ باشد آنگاه

$$(\widehat{\vec{V_2}\ ,\ \vec{V_1}})=-\theta$$

بوده از طرفی چون $\cos(-\theta)=\cos\theta$ است داریم:

$$\vec{V_1}\circ\vec{V_2}=|\vec{V_1}|\ |\vec{V_2}|\cos\theta \qquad (1)$$

$$\vec{V_2}\circ\vec{V_1}=|\vec{V_2}|\ |\vec{V_1}|\cos(-\theta) \qquad (2)$$

با مقایسه روابط ۱ و ۲ $\Longrightarrow \boxed{\vec{V_1}\circ\vec{V_2}=\vec{V_2}\circ\vec{V_1}}$

یعنی حاصلضرب داخلی دو بردار دارای خاصیت جابجایی می‌باشد.

۲ـ اگر دو بردار برهم عمود باشند یعنی

$$\cos\theta=\cos 90^\circ=0$$

در نتیجه $\vec{V_1}\circ\vec{V_2}=0$ و یا اگر اندازه یکی از بردارها صفر باشد $\vec{V_1}\circ\vec{V_2}=0$ است به عبارت دیگر حاصلضرب داخلی دو بردار وقتی صفر است که یا دو بردار برهم عمود باشند و یا آنکه اندازه یکی از بردارها صفر باشد برعکس اگر حاصلضرب داخلی دو بردار صفر باشد یا دو بردار برهم عمودند و یا اندازه یکی از بردارها صفر است.

۳ـ بردار $\vec{V_2}$ را مطابق شکل (۴) روی بردار $\vec{V_1}$ تصویر

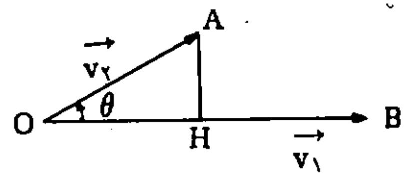
می‌کنیم و این تصویر را $\overline{OH}$ فرض می‌کنیم. درمثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$$\overline{OH}=OA\cos\theta \Longrightarrow \overline{OH}=|\vec{v}_2|\cos\theta$$

$$\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\cos\theta=|\vec{v}_1|\overline{OH}$$

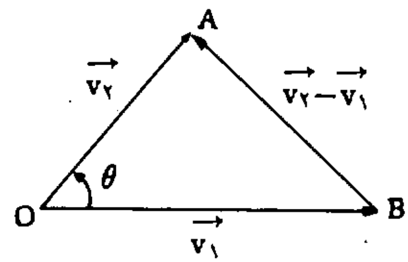
= (تصویر بردار $\vec{v}_2$ روی بردار $\vec{v}_1$) × (اندازه‌بردار $\vec{v}_1$)

یعنی حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ برابر است با اندازه یکی از بردارها ضرب در تصویر بردار دیگر روی آن بردار.



شکل ۴

۵ - محاسبه حاصلضرب داخلی دو بردار برحسب تصاویر آنها



شکل ۵

مطابق تعریف داریم:

$$\vec{v}_2-\vec{v}_1=\vec{BA} \quad \text{یا} \quad \vec{OA}-\vec{OB}=\vec{BA}$$

از طرفی طبق رابطه کسینوسها در مثلث OAB داریم: (شکل۵)

$$(1)\quad BA^2=OA^2+OB^2-2OAOB\cos\theta$$

اگر بردار $\vec{v}_1$ به تصاویر (a_1,b_1,c_1) و بردار $\vec{v}_2$ به‌تصاویر (a_2,b_2,c_2) باشد در این‌صورت

$$\vec{BA}=\vec{v}_2-\vec{v}_1=(a_2-a_1\ ,\ b_2-b_1\ ,\ c_2-c_1)$$

بوده و می‌دانیم :

$$OA=|\vec{v}_1|=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$$

$$OB=|\vec{v}_2|=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$$

$$BA=|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=$$

$$\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

$$OA\cdot OB\cos\theta=|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\cos\theta=\vec{v}_1\circ\vec{v}_2$$

اگر این مقادیر را در رابطه (۱) قرار دهیم داریم:

$$(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2=$$

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)+(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-$$

$$2\vec{v}_1\circ\vec{v}_2 \Longrightarrow a_2^2+a_1^2-2a_2a_1+b_2^2+$$

$$b_1^2-2b_2b_1+c_2^2+c_1^2-2c_2c_1=$$

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-2\vec{v}_1\circ\vec{v}_2 \Longrightarrow$$

$$-2a_1a_2-2b_1b_2-2c_1c_2=$$

$$-2\vec{v}_1\circ\vec{v}_2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}$$

تبصره ۱ : با توجه به رابطه

$$\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

اگر $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ باشد یا بردار $\vec{v}_1$ بر بردار

$\vec{v_2}$ عموداست و یا اندازه یکی‌از بردارها صفرمی‌باشد.

تبصره ۲: بردار $\vec{N}(a,b)$ برخط d به معادله

$$ax+by+c=0$$

عمود است.

اثبات: دونقطه $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ را روی خط (d) درنظر گرفته داریم:

$$\overrightarrow{P_1P_2}(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1)$$

$$\vec{N}\circ\overrightarrow{P_1P_2}=a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1) \qquad (1)$$

چون نقاط P_1 و P_2 روی‌خط (d) می‌باشند پس‌مختصات این نقاط در معادله‌خط (d) صدق می‌کند یعنی:

$$\begin{cases}ax_1+by_1+c=0\\ ax_2+by_2+c=0\end{cases} \xrightarrow{\text{دورابطه‌را ازهم‌کم‌می‌کنیم}}$$

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0$$

با توجه به رابطه (۱) لازم می‌آید که

$$\vec{N}\circ\overrightarrow{P_1P_2}=0$$

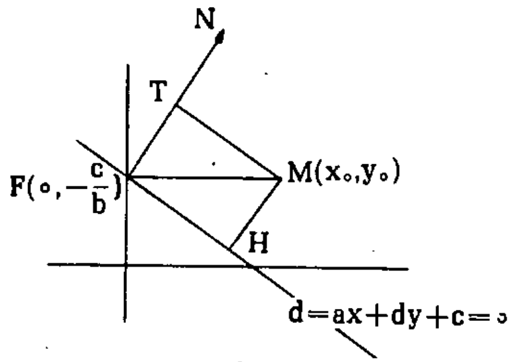
باشد و چون اندازه بردار $\vec{N}$ و اندازه بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ مخالف صفراست پس بردار $\vec{N}$ بربردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ عمودمی‌باشد.

تبصره ۳: محاسبه فاصله نقطه $M(x_0,y_0)$ ازخط d به معادله $ax+by+c=0$ محل برخورد خط d با محورها y را نقطه F فرض‌کرده چون $x_F=0$ است پس

$$ax+by+c=0 \text{ یا } ay+c=0 \text{ یا } y=\frac{-c}{b}$$

بنابراین $F\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ و

$$\overrightarrow{FM}\left(x_M-x_F=x_0\ ,\ y_M-y_F=y_0+\frac{c}{b}\right)$$



شکل ۶

می‌باشد بردار $\vec{N}$ که باتوجه به شکل(۶) برخط d عمود است مطابق تبصره (۲) می‌تواند تصاویرش (a , b) انتخاب شود، داریم:

$$(1) \quad \vec{N}\circ\overrightarrow{FM}=$$

$$|\vec{N}|\times(\text{تصویر بردار } \overrightarrow{FM} \text{ روی بردار } \vec{N})=$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\times\overline{FT}=\sqrt{a^2+b^2}\times\overline{HM}$$

وطبق محاسبه‌حاصلضرب‌داخلی دو بردار برحسب‌تصاویرداریم:

$$(2) \quad \vec{N}\circ\overrightarrow{FM}=ax_0+b\left(y_0+\frac{c}{b}\right)=$$

$$ax_0+by_0+c$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{a^2+b^2}\times\overline{HM}=ax_0+by_0+c \implies$$

$$\boxed{|\overrightarrow{HM}|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

۶ـ محاسبه‌کسینوس زاویه بین دوبردار

$\vec{v_1}(a,b,c)$ و $\vec{v_2}(a',b',c')$

حل : می‌دانیم

$$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 = aa'+bb'+cc' = |\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\cos\theta =$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}\cos\theta \Longrightarrow$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}}$$

۷ـ خاصیت پخشی ضرب داخلی بردارها

نشان دهید:

$$\vec{v}_1 \circ (\vec{v}_2+\vec{v}_3) = \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \circ \vec{v}_3$$

اثبات: فرض می‌کنیم

$\vec{v}_1(a,b,c)$ و $\vec{v}_2(a',b',c')$ و $\vec{v}(a'',b'',c'')$

باشد ،بنابراین

$$\vec{v}_2+\vec{v}_3(a'+a'',\ b'+b'',\ c'+c'')$$

می‌باشد و طبق قضیه حاصلضرب داخلی دو بردار برحسب تصاویرشان داریم :

$$\vec{v}_1 \circ (\vec{v}_2+\vec{v}_3) =$$

$$a(a'+a'')+b(b'+b'')+c(c'+c'') =$$

$$(aa'+bb'+cc')+(aa''+bb''+cc'') =$$

$$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \circ \vec{v}_3 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_1 \circ (\vec{v}_2+\vec{v}_3) = \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \circ \vec{v}_3}$$

حال حاصلضرب $(\vec{v}_1+\vec{v}_2) \circ \vec{v}_3$ را حساب می‌کنیم. چون حاصلضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد پس:

$$(\vec{v}_1+\vec{v}_2) \circ \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \circ (\vec{v}_1+\vec{v}_2) =$$

$$\vec{v}_3 \circ \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \circ \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \circ \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \circ \vec{v}_3$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\vec{v}_1+\vec{v}_2) \circ \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \circ \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \circ \vec{v}_3}$$

و نیز داریم:

$$(\vec{v}_1+\vec{v}_2) \circ \underbrace{(\vec{v}_3+\vec{v}_4)}_{\vec{v}} = (\vec{v}_1+\vec{v}_2) \circ \vec{v} =$$

$$\vec{v}_1 \circ \vec{v} + \vec{v}_2 \circ \vec{v} =$$

$$\vec{v}_1 \circ (\vec{v}_3+\vec{v}_4) + \vec{v}_2 \circ (\vec{v}_3+\vec{v}_4) =$$

$$\boxed{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_3 + \vec{v}_1 \circ \vec{v}_4 + \vec{v}_2 \circ \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \circ \vec{v}_4}$$

تبصره ۴ : به سادگی می‌توان بررسی کرد

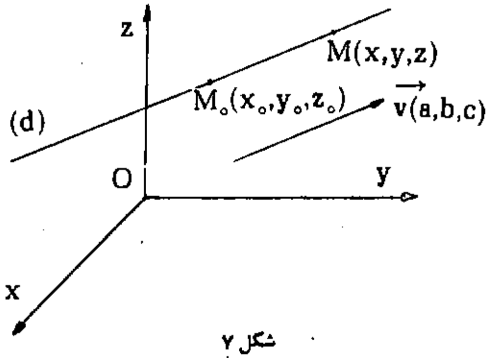
$$\boxed{a(b\vec{v}) = ab\vec{v}}$$

$$\boxed{a(\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2) = (a\vec{v}_1) \circ \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \circ (a\vec{v}_2)}$$

$$\boxed{a(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = a\vec{v}_1 + a\vec{v}_2}$$

۸ـ معادله یک خط در فضا

بردار $\vec{v}(a,b,c)$ را موازی باخط (d) و یا منطبق برخط (d) در نظر گرفته aوbوc را پارامترهای هادی خط (d) نامند.



شکل ۷

طبق (شکل ۷) بردار

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0\ ,\ y-y_0,\ z-z_0)$$

بوده وچون بردار $\overrightarrow{M_0M}$ موازی بردار $\vec{v}$ می‌باشد پس مطابق تعریف دو بردار موازی $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{v}$ این رابطه را روی محورها تصویر نموده داریم:

$$x-x_0=ta\ ,\ y-y_0=tb\ ,\ z-z_0=tc$$

$$\Longrightarrow \frac{x-x_0}{a}=t\ ,\ \frac{y-y_0}{b}=t\ ,\ \frac{z-z_0}{c}=t$$

$$\Longrightarrow d \overset{\text{به معادله}}{=\!=\!=} \boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

معادله بالا را معادله کانونیك خط (d) نامند و معادلات زیر را معادلات پارامتری خط d نامند.

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

۹ـ کسینوسهای هادی یك خط

کسینوس زوایایی که خط (d) با محورهای مختصات می‌سازند کسینوسهای هادی خط (d) نامند. فرض می‌کنیم برداری ازخط (d) به صورت $\vec{v}(a,b,c)$ باشد بنابراین a و b و c پارامترهای هادی خط (d) می‌باشند. ازطرفی بردارهای یکه

$$\vec{i}(1,0,0)\ ,\ \vec{k}(0,0,1)\ ,\ \vec{j}(0,1,0)$$

را درنظر گرفته حاصلضرب داخلی بردار $\vec{v}$ با این بردارهای یکه را نوشته داریم:

$$\vec{v}\circ\vec{i}=|\vec{v}|\,|\vec{i}|\cos\underbrace{(\widehat{\vec{v},\vec{i}})}_{\alpha'}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1\times\cos\alpha'=$$

$$a\times 1+b\times 0+c\times 0=a$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\alpha'=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\alpha}$$

$$\vec{v}\circ\vec{j}=|\vec{v}|\,|\vec{j}|\cos\underbrace{(\widehat{\vec{v},\vec{j}})}_{\beta'}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1\times\cos\beta'=$$

$$a\times 0+b\times 1+c\times 0=b$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\beta'=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\beta}$$

$$\vec{v}\circ\vec{k}=|\vec{v}|\,|\vec{k}|\cos\underbrace{(\widehat{\vec{v},\vec{k}})}_{\gamma'}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1\times\cos\gamma'=$$

$$a\times 0+b\times 0+c\times 1=c$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\gamma'=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\gamma}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1 \implies$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \implies \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=1$$

یعنی بردار $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ برداریکه بردار $\vec{v}(a,b,c)$ می‌باشد،
پس:

$$\vec{u}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}=$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{i}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{j}+$$

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{k}$$

$$\implies \vec{u}=\frac{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\boxed{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

بردار $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ را سوی بردار $\vec{v}$ می‌نامند.

مثال ۱ : a و b را چنان بیابیدکه بردارهای

$$\vec{v}_1(3,6,a)\ ,\ \vec{v}_2(2,b,4)$$

موازی باشند.

حل : چون دوبردار موازی‌اند پس :

$$\vec{v}_2=k\vec{v}_1$$

این تساوی‌را روی محورها تصویر نموده داریم:

$$2=3k\ ,\ b=6k\ ,\ 4=ak \implies$$

$$\frac{2}{3}=\frac{b}{6}=\frac{4}{a} \implies 12=3b \implies \boxed{b=4}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{a} \implies 2a=12 \implies \boxed{a=6}$$

یا می‌توانیم بگوییم اگر دو بردار

$$\vec{v}_1(a,b,c)\ ,\ \vec{v}_2(a',b',c')$$

موازی باشند:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \implies \frac{3}{2}=\frac{6}{b}=\frac{a}{4} \implies$$

$$\boxed{b=4\ ,\ a=6}$$

مثال ۲ : نشان‌دهید زاویه بین دوبردار

$$\vec{v}_1(1,2,1)\ ,\ \vec{v}_2(2,1,-1)$$

دوبرابر زاویه بین دوبردار

$$\vec{A}(1,4,1)\ ,\ \vec{B}(2,5,5)$$

می‌باشد.

حل :

$$\cos(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$$=\frac{(1)(2)+(2)(1)+(1)(-1)}{\sqrt{1+4+1}\times\sqrt{4+1+1}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \implies$$

$$(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})=\frac{\pi}{3}\ ,\ \cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})=$$

$$\frac{(1)(2)+(4)(5)+(1)(5)}{\sqrt{1+16+1}\times\sqrt{4+25+25}}=$$

$$\frac{27}{\sqrt{18}\times\sqrt{3\times18}}=\frac{27}{18\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$(\widehat{\vec{A},\vec{B}})=\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

$$\boxed{(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})=2(\widehat{\vec{A},\vec{B}})}$$

مثال ۳ : به ازای چه مقدار m بردارهای

$\vec{v}_1(2,3,4)$, $\vec{v}_2(a,-1,3a)$

برهم عمودند؟

حل :

$$\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=2(a)+3(-1)+4(3a)=0\Rightarrow$$

$$2a-3+12a=0\Rightarrow\boxed{a=\frac{3}{14}}$$

مثال ۴ : اگر دو بردار

$\vec{v}_1(2,a,b)$, $\vec{v}_2(4,c,1)$

همسنگ‌باشند a و b و c کدام است؟

حل :

$$\vec{v}_1=\vec{v}_2\Rightarrow\frac{4}{2}=\frac{a}{c}=\frac{1}{b}\Rightarrow 2=\frac{1}{b}\Rightarrow$$

$\boxed{b=\frac{1}{2}}$ و $2=\frac{a}{c}\Rightarrow a=2c$ و

$$|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|\Rightarrow$$

$$\sqrt{4+a^2+b^2}=\sqrt{16+c^2+1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{4+4c^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{17+c^2}$$

$$\Rightarrow 4+4c^2+\frac{1}{4}=7+c^2\Rightarrow$$

$$3c^2=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}\Rightarrow c^2=\frac{11}{3\times4}\Rightarrow$$

$$c^2=\frac{33}{9\times4}\Rightarrow\boxed{c=\pm\frac{\sqrt{33}}{6}}$$

$$\Rightarrow a=2c\Rightarrow\boxed{a=\pm\frac{\sqrt{33}}{3}}$$

مثال ۵ : زاویه‌بین خط (d) به معادله

$$x=1+t\ ,\ y=-1+\sqrt{3}t\ ,\ z=2\sqrt{3}t$$

و محورzها کدام است؟

حل :

$$x-1=t\ ,\ y+1=\sqrt{3}t\ ,\ z=2\sqrt{3}t\Rightarrow$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{\sqrt{3}}=\frac{z}{2\sqrt{3}}=t$$

پارامترهای هادی‌خط (d) عبارتنداز:

$$a=1\ ,\ b=\sqrt{3}\ ,\ c=2\sqrt{3}$$

بنابراین :

$$\gamma=\cos\hat{\gamma}'=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3+12}}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos\gamma'=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\boxed{\gamma'=\frac{\pi}{6}}$$

. توجه‌کنید ضرایب t پارامترهای هادی خط می‌باشند.

مثال ۶ : آیا برداری وجود دارد که با محورها زوایای °۱۲۰ و °۶۰ و °۴۵ بسازد؟

حل :

$$\alpha = \cos\alpha' = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = \cos\beta' = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \Longrightarrow$$

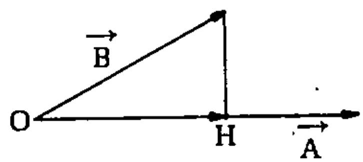
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$$

بنابراین چنین برداری وجود دارد.

مثال ۷ : بردارهای

$$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{A} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

مفروض‌اند. مطلوب است تعیین بردار تصویر $\vec{B}$ روی بردار $\vec{A}$.



شکل ۸

حل :

$$(\text{بردار یکه } \vec{A})\ \vec{u} = \frac{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$$\frac{6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\overline{OH} = \text{تصویر بردار } \vec{B} \text{ روی بردار } \vec{A} =$$

$$|\vec{B}|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \sqrt{4+1+9} \times$$

$$\frac{(6)(2)+(-3)(1)+(2)(-3)}{\sqrt{4+1+9} \times \sqrt{36+9+4}} =$$

$$\frac{12-3-6}{7} = \frac{3}{7} \text{ و } \overrightarrow{OH} = \frac{3}{7}\vec{u} =$$

$$\frac{3}{7}\left(\frac{6}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}\right).$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{OH} = \frac{18}{49}\vec{i} - \frac{9}{49}\vec{j} + \frac{6}{49}\vec{k}}$$

توجه داشته‌باشید از این موضوع استفاده کردیم که هر بردار در روی هرمحور برابر است با اندازه جبری آن بردار در بردار یکه محور یعنی:

$$\boxed{\overrightarrow{OH} = \overline{OH}\,\vec{u}}$$

مثال ۸ : اگر نیروی $\vec{F} = 5\vec{i} - 3\vec{k}$ برمتحرکی اثر کند و آن‌را از نقطه $A_1(4,1,3)$ تا نقطه $A_2(-5,6,2)$ تغییر مکان دهد مطلوب‌است کار انجام شده این نیرو .

حل : می‌دانیم اگر بردار نیرو $\vec{F}$ و بردار تغییرمکان $\vec{l}$ باشد کار این‌بردار نیرو برابراست با :

$$W = \vec{F} \circ \vec{l} = |\vec{F}|\,|\vec{l}|\cos\theta$$

$$\vec{l} = \overrightarrow{A_1A_2}(-5-4\ ,\ 6-1\ ,\ 2-3)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{A_1A_2}(-9\ ,\ 5\ ,\ -1)$$

$$W = \vec{F} \circ \overrightarrow{A_1A_2} =$$

$$(-9)(5)+(5)(-3)+(-1)(0) = -45-15$$

$$\Longrightarrow \boxed{W = -60}$$

مثال ۹ : اگر بردار $\vec{A} = 12\vec{i} + 9\vec{j} - 5\vec{k}$ و بردار

$$\vec{B}=4\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$$

باشد مقدار c را چنان بیابید که بردار

$$\vec{B}-c\vec{A}$$

بر بردار $\vec{A}$ عمود باشد.

حل: چون بردار $\vec{B}-c\vec{A}$ بر بردار $\vec{A}$ عمود می‌باشد پس حاصلضرب داخلی آنها صفر است:

$$(\vec{B}-c\vec{A})\circ\vec{A}=\vec{B}\circ\vec{A}-c\vec{A}\circ\vec{A}=$$

$$(4)(12)+(-3)(9)+(-5)(-5)$$

$$+c[(12)(12)+(9)(9)+(-5)(-5)]=$$

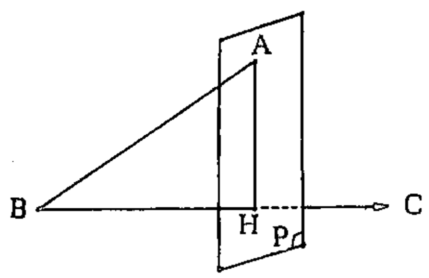
$$48-27+25+c(144+81-25)=0$$

$$\Longrightarrow 46+100c=0 \Longrightarrow \boxed{c=-\frac{23}{50}}$$

مثال ۱۰: مطلوب است فاصله نقطه $A(4,1,6)$ از خط BC که $B(8,3,2)$, $C(2,-3,5)$ می‌باشد.

حل:

$$\overrightarrow{BA}(4-8\,,\,1-3\,,\,6-2) \Longrightarrow$$



شکل ۹

$$\overrightarrow{BA}(-4\,,\,-2\,,\,4)$$

$$\overrightarrow{BC}(2-8\,,\,-3-3\,,\,5-2) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{BC}(-6\,,\,-6\,,\,3)$$

از نقطه A صفحه P را عمود بر بردار $\overrightarrow{BC}$ فرود می‌آوریم (شکل ۹) AH فاصله نقطه A تا خط BC می‌باشد:

$$\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BC}|\times\overline{BH} \Longrightarrow$$

$$(-4)(-6)+(-2)(-6)+(4)(3)=$$

$$\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(3)^2}\times\overline{BH} \Longrightarrow 48=$$

$$9\overline{BH} \Longrightarrow \boxed{\overline{BH}=\frac{16}{3}}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+4+16}=6$$

از مثلث قائمه ABH $\Longrightarrow AH^2=AB^2-BH^2=$

$$36-\frac{256}{9}=\frac{324-256}{9}=\frac{68}{9} \Longrightarrow$$

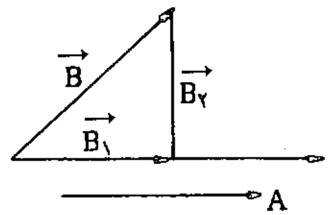
$$\boxed{AH=\frac{2\sqrt{17}}{3}}$$

مثال ۱۱: بردار $\vec{B}=3\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$ را به دو بردار موازی بـا بردار $\vec{A}=4\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ وعمود بر بردار $\vec{A}$ تجزیه کنید.

حل: با توجه به شکل (۱۰) داریم:

$$\vec{B}=\vec{B_1}+\vec{B_2} \quad \text{و} \quad \vec{B_1}=c\vec{A} \Longrightarrow$$

$$B=c\vec{A}+\vec{B_2} \Longrightarrow \vec{B_2}=\vec{B}-c\vec{A}$$



شکل ۱۰

$$\vec{B}^{۲}\perp\vec{A}\Longrightarrow\vec{B_۲}\circ\vec{A}=۰\Longrightarrow$$

$$(\vec{B}-c\vec{A})\circ\vec{A}=۰\Longrightarrow\vec{B}\circ\vec{A}-c\vec{A}\circ\vec{A}=۰$$

$$\Longrightarrow c=\frac{\vec{B}\circ\vec{A}}{\vec{A}\circ\vec{A}}=$$

$$\frac{(۳)(۴)+(۵)(-۳)+(-۲)(-۵)}{(۴)(۴)+(-۳)(-۳)+(-۵)(-۵)}=$$

$$\frac{۱۲-۱۵+۱۰}{۱۶+۹+۲۵}=\boxed{\frac{۷}{۵۰}}$$

$$\vec{B_۱}=c\vec{A}=\frac{۷}{۵۰}(۴\vec{i}-۳\vec{j}-۵\vec{k})=$$

$$\boxed{\frac{۱۴}{۲۵}\vec{i}-\frac{۲۱}{۵۰}\vec{j}-\frac{۷}{۱۰}\vec{k}}$$

$$\vec{B_۲}=\vec{B}-c\vec{A}=(۳\vec{i}+۵\vec{j}-۲\vec{k})-$$

$$\left(\frac{۱۴}{۲۵}\vec{i}-\frac{۲۱}{۵۰}\vec{j}-\frac{۷}{۱۰}\vec{k}\right)$$

$$\Longrightarrow\boxed{\vec{B_۲}=\frac{۶۱}{۲۵}\vec{i}+\frac{۲۷۱}{۵۰}\vec{j}-\frac{۱۳}{۱۰}\vec{k}}$$

بنابراین مؤلفه‌های بردار $\vec{B}$ که بردارهای $\vec{B_۱}$ و $\vec{B_۲}$ می‌باشند کاملاً مشخص شده است.

مثال ۱۲: اگر نقاط

$A(۳,۶,-۷)$ و $B(-۵,۲,۳)$ و $C(۴,-۷,-۲)$

رئوس مثلث ABC باشند معادله میانه AM را بیابید.

حل: چون نقطه M وسط پاره‌خط BC است پس:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{-۵+۴}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۲-۷}{۲}=\frac{-۵}{۲}$$

$$z_M=\frac{z_B+z_C}{۲}=\frac{۳-۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\Longrightarrow$$

$$M\left(-\frac{۱}{۲},-\frac{۵}{۲},\frac{۱}{۲}\right)\quad \text{و}\quad A(۳,۶,-۷)$$

$$\overrightarrow{MA}\left(۳+\frac{۱}{۲},۶+\frac{۵}{۲},-۷-\frac{۱}{۲}\right)\Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{MA}\left(\frac{۷}{۲}=a,\frac{۱۷}{۲}=b,-\frac{۱۵}{۲}=c\right)$$

$$MA\overset{\text{به معادله}}{=\!=\!=}\frac{x-x_۰}{a}=\frac{y-y_۰}{b}=\frac{z-z_۰}{c}\Longrightarrow$$

$$\frac{x+\frac{۱}{۲}}{\frac{۷}{۲}}=\frac{y+\frac{۵}{۲}}{\frac{۱۷}{۲}}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{-\frac{۱۵}{۲}}$$

$$AM\overset{\text{به معادله}}{=\!=\!=}\boxed{\frac{x+\frac{۱}{۲}}{۷}=\frac{y+\frac{۵}{۲}}{۱۷}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{-۱۵}}$$

مثال ۱۳: فاصله دو خط

$$d: x=-۲+۲t\ ,\ y=۳t\ ,\ z=-۳+t$$

و

$$d': x=۲t'-۱\ ,\ y=۳t'-۴\ ,\ z=t'$$

را بیابید.

حل : ضرایب t پارامترهای هادی خط d یعنی

$$a=۲\ ,\ b=۳\ ,\ c=۱$$

و ضرایب t' پارامترهای هادی‌خط d' یعنی

$$a'=۲\ ,\ b'=۳\ ,\ c'=۱$$

چون $۱=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ می‌باشد پس دوخط d و d' موازی‌اند.

به ازای $t=۰$ نقطه

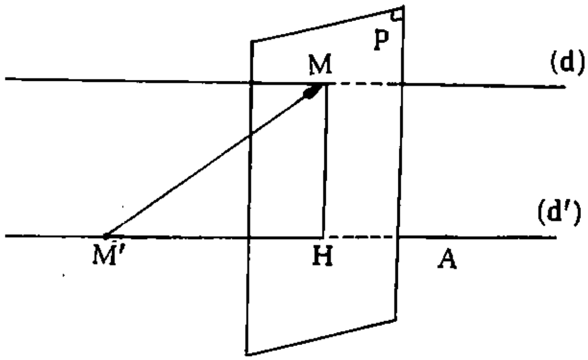
$$M(-۲\ ,\ ۰\ ,\ -۳)$$

مربوط به خط d و به ازای $t'=۰$ نقطه

$$M'(-۱\ ,\ -۴\ ,\ ۰)$$

مربوط به خط d' می‌باشد، از نقطه M صفحه P را برخط d' عمود نموده پـای عمود را نقطه H گرفته HM فاصله دوخط موازی می‌باشد. به‌ازای $t'=۱$ نقطه

$$A(۱\ ,\ -۱\ ,\ ۱)$$



شکل ۱۱

داریم:

$$\overrightarrow{M'M}(-۲+۱\ ,\ ۰+۴\ ,\ -۳-۰) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{M'M}(-۱\ ,\ ۴\ ,\ -۳)$$

$$\overrightarrow{M'A}(۱+۱\ ,\ -۱+۴\ ,\ ۱-۰) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{M'A}(۲\ ,\ ۳\ ,\ ۱)$$

$$\overrightarrow{M'A}\circ\overrightarrow{M'M}=|\overrightarrow{M'A}|\times\overline{M'H} \Longrightarrow$$

$$(۲)(-۱)+(۳)(۴)+(۱)(-۳)=\sqrt{۲^۲+۳^۲+۱^۲}\times\overline{M'H} \Longrightarrow$$

$$۷=\sqrt{۱۴}\times\overline{M'H} \Longrightarrow \overline{M'H}=\frac{۷}{\sqrt{۱۴}}$$

$$M'M=\sqrt{۲۶} \quad \text{و} \quad HM^۲=M'M^۲-M'H^۲$$

$$\Longrightarrow HM^۲=۲۶-\frac{۴۹}{۱۴}=۲۶-\frac{۷}{۲}=\frac{۵۲-۷}{۲}=\frac{۴۵}{۲}$$

$$\Longrightarrow HM=\sqrt{\frac{۴۵}{۲}}=\sqrt{\frac{۵\times۹}{۲}}=۳\sqrt{\frac{۵}{۲}}=$$

$$۳\sqrt{\frac{۱۰}{۴}}=\boxed{\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲}}$$

مثال ۱۴ : وضع دوخط

$$d: x=۲+۲t\ ,\ y=۱+۴t\ ,\ z=-۱-t$$

$$d': x=-۳۱+۳t'\ ,\ y=۶+۲t'\ ,\ z=۳+۶t'$$

را نسبت‌به هم مشخص‌نمایید.

حل: ضرایب t و t' پارامترهای هادی‌خطوط d و d' می‌باشند پس:

$$a=۲\ ,\ b=۴\ ,\ c=-۱$$

$$a'=۳\ ,\ b'=۲\ ,\ c'=۶$$

چون $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ نمی‌باشد لذا دوخط d و d' موازی‌نمی‌باشند.

حال بررسی می‌کنیم که آیا دو خط مزبور متقاطع‌اند داریم:

$$\begin{cases} ۲+۲t=-۳۱+۳t' \\ ۱+۴t=۶+۲t' \\ -۱-t=۳+۶t' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{matrix} (۱) \\ (۲) \\ (۳) \end{matrix} \begin{cases} ۲t-۳t'=-۳۳ \\ ۴t-۲t'=۵ \\ t+۶t'=-۴ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$-۲\begin{cases} -۴t+۶t'=۶۶ \\ ۴t-۲t'=۵ \end{cases}$$

$$۴t'=۷۱ \Longrightarrow \boxed{t'=\frac{۷۱}{۴}}$$

و

$$۴t-\frac{۷۱}{۲}=۵ \Longrightarrow$$

$$۴t=\frac{۸۱}{۲} \Longrightarrow \boxed{t=\frac{۸۱}{۸}}$$

اگر این مقادیر t و t' در معادله سوم یعنی

$$t+۶t'=-۴$$

صدق نماید دوخط متقاطع خواهند بود.

$$\frac{۸۱}{۸}+۶\times\frac{۷۱}{۴}=-۴ \Longrightarrow \frac{۸۱+۶\times۱۴۲}{۸}\neq-۴$$

بنابـراین دو خط نه‌موازی‌اند و نه متقاطع به نـاچار دو خط متنافرند.

تفریح اندیشه ۱

برج ایفل

بـرج ۳۰۰ متری ایـفل در پـاریس از فـولادی بـه وزن ۸،۰۰۰،۰۰۰ کیلوگرم ساخته شده است.

می‌خواهیم مدلی از این برج به وزن یک کیلوگرم بسازیم. ارتفاع این مدل چقدر می‌شود؟ آیا بزرگتر یا کـوچکتر از یک لیوان آبخوری خواهد بود؟

جواب در صفحهٔ ۹۶



۲ تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران

غلامرضا یاسی‌پور

گرچه نتوان خورد طوفان سحاب
کی توان‌کردن به ترک خوردِ آب
آب دریـا را اگـر نـتوان‌کشید
هم به قـدرتشنگی بـاید چشـید [۱]

مجلهٔ دومی که به بررسی آن می‌پردازیم مجلهٔ ریاضیات دکتر مصاحب است که در سال ۱۳۰۹ در تهران به چاپ رسیده است. نام ایـن مجله چنانکه از روی جلد آن برمی‌آید واحد است و نام خانوادگی‌اش: مجلهٔ ریاضیات «عالی و مقدماتی». مدیر مسئول و مؤسس آن مصاحب و جای اداره‌اش: موقتاً ادارهٔ جریدهٔ قانون[۲]، تهران خیابان باب همایون است. مجله در اول و پانزدهم هر ماه با چاپ در مطبعهٔ علمی منتشر می‌شود و وجه اشتراکش در ایران: سالیانه[۳]: از ۲۵ تا ۴۰ قران (برای محصلین ۱۰ قران)، ششماهه: فقط برای محصلین ۶ قران[۴] است، و تک‌شماره‌اش یک ریال به فروش می‌رسد. اینها را از روی جلد یعنی به اصطلاح صفحهٔ اول نقل کردیم. اما بشنوید از پشت جلد (یا به اصطلاح مجله‌پردازان صفحهٔ چهارم) که در آن آگهیهای تجارتی (وگاهی هم خجالتی!) آمده است.[۵] یکی از آگهیهای تجارتی را نقل می‌کنیم:

کتاب علوم تفریحی

از مطالعهٔ کتاب علوم تفریحی تألیف آقای مصاحب غفلت نکنید. ما از این کتاب تعریف نمی‌کنیم شما خودتان از آنهایی که آن را خریده‌اند بپرسید و بعد تا تمام نشده آن را از کتابخانه‌های عمدهٔ تهران خریداری کنید. برای خرید کلی به کتابخانهٔ مرکزی رجوع نمایید. خیابان شاهپور ـ کتابخانهٔ مرکزی.

نمرهٔ اعلان ۵

به نقل یکی از آگهیهای خجالتی آن نیز می‌پردازیم:

هتل مقدم

(چهارراه حسن آباد)

از منظرهٔ باشکوه این هتل و ارکستر عالی آن که جدیداً با بهترین طرز برای پذیرایی واردین تشکیل شده است استفاده فرمایید.

فامیلهای محترم می‌توانند در این هتل از مهمانهای گرامی خود با بهترین ترتیب پذیرایی نمایند.

بعد از یک هفته

همه شب . . . را از ساعت ۹ به بعد مشاهده فرمایید.[۶]

نمرهٔ اعلان ٦

شماره‌های سال اول انتشار مجله به قطع جیبی و خط نسخ خوش است اما شماره‌های سال دومش که از آذر ماه ۱۳۱۴ آغاز می‌شود به قطع رقعی و با حروف سربی به چاپ رسیده است.

فریاد دفتر مجله از دست مشترکینی که وجه اشتراک خود را نپرداخته‌اند یا مفت‌خوانهایی که مایل به پرداختن آن نیستند به عَیّوق[۷] می‌رسد، و در این مورد مثلاً در شمارهٔ اول سال دوم آن تحت عنوان: **چرا نشر مجلهٔ ریاضیات تعطیل شد؟** چنین می‌خوانیم:

عادت بر این جاری شده است که وقتی مجله‌ای یا روزنامه‌ای پس از مدتی تعطیل، حیات را از سرمی‌گیرد در بالای آن این شعر را با خط درشت می‌نویسند:

مدتی این مثنوی تعطیل شد
مهلتی بایست تا خون شیر شد[۸]

نگارنده به جای این که مجله را با این گونه مضامین شروع نمایم با عبارتی مختصر و مفید عرض می‌کنم که تنها علت تعطیل نشر مجلهٔ ریاضیات بدحسابی جمعی از مشترکین آن بود، بالاخص بسیاری از اشخاصی که صفت معارف‌پروری را جزء لاینفک اسم خود می‌شمارند مرتباً ۲۰ یا ۳۰ شماره از مجله را، از بدو تا ختم آن، تحت عناوین مختلفه دریافت داشتند، بدون این که وجه اشتراک آنها را بپردازند. فعلاً باوجود داشتن مدارک کافیه برله[۹] ادعای خود از ذکر اسامی این گونه آقایان صرف‌نظر می‌کنیم. ولی به اطلاع طالبین این مجله می‌رسانیم که از این به بعد مجله برای هیچ‌کس مجاناً ارسال نخواهد شد ودرخواست اشتراک در صورتی که باوجه اشتراک سالیانه همراه نباشد بلاجواب خواهد ماند.[۱۰]

و در جای دیگر، یعنی در شمارهٔ ششم سال اول آن چنین:

باز هم تقاضای تخفیف...!!

ما گمان می‌کردیم با تعیین این وجه اشتراک قلیل وقتمان برای خواندن مراسلات راجع به تخفیف تلف نخواهد شد. متأسفانه هر روز مراسلاتی به ما می‌رسد به این مضمون که ابتداء فکر نشر مجلهٔ ریاضیات را تقدیس کرده **بقا و دوام مجله و موفقیت ما را مسألت می‌نمایند**[۱۱] و بعد در آخر مراسله می‌نویسند «**فقط خواهش می‌کنم برای معارف‌پروری یک تومان برای وجه اشتراک آن قبول فرمایید**[۱۲]».

گمان می‌کنم نویسندگان این مراسلات خیال می‌کنند وقتی امتیاز مجلهٔ ریاضیات داده شد، خداوند هم فرشته‌ای خلق کرد که مخارج آن را (تأدیه)[۱۳] کند و موجبات بقا و دوام آن را فراهم آورد یا تصور می‌کنند ما سرمایهٔ هنگفتی برای نشر مجلهٔ ریاضیات وقف کرده‌ایم که مجله را طبع نموده برای **معارف‌پروری** (!) تقدیم آقایان بکنیم. اگر معنی معارف‌پروری این است خواهش می‌کنیم نه مِنبعد ما را معارف‌پرور بخوانند و نه مدتی وقتمان را برای خواندن این گونه مراسلات تلف کنند.

به هرحال چون احتمال می‌دهیم بعدها نیز دچار این گونه مراسلات بشویم از حالا اطلاع می‌دهیم که **مراسلات راجع به تخفیف بلاجواب خواهد ماند.**

(دفتر مجلهٔ ریاضیات)

ناگفته نماند که در دورهٔ دوم انتشار مجله، یعنی از سال دوم به بعد، جای مجله به **شرکت نشر کتاب**، طهران، خیابان ناصرخسرو (ناصریه) انتقال یافته، قطع آن همان طور که قبلاً هم متذکر شدیم، رقعی شده، به جای ماهی دوبار ماهی یک بار انتشار یافته، و تک شمارهٔ آن نیز با سه ریال تفاوت قیمت به ۴ ریال ترقی کرده است.

اکنون که از پرداختن به جزئیات ـ شاید هم کلیات ـ مجله فراغت

حاصل کرده‌ایم به ذکر مطالب اصلی یعنی مسائل و مقالات آن می‌پردازیم.

مجله مانند تمام کارهای بعدی مرحوم مصاحب ـ رحمة‌الله علیه ـ شسته و رفته و تمام و کمال است[۱۴]، و هرچند که به ریاضیات مقدماتی و عالی می‌پردازد از ذکر مطالب تفریحی و تاریخی و موارد ظریف و مسائل لطیف باز نمی‌ماند و به طورکلی به شیوه‌ای است که خواننده را به کار و بار ریاضی علاقه‌مند می‌سازد. نه تنها از ریاضیدانهای گذشته ذکری به میان می‌آورد و در این مورد هم گوشهٔ چشمی به ریاضیدانهای ایرانی و اسلامی دارد هم به ریاضیدانهای اروپایی، بلکه به ریاضیات معاصر نیز می‌پردازد و در این زمینه تازه‌ترین مطالب روز را مطرح می‌کند، و با اینهمه از حوادث اجتماعی زمان خود متأثر است و مثلاً در مورد **فوت مدیر نامهٔ مقدس حبل‌المتین** در اولین صفحهٔ شمارهٔ (۷ و ۸) پانزدهم بهمن ماه ۱۳۰۹ شمسی خود چنین می‌نگارد.

هرگز نمیرد آنکه دلش زنده شد به عشق
ثبت است بر جریدهٔ عالم دوام ما
(حافظ)

روز ۲۶ آذر آقا سید جلال‌الدین مؤیدالاسلام مدیر نامهٔ مقدس حبل‌المتین[۱۵] دار فانی را بدرود گفته[۱۶] و قلب عموم ایرانیان را جریحه‌دار ساخت.

ذکر خدمات این شخص بزرگ در صفحات کوچک مجلهٔ ریاضیات نمی‌گنجد و از این گذشته آنجا که عیان است چه حاجت به بیان است. لهذا برای ابراز آتشی که وقوع این حادثهٔ ناگوار در قلب ما مشتعل ساخته به همین چند سطر قناعت نموده این مصیبت عظیم را به عموم ایرانیان مخصوصاً آقای **سیدجمال‌الدین** مدیر محترم نامهٔ کهن‌سال حبل‌المتین تسلیت گفته موفقیت ایشان را در ادامهٔ انتشار حبل‌المتین آرزومندیم (مجلهٔ ریاضیات).

همان‌طور که قبلاً هم متذکر شدیم یکی از جنبه‌های مهم و ثابت مجله پرداختن به تاریخ ریاضی است و در این زمینه همانگونه که در مقالهٔ زیر ملاحظه می‌کنیم از پند و اندرز اخلاقی نیز نمی‌ماند و به موازات تربیت ریاضی به تربیت اخلاقی می‌پردازد. مقاله از شمارهٔ پنجم سال اول است:

به قلم دانشمند معظم آقای میرزا عباس خان اقبال[۱۷].

ابوریحان بیرونی و حساب دانه‌های گندم خانه‌های شطرنج

در کتب تواریخ اسلامی چنین نقل کرده‌اند که یکی از پادشاهان محلی هند به نام شرام مردی سفاک و ظلم‌پیشه بود و در اندک مدتی بر اثر سوء سیاست و بی‌خردی مملکتش دستخوش فقر و رعایایش قرین تیره‌روزی شدند. برهمنان[۱۸] آن دیار برای رهایی از این مصیبت به فکر چاره افتادند. عاقبت یکی از ایشان که سمسا نام داشت بازی شطرنج را اختراع کرد و به حضور شاه برد و بدو فهماند که شاه شطرنج با آنکه مهمترین سواران نطع[۱۹] بازی است بی دستیاری مهره‌های دیگر نمی‌تواند به حرکتی مبادرت کند و اگر معاونت سایر مهره‌ها نباشد هر حرکتی که از او ناشی شود مذبوح[۲۰] و منجر به هلاکت است.

پادشاه را این بازی فوق‌العاده مسرور کرد و به برهمن وعده داد که رفتار خود را عوض کند و به پاداش این اختراع شگرف هرچه بخواهد به او بدهد. برهمن که می‌خواست پادشاه را درس دیگری در باب احتیاط و میانه‌روی بیاموزد گفت تنها پاداشی که متوقعم این است که پادشاه امر فرماید که گماشتگان در خانهٔ اول شطرنج یک دانهٔ گندم بگذارند و در خانهٔ دوم دوبرابر گندم خانهٔ اول ودر خانهٔ سوم دو برابر عدد گندم خانهٔ دوم، و به همین ترتیب تا خانهٔ آخر عدهٔ گندمهای هر خانه را مضاعف خانهٔ قبل از آن بنمایند و مجموع آن گندمها را به من بدهند. پادشاه ابتدا به حقارت این درخواست برهمن خندید ولی پس از آنکه به عظمت کمیت حاصل گندمها پی برد دید

که از عهدهٔ انجام خواهش برهمن برنمی‌آید.

از لحاظ تاریخی درست معلوم نیست که این قصه حقیقتی داشته یا نه، بلکه قریب به یقین است که بعضی از حکما آن را برای گرفتن درس عبرت وضع و جعل کرده‌اند ولی از وقتی که قضیهٔ مزبور شایع شده علمای ریاضی درصدد پیدا کردن مجموع گندم خانه‌های شطرنج به طرز مذکور در فوق برآمده و در باب آن زحماتی کشیده‌اند. حالیه که جداول لگاریتم و دستورهای جبری مدون در دست است، حساب این گونه مسائل آسان و کار محصلین کلاسهای متوسطه است، ولی سابقاً که علوم ریاضی ترقیات عصر ما را نداشته و حتی نوشتن معادلات با حروف و علامات نیز معمول نبوده است پیدا کردن جواب مسائلی نظیر مسألهٔ فوق سخت مشکل بوده است.

مسألهٔ فوق چنانکه اشاره شد مبنی بر حساب حاصل جمع یک تصاعد هندسی است با قدر نسبت ۲، و این ایام یافتن جواب آن در چنددقیقه ممکن می‌شود.

ابوریحان محمد ابن احمد بیرونی[۲۱] (۳۶۲-۴۴۰ هـ) از اجلّهٔ حکما و علمای ریاضی و مورّخین و ادبای ایران که از معتقدین به حرکت زمین بوده و بسیاری از مشکلات ریاضی و هیأت را حل کرده و از بزرگترین مفاخر حقیقی نژاد ایرانی است در باب مسألهٔ فوق نیز فکر کرده و دو قضیّهٔ ذیل را یافته و طبق آنها مجموع جمل فوق را حساب کرده است.

قضیهٔ ۱. درصورتی که عدهٔ گندم خانه‌ای را بدانیم شمارهٔ گندم خانه‌ای که فاصلهٔ آن تا این خانه برابر باشد با فاصلهٔ این خانه تا خانهٔ اول، برابر است با مجذور عدهٔ گندم خانهٔ معلوم. مثلاً عدهٔ گندم موجود در خانهٔ ۵، برابر است با ۱۶ چون فاصلهٔ خانهٔ ۵ تا خانهٔ اول ۴ خانه است، عدهٔ گندم خانهٔ نهم که فاصلهٔ آن نیز تا خانهٔ ۵ بیشتر از ۴ خانه نیست برابر خواهد شد با $۱۶^۲$ یعنی ۲۵۶، و شمارهٔ گندم خانهٔ ۱۷، برابر است با $۲۵۶^۲$...

قضیهٔ ۲. عدهٔ گندم هر خانه سنهای واحد برابر است با مجموع گندم خانه‌های قبل از آن. مثلاً شمارهٔ گندم خانهٔ ۶ برابر است با ۳۲، مجموع گندم پنج خانهٔ قبل از آن برابر است با ۳۱ دانه، به این ترتیب

$$۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ = ۳۲ - ۱$$

بعد از ذکر این دو قضیه، ابوریحان می‌گوید اگر فرض کنیم که شطرنج به جای ۶۴ خانه ۶۵ خانه داشته باشد، بر طبق قضیهٔ ۲ عِدّهٔ گندم خانهٔ ۶۵، برابر می‌شود با مجموع گندمهای خانه‌های ماقبل آن سنهای واحد، و این مجموع گندم ۶۴ خانهٔ شطرنج است. پس ابتدا باید شمارهٔ گندم موجود در خانهٔ ۶۵ را یافت.

به موجب قضیهٔ ۱ چون خانهٔ ۳۳ واسطهٔ بین خانهٔ ۶۵ و خانهٔ اول، یعنی از هر دو به یک فاصله است، پس مربع گندمهای موجود در آن خانه برابر است با عدهٔ گندم خانهٔ ۶۵، و مربع عدهٔ گندم خانهٔ ۱۷ (واسطهٔ بین خانهٔ ۳۳ و خانهٔ اول) برابر با عدهٔ گندم خانهٔ ۳۳ و مربع عدهٔ گندم خانهٔ ۹ (واسطهٔ بین دو خانهٔ ۱۷ و اول) برابر با گندم خانهٔ ۱۷ و مربع شمارهٔ گندم خانهٔ ۵ (واسطهٔ بین دو خانهٔ ۹ و اول) برابر با عدهٔ گندم خانهٔ ۹، و مجذور عدهٔ گندم خانهٔ ۳ (واسطهٔ بین دو خانهٔ ۵ و اول) برابر با شمارهٔ گندم خانهٔ ۵ و مربع عدهٔ گندم خانهٔ ۲ (واسطهٔ بین خانه‌های ۳ و اول) یعنی چهار مساوی است با عدهٔ گندم خانهٔ ۳ و مجذور ۴ یعنی ۱۶ شمارهٔ گندم خانهٔ ۵ است، و مجذور ۱۶ یعنی ۲۵۶ مساوی است با عدهٔ گندم خانهٔ ۹ و مجذور ۲۵۶ یعنی ۶۵۵۳۶ برابر است با عدهٔ گندم خانهٔ ۱۷ و مجذور عدد اخیر یعنی ۲۹۶، ۹۶۷، ۴۹۴، ۴ عدهٔ گندم خانهٔ ۳۳ است، و اگر این عدد آخری را در خود ضرب کنیم حاصل یعنی:

۱۸،۴۴۶،۷۴۴،۰۷۳،۷۰۹،۵۵۱،۶۱۶

عدّهٔ گندمهای خانهٔ ۶۵ است، و چون این عدد، به موجب قضیهٔ ۲، سنهای واحد برابر است با مجموع گندمهایی که در کل خانه‌های ماقبل خانهٔ ۶۵ یعنی در ۶۴ (خانهٔ) شطرنج گذاشته شده، پس مجموع گندمهای خانه‌های ۶۴ گانهٔ شطرنج به موجب حساب فاضل استاد ابوریحان بیرونی عدد بیست رقمی ذیل است:

۱۸،۴۴۶،۷۴۴،۰۷۳،۷۰۹،۵۵۱،۶۱۵

البته با به کار بردن دستور[۲۲]

$$S = \frac{t_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

و داشتن جدول لگاریتم، عمل کردن بر طبق قضایای فوق و اجرای چندین عمل ضرب، امروز دیگر لازم نیست، ولی در عهدی که این نوع دستورها و جداول معمول نبوده پیدا کردن دو قضیهٔ مذکور و یافتن حاصل گندمها به وجه سادهٔ مرقوم در فوق، یکی از شاهکارها محسوب می‌شده و نمایندهٔ هوش و درجهٔ استادی ابوریحان بیرونی است.

از خانه‌های ۶۴ گانهٔ شطرنج بیرون می‌آییم و یک راست به زیرزمین علی بابا که هر چند کور است روشندل است می‌رویم. مسأله را از همین شماره برداشته‌ایم.

زیرزمین علی‌بابا

شربت فروش کوری موسوم به علی بابا در زیرزمین منزل خود نه جعبه به طریقی که در شکل دیده می‌شود گذارده، جعبهٔ وسط را برای شیشه‌های خالی معین کرده و در هر یک از چهار جعبهٔ گوشه‌ها سه شیشه و در چهار جعبهٔ دیگر ده شیشهٔ شربت نهاده بود.

نوکر علی بابا[۲۳] روزی که خانه را خالی یافت چهار شیشهٔ شربت از جعبه(های) مذکور دزدید. یکی از همسایگان علی بابا که موضوع را ملتفت شده بود وی را آگاه ساخت.

۳	۱۰	۳
۱۰		۱۰
۳	۱۰	۳

علی بابا به زیرزمین سرکشی کرده مشاهده نمود که شیشه‌های اطراف تغییر نکرده، بدین معنی که در هر طرف همان ۱۶ شیشهٔ شربت موجود است. لهذا خیال کرد به نوکرش تهمت زده‌اند. نوکر از سادگی ارباب و این اتفاق استفاده کرده سه دفعهٔ دیگر دزدی خود را تکرار نموده و هر دفعه که علی بابا به جعبه‌ها سرکشی کرد موافق حساب خود نقصی در جعبه‌ها ندید.

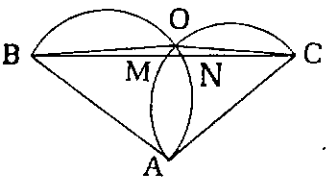
حال بگویید نوکر علی بابا چه حیله‌ای به کار برده و چگونه مکان شیشه‌ها را تغییر داده است.

مجله همانطور که قبلاً هم ذکر کردیم به مطالب متنوع می‌پردازد و بخشی به نام **حیل ریاضی** دارد و بخشی به نام **حکایات و اقوال**، دو مطلب زیر را به ترتیب از این دو بخش برداشته‌ایم:

حیل ریاضی

اولاً مجموع زوایای مثلث از دو قائمه زیادتر است، ثانیاً دو خط عمود بر یک خط متقاطعند، ثالثاً بر دو نقطهٔ مفروض بیش از یک خط مستقیم مرور می‌کند.

برهان: برای اثبات قضیه زاویه‌ای مانند BAC رسم نموده به قطر هر یک از اضلاع آن نیمدایره‌ای رسم کرده خط BC را رسم می‌کنیم و



فرض می‌کنیم M و N نقاط تقاطع آن با دوایر مرسوم باشند. اولاً چون هر یک از زوایای AMC و ANB در نیمدایره محاطند مساوی یک قائمه خواهند بود و بنابراین مجموع زوایای مثلث AMN از دو قائمه متجاوز است. ثانیاً دو خط AM و AN که بر BC عمودند بر A تقاطع نموده‌اند. ثالثاً هر یک از زوایای BOA و COA قائمه‌اند و بنابراین خط BOC مستقیم است، و چون BC نیز مستقیم می‌باشد بر B و C دو مستقیم مرور کرده. فثبت المطلوب[۲۴].

عشق به حساب

بسیاری از دانشمندان عشق مفرطی به حساب داشته‌اند. آمپر[۲۵]

دانشمند شهیر و عالم معروف فرانسوی در علاقه‌ای که به این قسمت داشته مشهور است، چنان که گویند قبل از این که ارقام را شناخته و قادر به نوشتن آنها باشد با سنگ ریزه و لوبیا حسابهای بس طولانی می‌نمود.

و نیز گویند در کودکی کسالتی عارض وی شده بود و برای این که فکرش راحت باشد مادرش او را از لوبیاهای عزیزش جدا ساخته بود. آمپر لقمهٔ نانی را که پس از سه روز گرسنگی و پرهیز به وی داده بودند خرد کرده مشغول محاسبات خود گردید!!

در این جا و پیش از این که به ذکر بعضی از مقالات دیگر این مجله بپردازیم بعضی از مسائل مطرح شده در آن را با حل‌شان می‌آوریم، این رانیز ذکر می‌کنیم که بعضی از این مسائل را افرادی فرستاده‌اند که بعدها از ناموران این دیار شدند و از آن جمله‌اند احمد آرام[۲۶].

ادامه دارد...

یادداشتها

۱- مثنوی، دفتر پنجم

۲- قانون با ریاضی مناسبتی بیش از هم محل بودن دارد.

۳- ظاهراً سالانه درست‌تر است.

۴- خدا پدرشان را بیامرزد که به فکر محصلین بیچاره بوده‌اند.

۵- شاید برای جور کردن دخل و خرج

۶- شاید در آن زمانها، شاهدهٔ رقص و نه «رقصیدن» برای ریاضیدانهای عزیز مفید به نظر می‌رسیده است.

۷- ستاره‌ای در آسمان. تعبیر از محتشم کاشانی و از دوازده بند معروف اوست.

۸- صورت صحیح این بیت که اولین بیت دفتر دوم مثنوی مولوی است چنین است:

مدتی این مثنوی تأخیر شد / مهلتی بایست تا خون شیر شد

۹- ظاهراً «به» زیادی است.

۱۰- در این جا و در بقیهٔ نقل قولها شیوهٔ نگارش نویسنده را تغییر نداده‌ایم و تنها به تغییر رسم‌الخط اکتفا کرده‌ایم.

۱۱- تأکیدها همه جا از متن اصلی است.

۱۲- بعداز همهٔ این حرفها این چنین هم می‌نماید که بعضی از مشترکین قصد خوردن وجه اشتراک مجله را نداشته‌اند و واقعاً بی‌پول بوده‌اند، این هم معلوم می‌شود که در قدیم هم قلم شاه جهان نبوده و قلم زن را به دولت نمی‌رسانده است، البته از استثنائاتی چون عنصری که از نقره دیگدان می‌زده و از زرآلات خوان می‌ساخته می‌گذریم.

۱۳- این کلمه در نسخه‌ای که در دست این جانب است و آن را نیز مانند نسخ مربوط به مقالهٔ اول از استاد پرویز شهریاری به امانت گرفته‌ام، به علت رفتگی پاک شده و به گمانش آورده‌ایم.

۱۴- و این نشان می‌دهد که کارهای کوچک و اولیهٔ مردان بزرگ همچنان آثاری از بزرگی دارد و مرد بزرگ در هر مرحله از حیات خود بزرگی خود را می‌نماید و به یاد این مصراع می‌افتیم که: چنین کنند بزرگان چو کرد باید کار.

۱۵- ریسمان محکم، عروةالوثقی

۱۶- ظاهراً «و» زیادی است.

۱۷- عباس اقبال آشتیانی، محقق و مورخ ایرانی (۱۲۷۵ - ۱۳۳۴). وی در آغاز جوانی درودگر بود و سپس به تحصیل پرداخت و دورهٔ دارالفنون را به پایان رسانید و به معاونت کتابخانهٔ معارف انتخاب گردید. به معلمی مدارس نظام، مدرسهٔ علوم سیاسی و دارالمعلمین عالی منصوب شد. به اخذ درجهٔ لیسانس از سور بن نایل آمد. پس از بازگشت به ایران به سمت استادی دانشگاه و عضویت فرهنگستان انتخاب شد. در ۱۳۲۴ مجلهٔ یادگار را تأسیس کرد که پنج دورهٔ آن منتشر شده. در تحقیقات تاریخی و ادبی روش عالمانه‌ای دارد. «نقل به اختصار از فرهنگ معین».

۱۸- بَرَهْمَن، پیشوای روحانی مذهب برهمایی، برهما: یکی از سه خدای مذهب برهمایی، کلمه‌ای است از هندی گرفته شده.

۱۹- بساط چرمینی که محکومان را بر آن گردن می‌زدند. در اینجا معنی صفحهٔ شطرنج یا میدان کارزار است.

۲۰- مَذْبوح: گلوبریده، کشته

۲۱- ریاضیدان و فیلسوف ایرانی اهل بیرون خوارزم (۳۶۲ - ۴۴۰ ه). کتاب «آثار الباقیه» را به نام قابوس بن وشمگیر تألیف کرد. در دربار ابوالعباس مأمون بن مأمون مدتی بزیست. در غالب غزوات محمود به هندوستان در ملازمت او بود. زبان سنسکریت را بیاموخت و کتاب «تحقیق ماللهند» را تألیف کرد. کتاب مهم دیگر او «التفهیم» است که آن را به عربی و فارسی (جُداگانه) تألیف کرده‌است. فرهنگ معین.

۲۲- حروف دستور مزبور را مطابق با حروف روز کمی تغییر داده‌ایم.

۲۳- علی بابای کور شربت فروش، توان نوکرنگهداشتن نداشته، مگر آنکه نوکر را به معنای «عصاکش» در نظر بگیریم.

۲۴- مطلب مورد نظر ثابت شد.

۲۵- فیزیکدان فرانسوی (۱۷۷۵ - ۱۸۳۶) موجد رشتهٔ الکترودینامیک و مخترع الکترومان، دستگاه تلگراف الکترومانیتیک. در فلسفه و ریاضی نیز تحقیقات بسیار دارد. فرهنگ معین.

۲۶- مترجم و نویسندهٔ نامدار معاصر

تصاعد هندسی

● احمد قندهاری

تصاعدهندسی دنباله‌ای است که هر جمله آن از جمله‌اول به‌بعد برابراست با جمله‌قبل‌ضرب‌در عددثابتی. این‌عدد ثابت را قدر نسبت گوییم و با حرف (q) نشان می‌دهیم.

مثال: $q=۲$ $\quad$ $\div\div$ ۳,۶,۱۲,۲۴,۴۸,...

درحالت کلی ، دنبالهٔ تصاعد هندسی‌را می‌توان به صورت زیر نشان داد :

$$\div\div\ a_1 : a_1q : a_1q^2 : a_1q^3 : \ldots\ a_1q^{n-1}$$

حال دنباله‌تصاعد عددی‌را‌که درشمارهٔ قبل گفته شد می‌نویسیم:

$$\div a_1\ ,\ (a_1+d)\ ,\ (a_1+2d)\ ,\ (a_1+3d)\ ,\ \ldots\ ,\ a_1+(n-1)d$$

اگر به دو دنبالهٔ فوق دقت‌کنیم ،ملاحظه می‌کنیم‌که :

الف: علامت $+$ در تصاعد عددی بـه صورت $\times$ در تصاعد هندسی ظاهر می‌شود.

ب: ضریب قدرنسبت در تصاعد عددی‌به صورت توان قدرنسبت در تصاعد هندسی تبدیل‌شده است.

حال به دو رابطه زیر دقت‌کنید:

در تصاعد عددی: $a_2-a_1=d$

در تصاعد هندسی: $\dfrac{a_2}{a_1}=q$

ج: بنابراین می‌توان گفت‌که علامت $-$ در تصاعدعددی به علامت $\div$ در تصاعد هندسی تبدیل می‌شود.

خلاصه، گفتار فوق چنین است :

تصاعد هندسی		تصاعد عددی
$\times$	$\longrightarrow$	$+$
توان	$\longrightarrow$	ضریب
تقسیم	$\longrightarrow$	$-$

با توجه به تغییرات گفته شده خواهیم داشت:

مقایسه ۱

هرگاه x،y،z سه‌جمله متوالی یك‌تصاعد هندسی باشند داریم :

در تصاعد عددی داشتیم: $2y=x+z$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{y^2=x\cdot z}$

مقایسه ۲

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $a_m-a_n=(m-n)d$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{\dfrac{a_m}{a_n}=q^{m-n}}$

مثال : دریك تصاعد هندسی $a_5=4a_1$ ، قدرنسبت این تصاعد چند است؟

$$\frac{a_5}{a_1}=q^4 \Rightarrow \frac{4a_1}{a_1}=q^4 \Rightarrow q^4=4 \Rightarrow q^2=2$$

$$\Rightarrow q=\pm\sqrt{2}$$

مقایسه ۳ (جمله عمومی یا جمله (n) ام)

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $a_n=a_1+(n-1)d$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{a_n=a_1q^{n-1}}$

مثال در تصاعد ۲ و $\sqrt{2}$ ... ، جمله نهم چیست؟

$$q=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_n=a_1q^{n-1} \Rightarrow a_9=a_1q^8=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8=$$

$$2\left(\frac{2^4}{2^8}\right)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

مقایسه ۴ (قاعدهٔ اول اندیسها)

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $2a_{10}=a_7+a_{13}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $(a_{10})^2=a_7\cdot a_{13}$

$$2\times10=7+13$$

و در حالت کلی:

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $2a_n=a_{n-p}+a_{n+p}$

$$\boxed{(a_n)^2=a_{n-p}\cdot a_{n+p}} \qquad n,p\in N, p<n$$

$$2n=(n-p)+(n+p)$$

مثال: در یك تصاعد هندسی حاصل ضرب دوجمله هفتم وهفدهم ($4\sqrt{2}$) است، جمله دوازدهم و قدرنسبت را بیابید.

حل: $(a_{12})^2=a_7\cdot a_{17} \Rightarrow (a_{12})^2=4\sqrt{2}$

$$\Rightarrow a_{12}=\pm2\sqrt[4]{2}$$

$$\frac{a_{12}}{a_7}=q^5 \Rightarrow q^5=\frac{\pm2\sqrt[4]{2}}{4\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{8}}=\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{64}} \Rightarrow$$

$$q^5=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2^5}} \Rightarrow q=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

مقایسه ۵ (قاعدهٔ دوم اندیسها)

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $a_4+a_{12}=a_3+a_{13}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$a_4\cdot a_{12}=a_3\cdot a_{13}$$

$$4+12=3+13$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

در تصاعد عددی داشتیم: $\Rightarrow$ $a_m+a_n=a_p+a_k$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت: $\boxed{a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_k}$

با شرط $m+n=p+k$

مثال حاصل‌ضرب دو جمله پنجم و بیست و پنجم در یك تصاعدهندسی ($4\sqrt[4]{2}$) است اگر جمله‌هفدهم ($2\sqrt[8]{2}$) باشد جمله سیزدهم این تصاعد چند است؟

$$a_{13}\cdot a_{17}=a_5\cdot a_{25} \Rightarrow 2\sqrt[8]{2}\,a_{13}=4\sqrt[4]{2}$$

$$\Rightarrow a_{13}=\frac{4\sqrt[4]{2}}{2\sqrt[8]{2}}=\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2}}=\frac{\sqrt[4]{2^5}}{\sqrt[8]{2}}=\frac{\sqrt[8]{2^{10}}}{\sqrt[8]{2}}=\sqrt[8]{2^9}$$

$$\Rightarrow a_{13}=2\sqrt[8]{2}$$

مقایسه۶ (حاصل‌ضرب n جمله‌اول یك تصاعدهندسی)

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

در تصاعدهندسی خواهیم‌داشت:

$$P_n=(a_1\cdot a_n)^{\frac{n}{2}}$$

اگر به جای a_n مساویش a_1q^{n-1} را قراردهیم خواهیم‌داشت:

$$P_n=(a_1^2q^{n-1})^{\frac{n}{2}}$$

مثال: درتصاعد ۲ : $\sqrt{2}$ ∺ ، حاصل‌ضرب هشت‌جمله اول‌را بیابید.

$$\begin{cases}q=\sqrt{2}\\ p_n=(a_1^2q^{n-1})^{\frac{n}{2}}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$p_8=(a_1^2q^7)^4=[2(\sqrt{2})^7]^4=(2\times 2^3\sqrt{2})^4\Longrightarrow$$

$$p_8=(2^4\sqrt{2})^4=2^{16}\times 2^2=2^{18}$$

مقایسه۷

در هر تصاعد هندسی داریم:

$\Longrightarrow$ در تصاعد عددی داشتیم: $a_{10}=S_{10}-S_9$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$\Longrightarrow\begin{cases}a_{10}=S_{10}-S_9\\ a_{10}=\frac{p_{10}}{p_9}\end{cases}$$

در حالت‌کلی خواهیم داشت:

درتصاعد عددی داشتیم: $a_n=S_n-S_{n-1}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$\Longrightarrow\begin{cases}a_n=S_n-S_{n-1}\\ a_n=\frac{p_n}{p_{n-1}}\end{cases}$$

مثال: دریك تصاعد هندسی داریم: حاصل ضرب هشت جمله‌اول بیست برابر حاصل‌ضرب هفت جمله‌اول‌است، جمله‌هشتم این تصاعد چند است؟

$$p_8=20p_7\Longrightarrow a_8=\frac{p_8}{p_7}=\frac{20p_7}{p_7}$$

$$\Longrightarrow a_8=20$$

مقایسه۸

اگر دریك تصاعد هندسی‌تعداد جملات‌فرد و جمله وسط k باشد داریم:

$\Longrightarrow$ درتصاعد عددی داشتیم: $2k=a_1+a_n$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$k^2=a_1\cdot a_n$$

مقایسه۹

اگر دریك تصاعد هندسی تعداد جملات‌فرد وجمله وسط k باشد داریم:

$\Longrightarrow$ درتصاعد عددی داشتیم: $S_n=n\cdot k$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$p_n=k^n$$

مثال: در یک تصاعد هندسی جمله چهارم $2\sqrt{2}$ است حاصل‌ضرب هفت جمله‌اول آن چند است؟

حل: $p_n=k^n\Longrightarrow p_7=k^7$

$$\Longrightarrow p_7=(2\sqrt{2})^7=2^7\times\sqrt{2}^7=2^7\times 2^3\times\sqrt{2}$$

$$=2^{10}\sqrt{2}$$

مقایسه ۱۰

اگر بین دو عدد $a \ \because \ \underbrace{\ldots\ldots}_{n} b$ ، n واسطه‌هندسی درج کنیم، قدرنسبت از رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

در تصاعد عددی داشتیم: $d=\frac{b-a}{n+1}$

در تصاعد هندسی خواهیم داشت :

$$\Longrightarrow \boxed{q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{q}}}$$

زیرا در تصاعد عددی :

$$d=\frac{1}{n+1}(b-a)$$

که در تصاعد هندسی به صورت $q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ خواهد شد.

توجه: اگر $(n+1)$ زوج باشد باید نوشت :

$$\frac{b}{a}>0 \quad \boxed{q=\pm\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}}$$

مثال: بین دوعدد $\because \ 2 \ , \ldots \ 32$ ، هفت واسطه‌هندسی درج‌کردیم، قدرنسبت را بیابید.

حل: $q=\pm\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}=\pm\sqrt[8]{\frac{32}{2}}=\pm\sqrt[8]{16}$

$$=\pm\sqrt[8]{2^4}=\pm\sqrt{2}$$

مقایسه ۱۱

حاصل‌ضرب n واسطه

اگر بین دوعدد $\div \ a \ , \ldots \ b$ ، n واسطه‌هندسی درج کنیم، داریم:

در تصاعد عددی داشتیم: $S_{\text{واسطه‌ها}}=\frac{n}{2}(a+b)$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{\text{واسطه‌ها}}=(ab)^{\frac{n}{2}}}$$

مثال: بین دوعدد $\sqrt[4]{8}$ و $\sqrt[4]{2}$ ، هشت واسطه هندسی درج کردیم، حاصل‌ضرب این (۸) واسطه‌چند است؟

حل :

$$P_{\text{واسطه‌ها}}=(ab)^{\frac{n}{2}} \Longrightarrow P_8=(\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8})^{\frac{8}{2}}=$$

$$(\sqrt[4]{16})^4=2^4$$

مقایسه ۱۲

S_n ، مجموع n جمله اول یك تصاعد هندسی متناهی .

اگر a_1 جمله‌اول و q قدرنسبت یك تصاعدهندسی‌متناهی باشد داریم:

$$\div\ a_1 : a_1q : a_1q^2 : a_1q^3 : \ldots : a_1q^{n-1}$$

پس مجموع n جمله‌اول این‌تصاعد هندسی متناهی چنین است:

رابطه (I)

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$$

اگر طرفین رابطه (I) را در q ضرب‌کنیم خواهیم داشت:

رابطه (II)

$$q\cdot S_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n$$

حال اگر رابطه (I) را از رابطه (II) کم‌کنیم خواهیم‌داشت:

$$qS_n-S_n=a_1q^n-a_1 \Longrightarrow$$

$$S_n(q-1)=a_1(q^n-1) \Longrightarrow$$

$$q\neq 1$$

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}$$

اگر به جای a_n ، a_1q^{n-1} را قرار دهیم خواهیم‌داشت:

$$S_n=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}=\frac{q(a_1q^{n-1})-a_1}{q-1} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{q\cdot a_n-a_1}{q-1}=S_n}$$

توضیح: اگر $q=0$ تصاعد به صورت

$a_1, 0, 0, 0, \cdots, 0$

درمی آیدکه $S_n=a_1$ واگر $q=1$ تصاعدبه صورت

$a_1, a_1, \cdots, a_1$

درمی آیدکه $S_n=na_1$

مثال : درتصاعــد هندسی ، ۸ : ۴ ÷÷ ، مجموع (۱۰) جمله‌اول چقدر است؟

حل : $q=\frac{8}{4}=2$

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{4(2^{10}-1)}{2-1}=$$

$$4(2^{10}-1)=2^{12}-4$$

مقایسه ۱۳۴

حد مجموع جملات یك تصاعد هندسی نزولی‌نامتناهی.

تصاعد هندسی . . . : $\frac{1}{4}$: ۴:۱ ÷÷ را درنظرمی گیریم.

ملاحظه می کنیم که $q=\frac{1}{4}$ ، و

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{4\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{4}-1}$$

چون‌تصاعد باجملات نامتناهی‌است پس $n\to+\infty$، در نتیجه

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n\to 0$$

پس :

$$\text{حد } S=\frac{4(0-1)}{-\frac{3}{4}}=\frac{-4}{-\frac{3}{4}}=\frac{16}{3}$$

در حالت کلی می‌توان گفت اگر در یك تصاعــد هندسی نزولی نامتناهی $|q|<1$ ، آنگاه :

$$\lim_{n\to+\infty}(q)^n=0$$

پس فرمول S_n به فرمول حد مجموع زیر تبدیل می‌شود:

$$n\to+\infty \Longrightarrow q^n\to 0 \Longrightarrow$$

$$\text{حد } S=\frac{a_1(0-1)}{1-q} \Longrightarrow \boxed{\text{حد } S=\frac{a_1}{1-q}}$$

توجه : اگر درتصاعد موردبحث شماره (۱۳)، $q=\frac{1}{2}$

آنگاه $\boxed{\text{حد } S=2a_1}$

مثال : حدمجموع تصاعدهندسی...: $2\sqrt{3}$: $\sqrt{48}$ ÷÷ را بیابید .

حل :

$$q=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{48}}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\text{حد } S=2a_1=2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$$

مسأله۱ ـ در یك تصاعد هندسی نزولی نامتناهی، جمله اول(۱۰۰) است وهرجمله برابر است با ده‌برابر حدمجموع کلیه جملات بعداز خودش. حد مجموع کلیه جملات این‌تصاعد چند است؟

حل:

$$\div\div\ 100 : \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots,}_{k}$$

اگر به جز جمله اول، حد مجموع کلیه جملات را (k) بنامیم، بنا به فرض مسأله $100 = 10k$ پس: $k = 10$

$$\Rightarrow \text{حد } S = 110$$

مسأله۲ - در یك تصاعد هندسی نزولی نامتناهی، حد مجموع‌جملات (۲۰) و جمله دوم این‌تصاعد (۵) است. جمله هفتم این تصاعد چند است؟

حل: صورت و مخرج کسررا در q ضرب می‌کنیم:

$$\text{حد } S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\text{حد } S = \frac{a_1 q}{(1-q)q} \Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{5}{q-q^2} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{1} = \frac{1}{q-q^2} \Rightarrow 1 = 4q - 4q^2 \Rightarrow$$

$$4q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow (2q-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}} \Rightarrow a_1 = \frac{5}{q} = \frac{5}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = 10}$$

$$a_7 = a_1 q^6 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10}{64} = \frac{5}{32} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_7 = \frac{5}{32}}$$

مسأله۳ - دریك تصاعد هندسی، مجموع سه جمله اول (۱۱۲)و مجموع شش جمله‌اول (۱۲۶) است. قدر نسبت این تصاعد چند است؟

حل:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 112$$

$$112 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 = 126 \Rightarrow$$

$$112 + q^3(a_1 + a_1 q + a_1 q^2) = 126 \Rightarrow$$

$$112 + q^3(112) = 126 \Rightarrow 112q^3 = 14 \Rightarrow$$

$$q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$$

مسأله۴ - اگر در مثلث ABC، $\hat{A} = 90°$ و اضلاع a و b و c تصاعد هندسی بسازند قدرنسبت این تصاعد را بیابید.

حل: $\div\div\ c : b : a$ قدر نسبت q

ضلع c رابا $\frac{b}{q}$ وضلع a را با bq نشان داده‌ایم.

$$\div\div\ \frac{b}{q} : b : bq$$

مثلث قائم‌الزاویه است $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$

طرفین تساوی‌را در $\frac{q^2}{b^2}$ ضرب می‌کنیم:

$$b^2 q^2 = b^2 + \frac{b^2}{q^2} \Rightarrow q^4 = q^2 + 1 \Rightarrow$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

مسأله ۵ - ثابت‌کنید اگر اضلاع مثلثی تصاعد هندسی بسازند، سه ارتفاع آنها نیز تصاعد هندسی می‌سازند.

حل: اضلاع‌را a و b و c و ارتفاعات متناظر آنهارا h_a

و h_b و h_c می‌نامیم .

بنا به فرض مسأله داریم:

$$:: c : b : a \qquad b^2 = ac$$

$$2S_{ABC} = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

$$2S \times 2S = 2S \times 2S$$

$$bh_b \times bh_b = a \cdot h_a \times ch_c$$

$$b^2 h_b^2 = ach_a h_c \Longrightarrow \boxed{h_b^2 = h_a h_c}$$

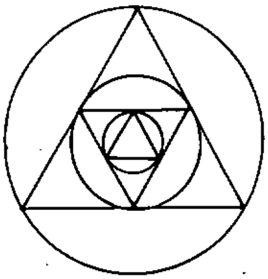
مسأله ۶ - مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مفروض است، اگر اوساط اضلاع را به‌هم وصل کنیم مثلث جدیدی به‌دست می‌آید و اگر این عمل را بی‌شمار دفعه ادامه دهیم، مطلوب است محاسبه:

الف: حد مجموع محیطهای مثلثها

ب: حد مجموع مساحتهای مثلثها

ج: حد مجموع مساحتهای دوایر محاطی این مثلثها

د: حد مجموع مساحتهای دوایر محیطی این مثلثها



حل الف: ضلع مثلث اولی a پس محیط آن $3a$ است.

ضلع مثلث دومی $\frac{a}{2}$ پس محیط آن $\frac{3a}{2}$ است.

$$\Longrightarrow q = \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{حد } S = 2a_1 = 2(3a) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{حد } S = 6a}$$

حل : ب: ضلع مثلث اولی a و مساحت آن $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است. ضلع مثلث دومی $\frac{a}{2}$ و مساحت آن $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ است،

بنابراین

$$q = \frac{1}{4}$$

$$\text{حد } S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{حد } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}}$$

حل ج :

$$\text{ضلعی منتظم محیطی } n \text{ طول ضلع } = 2R\,tg\,\frac{180^\circ}{n} \Longrightarrow$$

$$a = 2R\,tg\,60^\circ \Longrightarrow a = 2R\sqrt{3} \Longrightarrow R = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow S_{\text{دایره محاطی اولی}} = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{12} =$$

جمله اول تصاعد هندسی

$$a \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{a}{2} \Longrightarrow R'_{\text{جدید}} = \frac{a}{4\sqrt{3}} \Longrightarrow$$

$$S_{\text{دایره محاطی دومی}} = \pi R'^2 = \frac{\pi a^2}{48} = \text{جمله دوم تصاعد هندسی}$$

$$\Longrightarrow q = \frac{1}{4} \Longrightarrow \text{حد} S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi a^2}{12}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\pi a^2}{12}}{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\text{حد}} = \frac{\pi a^2}{9}}$$

حل د :

$$\text{طول ضلع } n \text{ ضلعی منتظم محاطی} = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow$$

$$a = 2R\sin 60^\circ$$

$$a = 2R\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{دایره محیطی اولی}} = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{3} =$$

جمله اول تصاعد هندسی

$$a \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{a}{2} \Rightarrow R'_{\text{جدید}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{دایره محیطی دومی}} = \pi R'^2 = \frac{\pi a^2}{12} =$$

جمله دوم تصاعد هندسی

$$\Rightarrow q = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\text{حد}} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi a^2}{3}}{1-\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\boxed{S_{\text{حد}} = \frac{4\pi a^2}{9}}$$

ادب و ریاضی

پیش از آنکه نگاهی به هندسه بیفکند، که به تصادف اتفاق افتاد، چهل ساله بود. مقدمات اقلیدس بود و در کتابخانهٔ آقایان، و در صفحهٔ باز آن قضیه‌ای، قضیه را خواند، و گفت: قسم به خدا (گهگاه سوگندان غلیظی به طریق تأکید بر زبان می‌آورد) که غیر ممکن است! و برهان آن را، که به قضیهٔ دیگری ارجاعش می‌داد، و آن را هم خواند، دید. قضیهٔ دوم به قضیهٔ دیگر رجوعش داد، آن را هم خواند...... تا سرانجام به برهان، حقیقتِ مطلب را پذیرفت، و به این ترتیب به محبت هندسه گرفتار شد.

«از سرگذشت هابز»



قواعد استنتاج

غلامرضا یاسی‌پور

هر باب از این کتاب نگارین که برکنی
همچون بهشت‌گویی‌از‌آن باب‌خوشتر است

دو باب اصلی منطق یکی باب تصور[1] است و دیگری باب تصدیق[2]. تصور همان تعریف[3] و تعریف همان قول شارح است و تصدیق همان قضیه[4]، و قضیه همان قول جازم یا لفظ مرکب تام خبری، که در منطق ریاضی آن را گزاره[5] می‌نامند و کل این دو را علم می‌گویند، چنانکه گفته‌اند:

علم، در صورتی که اقرار به نسبت (بین دو چیز) باشد تصدیق وگرنه تصور است[6].

و هریک را به بدیهی[7] و نظری[8] تقسیم می‌کنند، چنانکه فرموده‌اند:

و به ضرورت به دو قسم بدیهی و نظری تقسیم می‌شود، و نظری ملاحظهٔ معلوم برای حصول به مجهول است[9].

باب معرّف[10] در تصور نظری و باب حجت[11] در تصدیق نظری است، و در همین باب است که از گزاره‌هایی به نام مقدمات[12] به گزاره‌ای به نام نتیجه[13] می‌رسیم و در مورد همین رسیدن از مقدمات به نتیجه است که استنتاج[14] می‌کنیم و بنابراین به قواعد استنتاج[15] نیاز داریم.

اما، پیش از پرداختن به این موضوع باید مشخص کنیم که استنتاج یا استدلال[16] درست[17] چیست. در این صورت به تعریف استنتاج درست می‌پردازیم.

تعریف ۱. استنتاجی را درست می‌گوییم که چون صورت آن را به دست آوریم و جدول ارزش این صورت را رسم کنیم، در این جدول ارزش هر جا که مقدمات صورت مزبور راست[18] باشند نتیجهٔ آن نیز راست باشد.

اما صورت یا صورت استدلالی[19] چیست؟

تعریف ۲. چون در یک استدلال به جای گزاره‌های ساده[20] متغیرهای گزاره‌ای[21] و به جای رابطها[22] علایم منطقی[23] آنها را قرار دهیم، حاصل کار را صورت استدلالی گویند. متغیرهای گزاره‌ای به جای گزاره‌های ساده می‌نشینند و به عبارت دیگر جانگهدارند[24].

به این ترتیب برای تحقیق درستی استنتاج زیر:

اگر باران ببارد در این صورت هوا ابر است.
باران می‌بارد.
∴ هوا ابر است.[25]

«باران می‌بارد» را با p، و «هوا ابر است» را با q و رابط «اگر ـ در این صورت» را با ⇒ نمایش می‌دهیم و در نتیجه صورت استدلالی زیر را به دست می‌آوریم:

$p \Rightarrow q$

p

$\therefore q$

اکنون به رسم جدول ارزش این صورت می‌پردازیم:

مقدمهٔ ۱	مقدمهٔ ۲	نتیجه
$p \Rightarrow q$	p	q
T	T	T
F	T	F
T	F	T
T	F	F

با توجه به جدول فوق، ملاحظه می‌کنیم که در هر سطر جدول که مقدمات ۱ و ۲ راستند نتیجه نیز راست است (در این مثال این واقعه تنها در سطر اول اتفاق می‌افتد)، بنابراین استدلال مورد بحث درست است. به این ترتیب، استدلال

اگر ناپلئون تهرانی است در این صورت ایرانی است.

ناپلئون تهرانی است.

∴ ناپلئون ایرانی است.

نیز که دارای همان صورت فوق است استدلالی درست[۲۶] می‌باشد.

اکنون استدلال نادرست[۲۷] زیر را در نظر می‌گیریم:

۲+۲=۴

∴ تهران پایتخت پاکستان است.

و صورت آن را با قرار دادن p به جای «۲+۲=۴» و q به جای «تهران پایتخت پاکستان است» به دست می‌آوریم:

p

$\therefore q$

وجدول آن را رسم می‌کنیم:

مقدمه	نتیجه
p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

و ملاحظه می‌کنیم که در هر سطر که مقدمه راست است نتیجه چنین نیست (در سطر دوم مقدمه T است در حالی که نتیجه نیست). بنابراین می‌گوییم که استدلال مزبور نادرست است. استدلال

۲+۲=۴

∴ ۲×۳=۶

نیز که دارای همان صورت است، هر چند مقدمه و نتیجه‌اش راستند، نادرست است.

به این ترتیب می‌توانیم درستی یا نادرستی هر استدلال را با روش مکانیکی[۲۸] فوق تحقیق کنیم. در این صورت چه نیازی به طرح قوانین استنتاج داریم؟ پاسخ در این مسأله نهفته است که روش فوق، گرچه می‌تواند در مورد هر استدلال متعارف[۲۹]ی به کار رود، چون تعداد متغیرهای موجود در مقدمات یک صورت استدلالی زیاد باشد (اما نامتناهی نباشد) روشی عملی[۳۰] نیست. زیرا همانطور که می‌دانیم چون تعداد متغیرهای گزاره‌ایِ واقع در صورتی n باشد تعداد سطرهای جدول آن ۲^n می‌شود[۳۱]، و به این ترتیب چون n مثلاً برابر ۱۰ باشد تعداد سطرهای جدول مربوطه $۲^{۱۰}$ یا ۱۰۲۴ می‌شود و این تعداد، رسم جدول را، اگر نه غیر ممکن، بسیار پرزحمت می‌کند. بنا به این دلیل است که نیاز به روشی کاراتر و عملی‌تر داریم و این روش همان

روش استفاده از قواعد استنتاج است.

اما قواعد استنتاج خود صورتهای استدلالی درستی می‌باشند که چون در مورد مقدماتی به کار روند و نتیجه را به دست دهند آن نتیجه با راست بودن مقدمات، راست می‌شود و به عبارت دیگر راستی را در هر مورد که به کار روند به میراث می‌گذارند.

این قواعد فعلاً تعداد، حتی صور ثابتی ندارند و از هر کتاب به کتاب دیگر تغییر می‌کنند. و ما برای این مقاله، آنها را از کتاب معتبر منطق علامتی[32] کوپای[33] انتخاب کرده‌ایم. قواعد مورد ذکر به خاطر فواید عملی، مستقل از یکدیگر نیز نیستند (گر چه در یک منطق صوری[34] باید باشند) و به عبارت دیگر می‌توان بعضی از آنها را از بعضی دیگر استنتاج کرد. اما باید تمام[35] باشند، یعنی باید بتوانند درستی هر استنتاج درست را ثابت کنند و به عبارت دیگر با در دست داشتن آنها، در صورتی که درستی استدلال درستی ثابت نشود این استدلال کننده است که عجز دارد و ناتوانی از آنِ قواعد نیست. قواعد مزبور به ترتیب زیرند و همانطور که گفته شد می‌توان درستی هر یک از آنها را با استفاده از جدول ارزش تحقیق کرد.

۱. قیاس استثنایی یا قاعدهٔ انفصال[36].

$p \Rightarrow q$

p

$\therefore q$ M.P.

۲. انفصال نقیض[37].

$p \Rightarrow q$

$\sim q$

$\therefore \sim p$ M.T.

۳. قیاس فرضی[38].

$p \Rightarrow q$

$q \Rightarrow r$

$\therefore p \Rightarrow r$ H.S.

۴. قیاس فاصل[39].

$p \vee q$

$\sim p$

$\therefore q$ D.S.

۵. قیاس ذوحدّین بانی[40].

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

$p \vee r$

$\therefore q \vee s$ C.D.

۶. قیاس ذوحدّین مخرب[41].

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

$\sim q \vee \sim s$

$\therefore \sim p \vee \sim r$

۷. تسهیل[42].

$p \wedge q$

$\therefore p$ Simp.

۸. ترکیب عطفی[۴۳].

p

q

$\therefore p \wedge q$ Conj.

۹. جمع[۴۴].

p

$\therefore p \vee q$ Add.

پیش از به دست دادن بقیهٔ قواعد به ذکر چند مثال می‌پردازیم و در مورد آنها این مطلب را خاطر نشان می‌کنیم که حروف بزرگ به جای گزاره‌های خاص به کار رفته، علامت / پس از آخرین مقدمه آمده و بعداز ∴ نتیجهٔ استدلال آورده شده و در سطرهای بعدی هر مقدمه و هر قاعدهٔ به کار رفته در مقابل سطر مربوطه نوشته شده است، و این ترتیب را به دست دادن اثبات صوری[۴۵] استدلال می‌گوییم.

مثال ۱. اثبات صوری استدلال زیر را به دست دهید.

$(A \wedge B) \Rightarrow [A \Rightarrow (D \wedge E)]$, $(A \wedge B) \wedge C / \therefore D \vee E$

حل. استدلال را به ترتیب زیر اثبات می‌کنیم:

1. $(A \wedge B) \Rightarrow [A \Rightarrow (D \wedge E)]$
2. $(A \wedge B) \wedge C / \therefore D \vee E$
3. $A \wedge B$ — 2, Simp.
4. $A \Rightarrow (D \wedge E)$ — 3, 1, M.P.
5. A — 3, Simp.
6. $D \wedge E$ — 5, 4, M.P.
7. D — 6, Simp.
8. $D \vee E$ — 7, Add.

در سطر ۳، $A \wedge B$ را از سطر ۲، با استفاده از قاعدهٔ تسهیل استنتاج کرده‌ایم و به همین علت در مقابل آن ۲ و .Simp را که مخفف تسهیل است، نوشته‌ایم. در سطر ۴، $A \Rightarrow (D \wedge E)$ را با استفاده از سطرهای ۳ و ۱ و قاعدهٔ قیاس استثنایی استنتاج کرده‌ایم و به همین مناسبت در مقابل آن ۳، ۱ و .M.P را، که مخفف قیاس استثنایی است، نوشته‌ایم. در سطر ۵، A را از سطر ۳، با استفاده از قاعدهٔ تسهیل نتیجه گرفته‌ایم و به همین علت در مقابل آن ۳ و Simp، مخفف تسهیل، را یادداشت کرده‌ایم. در سطر ۶، $D \wedge E$ را از سطر ۵ و ۴ با قیاس استثنایی به دست آورده‌ایم و از همین رو در مقابل آن ۵، ۴ و .M.P، مخفف قیاس استثنایی، را نوشته‌ایم. در سطر ۷، D را از سطر ٦ با قاعدهٔ تسهیل استنتاج کرده‌ایم و به همین مناسبت در مقابل آن ٦ و .Simp، علامت تسهیل، را رقم زده‌ایم. و آخرالامر، در سطر ۸، $D \vee E$ را از سطر ۷، با استفاده از قاعدهٔ جمع حاصل کرده‌ایم و به همین علت در مقابل آن ۷ و .Add، مخفف جمع، را نوشته‌ایم، و به این ترتیب، با استفاده از قواعد استنتاج مزبور، بدون رسم جدول ارزش، که در این حالت به 2^5 یا ۳۲ سطر احتیاج داشته، به مطلوب رسیده‌ایم.

مثال ۲. اثبات صوری استدلال زیر را به دست دهید.

1. $H \Rightarrow (I \Rightarrow J)$
2. $K \Rightarrow (I \Rightarrow J)$
3. $(\sim H \wedge \sim K) \Rightarrow (\sim L \vee \sim M)$
4. $(\sim L \Rightarrow \sim N) \wedge (\sim M \Rightarrow \sim O)$
5. $(P \Rightarrow N) \wedge (Q \Rightarrow O)$
6. $\sim (I \Rightarrow J) / \therefore \sim P \vee \sim Q$
7. $\sim H$ — 6, 1, M.T.
8. $\sim K$ — 6,2, M.T.
9. $\sim H \wedge \sim K$ — 7,8, Conj.
10. $\sim L \vee \sim M$ — 9,3, M.P.

11. $\sim N \vee \sim O$	4,10, C.D.
12. $\sim P \vee \sim Q$	5,11, D.D.

اکنون به ذکر قاعدهٔ بعد، یعنی قاعدهٔ جانشینی[46]، می‌پردازیم.

قاعدهٔ جانشینی: هر یک از عبارات منطقاً معادل زیر را می‌توان، در هرجا که رخ دهند، به جای یکدیگر قرار داد.

۱۰. قضایای دومورگان[47] (De M.):

$$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$
$$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

۱۱. تعویض پذیری[48] (Com):

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$
$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

۱۲. شرکت پذیری[49] (Assoc):

$$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$$
$$[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$$

۱۳. توزیع پذیری[50] (Dist.):

$$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$
$$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

۱۴. نقیض مضاعف[51] (D.N.):

$$p \equiv \sim \sim p$$

۱۵. ترانهاد[52] یا جبر (Trans.):

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

۱۶. استلزام مادی[53] (Impl.):

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

۱۷. تعادل مادی[54] (Equiv.):

$$(p \equiv q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$
$$(p \equiv q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$$

۱۸. صدور[55] (Exp.)

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

۱۹. صادق[56] (Taut.):

$$p \equiv (p \vee p)$$
$$p \equiv (p \wedge p)$$

در مورد هر یک از قواعد فوق باید توجه داشت که اولاً: دو گزاره را

از لحاظ مادی معادل[57] گویند اگر دارای یک ارزش راستی باشند، و این گزاره را، که آنها از لحاظ مادی معادلند، با درج علامت «≡» در بین آنها علامتی می‌کنیم، و علامت مزبور را با جدول زیر تعریف می‌کنیم:

p	q	p ≡ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

در این صورت همانطور که از جدول فوق برمی‌آید گفتن اینکه دو گزاره از لحاظ مادی معادلند گفتن این است که از لحاظ مادی مستلزم یکدیگرند. در نتیجه علامت مزبور را می‌توان به صورت «از لحاظ مادی معادل است با» یا «اگر و تنها اگر» خواند. گزارهٔ به صورت $p \equiv q$ را دو شرطی[58] می‌نامند. ثانیاً، دو گزاره را منطقاً معادل[59] می‌گویند اگر دو شرطی بیان کنندهٔ تعادل مادیشان صادق[60] یا همواره راست باشد. به این ترتیب هر یک از دو عبارت واقع در ده مورد فوق منطقاً معادلند و به عبارت دیگر عبارت حاصل از کل آنها صادق است، یعنی در جدول ارزش همواره T می‌گیرد و این مطلب را می‌توان در مورد هر یک از تعادلات فوق تحقیق کرد.

توجه داشته باشید که بین نه قاعدهٔ استنتاج اول و ده قاعدهٔ استنتاج بعد تفاوت مهمی موجود است و آن تفاوت این است که نه قاعدهٔ اول را می‌توان تنها در مورد سطور کامل به کار برد. به این ترتیب، مثلاً، بااستفاده از تسهیل می‌توان A را از $A \wedge B$، در صورتی که $A \wedge B$ سطری کامل باشد، استنتاج کرد، و اگر این عبارت قسمتی از یک سطر، مثلاً، $(A \wedge B) \Rightarrow C$ باشد، نمی‌توان A را از آن با استفاده از این قاعده نتیجه گرفت. در حالی که هر یک از ده قاعدهٔ اخیر را هم می‌توان در مورد یک سطر کامل هم در مورد قسمتی از یک سطر به کار برد. به این ترتیب نه تنها می‌توان $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ را از سطر کامل $(A \wedge B) \Rightarrow C$، با استفاده از صدور، استنتاج کرد، بلکه از سطر $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \vee D$ هم می‌توان $[A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \vee D$ را از این قاعده نتیجه گرفت. تفاوت مهم دیگر این است که نه قاعدهٔ اول یک طرفه‌اند در حالی که ده قاعدهٔ بعد دو طرفه می‌باشند.

اکنون به ذکر مثالی چند در توضیح کاربرد قواعد فوق می‌پردازیم.

مثال ۳. اثبات صوری درستی استدلال زیر را به دست دهید:

1. $(O \Rightarrow \sim P) \wedge (P \Rightarrow Q)$	
2. $Q \Rightarrow O$	
3. $\sim R \Rightarrow P \;/ \therefore R$	
4. $\sim Q \vee O$	2, Impl.
5. $O \vee \sim Q$	4, Com.
6. $(O \Rightarrow \sim P) \wedge (\sim Q \Rightarrow \sim P)$	1, Trans.
7. $\sim P \vee \sim P$	6, 5, C.D.
8. $\sim P$	7, Taut.
9. $\sim\sim R$	8,3, M.T.
10. R	9, D.N.

مثال ۴. اثبات صوری درستی استدلال زیر را به دست دهید:

1. $J \vee (\sim K \vee J)$	
2. $K \vee (\sim J \vee K) \;/ \therefore (J \wedge K) \vee (\sim J \wedge \sim K)$	
3. $(\sim K \vee J) \vee J$	1, Com.
4. $\sim K \vee (J \vee J)$	3, Assoc.
5. $\sim K \vee J$	4, Taut.
6. $K \Rightarrow J$	5, Impl.
7. $(\sim J \vee K) \vee K$	2, Com.
8. $\sim J \vee (K \vee K)$	7, Assoc.
9. $\sim J \vee K$	8, Taut.

10. $J \Rightarrow K$	9, Impl.
11. $(J \Rightarrow K) \wedge (K \Rightarrow J)$	10,6, Conj.
12. $J \equiv K$	11, Equiv.
13. $(J \wedge K) \vee (\sim J \wedge \sim K)$	12, Equiv.

همانطور که قبلاً گفته شد معمولاً چنین است که قواعد استنتاج مستقل از یکدیگر نیستند و برخی را می‌توان از برخی دیگر به دست آورد. این مطلب در مورد قواعد فوق نیز صادق است و مثلاً می‌توان قاعدهٔ .M.T را از قواعد جبر و .M.P به ترتیب زیر نتیجه گرفت:

1. $p \Rightarrow q$	
2. $\sim q / \therefore \sim p$.	
3. $\sim q \Rightarrow \sim p$	1, Trans.
4. $\sim p$	3,2, M.P.

در این جا به مقاله‌مان خاتمه می‌دهیم و اثبات ناتمام بودن قواعد فوق، نیز نادرستی استدلالات را برای مقالهٔ دیگر می‌گذاریم.

یادداشتها

۱- Concept

۲- Assent

۳- Definition

۴- Proposition

۵- Statement

٦- اَلْعِلْمُ اِنْ کانَ اِذْعاناً لِلنِّسْبَةِ فَتَصْدیقٌ، وَ اِلاّ فَتَصَوُّرٌ. «تهذیب المنطق تفتازانی»

۷- Self-evident

۸- Speculative

۹- و یَقْتَسِمانِ بِالضَّرورَةِ، اَلضَّرورَةِ و اْلاِکْتِسابَ بِالنَّظَرِ، وَ هُوَ مُلاحِظَةُ الْمَعْقُولِ لِتَحْصیلِ الْمَجْهُولِ. «تهذیب المنطق»

۱۰- Definiens در مقابل معرِّف «Definiendum»

۱۱- Argument

۱۲- Premisses

۱۳- Conclusion

۱۴- Deduction

۱۵- Rules of Inference

۱٦- Reasoning

۱۷- Valid

۱۸- True در این مقاله «راست» را با T و «دروغ»، «False» را با F نمایش می‌دهیم.

۱۹- Argument Form

۲۰- Simple Statement

۲۱- Statement Variable

۲۲- Connective

۲۳- Logical Symbols

۲۴- Place Holder، اینها را با حروف کوچک الفبای لاتین با شروع از p نمایش می‌دهیم.

۲۵- ∴ علامت «در نتیجه» Therefore است.

۲٦- استدلال مزبور درست است اما صحیح «Sound» نیست، زیرا حداقل یکی از مقدمات آن دروغ است. به این ترتیب استدلالی صحیح است که علاوه بر درست بودن، جمیع مقدماتش نیز راست باشد. اما در منطق تنها با درستی استدلالات کار داریم و تحقیق راستی مقدمات کار منطقی با عنوان منطقی نیست و اشتغال عالم است.

۲۷- Invalid

۲۸- Mechanical Procedure

۲۹- مقصود از استدلال متعارف «Common Reasoning» استدلالی است که مقدمات و متغیرهای گزاره‌ای به کار رفته در مقدمات صورت استدلالی آن، هر دو، به تعداد متناهی باشند.

۳۰- Effective Procedure

۳۱- این مطلب را با استفاده از استقراء ریاضی ثابت می‌کنند.

۳۲- Symbolic Logic

۳۳- Irving M. Copi منطقی معاصر و استاد دانشگاه هاوایی

۳۴- Formal Logic

۳۵- Complete

۳٦- Modus Ponens، منطقیون معمولاً برای ترکیب شرطی از علامت «⊃» که «C» ی برگردان است استفاده می‌کنند و این C خود اول کلمه Conditional یا «شرطی» است. به همین ترتیب برای ترکیب عطفی از علامت. (چون در این مرجع) یا علامت & (چون در کتب دیگر) استفاده می‌برند، ولی ما در این مقاله به ترتیب از علامات «⇒» و «∧» بهره برده‌ایم.

۳۷- Modus Tollens

۳۸- Hypothetical Syllogism

۳۹- Disjunctive Syllogism

۴۰- Constructive Dilemma

۴۱- Destructive Dilemma

Simplification -۴۲

Conjunction -۴۳

Addition -۴۴

Formal Proof -۴۵

Rule of Replacement -۴۶

De Morgan's Theorms -۴۷

Commutation -۴۸

Association -۴۹

Distribution -۵۰

Double Negation -۵۱

Transposition -۵۲

Material Implication -۵۳

Material Equivalence -۵۴

Exportation -۵۵

Tautology -۵۶

Materially Equivalent -۵۷

Biconditional -۵۸

Logically Equivalent -۵۹

Tautology -۶۰

تفریح اندیشه ۲

در صورتی که P در مهمانی بودن و D مغرور بودن و R دانشجوی سال اول بودن و S دانشجوی سال آخر بودن و A خوشحال بودن را نمایش دهد گزارهٔ زیر را علامتی کنید:

اگر هر دانشجوی سال آخر در مهمانی مغرور نبود، در این صورت بعضی از دانشجویان سال اول خوشحال می‌شدند.

از: The Language of Logic
MORTON L. SCHAGRIN



جواب در صفحهٔ ۹۶

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

(به دو روش)

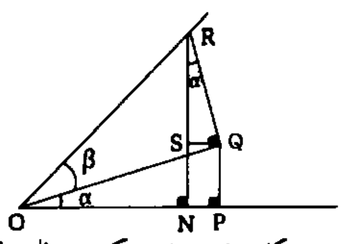
● حمید رضا امیری

هر گاه α و β دو زاویه دلخواه باشند می‌خواهیم نسبتهای مثلثاتی $(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنیم یعنی:

$$\sin(\alpha+\beta)\ ,\ \cos(\alpha+\beta)$$
$$tg(\alpha+\beta)\ ,\ cotg(\alpha+\beta)$$

ابتدا به محاسبهٔ $\sin(\alpha+\beta)$ می‌پردازیم، لازم به تذکر است می‌توان ابتدا $\cos(\alpha+\beta)$ را محاسبه نمود و سپس با استفاده از اتحاد $\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ ، $\sin(\alpha+\beta)$ را به‌دست آورد. در ذیل به ۲ روش متفاوت یکبار ابتدا $\sin(\alpha+\beta)$ محاسبه می‌شود و در روش‌دوم ابتدا $\cos(\alpha+\beta)$ را به دست می‌آوریم.

روش اول: محاسبهٔ $\sin(\alpha+\beta)$.



با توجه به شکل واضح است که در مثلث قائم الزاویهٔ ONR داریم:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{NR}{OR}=\frac{NS+SR}{OR}=\frac{PQ+SR}{OR}$$

$$=\frac{PQ}{OR}+\frac{SR}{OR}=\frac{PQ}{OQ}\times\frac{OQ}{OR}+\frac{SR}{QR}\times\frac{QR}{OR}$$

$$=\sin\alpha\times\cos\beta+\cos\alpha\times\sin\beta$$

(در مثلث قائم‌الزاویهٔ SQR داریم : $\frac{SR}{QR}=\cos\alpha$)

$$\Longrightarrow \boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

حال با استفاده از اتحاد $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ به محاسبهٔ $\cos(\alpha+\beta)$ می‌پردازیم. اما ابتدا نیاز داریم

$$\sin(\alpha-\beta)$$

را به دست آوریم. برای به‌دست آوردن رابطه موردنظر در رابطهٔ $\sin(\alpha+\beta)$ کافیست β را به $(-\beta)$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

و داریم:

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta\ ,\ \cos(-\beta)=\cos\beta$$
$$\Longrightarrow \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\Longrightarrow \cos(\alpha+\beta)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=$$

$$\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$

$$\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\cos\alpha}\cos\beta-\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\sin\alpha}\sin\beta=$$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

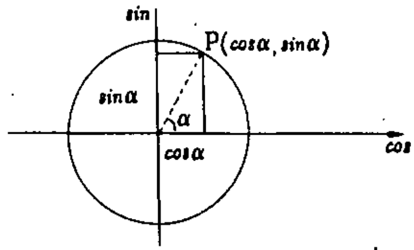
و اگر در رابطهٔ اخیر β را به $(-\beta)$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=$$

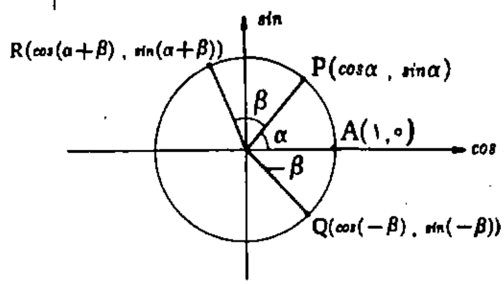
$$\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta) \Longrightarrow$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

روش‌دوم: دراین‌روش ابتدا $\cos(\alpha+\beta)$ را محاسبه‌می‌کنیم. با توجه به شکل (۱) و تعریف دایره مثلثاتی و محورهای آن می‌توان گفت دایره مثلثاتی مکان‌هندسی نقاطی از صفحه چون P است که طول این نقاط $\cos\alpha$ و عرض این نقاط $\sin\alpha$ می‌باشد (α زاویه روبرو به‌کمان OP است). حال با توجه به‌این مطلب و فرمول فاصلهٔ دونقطه وشکل (۲) خواهیم داشت:



شکل ۱



شکل ۲

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{QA}=\widehat{PR}=\beta\\ \widehat{AP}=\alpha\\ \widehat{QAP}=\alpha+\beta\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{PQ}=\widehat{RA}$$

اندازه‌های دوکمان $\widehat{RA}$ و $\widehat{PQ}$ با هم‌برابرند لذا:

$$PQ=RA \Longrightarrow \sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}$$

$$=\sqrt{(x_R-x_A)^2+(y_R-y_A)^2}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{[\cos\alpha-\cos(-\beta)]^2+[\sin\alpha-\sin(-\beta)]^2}$$

$$=\sqrt{[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+[\sin(\alpha+\beta)-0]^2} \Longrightarrow$$

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos(-\beta)+\cos^2(-\beta)+\sin^2\alpha$$

$$-2\sin\alpha\sin(-\beta)+\sin^2(-\beta)$$

$$(1)$$

$$=\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)+1+\sin^2(\alpha+\beta)$$

از طرفی داریم: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

پس: $\sin^2(-\beta)+\cos^2(-\beta)=1$

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$$

$$(1) \Longrightarrow -2\cos\alpha\cos(-\beta)-2\sin\alpha\sin(-\beta)+2$$

$$=-2\cos(\alpha+\beta)+2 \Longrightarrow \cos(\alpha+\beta)=$$

$$\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \Longrightarrow$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی

$$\sin(\alpha-\beta)\ ,\ \sin(\alpha+\beta)\ ,\ \cos(\alpha-\beta)$$

مشابه روش قبل است.

۱ مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

نمایش وابستگیهای بین جبر و هندسه[1]

از: Mathematics Teacher

دیوید. ار. لینگ و
آرتور. تی. وایت[2]

عبارت $2n/(n-2)$ حداقل در دو زمینهٔ بسیار متفاوتِ ارتباط دهندهٔ جبر و هندسه رخ می‌دهد. عبارت مزبور در یکی از این زمینه‌ها در صورتی که عددی صحیح باشد جالبتر می‌شود، و در دیگری باید عددی صحیح باشد.

کدام مستطیلها مساحت و محیط از لحاظ عددی مساوی دارند؟

بیتز[3] (۱۹۷۹) مثلثهای دارای مساحت و محیط از لحاظ عددی مساوی را مشخص کرد. فی‌المثل، مثلث قائم‌الزاویهٔ با اضلاع ۶، ۸، و ۱۰ مساحت و محیطی، هر دو، مساوی ۲۴ واحد دارد. مثال دوم، مثلث قائم‌الزاویهٔ دارای اضلاع به طولهای ۵، ۱۲، و ۱۳ است. مارکویتس[4] (۱۹۸۱) نشان داد که بی‌نهایت مثلث با اضلاع به طولهای جمیعاً گویا، محیط و مساحتی از لحاظ عددی مساوی دارند، اما تنها پنج مثلث با اضلاع به طولهای جمیعاً عدد طبیعی چنین‌اند، و از اینها، چنان که قبلاً داده شده، دو مثلث قائم‌الزاویه‌اند. شاهین[5] (۱۹۸۶) ملاحظه کرد که مربع 4×4 محیط و مساحتی از لحاظ عددی مساوی ۱۶ دارد و بعد اشیای سه بعدی‌ای را رسم کرد که دارای مجموع یالها، مساحت سطح، و حجم جمیعاً از لحاظ عددی مساوی، بودند.

با بازگشت به صفحه و تعمیم مربع به مستطیل (مثلاً به ابعاد $m\times n$)، درمی‌یابیم که $2m+2n=mn$، شرط محیط و مساحت از لحاظ عددی مساوی، را می‌توان به صورت

$$mn-2m=2n$$

که به

$$m=\frac{2n}{n-2}$$

تحویل می‌شود نوشت. در این مورد می‌توانیم، به ازای هر عدد حقیقی بزرگتر از ۲، دقیقاً یک زوج مناسب (m,n) به دست آوریم. بنا به تقارن، هر عدد حقیقی m بزرگتر از ۲ نیز به عنوان بُعدی از مستطیل منحصر به فردی دارای محیط و مساحت از لحاظ عددی برابر، رخ می‌دهد.

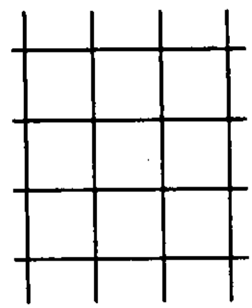
مسأله در صورتی که بخواهیم m و n، هر دو، اعدادی صحیح و مثبت باشند، جالبتر می‌شود. اما این پدیده چه وقت رخ می‌دهد؟

---

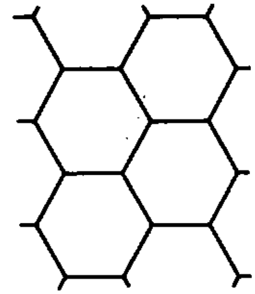
1. Exhibiting Connections between Algebra and Geometry
2. David R. Laing and Arthur T. White
3. Bates
4. Markowitz
5. Shahin

صفحه چه وقت می‌تواند توسط چند ضلعیهای منتظم همنهشت صفحه‌بندی شود؟

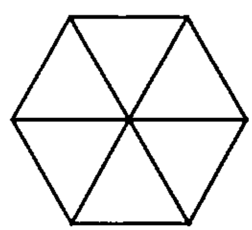
در این مرحله موضوع اصلی بحث‌مان را تغییر می‌دهیم. این واقعیت بسیار معروف است که صفحه‌بندی صفحه با n ضلعیهای منتظم همنهشت p_n ($n\geq۳$، n عددی صحیح) دقیقاً هنگامی صورت می‌پذیرد که n مساوی ۳، ۴، یا ۶ باشد. عمل صفحه‌بندی با استفاده از مثلثهای متساوی‌الاضلاع، مربعها، و شش ضلعیهای منتظم می‌تواند به سادگی انجام شود: صفحه‌بندیهای با مربع و شش‌ضلعی منتظم را به ترتیب در شکلهای $1a$ و $1b$ مشخص کرده‌ایم. در شکل $1c$ نشان داده‌ایم که یک شش ضلعی منتظم می‌تواند به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم شود. اگر این جریان در مورد هر شش ضلعی واقع در شکل $1b$ انجام شود، صفحه‌بندی‌ای با استفاده از مثلثهای متساوی‌الاضلاع به دست می‌آوریم.



(a)
صفحه‌بندی صفحه با مربع



(b)
صفحه‌بندی صفحه با شش ضلعی



(c)
شش ضلعی منتظم به مثلثهای متساوی‌الاضلاعی تقسیم شده است

شکل ۱. سه جزء این شکل سه صفحه‌بندی ممکن صفحه را با چند ضلعیهای منتظم همنهشت مشخص می‌کند.

بعد باید جمیع مقادیر متفاوت از ۳، ۴ و ۶ عدد n را کنار بگذاریم. یکی از اثباتهای این موضوع به آسانی، با دانستن این که هر زاویهٔ p_n به اندازهٔ

$$\theta(n) = \left(\frac{n-۲}{n}\right)۱۸۰$$

است، انجام می‌گیرد. این حقیقت با افزودن $(n-۳)$ قطر از رأس ثابتی از p_n، برای تقسیم p_n به $(n-۲)$ مثلث، اثبات می‌شود؛ در این صورت

$$n\theta(n) = (n-۲)\,۱۸۰$$

در هر رأس یک صفحه‌بندی، باید تعداد درستی از p_n های یکسان بدون فاصله داشتن یا برخورد کردن، پهلوی هم قرار گیرند؛ به این ترتیب باید $\theta(n)$ عدد ۳۶۰ را به طور صحیح، مثلاً، m بار، بشمرد. به عبارت دیگر، $\theta(n) = \frac{۳۶۰}{m}$، بنابراین

$$n\left(\frac{۳۶۰}{m}\right) = (n-۲)\,۱۸۰$$

و در این صورت می‌خواهیم که باز هم

$$m = \frac{۲n}{n-۲}$$

صحیح باشد.

چه وقت $2n\,(n-2)$ صحیح است؟

با راههای گوناگونی می‌توان به این سؤال پاسخ داد. یکی از این راهها رسم به دقت تابع

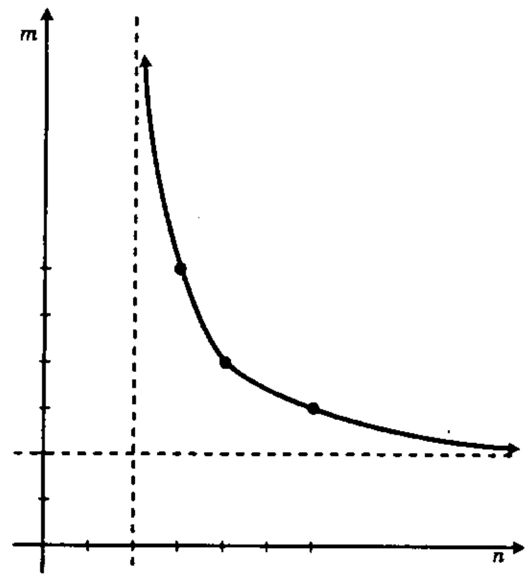
$$m = f(n) = \frac{۲n}{n-۲}$$

چنان که در شکل ۲ نشان داده است، می‌باشد. با استفاده از این حقیقت که خطوط ۲ = m و ۲ = n مجانبهای این تابع‌اند، برای پیداکردن این که تنها نقاط با هر دو مختص صحیح واقع بر نمودار مورد بحث، نقاط داده با (۳،۶) ، (۴،۴) ، و (۶،۳) اند، تنها به آزمایش تعداد اندکی نقاط نیاز داریم.

راه دیگر با به کاربردن آلگوریتم تقسیم مربوط به چند جمله‌ایها، و رسیدن به

$$\frac{۲n}{n-۲} = ۲ + \frac{۴}{n-۲}$$

انجام می‌گیرد، که به این ترتیب (۲ − n) ۲n ، دقیقاً هنگامی که (۲ − n) عدد ۴ را بشمرد، عددی صحیح خواهد بود. سه مقسوم‌علیه ۱، ۲، و ۴ به ترتیب متناظر با n مساوی ۳، ۴، و ۶ خواهند بود.



شکل ۲. نمودار $m = ۲n/(n-۲)$ به ازاء $n>۲$

سومین راه حل مان بینش ظریفی در مورد دو سؤال اول مان به دست می‌دهد. فرض می‌کنیم m و n اعداد صحیح و مثبتی باشند، و فرض می‌کنیم مستطیل (m × n) ی به طریق معمول به mn مربع واحد تقسیم شده باشد. در این صورت هر مربع گوشه‌ای دو واحد محیط در کل محیط، اما تنها یک واحد سطح در کل سطح، سهیم است، به این ترتیب یک واحد اضافه می‌کند (۱+). هر مربع محیطی دیگر یک واحد سهم در محیط و یک واحد سهم در سطح دارد و به این ترتیب در حال موازنه است (۰). هر مربع داخلی، سهمی در محیط کل ندارد اما همچنان یک واحد در سطح کل سهیم است، و بنابراین یک واحد کم می‌کند (۱ −). به این ترتیب، اگر لازم باشد که محیط و مساحت مستطیل مورد بحث از لحاظ عددی مساوی باشند، باید تعداد مربعات داخلی برای موازنه با چهار مربع گوشه‌ای دقیقاً برابر چهار باشد. در این صورت نتیجه می‌شود که مستطیل مرکب از مربعات داخلی باید ۴×۱، ۲×۲، یا ۱×۴ باشد، بنابراین (m,n) باید مساوی (۳,۶)، (۴,۴) ، یا (۶,۳) باشد. اولین این وضعیتها را در شکل ۳ تصویر کرده‌ایم.

+1	0	0	0	0	+1
0	−1	−1	−1	−1	0
+1	0	0	0	0	+1

شکل ۳. حالت (۳ , ۶) = (m , n)

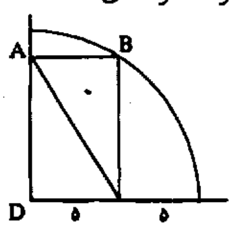
تفریح اندیشه ۳

اندازه قطر را حدس بزنید

(از: Mathematical Puzzles and Diversions. Martin Gardner)

مستطیلی چنانکه در شکل زیر نشان داده شده در ربع دایره‌ای محاط است. آیا می‌توانید با استفاده از اندازه‌های داده شده طول قطر AC را حساب کنید؟

مدت : یک دقیقه!



جواب در صفحهٔ ۹۶

طرح و حلّ مسائل اساسی ریاضی (۱)

به روشهای مقدماتی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

الف: درمورد هر مجموعهٔ متناهی S، فرض می‌کنیم $n(S)$ (که «مرتبهٔ S» یا «عدد اصلی S» یا «اصلیت S» خوانده می‌شود) تعداد اعضای S را نمایش دهد. ثابت کنید اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ب: ثابت کنید اگر A، B، C مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت:

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$$

ج: ثابت کنید اگر A_1، A_2، ... و A_m مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) &= n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_m) \\ &- n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \cdots - n(A_{m-1} \cap A_m) \\ &+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ &+ \cdots + (-1)^{m-1} n(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_m) \end{aligned}$$

سمت راستِ این فرمول به طریق زیر بنا شده است. ابتدا جمله‌های $n(A_i)$ را با $1 \le i \le m$ داریم. سپس جمله‌های $-n(A_i \cap A_j)$ را با $1 \le i < j \le m$ داریم. $\binom{m}{2}$ جمله از چنین جمله‌هایی داریم، زیرا $\binom{m}{2}$ طریق انتخاب دو عدد صحیح i و j از اعداد ۱، ...، m موجوداست.) بعدجمله‌های $n(A_i \cap A_j \cap A_k)$ رابا $1 \le i < j < k \le m$ داریم $\binom{m}{3}$ جمله‌ازاین‌جمله‌هاداریم). سپس جمله‌های $-n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l)$ با $1 \le i < j < k < l \le m$ به میان می‌آیند. به‌همین طریق ادامه‌می‌دهیم تا عبارتمان، با رسیدن به جملهٔ $(-1)^{m-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$ ختم شود. قسمت (الف) حالت $m=2$ و قسمت (ب) حالت $m=3$ می‌باشد. این فرمول اغلب به **اصل جمع و منع**[1] موسوم است.

حل الف: عبارت $n(A) + n(B)$ تعداد اعضای واقع در A یا B را مشخص می‌کند، امّا اعضای $(A\cap B)$ را دوبار به حساب می‌آورد. بنابراین با تفریق $n(A\cap B)$ از آن، دقیقاً تعداد اعضای واقع در $(A\cup B)$ را به دست می‌آوریم.

حل ب: عضوی مانند e را، که تنها در یکی از سه مجموعه، مثلاً A، وجود دارد، درنظر می‌گیریم. در این صورت e در عبارتِ

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C) \quad (1)$$

دقیقاً یک بار، یعنی درجملهٔ $n(A)$ به حساب آمده است. بعد عضوی

1. Principle of Inclusion and Exclusion

چون f را که دقیقاً دردومجموعه از مجموعه‌ها، مثلاً A و B است، در نظر می‌گیریم. دراین صورت f در جملات $n(A)$ و $n(B)$ به طور مثبت، و در جملهٔ $-n(A\cap B)$ به‌طور منفی به شمارآمده است. در نتیجه به‌طور خالص $1+1-1=1$ بار درعبارت (۱) به حساب آمده است. سرانجام فرض می‌کنیم g عضوی درهر سه مجموعهٔ A ، B و C باشد. دراین‌صورت g توسط هرجملهٔ (۱) به حساب آمده، و بنابراین به طورخالص $1+1+1-1-1-1+1=1$ بار محسوب شده‌است. تحلیل فوق نشان‌می‌دهد که‌عبارت (۱) هرعضو $A\cup B\cup C$ را یک بار به حساب می‌آورد. از طرف دیگر اعضای غیرواقع در $A\cup B\cup C$ در هیچ یک از جملات آن به حساب نیامده‌اند، و بنابراین (۱) مساوی $n(A\cup B\cup C)$ است.

حل ج: در مورد حالت کلّی می‌توان با همان استدلالی که در قسمت (ب) به کار رفته عمل کرد. دراین‌صورت باید نشان‌دهیم که درعبارت:

$$n(A_1)+n(A_2)+\dots+n(A_m)-n(A_1\cap A_2)-n(A_1\cap A_3)-\dots-n(A_{m-1}\cap A_m)+n(A_1\cap A_2\cap A_3)+\dots+(-1)^{m-1}n(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_m) \qquad (2)$$

هر عضو $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m$ باضریب خالص ۱ به‌حساب آمده است. توجه‌داشته باشید که اعضاء غیر واقع در $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m$ به هیچ وجه توسط (۲) به حساب نیامده‌اند. فرض می‌کنیم عضوی چون e دقیقاً در $h\geq 1$ مجموعه از مجموعه‌های A_1، ...، A_m است. برای صراحت کار، فرض می‌کنیم این عضو در A_1، ...، A_h است، اما در A_{h+1}، ...، A_m نیست. در این صورت e در هر یک از h جملهٔ $n(A_1)$، ...، $n(A_h)$ از (۲) به حساب می‌آید و در $\binom{h}{2}$ جملهٔ $-n(A_i\cap A_j)$ به طور منفی محسوب می‌شود (یعنی، جملاتی که در آنها $1\leq i<j\leq h$ برقرار است. $\binom{h}{2}$ جمله از چنین جملاتی موجوداند زیرا $\binom{h}{2}$ طریق انتخاب اعدا صحیح i و j از میان اعداد ۱، ...، h وجود دارند). به همین ترتیب e توسط $\binom{h}{3}$ جملهٔ $n(A_i\cap A_j\cap A_k)$ به حساب می‌آید، و همین طور الی آخر. بنابراین تعداد کلّ دفعاتی که e به‌حساب می‌آید عبارت است از:

$$\binom{h}{1}-\binom{h}{2}+\binom{h}{3}-\cdots+(-1)^{h-1}\binom{h}{h}$$

باید نشان دهیم که این عبارت مساوی ۱ است. برای ملاحظهٔ این موضوع از قضیهٔ دو جمله‌ای

$$(a+b)^h=\binom{h}{0}a^h+\binom{h}{1}a^{h-1}b+\binom{h}{2}a^{h-2}b^2+\dots+\binom{h}{h}b^h$$

استفاده می‌کنیم. قسمت سمت چپ این رابطه، با قراردادن $a=1$ و $b=-1$ از بین می‌رود، بنابراین خواهیم داشت:

$$0=\binom{h}{0}-\binom{h}{1}+\binom{h}{2}-\cdots+(-1)^h\binom{h}{h}$$

باانتقال همهٔ‌جملات، غیر از $\binom{h}{0}$، به سمت چپ رابطه، و استفاده از این حقیقت که $\binom{h}{0}=1$ ملاحظه می‌کنیم که:

$$\binom{h}{1}-\binom{h}{2}+\binom{h}{3}-\cdots+(-1)^h\binom{h}{h}=1$$

که اثبات را کامل می‌کند.

ادب و ریاضی

تئوری مقدماتی اعداد باید یکی از بهترین موضوعها برای تعلیم اولیهٔ ریاضیات باشد. چندان اطلاع قبلی نمی‌خواهد؛ موضوعش ملموس و مأنوس است؛ طریقه‌های استدلال که به کار می‌گیرد، ساده، کلی، و تعدادشان کم است؛ و از لحاظ تحریک کنجکاوی طبیعی آدمی در علوم ریاضی مانند ندارد. یک ماه تعلیم فهیمانه در تئوری اعداد دوبار آموزنده‌تر، دو بار مفیدتر، و حداقل ده بار سرگرم کننده‌تر از همان مدت تعلیم «حسابان برای مهندسین» می‌باشد.

هاردی

دکتر غلامحسین مصاحب

تئوری مقدماتی اعداد

معرفی کتابهای ریاضی

ورزیدگی در ریاضیات

مانیس کاروش

ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی، ناشر: انتشارات فاطمی

صد و چهل مسألهٔ کتاب که مسأله‌هایی ساده از هر نوع، مسأله‌هایی با زمینهٔ هندسی، مسأله‌هایی با زمینهٔ جبری، مسأله‌های فکری (استنتاجی)، و مسأله‌های گوناگون را تشکیل می‌دهند با مسأله‌هایی که معمولاً دانش‌آموزان در کلاس درس با آنها سروکار دارند، متفاوت، و چنان طرح شده‌اند که رغبت‌انگیز باشند و دانش‌آموز را به تفکر وادار کنند.

قسمت دوم کتاب به حل مسأله‌ها اختصاص دارد و در آن سعی بر این بوده که در مورد هر مسأله، در صورت امکان، بیش از یک راه حل مطرح شود، چه مطابق عقیدهٔ مؤلف دانش‌آموزان کلاسهای پایینتر بیشتر روش آزمون و خطا را (که پایهٔ مفیدی در درک عمیق مفهومهای ریاضی را فراهم می‌کند) به کار می‌برند، در حالی که دانش‌آموزان کلاسهای بالاتر می‌توانند از تحلیلهای پیچیده‌تر در حل مسأله‌ها استفاده کنند.

قسمت سوم کتاب پیوستهاست که در آن بعضی از قضایای مشهور هندسه از قبیل قضیهٔ سِوا، قضیهٔ منلائوس، مجموعه‌های همساز نقطه‌ها، نقطه‌های واقع بر یک دایره، و قضیهٔ بطلمیوس آمده است.

کتاب به عنوان یک کتاب جنب درسی می‌تواند کمک هر دبیر و قابل استفادهٔ هر دانش‌آموز دبیرستانی باشد.

نظریهٔ اعداد

ت. ه. جکسن

ترجمهٔ اکبر حسنی، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی

نظریهٔ اعداد با هندسه در این افتخار سهیم است که هر دو قدیمیترین قسمت ریاضیاتند. از زمانهای بسیار قدیم تا حدود سیصدسال پیش، اهل علم ویژگیهای عرفانی و جادویی برای اعداد قایل بودند، اما امروزه به ویژگیهای اساسیتر آنها که از مفاهیم عادی جمع و ضرب ناشی می‌شوند علاقه‌مندند. اولین پیشرفتهای چشمگیر درنظریهٔ اعداد راپس‌از یونانیان درنوشته‌های فرما (۱۶۶۵ - ۱۶۰۱) می‌توان یافت. پس از او ریاضیدانهای مشهوری نظیر اویلر، لاگرانژ، گاوس، هیلبرت، و هاردی روشهای جدید و توانایی ارائه دادند و آن را به راه تکامل کشاندند و هنوز هم این تکامل ادامه دارد.

هدف کتاب معرفی مقدماتی مفاهیم و قضایای نظریهٔ اعداد است و دراین مسیر به مباحث صرفاً کلاسیک می‌پردازد.

فصل اول کتاب در مفاهیم اساسی است و فصل دوم آن در همنهشتیها و معادلات و فصل سوم آن در همنهشتیهای غیرخطی و فصل چهارم آن در مجموعهای رشته‌های اعداد صحیح. پیوستی هم دارد که در آن به جوابهای تمرینات پرداخته است.

کتاب همان گونه که در مقدمهٔ آن آمده برای مطالعهٔ انفرادی دانش‌آموزان و دانشجویان مبتدی مناسب است.

ریاضیات مقدماتی

دوروفیف، پوتاپوف، روزوف
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، ناشر: انتشارات مولوی

به طور سنتی، به ریاضیات پیش از نیوتون و لایب‌نیتس، یعنی پیش از کشف محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، وقتی که ریاضیات با کمیتهای ثابت سروکار داشت، «ریاضیات مقدماتی» می‌گویند که شامل حساب، جبر و هندسهٔ اقلیدسی (و برخی از مقدمات هندسهٔ تحلیلی) است. ولی همان‌طور که مؤلفان کتاب، به درستی یادآوری کرده‌اند «دورهٔ ریاضیات مقدماتی، اساس تمام معرفتهای ریاضی است و بدون بهرهٔ کافی از این دورهٔ زیربنایی، مسألهٔ مهارت یافتن در قسمتهای عالیتراین موضوع، نیز به کاربردن ریاضیات در علوم عملی و تکنیکی، به دست نمی‌آید.»

کتاب، بسیار هوشمندانه تنظیم شده و با آغاز از ساده‌ترین موضوعها، خود را به مسأله‌های دشوار و کلیدی رسانده است. به‌خصوص بخشهای مربوط به عددهای مختلط، لگاریتم و نابرابریها، برای دانش‌آموزان ما بسیار سودمند است زیرا دقیقتر و مفصلتر از کتابهای درسی ما، به آنها پرداخته است.

کتاب «ریاضیات مقدماتی»، ضمن حل و ارائهٔ مسأله‌های فراوان و توضیح روشهای حل آنها، بیش از همه روی درک مفهومهای اصلی ریاضیات و قانع کردن خواننده به درستی استنتاجها تکیه کرده است و از آن جا که به خاطر پیروی از «برنامه» ناچار به پاره پاره‌کردن بخشهای مختلف نشده است، به صورت کتابی منظم، منسجم و آموزنده درآمده است که می‌تواند برای هر دانش‌آموز و هر دبیری مددکار باشد.

ترجمه و چاپ کتاب پاکیزه است و به ندرت می‌توان به اشتباه چاپی در آن برخورد کرد. توفیق مترجم و ناشر را، وقتی که کارچاپ کتاب (و به خصوص کتابهای سالم علمی) روز به روز دشوارتر می‌شود، خواهانیم و امیدواریم، همان طور که وعده داده‌اند، شاهد انتشار جلد دوم کتاب باشیم.

نابرابریهای هندسی

نیکولاس د. کازارینوف
ترجمهٔ محمد حسن بیژن‌زاده، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی

ناشر چنان که در مقدمهٔ کتاب متذکر شده کتاب مورد بحث را، که یکی از کتابهای متعددی است که به چاپ رسانیده یا در کار نشر آن است، برای ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش دانشگاهی مفید دانسته است.

به قول مؤلف کتاب هنوز هم در برنامهٔ درسی دبیرستانهای امروزی مبحث نابرابریها جدی گرفته نمی‌شود. مع هذا همهٔ ریاضیدانان می‌دانند که نابرابریها در تمام شاخه‌های ریاضیات اهمیت دارند، حتی گاهی از برابریها هم مهمترند.

اما نابرابریهای هندسی بدین علت که احکام آنها را به آسانی می‌توان فهمید جذابیت خاصی دارند؛ در عین حال مقدمه‌ای بسیار خوب برای آشنایی با روح ریاضیات جدید و اندیشهٔ خلاق ریاضی هستند.

درک نابرابریهای کتاب برای دانش‌آموزان دبیرستان به آسانی ممکن است، و غیر از مطالب معمول جبر و هندسه و مثلثات به ذهنی روشن نیازمند است.

کتاب چهارفصل دارد که به ترتیب عبارتند از: میانگینهای حسابی و هندسی، قضیه‌های برابر محیطی، اصل بازتاب، و راهنمایی و حل مسائل.

کتاب می‌تواند به عنوان مأخذی پیش دانشگاهی به کار دانش‌آموز علاقه‌مند بیاید و دانش و بینش او را در زمینهٔ نابرابریهای هندسی افزایش دهد.

همه چیز دربارهٔ سه جمله‌ای درجه دوم

تألیف: پرویز شهریاری، ناشر: انتشارات تهران

کتاب همان طور که از نامش پیداست به سه جمله‌ای درجه دوم، که بنا به عقیدهٔ مؤلف محترم آن، در مرکز جبر مقدماتی قرار دارد، می‌پردازد و در آن گرچه از دستورهای عادی و آشنا، یاد شده تکیه بر جنبه‌هایی است که برای خواننده تازگی دارد.

ریاضیات دبیرستانی همان گونه که در مقدمهٔ کتاب هم به آن اشاره شده سرچشمهٔ خروشانی است برای حل بسیاری از مسأله‌ها، و برخلاف آنکه گاهی تصور می‌شود، این سر چشمه هنوز هم از خروش نیفتاده و خشک نشده است. ریاضیات دبیرستانی، می‌تواند برای دانش‌آموزانی که می‌خواهند ذهنی خلاق داشته باشند، صحنه‌ای بدیع برای کارآموزی باشد و کتاب متعهد به تصویر آوردن چنین صحنه‌هایی است.

در کتاب علاوه بر این که اعداد مختلط مطرح شده و فورمول «دموآور» آمده، از یادداشتهای تاریخی نیز غفلت نشده است. فصلی از کتاب به هندسه و هندسهٔ تحلیلی اختصاص یافته و دو ضمیمهٔ آن به محاسبهٔ تقریبی ریشه‌ها و بررسی سه جمله‌ای درجه دوم در حوزهٔ عددهای مختلط پرداخته است.

کتاب علاوه بر مثالهای متعدد ۱۵۳ مسأله دارد که در پایان آن به تمامی حل شده‌اند، و علاوه بر آنکه راهنمایی برای دبیر ریاضی در برخورد با مسائل درسی است مشاوری امین برای دانش‌آموز علاقه‌مند است.

ماشین امیل پست

ولادیمیر آندره یه ویچ اوسپنسکی

ترجمهٔ پرویز شهریاری، ناشر: انتشارات تهران

بیش از پنجاه سال پیش، امیل پست[1]، ریاضیدان نام‌آور آمریکایی، مقاله‌ای زیر عنوان «روندهای ترکیبی متناهی، تنظیم ۱»[2] در «مجلهٔ منطق نمادی»[3] چاپ کرد. در این مقاله برای نخستین بار برخورد دقیقی با مفهوم «آلگوریتم» شده است، مفهومی که از اساسی‌ترین و مرکزی‌ترین مفهومها در منطق ریاضی و دانش انفورماتیک است و نقشی بسیار مهم در «خود کارکردن» و، بنابراین، در تمامی زندگی امروزی بشر دارد.

در این کتاب کوچک، روشن کردن مفهوم آلگوریتم، به کمک طرح پُست، مورد نظر بوده است. کتاب همان طور که در مقدمهٔ آن آمده برای دانش‌آموزان تهیه شده است، و در سه فصل نخست آن، تقریباً هیچ مطلبی وجود ندارد که یادگیری آن، مستلزم آگاهیهای جدی از ریاضیات باشد، به این ترتیب حتی نوجوانان هم می‌توانند دو فصل اول کتاب را به راحتی ملاحظه کنند.

کتاب با این که کوچک است غنی است و خواننده را به افقهای تازه رهنمون می‌شود.

---

1. Emil L. Post
2. Finite Combinatory Processes Formulation 1
3. The Journal of Symbolic Logic

ادب ریاضی

بکوش تا در صناعت خویش کامل شوی و متذوّق* مباش، چه متذوّق را سیری نیست.

از تعلیمات علی‌ابن احمد نسوی به شاگردانش
نسوی نامه، ترجمهٔ ابوالقاسم قربانی

* کسی که در علمی متخصص نیست و از هر چمن گلی بر می‌چیند.

مسائل مسابقه‌ای

سید حسین سید موسوی

۱) ثابت‌کنید از میان هر ۵ عدد متوالـی عددی وجود داردکه نسبت‌به چهار عدد دیگر اول است.

۲) ثابت‌کنید وارون هرماتریس بالا مثلثی (در صورت وجود) ماتریسی‌بالا مثلثی است.

مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی

۱۹۷۲/۳- فرض می‌کنیم m و n اعدادصحیح‌نامنفی‌دلخواه باشند، ثابت‌کنیدکه:

$$\frac{(۲m)!\,(۲n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$$

یك عدد صحیح است ($0! = 1$).



کریم و کرام و کرم، نه لزوماً به‌همین ترتیب، حسابدار، فروشندهٔ لوازم خانگی، و فروشندهٔ دوره گرد شرکتی هستند.

دوره گرد، که عزب است، کوتاهترین آن سه‌است.

کریم که داماد کرام است، از فروشندهٔ لوازم خانگی بلندتراست.

شغل هریک چیست؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

مسائل برای حل

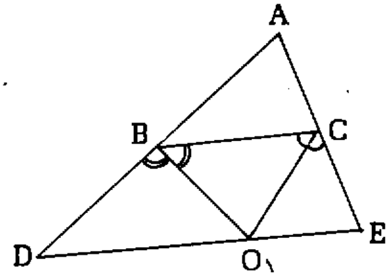
(مورد استفادهٔ دانش آموزان سالهای اول تا چهارم دبیرستان)

● هندسه: محمد هاشم رستمی ● ریاضیات جدید: حمید رضا امیری
● جبر و مثلثات: محمد رضا هاشمی و محمد هاشم رستمی

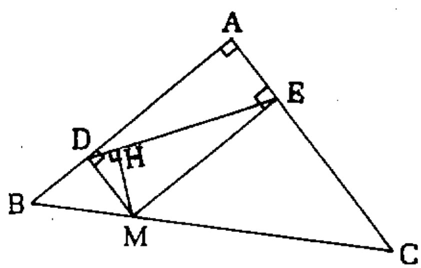
مسائل ریاضیات سال اول

۱ــ نیمسازهای زوایای خارجی B و C ازمثلث ABC یکدیگر را در نقطهٔ O_1 قطع می‌نمایند. از نقطهٔ O_1 خطی بـه موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند. ثابت کنید:

$$DE = BD + CE$$



۲ــ در مثلث قائم الزاویه و متساوی‌الساقین ABC از نقطهٔ M واقع بر وتر BC عمودهای MD و ME را بر دوساق مثلث فرود می‌آوریم واز نقطهٔ M عمود MH را بر DE رسم می‌کنیم. ثابت کنید وقتی نقطهٔ M روی وتـر مثلث تغییر کند، عمود MH همواره از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



۳ــ اگر ارزش گزارهٔ

$$(p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow s)$$

نادرست و q نیز نادرست باشد ارزش گزارهٔ

$$(r \Rightarrow \sim s) \Leftrightarrow (r \wedge s)$$

را تعیین کنید.

۴ــ عمل تفاضل متقارن بین دو مجموعهٔ A و B را با نماد «Δ» نمایش‌داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

اولاً ثابت کنید این عمل خاصیت جا به‌جایی داشته و ثانیاً درستی تساویهای زیر را بررسی کنید.

الف) $A \,\Delta\, M = A'$ (M مجموعه مرجع است)

ب) $A \,\Delta\, A' = M$

ج) $A \,\Delta\, A = \varnothing$

د) $(A \,\Delta\, B) \cap B' = A - B$

(راهنمایی: از رابطهٔ

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

استفاده کنید.)

۵ــ حاصل عبارت :

$$\frac{\sqrt[5]{8}+1}{\sqrt[5]{16}-1} \times \frac{\sqrt[5]{4}+1}{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{4}+1} \times \frac{\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{2}+1}$$

را به دست آورید.

۶ـ دستگاه :

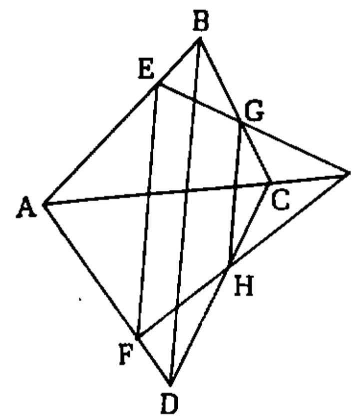
$$\begin{cases} m^2x - y = 2 \\ 2y + mx = 1 \end{cases}$$

اولاً: به ازای چه مقادیری از m جواب ندارد .

ثانیاً: دستگاه را به ازای $m = 1$ حل کنید.

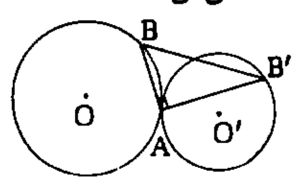
ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ چهارضلعی ABCD مفروض است. خطی موازی قطر



BD ، اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F و خط دیگری موازی قطر BD ، اضلاع BC و CD را به ترتیب در نقاط G و H قطع می‌کند. ثابت کنید که خطوط EG و AC و FH متقاربند.

۲ـ دو دایرهٔ مماس در نقطهٔ A مفروضند. دو وتر AB و AB′ را دردو دایره چنان رسم می‌کنیم که $B\hat{A}B' = 90°$ باشد. ثابت کنید که وقتی زاویهٔ BAB′ حول رأس A دوران کند خط BB′ ازنقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

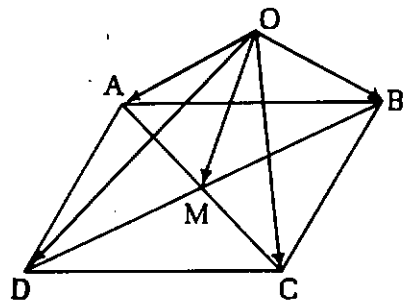


۳ـ هرگاه مجموعه‌های A و B هردو زیر مجموعهٔ M باشند ثابت کنید:

$$(A \times B)' = (A \times B') \cup (A' \times B) \cup (A' \times B')$$

۴ـ ازطریق برداری ثابت کنید در هرمتوازی الاضلاع مانند ABCD و به ازای هرنقطه درصفحهٔ آن مانند O داریم:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$$



۵ـ اگر G یك گروه و اگر برای هر $x, y \in G$ داشته باشیم $(xy)^2 = x^2y^2$ ثابت کنید G یك گروه آبلی است.

۶ـ با شرط $A + B + C = 0$ ثابت کنید:

$$A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$$

و ازآنجا معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$(x^2 + 3x + 2)^3 + (x^2 - 3x + 1)^3 = (2x^2 + 3)^3$$

۷ـ ثابت کنید اعداد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ نمی‌توانند جملاتی ازیك تصاعد حسابی باشند.

۸ـ هرگاه داشته باشیم :

$$\begin{cases} x = r \sin\alpha \cos\theta \\ y = r \sin\alpha \sin\theta \\ z = r \cos\alpha \end{cases}$$

رابطه‌ای مستقل از α و θ بیابید.

۹ـ ثابت کنید :

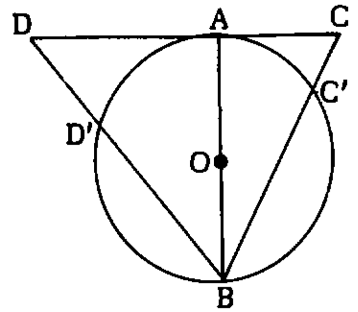
$$1) \quad \frac{\sec^2\theta + 2\,tg\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^2} = \sec^2\theta$$

۲) $$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}=0$$

۳) $$\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta-\sin\theta+1}=tg\,\frac{\theta}{2}$$

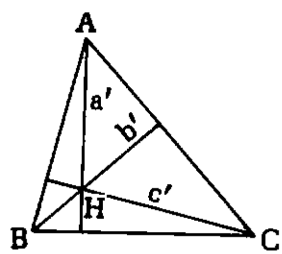
مسائل ریاضیات سوم ریاضی

۱ـ دایرهٔ به قطر AB مفروض است. روی خط مماس درنقطهٔ A براین دایره، دونقطهٔ C و D را درنظر گرفته، نقاط تقاطع CB و DB با دایره رابه ترتیب C' و D' می‌نامیم. ثابت کنیدکه چهارضلعی $DCC'D'$ محاطی است.



۲ـ در مثلث ABC فاصلهٔ نقطه برخورد ارتفاعات مثلث از رئوس A و B و C رابه ترتیب a' و b' و c' وشعاع دایرهٔ محیطی مثلث را R می‌نامیم. ثابت کنید رابطه زیر برقراراست:

$$\frac{a'}{bc}+\frac{b'}{ac}+\frac{c'}{ab}=\frac{1}{R}$$



۳ـ هرگاه V یک فضای برداری باشد دراین‌صورت U را یک زیر فضای نابدیهی V می‌نامیم. اگر،

$$U\neq\{0\} \quad و \quad U\neq V$$

باتوجه به تعریف قبل ثابت کنید فضای برداری IR روی خودش زیرفضای نابدیهی ندارد.

۴ـ درجعبهٔ A ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ودرجعبهٔ B ارقام ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ وجود دارند.

الف) تعداد اعداد ۵ رقمی که ۲ رقم آنها ازجعبه A و ۳ رقم آنها ازجعبه B انتخاب‌شده‌باشد را حساب کنید.

ب) چه تعدادی از این اعداد ۵ رقمی شامل رقم ۷ است؟

ج) چه تعداد از این اعداد ۵ رقمی با ۲ شروع و به ۵ ختم می‌شوند؟

۵ـ معین کنید از بین ۲۴ دانش‌آموز

الف) به چندصورت می‌توان تیمهای ۶ نفره از بین آنها انتخاب کرد؟

ب) به چند صورت می‌توان ۴ تیم ۶ نفره از بین آنها انتخاب کرد؟

۶ـ ثابت کنید عبارت:

$$f(x)=x^{999}+x^{888}+\dots+x^{111}+1$$

بر عبارت:

$$g(x)=x^{9}+x^{8}+\dots+x+1$$

بخش‌پذیر است.

۷ـ به ازای چه مقادیری از $n\in N$ و $n<120$ بسط دو جمله‌ای $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^{n}$ دارای جملات مستقل از x می‌باشد (N مجموعهٔ اعداد طبیعی است).

۸ـ حد زیررا محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{tg\left(\sin\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\right)}{\sin\left(tg\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\right)}$$

۹ ـ در صورتی که

$$a\sin\alpha\sin\beta+b\cos\alpha\cos\beta=0$$

باشد ثابت کنید که عبارت

$$A=\frac{1}{a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha}+\frac{1}{a\sin^2\beta+b\cos^2\beta}$$

به مقادیر α و β بستگی ندارد.

۱۰- درستی برابری زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin 4\alpha}+\cot g 4\alpha=\frac{1}{2}(\cot g\alpha-tg\alpha)$$

۱۱- معادله زیر را حل کنید:

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin 5x=2\cos\frac{3x}{3}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$$

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱- معادلهٔ تصویر خط

$$D:\begin{cases}x=2t-1\\ y=t+2\\ z=-3t\end{cases}$$

روی صفحهٔ $P: x+2y+z-1=0$ را پیدا کنید.

۲- نقطه‌ای روی محور zها تعیین کنید که از دو نقطهٔ

$$A(2,-1,1)\ ,\ B(0,3,5)$$

به یک فاصله باشد.

۳- مطلوب است معادلهٔ یک بیضی که از نقطهٔ $M(1,4)$ می‌گذرد، محورهایش منطبق برمحورهای مختصات و خط به معادلهٔ $y+4x=10$ مماس بر آن باشد.

۴- ثابت کنید:

$$p\Leftrightarrow q\equiv(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$$

و با استفاده از این هم‌ارزی ثابت کنید:

$$\sim[(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)\equiv(\sim p\vee q)$$

$$\Rightarrow(\sim p\wedge q)$$

۵- در حلقهٔ یکدار R ثابت کنید اگر عضوی چون a مقسوم‌علیه صفر باشد، وارون‌پذیر نیست (آیا عکس مطلب بالا برقرار است؟)

۶- هرگاه p و q دو عدد اول متمایز باشند ثابت کنید:

$$p^{q-1}+q^{p-1}\overset{pq}{\equiv}1$$

۷- حدود زیر را محاسبه کنید (درصورتی که N مجموعه اعداد طبیعی باشد و داشته باشیم $n\in N$):

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[2n]{x^{2n}+4nx^{2n-1}+m}+x)$

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin^n\left(tg^n\left(\sin\left(\frac{1}{x^4+x^2+5}\right)^n\right)\right)}{tg^n\left(\sin^n\left(tg\left(\frac{1}{x^3+x^2+1}\right)^n\right)\right)}$

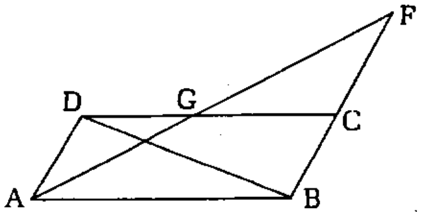
۸- در تابع

$$f(x)=\begin{cases}2x^2 & x\leqslant-1\\ Ax^2+B & x>-1\end{cases}$$

مقادیر A و B را چنان تعیین کنید که تابع در نقطهٔ $x_0=-1$ مشتق‌پذیر باشد.

مسائل ریاضیات دوم تجربی

۱- متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. از رأس A قاطعی رسم می‌کنیم که قطر BD را در نقطهٔ E و اضلاع BC

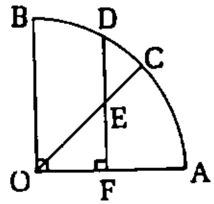


و CD را در نقاط F و G قطع کند. ثابت کنید که:

$$EA^2 = EF \cdot EG$$

۲- ربع دایرهٔ AOB و OC نیمساز زاویهٔ AOB مفروض‌اند. از نقطهٔ D واقع بر کمان $\widehat{AB}$ عمود DF را بر OA فرود می‌آوریم تا OC را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید که:

$$OA^2 = DF^2 + EF^2 .$$



۳- به ازای چه مقادیری از x تساوی زیر برقرار است:

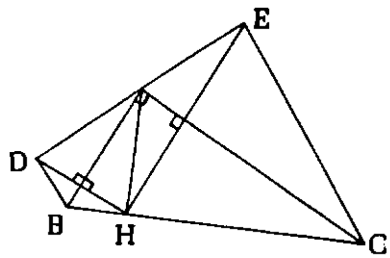
$$\log_2(x-1)+\log_2 x+\log_2(x+1) = 3\log_2 x - 1$$

۴- درصورتی که جملهٔ پنجم یك تصاعد حسابی برابر ۲۳ و مجموع ده‌جملهٔ اول آن برابر ۲۵۵ باشد جملهٔ بیستم آن را مشخص کنید.

۵- اگر $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$ باشد، اندازهٔ $tg\frac{x}{4}$ را محاسبه کنید.

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱- در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر نقاط D و E قرینه‌های نقطهٔ H



نسبت به اضلاع AB و AC باشند ثابت کنید که:

۱) نقاط D و A و E بریك استقامت‌اند.

۲) چهار ضلعی BDEC ذوزنقه است.

۲- خط $\Delta : 3x-2y+6=0$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اندازهٔ بردار مکان محل تلاقی میانه‌های مثلث OAB را به دست آورید.

۳- درصورتی که داشته باشیم:

$$g(x)=\sqrt{x} \quad \text{و} \quad fog(x)=\frac{1}{x-1}$$

مطلوب است دامنه و برد تابع f(x) (D_f , R_f).

۴- معادلهٔ خط قائم برمنحنی نمایش تابع:

$$y=(2x^3-1)^{71}\sin^3 2x^2+\sqrt[5]{x^3+1}$$

را درنقطه‌ای به طول $x=0$ به دست آورید.

۵- مقدار m را در تابع:

$$y=\begin{cases} mx^2-1 & x\geqslant -1 \\ \frac{3x+3}{x^3+1} & x<-1 \end{cases}$$

چنان تعیین کنید، که تابع درنقطه‌ای به طول $x=-1$ دارای حد باشد. سپس تعیین کنید که آیا تابع‌دراین نقطه‌پیوسته‌است؟

۶- ثابت کنید:

$$Arctg\frac{1}{4}+Arctg\frac{1}{5}+Arctg\frac{1}{8}+Arctg\frac{2}{9}=\frac{\pi}{4}$$

۷- حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$Arc\sin\left(-\frac{1}{2}\right)+Arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)+Arctg\left(-\frac{1}{2}\right)+Arc\,cotg\left(-\frac{1}{2}\right)$$

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را چنان تعیین که اولاً: مرکز تقارن منحنی $\omega \left| \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \right.$ باشد. ثانیاً: منحنی از نقطه تقاطع دو خط $y=4x-3$ و $y=2x-1$ عبور کند. پس از تعیین پارامترها معادلهٔ خط قائم و زاویهٔ بین منحنی فوق را در محل تلاقی با منحنی نمایش تابع $y=\frac{1}{x}$ به دست آورید.

۲ـ تابع درجهٔ سومی بنویسید که اولاً: مجموع و حاصل‌ضرب طولهای اکسترمم آن (ماکزیمم و می‌نیمم آن) به ترتیب برابر $\frac{-10}{3}$ و ۱ باشد. ثانیاً: عرضها نقطهٔ عطف آن برابر $\frac{250}{27}$ باشد. ثالثاً: محور عرضها را در $y=5$ قطع کند.

۳ـ معادلهٔ یك هذلولی را بنویسید که مجانبهایش

$$y=\pm\sqrt{2}x$$

باشند و محور طولها را در $x=-3$ قطع کند.

۴ـ حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y=x^2-\sqrt[3]{x^2}$ و محور طولها را حول محور xها محاسبه کنید.

۵ـ اگر $\frac{5\pi}{16}<\frac{x}{8}<\frac{3\pi}{8}$ باشد حاصل عبارت

$$\frac{\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|}{2}+\frac{\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|}{2}$$

را به دست آورید.

۶ـ هریك از معادلات زیر را حل کنید:

الف) $2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos 2x=\sin^2 x+\cos^2 x$

ب) $\sqrt{2}(\sin 2x-\cos 2x)+\sin 4x=\sqrt{2}$

ج) $Arc\sin(2x-1)+Arc\cos\frac{1}{2}=2\,Arc\,tg(-1)$

۷ـ معادلهٔ $(m-1)tg x+m\,cotg\,x=2(m-3)$ مفروض است.

اولاً: حدود m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ فوق ریشه داشته باشد.

ثانیاً: مقدار m را به قسمی بیابید که

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

باشد.

ثالثاً: مقدار m راچنان تعیین کنید که $4tg2x=3$ باشد.

۸ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن رابطهٔ

$$\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$$

برقرار است.

۹ـ ثابت کنید اگر در مثلثی رابطهٔ

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$$

برقرار باشد یك زاویهٔ آن مثلث ۶۰° است.

حل مسائل مسابقه‌ای شمارهٔ ۲

۱ـ ابتدا طرفین معادله‌را در $x-1$ ضرب می‌کنیم.

$$(x-1)(x^{n}+x^{n-1}+\cdots+1)=0$$

ریشه‌های معادله در معادلهٔ:

$$x^{n+1}-1=0 \implies x^{n+1}=1$$

نیز صدق می‌کنند، بنابراین داریم:

$$x_1^{n+1}=1\ ,\ x_2^{n+1}=1\ ,\ \cdots\ ,\ x_n^{n+1}=1$$

ازطرفی S را می‌توان چنین نوشت:

$$S=\sqrt[n]{\frac{x_1^{n+1}}{x_2^{n+1}}}+\sqrt[n]{\frac{x_2^{n+1}}{x_3^{n+1}}}+\cdots+\sqrt[n]{\frac{x_{n-1}^{n+1}}{x_n^{n+1}}}$$

$$S=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{\text{مرتبه } (n-1)}=n-1$$

$$\implies \boxed{S=n-1}$$

و مقدار P چنین است:

$$P=1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!$$

$$P=1\times 1!+2\times 2!+\cdots+(n+1-1)n!$$

$$(n+1-1)n!=(n+1)n!-n!=(n+1)!-n!$$

$$n\times n!=(n+1)!-n!$$

$$1\times 1!=2!-1!$$

$$2\times 2!=3!-2!$$

$$3\times 3!=4!-3!$$

$$\cdots\cdots$$

$$n\times n!=(n+1)!-n!$$

$$\text{(ازجمع روابط)}\ \therefore P=(n+1)!-1!=(n+1)!-1$$

$$\implies \boxed{P=(n+1)!-1}$$

۲ـ حل معادلهٔ : $8^{\cos x}+\sqrt[n]{4}=8^{\sin x}$

$$2^{3\cos x}+2^{\frac{2}{n}}=2^{3\sin x} \implies 2^{3\sin x}-2^{3\cos x}=2^{\frac{2}{n}}$$

$$\frac{2^{3\sin x}}{2^{\frac{2}{n}}}-\frac{2^{3\cos x}}{2^{\frac{2}{n}}}=1 \implies$$

$$2^{3\sin x-2/n}-2^{3\cos x-2/n}=1$$

* اگر $2^{x}-2^{y}=1$ باشد یك جواب معادلـه چنین است: $y=0$ و $x=1$

$$\implies \begin{cases} 3\sin x-\dfrac{2}{n}=1 \\ 3\cos x-\dfrac{2}{n}=0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \sin x=\dfrac{n+2}{3n} \\ \cos x=\dfrac{2}{3n} \end{cases} \implies$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x=1)\ :\ \left(\frac{n+2}{3n}\right)^2+\left(\frac{2}{3n}\right)^2=1$$

$$(n+2)^2+4=9n^2 \implies$$

$$n^2+4n+4+4=9n^2$$

$$8n^2-4n-8=0 \implies 2n^2-n-2=0 \implies$$

$$\boxed{n=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}}$$

$$\cos x=\frac{۲}{۳n}=\frac{۲\times ۴}{۳(۱\pm\sqrt{۱۷})}=$$

$$\frac{۸(۱+\sqrt{۱۷})}{۳(۱-۱۷)}=\frac{۱\pm\sqrt{۱۷}}{-۳\times ۲}$$

$$\cos x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۷}}{۶}\Rightarrow |\cos x|<۱\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۶}=۰/۵۲\\[2ex]\cos x=\dfrac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۶}=-۰/۸۵-\end{cases}$$

جوابهای معادله:

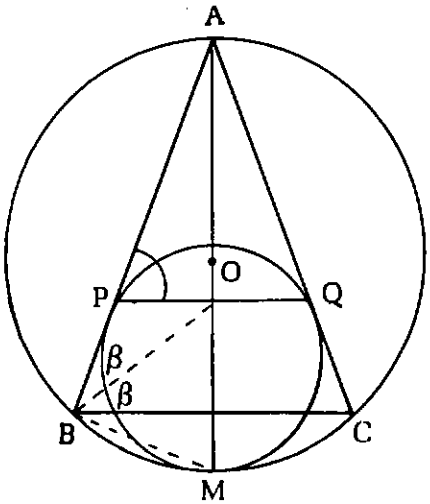
$$\begin{cases}x_۱=۵۸^\circ/۶۳\\ x_۲=۱۴۸^\circ/۶۳\end{cases}$$ جوابهای اختصاصی

(جوابهای عمومی) $x_۱=۲k\pi\pm ۵۸^\circ/۶۳$

$x_۲=۲k\pi\pm ۱۴۸^\circ/۶۳$

حل مسألهٔ المپیاد شمارهٔ ۲

از آنجاکه $AB=AC$ است، شکل‌مان نسبت به قطر AM، که‌در آن M نقطهٔ‌تماس دودایره می‌باشد، متقارن‌است. AM زاویهٔ A، زاویهٔ PMQ و پاره‌خط PQ را،که موازی BC است و وسطش را به I نمایش می‌دهیم، نصف می‌کند. با



قرار دادن: $\angle APQ=۲\beta$ ، $\angle ABC$ را نیز مساوی ۲β خواهیم داشت. از این گذشته:

$$\angle PMQ=\angle APQ=۲\beta$$

است، زیرا اندازهٔ هردو نصف‌کمان PQ است. به این ترتیب داریم :

$$\angle PMI=\frac{۱}{۲}\angle PMQ=\beta$$

از آنجاکه $\angle ABM$ و $\angle MIP$ زوایایی قائمه‌اند ، $BMIP$ می‌تواند در دایره‌یی‌که در‌آن زوایای PBI وPMI روبه‌روی یک کمان قرار می‌گیرند ، محاط شود. در نتیجه نیمسازهای زوایای AوB از ΔABC در I متقاطع می‌شوند، وبنابراین I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ΔABC است.

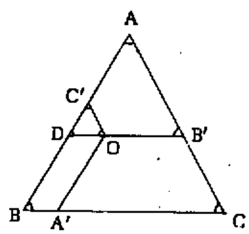
حل مسائل

حل مسائل برهان شمارهٔ ۲

حل مسائل هندسهٔ سال اول دبیرستان

۱ـ یکی از پاره‌خطهای OA' ، OB' یا OC' ، مثلاً OB' را امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در نقطهٔ D قطع کند. مثلث ODC' متساوی الاضلاع است:

$$(\hat{O}=\hat{D}=\hat{C}'=۶۰^\circ)$$



پس $OC'=DC'$ است. از طرفی چهار ضلعی $ODBA'$ متوازی‌الاضلاع و چهارضلعی $OC'AB'$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است لـذا $OA'=DB$ و $OB'=AC'$ است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$OA'+OB'+OC'=DB+DC'+AC'=AB=a=cte$$

۲ـ از رأس A مماس AT را بـر دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌کنیم داریم:

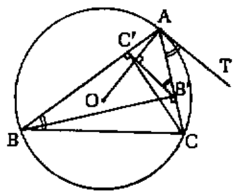
$$C\hat{A}T=C\hat{B}A=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

از طرفی چهارضلعی $BCB'C'$ محاطی است پس:

$$C\hat{B}A=A\hat{B}'C'$$

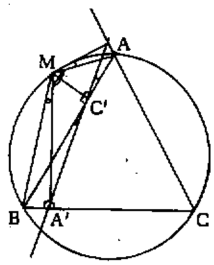
از آنجا خواهیم داشت $C\hat{A}T=A\hat{B}'C'$ ، در نتیجه

$$B'C' \parallel AT$$



وچون OA عمود بر AT می‌باشد پس بر موازیش یعنی $B'C'$ نیز عمود است .

۳ـ تصویر نقطهٔ M از دایرهٔ محیطی مثلث روی اضلاع BC و AC و AB یا امتدادآنهارا A' و B' و C' می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که سه نقطهٔ A' و B' و C' روی یک خط راست قرار دارند. از نقطهٔ M به نقاط A و B وصل می‌کنیم.



چهار ضلعیهای $MBA'C'$ و $MC'AB'$ و $MA'CB'$ و MACB محاطی‌اند و داریم:

محاطی $MBA'C' \Rightarrow \hat{C}'_1=\hat{M}_1$ (۱)

محاطی $MC'AB' \Rightarrow \hat{C}'_2=\hat{M}_2$ (۲)

محاطی $MA'CB' \Rightarrow \hat{M}_2+\hat{M}_3+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ (۳)

محاطی $MACB \Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_3+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ (۴)

از روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که:

$\hat{M}_1=\hat{M}_2$ (۵)

واز روابط (۱) و (۲) و (۵) نتیجه می‌گردد که

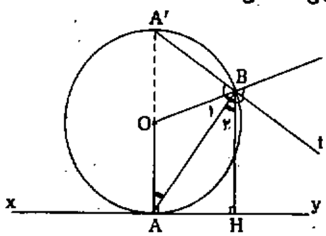
$$\hat{C}'_1=\hat{C}'_2$$

است که چون $AC'B$ خطی راست است، پس نقاط A' و B' و C' روی یک خط راست قرار دارند که خط سمسن[1] نظیر نقطهٔ M نامیده می‌شود.

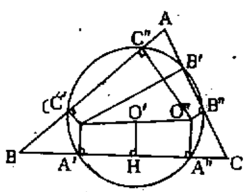
۴ـ از A به B وصل می‌کنیم. AB نیمساز زاویهٔ OBH است. زیـرا $\hat{A}_1=\hat{B}_1$ و $\hat{A}_1=\hat{B}_2$ است پس $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ می‌باشد. از طرفی Bt نیمساز زاویهٔ مجاور و مکمل OBH می‌باشد ، لذا Bt عمود بر AB ، یعنی $A\hat{B}t=۹۰^\circ$ است . پس اگر نقطهٔ دیگر تقاطع Bt با دایره را A' بنامیم، زاویهٔ

$$A\hat{B}A'=۹۰^\circ$$

می‌باشد یعنی Bt از نقطه A' انتهای دیگر قطرمار بر نقطهٔ A که نقطهٔ ثابتی است می‌گذرد.



۵ـ از نقطهٔ O به نقطهٔ O' مرکز دایـرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع عمود مرسوم بر BC در A'' با OO' را نقطهٔ O'' می‌نامیم. چهار ضلعی $OA'A''O''$ ذوزنقه است ($OA' \parallel O''A''$). از نقطهٔ O' مرکز دایره، عمود $O'H$ را بـر وتر $A'A''$ فرود می‌آوریـم $O'H$ عمود منصف $A'A''$ است (قطر عمود بر وتر). لذا $O'H$ با قاعده‌های ذوزنقه



موازی است وچون H وسط $A'A''$ است، پس نقطهٔ O' وسط OO'' می‌باشد یعنی نقطهٔ O'' قرینهٔ نقطهٔ O نسبت به نقطهٔ O' مرکز دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ می‌باشد، یعنی نقطه‌ای است ثابت. پس عمودی که در نقطهٔ A'' بر ضلع BC اخراج می‌شود از نقطهٔ ثابت O'' می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که عمودهای مرسوم از B'' و C'' بر اضلاع مثلث نیز از نقطهٔ O'' می‌گذرند. پس عمودهای مرسوم بر اضلاع مثلث در نقاط A'' و B'' و C'' متقارب‌اند .

1– Robert Simson (۱۶۸۷ – ۱۷۶۸)

جواب تشریحی تستها

(۳)-۱ $\frac{\alpha+\beta}{۲}=۶۵° \Rightarrow \alpha+\beta=۱۳۰°$

$\begin{cases}\alpha+\beta=۱۳۰°\\ \alpha-\beta=۵۰°\end{cases} \Rightarrow \alpha=۹۰°$ زاویهٔ بزرگتر

(۴)-۲ $۸>۵+۲=۷ \Rightarrow \hat{A}>۹۰°$

(۳)-۳

$AM<\frac{AB+AC}{۲} \Rightarrow AM<\frac{۱۲+۸}{۲}$

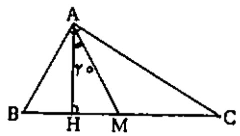
$\Rightarrow AM<۱۰$

۴-(۳)، اندازهٔ زاویهٔ بین میانه وارتفاع وارد بروتر درهر مثلث قائم‌الزاویه مساوی تفاضل دو زاویهٔ حاده مثلث است.

$\hat{A}=۹۰° \Rightarrow H\hat{A}M=|\hat{B}-\hat{C}| \Rightarrow$

$|\hat{B}-\hat{C}|=۲۰°$ و $\hat{B}+\hat{C}=۹۰° \Rightarrow \hat{C}=۳۵°$.

اندازهٔ زاویهٔ حاده کوچکتر



(۳)-۵

$\gamma=\beta+۱۸۰-\alpha=\beta+۲\alpha+\beta-\alpha=\alpha+۲\beta$

$\Rightarrow \gamma=\alpha+۲\beta$

(۴)-۶

(۳)-۷

قائمه $(۲n-۴)$ = مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب

$\Leftarrow$ مجموع زوایای داخلی ۷ ضلعی محدب =

قائمه ۱۰ = قائمه $(۲\times۷-۴)$

$۳\times۱۰=۳۰$ قائمه

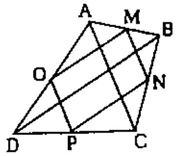
$\Leftarrow$ قائمه ۳۰ = قائمه $(۲n-۴)$

$۲n-۴=۳۰ \Rightarrow n=۱۷$ عده‌اضلاع n ضلعی مطلوب

تعداد قطرهای n ضلعی $=\frac{n(n-۳)}{۲} \Rightarrow$

تعداد قطرهای ۱۷ ضلعی $=\frac{۱۷(۱۷-۳)}{۲}=۱۱۹$

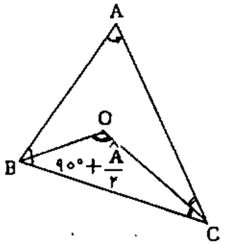
۸-(۴)، چهارضلعی حاصل از وصل کردن اوساط اضلاع متوالی یک چهارضلعی، همواره متوازی‌الاضلاعی است که اندازهٔ اضلاعش نصف اندازهٔ قطرهای چهارضلعی مفروض است و زوایای آن نیز مساوی زوایای بین دو قطر چهارضلعی مفروض است که به این متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع وارینیون چهارضلعی مفروض می‌گویند. پس اگر درچهارضلعی داده‌شده، اقطار متساوی و برهم عمود باشند، متوازی‌الاضلاع وارینیون[1] به مربع تبدیل می‌شود.



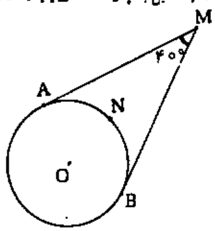
۹-(۳)، اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای درونی دو زاویه از یک مثلث برابر است با ۹۰° به‌اضافه نصف زاویهٔ سوم مثلث. پس اگر نقطهٔ O محل تلاقی نیمسازهای درونی زوایای B و C باشند داریم:

$B\hat{O}C=۹۰°+\frac{\hat{A}}{۲}$

$B\hat{O}C=۹۰°+\frac{۷۰°}{۲}=۱۲۵°$



۱۰-(۴)، خط d که به‌فاصلهٔ ۲cm از پاره‌خط AB واقع است کمان‌درخور زاویهٔ ۶۰° مقابل به پاره‌خط AB را در دو نقطه قطع می‌کند.



(۳)-۱۱

$\widehat{ANB}=\alpha \Rightarrow ۴۰°=\frac{۳۶۰-\alpha-\alpha}{۲} \Rightarrow$

$۴۰°=۱۸۰°-\alpha \Rightarrow \alpha=۱۴۰°$

(۳)-۱۲

$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰° \Rightarrow ۳\alpha+۱۰°+\alpha-۳۰°=۱۸۰°$

$\Rightarrow \alpha=۵۰° \Rightarrow \hat{A}=۱۶۰°$

حل مسائل هندسهٔ سال‌دوم ریاضی

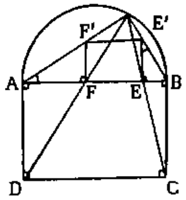
۱- رابطهٔ $AE^۲+BF^۲=AB^۲$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$(AF+FE)^۲+(BE+EF)^۲=(AF+FE+EB)^۲$

که پس از ساده‌کردن خواهیم داشت:

$EF^۲=۲AF\cdot EB$

(صورت دیگرمسئله). برای اثبات برقراری این رابطه، از نقاط E و F عمودهایی بر AB اخراج می‌کنیم تا به ترتیب NB و NA را در نقاط E' و F' قطع نمایند. از E' به F' وصل می‌کنیم EE'F'F مستطیلی متشابه با مستطیل ABCD است. (دو مستطیل مجانس یکدیگرند).



داریم:

$\frac{NF'}{NA}=\frac{FF'}{AD}=\frac{NF}{ND}=\frac{FE}{DC}=\frac{NE}{NC}=\frac{EE'}{BC}=\frac{NE'}{NB}$

پس $EE'=FF'$ و $\frac{EF}{FF'}=\frac{AB}{AD}=\frac{۲R}{R\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$ است. ازطرفی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AFF' و BEE' متشابه می‌باشند ($\hat{A}=\hat{E'}$ و $\hat{F}=\hat{E}=۹۰°$). لذا:

$\frac{FF'}{EB}=\frac{AF}{EE'}$

یا $FF'\cdot EE'=EB\cdot AF$ و یا $FF'^۲=EB\cdot AF$ اما $FF'=\frac{EF}{\sqrt{۲}}$ است، پس $\frac{EF^۲}{۲}=BE\cdot AF$ و یا

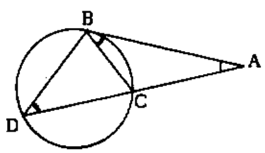
$EF^۲=۲AF\cdot BE$

است لذا رابطهٔ فوق برقرار است.

۲- دومثلث ABC و ABD متشابه‌می‌باشند زیرا زاویهٔ A در هردومثلث مشترک است و $\hat{B}=\hat{D}=\frac{\widehat{BC}}{۲}$ است. پس داریم: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AB}$

از آنجا می‌توان نوشت:

$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{BC}$ (۱) ، $\frac{AD}{AB}=\frac{BD}{BC}$ (۲)



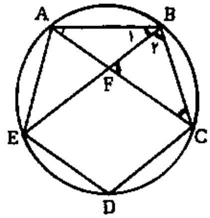
از ضرب روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$\frac{AD}{AC}=\frac{BD^۲}{BC^۲}$

و از آنجا: $\frac{AC}{AD}=\frac{BC^۲}{BD^۲}$

1- Pierre - Varignon(۱۶۵۴ - ۱۷۲۲)

۳ــ پنج‌ضلعی منتظم ABCDE محاط در دایرهٔ O را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ تقاطع دو قطر AC و BE را F می‌نامیم. دو مثلث AFB و AEC متشابهند زیرا زاویهٔ $\hat{A}_1$ در هر دو مثلث مشترک و $\hat{B}_1=\hat{C}_1=۳۶°$ است پس $\frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AC}$ است و از آنجا $AB^۲=AF\cdot AC$ می‌باشد اما $AB=FC$ است زیرا



$AB=BC$ و مثلث BFC که در آن زوایای

$$\hat{B}_۲=F=۷۲°$$

می‌باشند متساوی‌الساقین است پس خواهیم داشت:

$$FC^۲=AF\ .\ AC$$

و این رابطه نشان می‌دهد که نقطهٔ F قطر AC را به نسبت طلایی یا به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم نموده است. همچنین با توجه به اینکه

$$AC=BE\ \text{و}\ FC=FE\ \text{و}\ AF=FB$$

خواهد بود یعنی نقطهٔ F قطر BE را $EF^۲=BE\cdot BF$ است نیز به نسبت طلایی تقسیم نموده است. بهمین ترتیب برای قطرهای دیگر مطلب قابل اثبات است.

جواب تشریحی تستها

۱ــ (۲)

$$\frac{۳a+۲b}{۲a+۳b}=\frac{۴}{۵}\Longrightarrow ۱۵a+۱۰b=۸a+۱۲b$$

$$\Longrightarrow ۷a=۲b\Longrightarrow \frac{b}{a}=\frac{۷}{۲}$$

۲ــ (۳)

$$۲BC=۳DE\ \Longrightarrow\ \frac{DE}{BC}=\frac{۲}{۳}=\frac{AD}{AB}\Longrightarrow$$

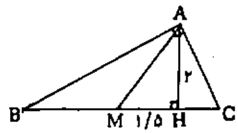
$$\frac{AB-AD}{AB}=\frac{۳-۲}{۳}\Longrightarrow\frac{DB}{AB}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Longrightarrow\frac{۴}{AB}=\frac{۱}{۳}\Longrightarrow AB=۱۲$$

۳ــ (۱)

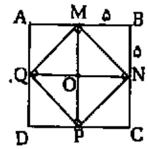
۴ــ (۴)

$$AM=\sqrt{۴+۲/۲۵}=\sqrt{۶/۲۵}=۲/۵\Longrightarrow$$
$$BC=۲AM=۵$$



۵ــ (۲)

$$AB=۱۰\Longrightarrow MB=BN=۵\Longrightarrow MN=۵\sqrt{۲}$$

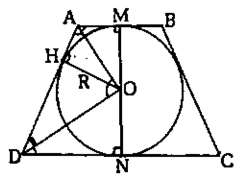


۶ــ (۴)

$$AH=AM=\frac{AB}{۲}\ \text{و}\ DH=DN=\frac{CD}{۲}$$

$$OH=R\ \text{و}\ A\hat{O}D=۹۰°\Longrightarrow AH\cdot HD=OH^۲$$

$$\Longrightarrow\frac{AB}{۲}\cdot\frac{CD}{۲}=R^۲\Longrightarrow AB\cdot CD=۴R^۲$$



۷ــ (۳)

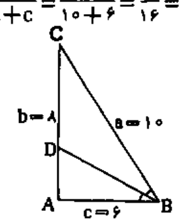
$S=\pi R^۲-\pi R'^۲$ بین دو دایره به شعاعهای R و R'

$$\Longrightarrow S=۹\pi-۴\pi=۵\pi\ \text{بین دو دایره}$$

$$\frac{S_{\text{بین دو دایره}}}{S_{\text{دایره اولی}}}=\frac{۵\pi}{۹\pi}=\frac{۵}{۹}$$

۸ــ (۲)

$$DC=\frac{b\cdot a}{a+c}=\frac{۸\times۱۰}{۱۰+۶}=\frac{۸۰}{۱۶}=۵$$



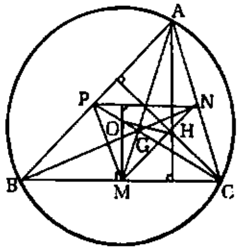
۹ــ (۱)

$$C'_۲=۲R\sqrt{۳}\Longrightarrow C'_۲=۱۶\sqrt{۳}$$

حل مسائل هندسهٔ سال سوم ریاضی

۱ــ نقاط M و N و P را که به ترتیب اوساط اضلاع BC و AC و AB از مثلث ABC می‌باشند بهم وصل می‌کنیم. با توجه به اینکه نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC است، داریم:

$$\frac{\overline{GM}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GN}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{GP}}{\overline{GC}}=-\frac{۱}{۲}$$



این رابطه نشان می‌دهد که نقاط M و N و P به ترتیب مجانس نقاط A و B و C نسبت به مرکز تجانس G و با نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ می‌باشند یعنی مثلث MNP مجانس مثلث ABC در تجانس فوق است. از طرفی نقطهٔ O که محل تلاقی عمود منصفهای اضلاع مثلث ABC است نقطهٔ تقاطع ارتفاعات مثلث MNP می‌باشد زیرا عمود منصفهای اضلاع مثلث ABC ارتفاعات مثلث MNP می‌باشند. به عنوان مثال:

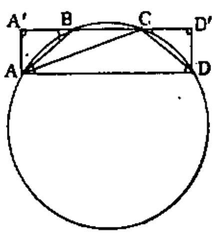
$$PN\|BC\ ,\ MO\perp BC\ \Longrightarrow\ MO\perp NP$$

پس نقطهٔ H (محل برخورد ارتفاعات مثلث ABC) و نقطهٔ O (محل تلاقی ارتفاعات مثلث MNP) که دو نقطهٔ متناظر از دو مثلث متجانس ABC و MNP می‌باشند مجانس یکدیگرند. پس:

$$\overline{GH}=-۲\overline{GO}\quad\text{و یا}\quad\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}}=-\frac{۱}{۲}$$

۲ــ درستی رابطه برای مثلث متساوی‌الاضلاع (۳ضلعی منتظم) و مربع (چهارضلعی منتظم) روشن است. اگر $n>۴$ باشد از نقاط A و D عمودهای AA' و DD' را بر امتداد ضلع BC فرود می‌آوریم. چهارضلعی ADD'A' مستطیل است و دو مثلث قائم الزاویهٔ AA'B و DD'C با هم برابرند پس:

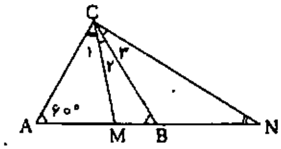
$$A'B=CD'\ \text{و}\ A'D'=AD$$



از طرفی در مثلث ABC، $A\hat{B}C>۹۰°$ است پس داریم:

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲+۲BC\cdot A'B\Longrightarrow$$
$$AC^۲-AB^۲=BC(BC+۲A'B)\Longrightarrow$$
$$AC^۲-AB^۲=BC(BC+A'B+CD')=$$
$$BC\cdot AD$$
$$\Longrightarrow AC^۲-AB^۲=BC\cdot AD$$

۳ـ اولاً: در دو مثلث متشابه AMC و ANC که در زاویهٔ $\hat{A}=۶۰°$ مشترک می‌باشند زاویهٔ $\hat{C}_1=\hat{N}$ است. پس دایرهٔ محیطی مثلث MNC برضلع AC مماس است.
ثانیاً: در مثلث MCN، BC نیمساز زاویهٔ MCN



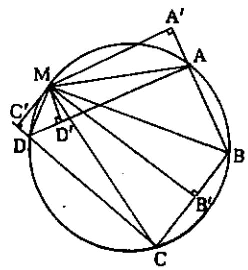
است، زیرا:

$$\hat{C}_2=۶۰°-\hat{N} \ , \ \hat{C}_3=A\hat{C}B-\hat{C}_1=۶۰°-\hat{N}$$
$$\Longrightarrow \hat{C}_2=\hat{C}_3$$

پس بنابه خاصیت نیمساز خواهیم داشت:

$$\frac{BM}{BN}=\frac{CM}{CN} \Longrightarrow BM\cdot NC=BN\cdot MC$$

۴ـ اگرشعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی را R فرض کنیم، در مثلثهای MAB و MBC و MCD و MDA روابط زیر را می‌توان نوشت. (بنابه قضیهٔ حاصلضرب اندازه‌های دوضلع هرمثلث برابراست باحاصلضرب قطردایرهٔ محیطی مثلث در اندازه ارتفاع وارد برضلع سوم آن مثلث.)



$\Delta MAB: MA\cdot MB=MA'\cdot ۲R$ (۱)

$\Delta MBC: MB\cdot MC=MB'\cdot ۲R$ (۲)

$\Delta MCD: MC\cdot MD=MC'\cdot ۲R$ (۳)

$\Delta MDA: MD\cdot MA=MD'\cdot ۲R$ (۴)

با توجه به اینکه (۴)·(۲)=(۳)·(۱) است خواهیم داشت:

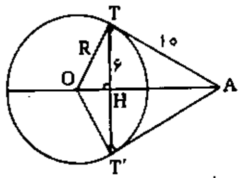
$$MA\cdot MB\cdot MC\cdot MD=MA'\cdot MC'\cdot ۴R^2$$
$$=MB'\cdot MD'\cdot ۴R^2 \Longrightarrow$$
$$MA'\cdot MC'=MB'\cdot MD'$$

جواب تشریحی تستها

۱-(۲)

$TT'=۱۲ \Longrightarrow HT=۶$ و $AT=۱۰ \Longrightarrow$

$$AH=۸ \ , \ OH\times AH=HT^2$$
$$OH\times ۸=۳۶ \Longrightarrow OH=\frac{۹}{۲}$$
$$OT=R=\sqrt{۳۶+\frac{۸۱}{۴}}=\frac{۱۵}{۲}$$



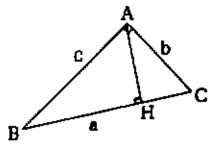
۲-(۳)

$$MT^2=MA\cdot MB=۳\times ۱۲=۳۶ \Longrightarrow MT=۶$$

۳-(۳)، ۵و۱۲و۱۳ یکدسته ازعددهای فیثاغورثی می‌باشند.
$(۱۳^2=۱۲^2+۵^2)$

پس مثلثی با این اضلاع قائم‌الزاویه‌است وارتفاع وارد بر وتر ارتفاع موردنظراست، اما داریم:

$$\hat{A}=۹۰° \Longrightarrow a\cdot h_a=b\cdot c \Longrightarrow$$
$$۱۳\times h_a=۱۲\times ۵ \Longrightarrow h_a=\frac{۶۰}{۱۳}$$

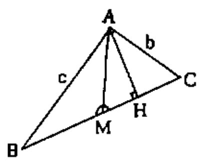


۴-(۴)

$$\hat{A}=۹۰° \ ، \ b=۵ \text{ و } c=۱۲ \Longrightarrow$$
$$S=\frac{1}{۲}bc=۳۰ \Longrightarrow d'_a=$$
$$\frac{۲S\sqrt{۲}}{|b-c|}=\frac{۶۰\sqrt{۲}}{|۱۲-۵|}=\frac{۶۰\sqrt{۲}}{۷}$$

۵-(۱)، بنابه قضیهٔ: $b^2-c^2=۲a.MH$، داریم:

$$۲۴=۲\times ۶\times MH \Longrightarrow MH=۲$$



۶-(۲)، ترکیب دو تقارن محوری با محورهای موازی، انتقال است که قدرمطلق بردار انتقال، مساوی دوبرابر فاصلهٔ بین دو محور تقارن است.

۷-(۴)

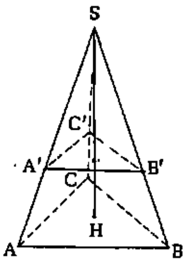
$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=\frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{\overline{SA''}}{\overline{SA}}=-\frac{۳}{۲} \Longrightarrow$$
$$\frac{\overline{SA''}}{\overline{SA'}}=-\frac{۳}{۲}\div\frac{۲}{۳}=-\frac{۹}{۸}$$

۸-(۲)

$$\text{(رابطهٔ اولر)} \ S+F=A+۲ \Longrightarrow$$
$$S+۱۲=۳۰+۲ \Longrightarrow S=۲۰$$

۹-(۳)، اگرارتفاع هرم‌را h، حجم‌هرم ایجادشده به وسیله صفحه‌را v_1 (حجم‌هرم بالایی درشکل زیر) وحجم هرم ناقص ایجادشده‌را v_2 بنامیم، داریم:

$$\frac{v_1}{v}=\left(\frac{\frac{۲}{۳}h}{h}\right)^3=\frac{۸}{۲۷} \Longrightarrow \frac{v-v_1}{v}=\frac{۲۷-۸}{۲۷}=\frac{۱۹}{۲۷}$$
$$\Longrightarrow \frac{v_2}{v}=\frac{۱۹}{۲۷}$$



۱۰-(۲)

۱۱-(۳) $n\in N \ , \ n\geqslant ۳ \ , \ n\times ۴۵°<۳۶۰°$

$$\Longrightarrow n<۸ \Longrightarrow n=۳ \ , \ n=۴ \ , \ n=۵ \ ,$$
$$n=۶ \ , \ n=۷$$

۱۲-(۴)

راه‌اول: سطح قاچ $\alpha°$ درکره‌ای به‌شعاع R $=\frac{\pi R^2\alpha}{۹۰}$

$$\Longrightarrow ۳/۶\pi=\frac{\pi R^2\times ۳۶}{۹۰} \Longrightarrow R=۳$$

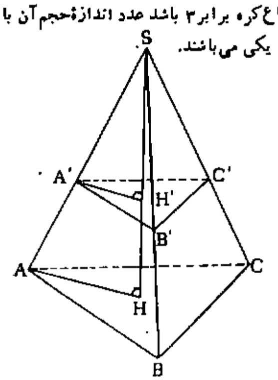
کره $v=\frac{۴}{۳}\pi R^3=\frac{۴}{۳}\pi(۳)^3=۳۶\pi$

راه‌دوم: $۳۶°=\frac{1}{۱۰}\times ۳۶۰° \Longrightarrow$

کره $S=۳/۶\pi\times ۱۰=۳۶\pi=۴\pi R^2$

$\Longrightarrow R=۳ \Longrightarrow$ کره $v=۳۶\pi$ واحد حجم

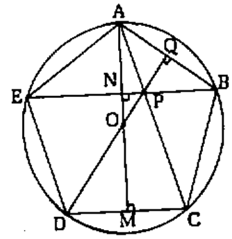
نکته: اگرشعاع کره برابر۳ باشد عدد اندازهٔ حجم آن با عدد اندازهٔ سطح آن یکی می‌باشد.



حل مسائل هندسهٔ سال چهارم ریاضی

۱ـ نقطهٔ تقاطع اقطار AC و BE را P می‌نامیم. عمود منصف ضلع AB از نقاط P و O (مرکز دایره) و D (رأس پنج‌ضلعی) می‌گذرد. دومثلث ONP و OMD متشابهند پس:

$$\frac{ON}{OM}=\frac{PN}{MD} \qquad (1)$$



از طرفی در مثلث AMC، $NP \parallel MC$ است، پس:

$$\frac{NA}{MA}=\frac{NP}{MC} \qquad (2)$$

چون AM عمود منصف ضلع CD است لذا:

$$MD=MC \qquad (3)$$

می‌باشد.

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گردد:

$$\frac{NO}{NA}=\frac{MO}{MA} \quad \text{یا} \quad \frac{ON}{OM}=\frac{NA}{MA}$$

و با توجه به اندازهٔ جبری پاره‌خطها می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{NO}}{\overline{NA}}=-\frac{\overline{MO}}{\overline{MA}}$$

پس نقاط M و N پاره خط AB را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند.

۲ـ راه اول: اگر نقطهٔ $M'(x_1,y_1,z_1)$ قرینه نقطهٔ M نسبت به صفحهٔ P باشد، اولاً ـ نقطهٔ H وسط پاره‌خط MM' روی صفحهٔ P قرار دارد. ثانیاً ـ بردار $\overrightarrow{MM'}$ با $\vec{v}$ (بردار عمود برصفحه) موازی است. پس داریم:

$$M(-2,1,3) \text{ و } M'(x_1,y_1,z) \Longrightarrow$$

$$MM' \text{ وسط } H\left(\frac{x_1-2}{2}, \frac{y_1+1}{2}, \frac{z_1+3}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحهٔ P}} 2\left(\frac{x_1-2}{2}\right)-3\left(\frac{y_1+1}{2}\right)+\left(\frac{z_1+3}{2}\right)+1=0 \Longrightarrow$$

$$2x_1-3y_1+z_1=2 \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{MM'}(x_1+2,\ y_1-1,\ z_1-3)$$

$$\vec{v}(2,-3,1) \text{ و } \overrightarrow{MM'} \parallel \vec{v} \Longrightarrow$$

$$\frac{x_1+2}{2}=\frac{y_1-1}{-3}=\frac{z_1-3}{1} \Longrightarrow$$

$$3x_1+2y_1=-4 \qquad (2)$$

$$x_1-2z_1=-8 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} 2x_1-3y_1+z_1=2 & (1)\\ 3x_1+2y_1=-4 & (2)\\ x_1-2z_1=-8 & (3)\end{cases} \Longrightarrow$$

$$M'\left(\frac{-8}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{24}{7}\right)$$

راه دوم: معادلهٔ خط $M'M$ را نوشته با معادلهٔ صفحه P قطع می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ H به دست آید. آنگاه بامعلوم بودن مختصات نقطهٔ H وسط پاره خط MM' و مختصات نقطهٔ M، مختصات نقطهٔ M' محاسبه می‌شود.

$$\vec{v}(2,-3,1) \quad \text{بردار عمود برصفحهٔ P}$$

$$\vec{v} \parallel \overrightarrow{MM'} \Longrightarrow$$

$$MM' \text{ معادلهٔ} \quad \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1}$$

$$\begin{cases}\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1}=t\\ 2x-3y+z+1=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x=2t-2\\ y=-3t+1\\ z=t+3\end{cases} \xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه}}$$

$$4t-4+9t-3+t+3+1=0$$

$$\Longrightarrow t=\frac{3}{14} \Longrightarrow H\left(\frac{-11}{7}, \frac{5}{14}, \frac{45}{14}\right)$$

$$MM' \text{ وسط پاره خط } H \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x_M+x_{M'}=2x_H\\ y_M+y_{M'}=2y_H\\ z_M+z_{M'}=2z_H\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}-2+x_{M'}=2\left(\frac{-11}{7}\right)\\ 1+y_{M'}=2\left(\frac{5}{14}\right)\\ 3+z_{M'}=2\left(\frac{45}{14}\right)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x=\frac{-8}{7}\\ y=\frac{-2}{7}\\ z=\frac{24}{7}\end{cases}$$

۳ـ اولاً: خط‌المرکزین دو دایرهٔ (c) و (c') محور xها و محور اصلی آنها محور yها است پس معادلهٔ دسته‌دایره‌ای که این دو دایره دوایر مبنای آن می‌باشند به صورت:

$$x^2+y^2-mx+3=0$$

است.

ثانیاً: در دایرهٔ به معادلهٔ

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

اندازه شعاع برابر $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ می‌باشد پس:

$$4=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+0-12} \Longrightarrow \sqrt{m^2-12}=8$$

$$\Longrightarrow m^2=76 \Longrightarrow m=\pm 2\sqrt{19}$$

$$\Longrightarrow c_1: x^2+y^2-2\sqrt{19}x+3=0$$

$$c_2: x^2+y^2+2\sqrt{19}x+3=0$$

دوایر به شعاع ۴ دسته دایره

ثالثاً: دوایر به شعاع صفر دسته دایره (نقاط پونسله دسته دایره)

$$R=0 \Longrightarrow \sqrt{m^2-12}=0 \Longrightarrow m=\pm 2\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow c'_1: x^2+y^2-2\sqrt{3}x+3=0 \Longrightarrow$$

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2=0 \Longrightarrow M_1(\sqrt{3},0)$$

$$c'_2: x^2+y^2+2\sqrt{3}x+3=0 \Longrightarrow$$

$$(x+\sqrt{3})^2+y^2=0 \Longrightarrow M_2(-\sqrt{3},0)$$

رابعاً: معادلهٔ دستهٔ دایرهٔ مزدوج دسته دایرهٔ فوق به‌صورت

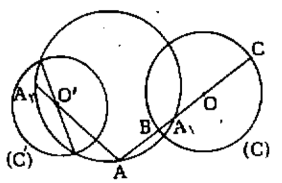
$$x^2+y^2-m'y-3=0$$

است.

۴ـ دایره‌ای که از نقطهٔ A بگذرد و بر دایرهٔ C(O,R) عمود باشد از نقطهٔ A_1 مزدوج توافقی نقطهٔ A نسبت به نقاط B و C (دوسر قطری از دایرهٔ (C) که از نقطهٔ A می‌گذرد) نیز باید بگذرد. همچنین دایره‌ای که از نقطهٔ A گذشته و دایرهٔ

$C'(O', R')$

را نصف می‌کند از نقطهٔ A_2 واقع برخط AO' می‌گذرد به قسمی که $\overline{O'A} \cdot \overline{O'A_2}=-R'^2$ باشد، پس دایرهٔ جواب



دایره‌ای است که بر سه نقطهٔ A و A_1 و A_2 مرور می‌کند. مسئله درصورتی تنها یک جواب دارد که سه نقطهٔ A و A_1 و A_2 متمایز باشند و روی یک خط راست قرار نداشته باشند.

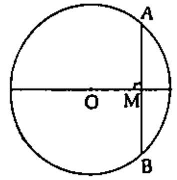
۵ـ نقطهٔ M داخل دایره واقع است، پس قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ داده‌شده مساوی با منهای مجذور نصف وتر به‌طول مینیممی است که از آن نقطه در دایره رسم می‌شود.

$$p^{M}_{C}=C(1,2)=1+4-4-16+10=-5$$

$$\Longrightarrow -MA^2=-5 \Longrightarrow MA^2=5 \Longrightarrow$$

$MA=\sqrt{۵} \Longrightarrow AB=۲\sqrt{۵}$

(وتری از دایره که نقطهٔ M وسط آن است همان وتر به طول مینیممی است که از نقطهٔ M در دایره رسم می‌شود.)



جواب تشریحی تستها

۱- (۲)

$\overrightarrow{v_۲}(۱,۰,۳)\ ,\ \overrightarrow{v_۱}(۲,-۳,۱)$

و

$(۲\overrightarrow{v_۱})\wedge(-۳\overrightarrow{v_۲})=-۶(\overrightarrow{v_۱}\wedge\overrightarrow{v_۲})$

است. از طرفی تصویر بردار $(\overrightarrow{v_۱}\wedge\overrightarrow{v_۲})$ روی محور zها برابر است با:

$Z=X_۱Y_۲-Y_۱X_۲=۳$

پس جواب موردنظر $-۱۸=۳\times۶-$ است.

۲- (۱)

$$d=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}} \Longrightarrow$$

$$۵=\frac{|۲a-۲a+۱+۶a-۲|}{\sqrt{۴+۱+۴}} \Longrightarrow$$

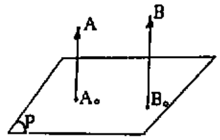
$$|۶a-۳|=۱۵ \Longrightarrow |۲a-۱|=۵ \Longrightarrow$$

$a=۳$ و $a=-۲$

۳- (۱)،

$$P(A)\cdot P(B)=$$
$$(-۲+۴-۰+۱)(۶-۴-۴+۱)=$$
$$(+۳)(-۱)=-۳<۰ \Longrightarrow$$

نقاط A و B در دوطرف صفحهٔ P قرار دارند.



یادآوری: با استفاده از فرمول اندازهٔ جبری فاصلهٔ یک نقطه از یک صفحه

$$\overline{A_۰A}=\frac{ax_۱+by_۱+cz_۱+d}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\frac{P(A)}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

و با توجه به اینکه $\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$ مقداری مثبت است، برای تعیین وضع دو نقطهٔ A و B نسبت به صفحه $P(x,y,z)=۰$ کافی است اندازهٔ $P(A)\cdot P(B)$ را محاسبه نماییم، هرگاه:

$P(A)\cdot P(B)>۰$

باشد نقاط A و B در یک طرف صفحهٔ P واقع‌اند ($\overrightarrow{A_۰A}$ و $\overrightarrow{B_۰B}$ هم‌جهت‌اند) و اگر $P(A)\cdot P(B)<۰$ باشدنقاط A و B در دوطرف صفحهٔ P قرار دارند (بردارهای $\overrightarrow{A_۰A}$ و $\overrightarrow{B_۰B}$ مختلف‌الجهت‌اند) و در صورتی که:

$P(A)\cdot P(B)=۰$

باشد بنابراین‌که $P(A)=۰$ یا $P(B)=۰$ یا:

$P(A)=P(B)=۰$

باشدبه ترتیب نقطهٔ A یا نقطهٔ B یا هردونقطهٔ A و B روی صفحهٔ P واقع می‌باشند.

۴- (۱)

$P: x+۲y-z-۱=۰$

$P': ۲x+z-۳=۰$

$A(۰,۱,۲)$ و $B(-۳,۱,-۱)$

$P(A)\cdot P(B)=(۰+۳-۲-۱).(-۳+۳+۱-۱)$

$=۰\times۰=۰ \Longrightarrow$

$A\in P$ و $B\in P$

۵- (۲) $P: ۳x+y+۳z-۱=۰ \Longrightarrow$

$\overrightarrow{v}(۳,۱,۳)$ بردار نرمال صفحه $\Longrightarrow$

$(a=۳\ ,\ b=۱\ ,\ c=۳)$

$D: ۳x=۲\left(y-\frac{۱}{۲}\right)=(۲a-۱)z \Longrightarrow$

$$\frac{x}{۲}=\frac{y-\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{z}{\frac{۶}{۲a-۱}} \Longrightarrow$$

$$\left(p=۲\ ,\ q=۳\ ,\ r=\frac{۶}{۲a-۱}\right)$$

$ap+bq+cr=۰$: شرط موازی‌بودن خط وصفحه

$$\Longrightarrow ۶+۳+\frac{۱۸}{۲a-۱}=۰ \Longrightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۶- (۴)

$$D: \begin{cases} x=۲t-۱ \\ y=t \\ z=-۲t+۳ \end{cases} \Longrightarrow$$

$D: \frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{۱}=\frac{z-۳}{-۲}$ معادلهٔ کانونیک خط D

$$\Longrightarrow D: \begin{cases} x-۲y+۱=۰ \\ x+z-۲=۰ \end{cases} \Longrightarrow$$

$\alpha(x-۲y+۱)+\beta(x+z-۲)=۰ \Longrightarrow$

$(\alpha+\beta)x-۲\alpha y+\beta z+\alpha-۲\beta=۰$

معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر D

$P: ۲x+y-z+۱=۰$

$aa'+bb'+cc'=۰$ شرط عمودبودن دوصفحه

$\Longrightarrow ۲\alpha+۲\beta-۲\alpha-\beta=۰ \Longrightarrow \beta=۰ \Longrightarrow$

$x-۲y+۱=۰$

معادلهٔ صفحه‌ای که ازخط D می‌گذرد و برصفحهٔ P عموداست.

$$\begin{cases} x-۲y+۱=۰ \\ ۲x+y-z+۱=۰ \end{cases} \Longrightarrow ۵x-۲z+۳=۰$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=۲y-۱ \\ x=\frac{۲z-۳}{۵} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{x=۲y-۱=\frac{۲z-۳}{۵}}$$

۷- (۲)، راه‌اول: معادلهٔ صفحه‌ای که برمحور yها می‌گذرد به صورت:

$ax+cz+d=۰$

است، یعنی در معادلهٔ آن به علت صفربودن b، y وجود ندارد و فقط گزینهٔ (۲) چنین‌وضعی دارد. پس این گزینه جواب است.

راه دوم:

$M(۲,۲,۲) \Longrightarrow \overrightarrow{OM}(۲,۲,۲)$

$N\in y'y$ نقطه‌ای دلخواه $\quad N(۰,۱,۰) \Longrightarrow$

$\overrightarrow{ON}(۰,۱,۰) \Longrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}(-۲,۰,۲)$

بردار نرمال‌صفحهٔ مطلوب

$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰ \Longrightarrow$

$-۲(x-۲)+۰(y-۲)+۲(z-۲)=۰ \Longrightarrow$

$\boxed{x-z=۰}$

۸- (۱) $C-C'=۰ \Longrightarrow (a+۲)x+۱=۰$

$\Longrightarrow (a+۲)(-\frac{۱}{۳})+۱=۰ \Longrightarrow a=۱$

۹- (۳)، راه‌اول: مرکزدایرهٔ اصلی بیضی برمرکز بیضی منطبق است. مرکز بیضی داده‌شده نقطهٔ $C(۱,-۱)$ است. زیرا:

$$\begin{cases} f'_x=۲x-۲=۰ \Longrightarrow x=۱ \\ f'_y=۸y+۸=۰ \Longrightarrow y=-۱ \end{cases} \Longrightarrow$$

مرکز بیضی $C\left|\begin{matrix}\alpha=۱ \\ \beta=-۱\end{matrix}\right.$

پس گزینهٔ(۳) جواب است. زیرا فقط دراین گزینه مختصات مرکز دایرهٔ $(۱,-۱)$ می‌باشد.

راه دوم: مرکز دایرهٔ اصلی بیضی بر مرکز بیضی منطبق می‌باشد و شعاعش مساوی a است، پس اگر از معادلهٔ بیضی داده شده مختصات مرکز و نصف قطر بزرگ را به دست آوریم خواهیم داشت:

$$x^2+4y^2-2x+8y+1=0 \Rightarrow$$
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}=1 \Rightarrow$$
$$C\left|\begin{array}{l}1\\ -1\end{array}\right. \text{ و } a^2=4 \Rightarrow a=2 \Rightarrow$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow$$

معادلهٔ دایرهٔ اصلی بیضی $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

۱۰- (۳)، راه اول:

$$F\left|\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta+c=1\end{array}\right. \quad ; \quad 3(2)+y=2 \Rightarrow y=-4$$

$$\Rightarrow \text{مرکز } C\left|\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta=-4\end{array}\right.$$
$$-4+c=1 \Rightarrow c=5$$

مجانبها $m=\pm 3=\pm\frac{a}{b} \Rightarrow a=3b$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=9b^2+b^2=10b^2 \Rightarrow$$
$$b^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2} \rightarrow b=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow$$
$$a=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$
$$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{\frac{3\sqrt{10}}{2}}=\frac{10}{3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

راه دوم: چون محور کانونی هذلولی موازی محور عرضها است پس $m=\pm\frac{a}{b}=\pm 3$ مجانبها است. از آنجا:

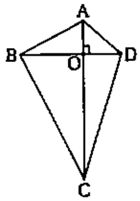
$$\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$$

می‌باشد اما:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=$$
$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

حل مسائل هندسهٔ سال دوم علوم تجربی

۱- نقطهٔ برخورد اقطار چهارضلعی را O می‌نامیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAB و OBC و OCD و ODA

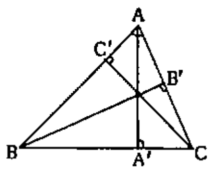


می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}AB^2=OA^2+OB^2\\ BC^2=OB^2+OC^2\\ CD^2=OC^2+OD^2\\ DA^2=OD^2+OA^2\end{cases} \Rightarrow$$
$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=$$
$$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$$

۲- ۱) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ 'ABB و 'ACC متشابهند پس داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$$



۲) روابط زیر در مثلث ABC برقراراند:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'} \quad (1) \qquad \frac{AC}{CB}=\frac{CA'}{CB'} \quad (2)$$
$$\frac{BC}{AB}=\frac{BC'}{BA'} \quad (3)$$

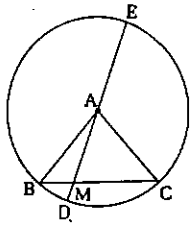
از ضرب این روابط خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{AC}\times\frac{AC}{CB}\times\frac{BC}{AB}=\frac{AB'}{AC'}\times\frac{CA'}{CB'}\times\frac{BC'}{BA'}$$
$$\Rightarrow \frac{AB'\cdot CA'\cdot BC'}{AC'\cdot CB'\cdot BA'}=1 \Rightarrow$$
$$AB'\cdot CA'\cdot BC'=AC'\cdot CB'\cdot BA'$$

۳- دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $AB=AC$ رسم می‌کنیم. نقاط برخورد AM با این دایره‌را D و E می‌نامیم. با توجه به اینکه

$$AE=AD=AB$$
$$ME=AE+AM=AB+AM$$
$$MD=AD-AM=AB-AM$$

است داریم:

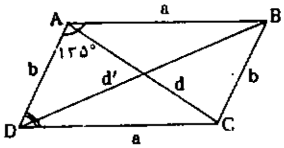


$$MB\cdot MC=MD\cdot ME \Rightarrow$$
$$MB\cdot MC=(AB-AM)\cdot(AB+AM) \Rightarrow$$
$$MB\cdot MC=AB^2-AM^2 \quad \text{یا}$$
$$AB^2-AM^2=MB\cdot MC$$

۴- اگر زاویهٔ $\hat{D}$ از متوازی‌الاضلاع ABCD مساوی °۴۵ باشد زاویهٔ $D\hat{A}B=135°$ خواهد بود. با فرض:

$BD=d'$ و $AC=d$

روابط زیر را می‌توان نوشت:

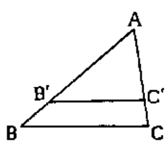


$$\Delta ADC: d^2=a^2+b^2-2ab\cos 45°$$
$$=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$$
$$\Delta ABD: d'^2=a^2+b^2-2ab\cos 135°$$
$$=a^2+b^2+\sqrt{2}ab$$
$$d^2\cdot d'^2=(a^2+b^2-\sqrt{2}ab)(a^2+b^2+\sqrt{2}ab)$$
$$=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$
$$d^2\cdot d'^2=a^4+b^4$$

جواب تشریحی تستها

۱- (۲)

$$B'C'=\frac{3}{4}BC \Rightarrow \frac{B'C'}{BC}=\frac{3}{4}$$
$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{3}{4} \Rightarrow$$
$$\frac{CC'}{AC}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{AC}=\frac{1}{4} \Rightarrow AC=12$$



(۳) -۲

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \Longrightarrow$$

$$\frac{۷}{a'}=\frac{۸}{b'}=\frac{۹}{c'}=\frac{۷+۸+۹}{۷۲}=\frac{۲۴}{۷۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Longrightarrow a'=۲۱$$

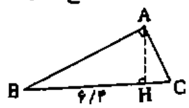
(۱) -۳ $\frac{r}{r'}=\frac{R}{R'}=\frac{۲R}{۲R'}=\frac{۲}{۳}$

(۳) -۴ $BC=۱۰$ و $BH=۶/۴ \Longrightarrow$

$CH=۱۰-۶/۴=۳/۶$

$AC^۲=CH\cdot BC=۳/۶\times ۱۰=۳۶ \Longrightarrow$

$AC=۶$ ضلع دیگر



۵- (۱) ، چهارضلعی MNPQ مربعی است به ضلع y، پس مساحت آن برابر $y^۲$ است.

(۲) -۶ اندازهٔ قطرمربع $=a\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲} \Longrightarrow$

$a=۴ \Longrightarrow$ مربع $S=۱۶cm^۲$

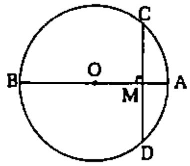
۷- (۴) ، مثلثی با اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ سانتیمتر (یك دسته عدد فیثاغورثی) قائم‌الزاویه‌است، پس مساحت آن برابراست با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶=۲۴$$

۸- (۲) ، وتر به‌طول مینیمم مرسوم از یك نقطه در یك دایره وتری است که در آن نقطه عمود برقطری از دایره است که از آن نقطه می‌گذرد. پس :

$MC^۲=MA\cdot MB=۳\times ۱۲=۳۶ \Longrightarrow$

$MC=۶ \Longrightarrow CD=۱۲cm$



حل مسائل هندسهٔ سال سوم علوم تجربی

۱- مختصات مرکز ثقل مثلث را محاسبه و فاصلهٔ آن را تا مبدأ مختصات به دست می‌آوریم:

مرکز G ثقل مثلث:

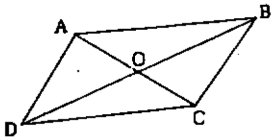
$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳}=\frac{-۲+۴+۷}{۳}=۳$$

$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}=\frac{۱-۵-۲}{۳}=-۲$$

$OG=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳} \Longrightarrow$

$OG=\sqrt{۱۳}$

۲- اقطار متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند پس روابط زیر را می‌توان نوشت:



$\vec{AO}+\vec{CO}=\vec{0}$ و $\vec{BO}+\vec{DO}=\vec{0} \Longrightarrow$

$\vec{AO}+\vec{BO}+\vec{CO}+\vec{DO}=\vec{0}$ (۱)

از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\vec{MO}=\vec{MA}+\vec{AO}\\ \vec{MO}=\vec{MB}+\vec{BO}\\ \vec{MO}=\vec{MC}+\vec{CO}\\ \vec{MO}=\vec{MD}+\vec{DO}\end{cases}$$

ازجمع این روابط با توجه به رابطه (۱) ، نتیجه می‌شود:

$$۴\vec{MO}=\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}$$

-۳

حجم کره $v=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ ، مساحت سطح کره $S=۴\pi R^۲$

$S=۳v \Longrightarrow ۴\pi R^۲=۳\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Longrightarrow$

$R=۱$ شعاع کره

h منطقهٔ به ارتفاع $S=۲\pi Rh \Longrightarrow$

منطقه $S=۲\pi\times ۱\times\frac{۱}{۲}=\pi \Longrightarrow$

منطقه $S=\pi$ واحد سطح

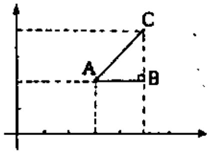
جواب تشریحی تستها

۱- (۴) ، قرینهٔ محوری هرشکل باخود آن شکل برابراست.

۲- (۳) ، نقطهٔ S وسط خط‌المرکزین دو دایرهٔ متساوی، مرکز تقارن شکل‌حاصل از آن دو دایره‌است، پس وترهای ایجادشده در دو دایره به وسیله قاطعی که از نقطهٔ S می‌گذرد باهم برابرند، لذا نسبت آنها مساوی ۱ است.

۳- (۴) ، با توجه به اینکه $AB\|x'x$ و $BC\|y'y$ است. پس مثلث ABC در رأس B قائم‌الزاویه است. لذا نقطه تلاقی ارتفاعات این مثلث همان رأس B است پس :

$OB=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۲۵+۴}=\sqrt{۲۹}$



(۴) -۴ $\vec{b}=\frac{-\vec{a}}{۲} \Longrightarrow \vec{a}+۲\vec{b}=\vec{0}$

$\Longrightarrow \vec{a}\cdot(\vec{a}+۲\vec{b})=0$

۵- (۱) ، با پنج‌ضلعی منتظم‌فقط ۱۲ وجهی‌منتظم ساخته‌می‌شود.

(۲) -۶ $S+F=A+۲ \Longrightarrow ۵+۵=A+۲$

$\Longrightarrow A=۸$ تعداد یالها

۷- (۱) ، حجم‌چهار وجهی منتظم به ضلع a برابراست با:

$$v=\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲}$$

پس داریم :

$$v=\frac{(۶\sqrt{۲})^۳\cdot\sqrt{۲}}{۱۲}=۷۲$$

۸- (۱) ، اگرشعاع قاعدهٔ استوانه‌را R وارتفاع‌مشترك استوانه و منشور را h فرض‌کنیم داریم:

سطح جانبی استوانه $=۲\pi Rh$

ضلع قاعدهٔ منشور $=R \Longrightarrow$

سطح جانبی منشور $=۶R\cdot h \Longrightarrow$

$$\frac{S_{\text{جانبی استوانه}}}{S_{\text{جانبی منشور}}}=\frac{۲\pi Rh}{۶R\cdot h}=\frac{\pi}{۳}$$

(۳) -۹ α° سطح‌تاج $=\frac{\pi R^۲\alpha}{۹۰} \Longrightarrow$

$$۳۶\pi=\frac{\pi R^۲\times ۹۰}{۹۰}=\pi R^۲ \Longrightarrow R^۲=۳۶$$

$\Longrightarrow R=۶$ شعاع کره

کره $v=\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\pi\times ۲۱۶=۲۸۸\pi$ واحد حجم

حل مسائل ریاضیات جدید سال اول

۱- می‌خواهیم عکس‌نقیض گزارهٔ (فردبودن عددصحیح a شرط‌کافی برای فردبودن $a^۲$ است) را بنویسیم. ابتدا آن را به صورت $p \Longrightarrow q$ درآورده داریم:

«اگر عدد صحیح a فردباشد آنگاه $a^۲$ فرد است» که عکس نقیض گزارهٔ بالا به صورت: « اگر عدد صحیح $a^۲$ فرد نباشد آنگاه a فرد نیست» بیان می‌شود یا «فرد نبودن عدد a شرط لازم‌است برای‌فرد نبودن $a^۲$» ویا «فردنبودن‌عدد $a^۲$ شرط کافی‌است برای‌فرد نبودن a».

۲- چون گزارهٔ $(r\wedge\sim s) \Longleftrightarrow (p\vee\sim q)$ درست‌است لذا گزارهٔ $(p\vee\sim q)$ وگزارهٔ $(r\wedge\sim s)$ هم‌ارز هستند وچون گزارهٔ s درست‌است پس $\sim s$ نادرست است وبنابراین $(r\wedge\sim s)$

نادرست پس باید $(p\vee\sim q)$ نیز نادرست باشد.

$$(p\vee\sim q)\equiv F \Rightarrow p\equiv F \text{ و } \sim q\equiv F \Rightarrow q\equiv T$$
$$\Rightarrow (p\Rightarrow r)\equiv(F\Rightarrow r)\equiv T$$
$$(q\vee p)\equiv(T\vee F)\equiv T \Rightarrow$$
$$(p\Rightarrow r)\Leftrightarrow (q\vee p)\equiv(T\Leftrightarrow T)\equiv T$$

۳ـ حال ثابت می‌کنیم گزارهٔ شرطی زیر همواره درست است $([(q\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q)$

p	q	∼p	p⇒q	∼pvq
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

$$[(p\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q\equiv[(\sim p\wedge q)\wedge p]\Rightarrow$$
$$q\equiv[(\sim p\wedge p)\vee(q\wedge p)]\Rightarrow q\equiv[F\vee(p\wedge q)]$$
$$\Rightarrow q\equiv(p\wedge q)\Rightarrow q\equiv\sim(p\wedge q)\vee q$$
$$\equiv(\sim p\vee q)\vee q\equiv\sim p\vee(\sim q\vee q)\equiv\sim p\vee T\equiv T$$

۴ـ می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$[(A-B)\cup(B-A)]\cap(A\cap B)=\varnothing$$

در مثالهای کتاب درسی ثابت شد:

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$
$$\Rightarrow [(A\cup B)-(A\cap B)]\cap(A\cap B)$$
$$=[(A\cup B)\cap(A\cap B)']\cap(A\cap B)$$
$$=(A\cup B)\cap[(A\cap B)'\cap(A\cap B)]$$
$$=(A\cup B)\cap\varnothing=\varnothing$$

جواب تشریحی تستها

۱ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$$p\Rightarrow(q\vee\sim p)\equiv F\Rightarrow p\equiv T \text{ و } q\equiv F\Rightarrow$$
$$(q\Rightarrow\sim p)\equiv T$$

۲ـ گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا:

$$p\equiv T\Rightarrow(q\Rightarrow p)\equiv T\Rightarrow$$
$$[(t\Rightarrow r)\Rightarrow(\overbrace{q\Rightarrow p}^{T})]\equiv T$$

۳ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

عکس نقیض گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sim(q\Rightarrow r)\Rightarrow\sim p\equiv\sim(\sim q\vee r)\Rightarrow\sim p$$

۴ـ گزینهٔ (ج) جواب تست است زیرا:

اگر p و q هردو ارزش درست داشته باشند لذا ارزش $(p\wedge q)$ درست است پس $f(p\wedge q)=1$ از طرفی:

$$f(q)=1 \text{ و } f(p)=1$$

درصورتی که در گزینهٔ (ج) داریم:

$$f(p\wedge q)=f(p)+f(q)\Rightarrow 1=1+1$$
$$\Rightarrow 1=2$$

۵ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است پس $8=2^3$ زیرمجموعه دارد.

۶ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

با توجه به تعریف زیر مجموعه هرعضو مجموعهٔ $\{x\}$ یعنی x عضو مجموعهٔ $\{x,\{x\}\}$ می‌باشد.

۷ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

با توجه به تعریف P(A)، اگر A دارای n عضو باشد P(A) دارای 2^n (تعداد زیرمجموعه‌های A) عضو است پس P(A) دارای $2=2^1$ عضو است و P(P(A)) دارای $4=2^2$ عضو و P(P(P(A))) دارای $16=2^4$ عضو است.

۸ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

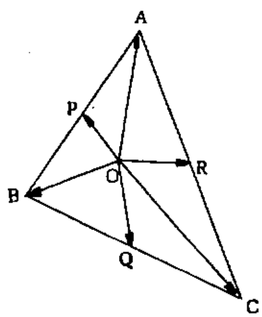
$$\text{طبق فرض} \rightarrow (A-B)=(A\cup B)\Rightarrow$$
$$(A\cap B')=(A\cup B)\Rightarrow(A\cap B')\cap B$$
$$=\overbrace{(A\cup B)\cap B}^{\text{قانون جذب}}\Rightarrow A\cap(B'\cap B)=B\Rightarrow$$
$$A\cap\varnothing=B\Rightarrow\varnothing=B$$

حل مسائل ریاضیات جدید دوم ریاضی

۱ـ P و Q و R اوساط اضلاع مثلث ABC هستند. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

چون P وسط AB است پس $-\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}$.



بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}\\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overbrace{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}}^{\vec{O}}=2\overrightarrow{OP}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OP}\quad(1)$$

و به همین قیاس در روی اضلاع دیگر می‌توان ثابت کرد که:

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OQ}\quad(2)$$
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OR}\quad(3)$$

حال روابط (۱) و (۲) و (۳) را با هم جمع می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=$$
$$2\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+2\overrightarrow{OR}\Rightarrow$$
$$2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

۲ـ فرض کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}$$

دو ماتریس ۲×۲ باشند و فرض کنیم $AB-BA=I$. حال به تناقض می‌رسیم!

$$AB=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}ae+bg&af+bh\\ce+dg&cf+dh\end{bmatrix}$$
$$BA=\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}ae+fc&eb+fd\\ag+hc&gb+hd\end{bmatrix}$$
$$AB-BA=\begin{bmatrix}bg-cf&(af+bh)-(eb+fd)\\(ce+dg)-(ag+hc)&cf-bg\end{bmatrix}$$

حال اگر $AB-BA=I$ پس باید:

$$AB-BA=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} bg-cf=1 \\ cf-bg=1 \\ af+bh-eb-fd=0 \\ ce+dg-ag-hc=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} bg-cf=1 & (1) \\ cf-bg=1 & (2) \\ f(a-d)+b(h-e)=0 \\ g(d-a)+c(e-h)=0 \end{cases}$$

(1) و $(2) \xrightarrow{\text{جمع ۲ رابطه}} (bg-cf)+(cf-bg)$

$=1+1$

$\Longrightarrow 0=2$ و این تناقض است

۳ـ داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$$

حال اگر $AX=B$ پس:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$$

و با توجه به تعریف ضرب ماتریسها، ماتریس X باید یک ماتریس 2×1 باشد لذا خواهیم داشت: پس: $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}-x+2y=3\\ 3x+5y=2\end{cases}$$

و از حل دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت:

$x=-1 \ , \ y=1$

پس: $X=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

۴ـ اگر قرار دهیم:

$$A=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ A^{96} به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$=4\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}$$

از طرفی $\rightarrow A^{8}=4^{8}\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}^{8}$

$$=4^{8}\begin{bmatrix}\cos 2\pi & -\sin 2\pi\\ \sin 2\pi & \cos 2\pi\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^{8}=4^{8}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{I} \Longrightarrow$$

$$A^{96}=(A^{8})^{12}=(4^{8})^{12}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{12}$$

$$\Longrightarrow A^{96}=4^{96}I \Longrightarrow A^{96}=\begin{bmatrix}4^{96} & 0\\ 0 & 4^{96}\end{bmatrix}$$

جواب تشریحی تستها

۱ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا:

تابع یک تابع دوضابطه‌ای است که در هرضابطه‌اش یک به‌یک است و بردهای دوضابطه نقطهٔ مشترکی ندارند پس یک به‌یک است. ازطرفی چون $|x|+1\neq0$ لذا تابع نمی‌تواند عدد صفر را در $\mathbb{R}$ بپوشاند.

۲ـ گزینهٔ (ب) صحیح است (تعریف ضرب و تساوی دو ماتریس).

۳ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا:

ماتریس A ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ 30° می‌باشد که اگر به توان ۶ برسانیم یعنی ۶ مرتبه دوران به اندازهٔ 30° که حاصل ماتریس دوران به اندازهٔ 180° است پس:

$$A^{6}=\begin{bmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

۴ـ گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا:

همان‌طور که مشاهده می‌شود در تبدیل M به M'، طول و عرض نقطهٔ M قرینه شده‌اند پس ماتریس تبدیل باید ماتریس تقارن نسبت به مبدأ مختصات باشد.

۵ـ گزینهٔ (ب) جواب تست است زیرا:

به راحتی قابل تحقیق است که

$$A^{2}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

پس $A^{2}\neq I$.

۶ـ گزینهٔ (الف) صحیح است (تعریف گروه).

۷ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$[(3*5)*6]+[3*(5*6)]=$

$$[\overbrace{(\mathrm{Max}\{3,5\}-2)}^{3}*6]+[3*\overbrace{(\mathrm{Max}\{5,6\}-2)}^{4}]$$

$=(\mathrm{Max}\{3,6\}-2)+(\mathrm{Max}\{3,4\}-2)$

$=4+2=6$

۸ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

$x*e=x \Longrightarrow x+e+5=x \Longrightarrow$

$e+5=0 \Longrightarrow e=-5$

۹ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا:

اعداد طبیعی، اعداد اول و اعداد فرد هیچ‌کدام عضو خنثی جمع یعنی صفر را نداشته و نمی‌توانند با عمل جمع تشکیل گروه دهند.

۱۰ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

با توجه به جدول مشاهده می‌شود که ۳ از چپ و راست خنثی است و چون دوطرف قطر اصلی جدول تقارن دارند جابه‌جایی نیز هست.

حل مسائل ریاضیات جدید سال سوم ریاضی

۱ـ اگر هرخواهر و برادر را ۱ نفر فرض کنیم که روبه‌روی هم نشسته‌اند پس در رهلهٔ اول $3!$ طریق جابه‌جایی منظم دارند و هرخواهر با برادرش که روبه‌روی هم هستند نیز می‌توانند جابه‌جا شوند پس در کل، پاسخ مسأله به صورت:

$$3!\times2!\times2!\times2!=48$$

می‌باشد.

۲ـ می‌دانیم به طور کلی n شیئی متمایز به $(n-1)!$ طریق می‌توانند دور یک میزگرد قرار بگیرند. (۱ شیئی را ابتدا قرار می‌دهیم و $(n-1)$ شیئی بقیه به $(n-1)!$ طریق مختلف می‌توانند در کنار آن واقع شوند.) حال هرزن و شوهر را چون باید در کنار هم باشند می‌توان ۱ نفر فرض کرد پس این تعداد زن و شوهر را ۵ نفر فرض کرده که به $(5-1)!$ طریق می‌توانند دور یک میز قرار بگیرند. ازطرفی هرزن می‌تواند جای خود را با شوهرش عوض کند پس جواب مسأله به صورت:

$$(5-1)!\times2!\times2!\times2!\times2!\times2!$$

می‌باشد.

۳ـ مسأله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

یا رقم سمت چپ عددی فرد است یا عددی زوج اگر عددی فرد باشد:

زوج	زوج	فرد	فرد
۵	۵	۵	۵

$=5^{4}$

وچون عددفرد خانه دوم در دوخانهٔ دیگر نیز می‌تواند باشد در کل داریم: 3×5^4 و اگر عدد سمت‌چپ زوج باشد چون صفر نمی‌تواند باشد داریم:

زوج	زوج	فرد	فرد	
۴	۵	۵	۵	$=4\times5^3$

وچون عددزوج خانهٔ دوم در دوخانهٔ دیگرنیزمی‌تواندباشد لذا خواهیم داشت:

$$3\times4\times5^3=12\times5^3$$

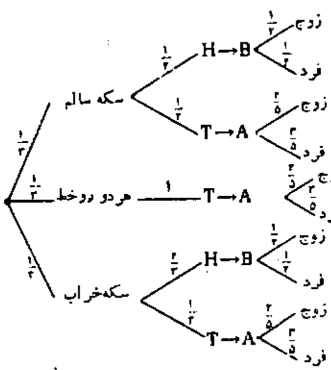
و درکل تعدادچنین اعدادی عبارت است از:

$$3\times5^4+12\times5^3=5^3(3\times5+12)=27\times5^3$$

۴ ـ درحقیقت مسأله به این شکل است که به چند طریق می‌توان تیمهای k عضوی از بین n عضو بـه‌وجود آورد (در مجموعه‌ها جابه‌جایی عضوی بی‌اثر است) پس:

$$\text{تعدادزیرمجموعه‌های k عضوی}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

۵ ـ این‌مسأله و مسائل‌شبیه به‌این‌را با استفاده از اصل ضرب احتمالات و باروش‌نمودار درختی‌می‌توان‌حل‌کرد ومثلاً دراین مسأله‌برای هرحالت‌شاخه‌ای‌ازنمودار‌را درنظرمی‌گیریم که به عددفرد منتهی‌می‌شود واعداد روی‌آن شاخه‌ها‌را درهم ضرب کرده و با حالتهای‌بعدی‌جمع می‌کنیم (شیر‌را بانماد H وخط‌را با نماد T نمایش می‌دهیم).



$$P(A)=\left(\tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{3}{5}\right)+$$
$$\left(\tfrac{1}{3}\times1\times\tfrac{3}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{3}\times\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{3}\times\tfrac{3}{5}\right)$$

$A: x_1, x_2, \dots, x_n$ داده‌های اولیه

$B: Kx_1, Kx_2, \dots, Kx_n$ داده‌های‌جدید

$$\overline{X}_B=\frac{Kx_1+Kx_2+\dots+Kx_n}{n}=$$
$$k\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=K\overline{X}_A$$

ثابت شد $\boxed{\overline{X}_B=K\overline{X}_A}$

از طرفی می‌دانیم:

$$\text{واریانس داده‌های جدید}=S^2_B=\frac{\sum(Kx_i-\overline{X}_B)^2}{n-1}$$

$$\text{انحراف معیار}=S_B=\sqrt{S^2_B}$$

وچون ثابت‌کردیم $\overline{X}_B=K\overline{X}_A$ پس:

$$S^2_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Kx_i-K\overline{X}_A)^2}{n-1}$$

$$\Longrightarrow S^2_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}[K(x_i-\overline{X}_A)]^2}{n-1}$$

$$\Longrightarrow S^2_B=\frac{K^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X}_A)^2}{n-1}$$

$$\Longrightarrow S^2_B=K^2S^2_A\Longrightarrow \boxed{S_B=KS_A}$$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینهٔ (د) صحیح‌است: زیرامی‌دانیم اگردوبردار مضربی ازیکدیگر باشند وابسته خطی‌اند پس چون مؤلفهٔ اول (۲,a) ، ۳− برابر شده پس باید:

$$-3a=a+1\Longrightarrow -4a=1\Longrightarrow a=\frac{-1}{4}$$

۲ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

(برای‌تعیین احتمال همرنگ‌نبودن ۴ مهره به ترتیب زیرعمل می‌کنیم)

$$\text{احتمال اینکه هر ۴ مهره همرنگ‌باشند}=\frac{\binom{4}{4}+\binom{5}{4}}{\binom{9}{4}}$$

$$=\frac{1+5}{126}=\frac{6}{126}$$

$$\text{احتمال اینکه هر ۴ مهره همرنگ نباشند}=1-\frac{6}{126}$$

$$=\frac{120}{126}=\frac{20}{21}$$

۳ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا اگر IR زیرفضای نابدیهی مانند U داشته‌باشد باتوجه به بسته بودن U نسبت به ضرب اسکالر به راحتی می‌توان نتیجه‌گرفت‌که $1\in U$ و اگر $1\in U$ دوباره با استفاده از بسته‌بودن U نسبت‌به ضرب اسکالر داریم:

$$\forall x\in IR,\ x\cdot1\in U\Longrightarrow x\in U\Longrightarrow IR\subseteq U$$

و چـون همواره $U\subset IR$ پس $U=IR$ یعنی U نمی‌تواند نابدیهی باشد.

۴ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا ازکل حالات یعنی $6!$ تعدادحالتهایی که۲مهره مخصوص درکنارهم‌هستند کم‌می‌کنیم خواهیم داشت:

$$6!-5!\times2$$

۵ ـ گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا:

در این کمیسیون حتماً باید حداقل ۱ شیرازی باشد. پس داریم:

$$\binom{4}{1}\times\binom{11}{3}=4\times165=660$$

۶ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

$$\text{میانگین‌واقعی}=\frac{16\times50-(19-9)}{50}=$$

$$\frac{800-10}{50}=\frac{790}{50}=15/8$$

۷ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا:

$4+2+1=7\Longrightarrow a^4b^2c$ ضریب‌جملهٔ

$$=\frac{7!}{4!\times2!\times1!}=105$$

۸ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا داریم:

$$\text{تعدادحالات ممکن}=\underbrace{\binom{5}{3}\times\binom{4}{1}}_{\text{۳ آبی و ۱ قرمز}}+\underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{۴ آبی}}$$

$$=40+5=45$$

۹ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا اگر مثلاً خط

$$3x+2y=6$$

را رسم‌کنیم و به موازات‌خود حرکت دهیم آخرین نقطه‌ای‌که منطقهٔ هاشورخورده‌را قطع‌می‌کند نقطهٔ‌برخورد دوخط‌است‌که باتوجه به مختصات محل برخوردآنها با محورها معادلات‌آن دوخط عبارت‌انداز: $(x+y=5\ ,\ 2y+6x=22)$ پس:

$$\begin{cases}2y+6x=22\\x+y=5\end{cases}\Longrightarrow x=2\ ,\ y=3\Longrightarrow$$

$$\text{بیشینه}=(3\times2)+(2\times3)=12$$

حل مسائل ریاضیات جدید سال چهارم ریاضی

۱ ـ فرض‌کنیم:

$$(2a+b\ ,\ a+2b)=d$$

ثابت می‌کنیم $d=3$ یا $d=1$.

$$d|2a+b\ ,\ d|a+2b\Longrightarrow$$

$$d|(2a+b)+(a+2b)\Longrightarrow d|3(a+b)$$

حال ثابت می‌کنیم $(d,(a+b))=1$.

اگر $(d,(a+b))=d_1$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}d_1|d\\d_1|a+b\end{cases}\Longrightarrow d_1|a+2b\ ,\ d_1|a+b\Longrightarrow$$

$d_1|(a+2b)-(a+b) \Rightarrow d_1|b$

وبه همین‌قیاس می‌توان ثابت کرد $d_1|a$ وچون $(a , b)=1$ پس $d_1|1$ بنابراین $d_1=1$.

پس $\to (d , (a+b))=1 , d|3(a+b) \xRightarrow{\text{لم اقلیدس}}$

$d|3 \Rightarrow d=1$ یا $d=3$

۲ ـ برای یافتن دو رقم سمت راست عدد 13^{10} باید تحقیق کنیم که این‌عدد به‌سنج ۱۰۰ باچه عددی همنهشت است.

$13^3=2197$

$\Rightarrow 13^3 \overset{100}{\equiv} 97 \overset{100}{\equiv} -3 \Rightarrow (13^3)^3 \equiv (-3)^3$

$\Rightarrow 13^9 \overset{100}{\equiv} -27 \overset{100}{\equiv} 73$

$\Rightarrow 13^9\times 13 \overset{100}{\equiv} 73\times 13 \Rightarrow 13^{10} \overset{100}{\equiv} 949$

$\Rightarrow 13^{10}\overset{100}{\equiv} 49$

پس دو رقم سمت‌راست عدد 13^{10} برابر با ۴۹ می‌باشد.

۳ـ

$2^4=16\overset{17}{\equiv}-1 \Rightarrow 2^4\overset{17}{\equiv}-1 \Rightarrow$

$(2^4)^{284}\overset{17}{\equiv}(-1)^{284}$

$2^{1136}\overset{17}{\equiv}1 \Rightarrow 2^{1137}\overset{17}{\equiv}1\times 2 \Rightarrow 2^{1137}\overset{17}{\equiv}2$

لذا طبق قضیه باقیماندهٔ تقسیم 2^{1137} بر ۱۷ با باقیمانده تقسیم ۲ بر ۱۷ برابر است که باقیمانده تقسیم ۲ بر ۱۷، عدد ۲ می‌باشد.

۴ ـ می‌خواهیم بدون بسط ثابت کنیم:

$$\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+mb \end{vmatrix}=0$$

$$\text{طرف اول}=m^2\begin{vmatrix} 1 & a-d & b+c \\ 1 & b-d & a+c \\ 1 & c-d & a+b \end{vmatrix}=$$

$$m^2\begin{vmatrix} 1 & a-d & a+b+c-d \\ 1 & b-d & a+b+c-d \\ 1 & c-d & a+b+c-d \end{vmatrix}=$$

$$m^2(a+b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & a-d & 1 \\ 1 & b-d & 1 \\ 1 & c-d & 1 \end{vmatrix}=$$

$m^2(a+b+c-d)\times 0=0$

۵ ـ برای به‌دست آوردن ماتریس تقارن نسبت به‌خط $3x-2y=0$ به‌طریق زیرعمل می‌کنیم:

$3x-2y=0 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x \Rightarrow m=tg\alpha=\frac{3}{2}$

از طرفی $\to \cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}}=-\frac{5}{13}$

$\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2\times\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{4}}=\frac{12}{13}$

ماتریس تقارن نسبت به‌خط $y=mx$ یا خط $y=tg\alpha\times x$ $=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{bmatrix}$

پس ماتریس تقارن نسبت به خط $y=\frac{3}{2}x$ برابر است با

$$\begin{bmatrix}-\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{bmatrix}$$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$(p\Rightarrow q)\vee[p\Rightarrow(q\wedge r)]\equiv$

$(p\Rightarrow q)\vee[(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)]$

$\overset{\text{قانون جذب}}{\equiv}(p\Rightarrow q)$

۲ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$[p\Rightarrow(q\vee r)]\wedge(\sim p\wedge r)\equiv$

$[\sim p\vee(q\vee r)]\wedge(\sim p\wedge r)$

$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\equiv}([\sim p\vee(q\wedge r)]\wedge\sim p)\wedge r\overset{\text{قانون جذب}}{\equiv}\sim p\wedge r$

۳ ـ گزینه (الف) صحیح است زیرا:

اولاً ـ خواص حلقه تعویض‌پذیر برای U به‌راحتی قابل تحقیق است. ثانیاً ـ گزینه (ب) غلط است چون $1\notin U$ و گزینه (ج) غلط است زیرا U مقسوم علیه‌صفر ندارد و گزینه (د) غلط است زیرا اعضای غیرصفر در U وارون‌ضربی ندارند.

۴ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

می‌دانیم مقدمات یک استنتاج همواره دارای ارزش درست هستند:

$\sim p\wedge s\equiv T\Rightarrow\sim p\equiv T\wedge s\equiv T$

$p\vee q\equiv\sim p\Rightarrow q\wedge$

از طرفی $\sim p$

$\therefore q$ قانون انتزاع

بنابراین گزاره‌های s و $\sim p$ و q هرسه ارزش درست دارند

در نتیجه:

$s\vee q\equiv T$ و $q\wedge\sim p\equiv T$ و $s\wedge q\equiv T$

۵ ـ گزینه (ج) صحیح است زیرا:

$2\in I , \frac{1}{2}\in Q\Rightarrow 2\times\frac{1}{2}\in I\Rightarrow 1\in I$

$\Rightarrow I=Q$

۶ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

حلقهٔ R را حوزهٔ درست گوییم هرگاه تعویض‌پذیر بوده و فاقد مقسوم علیه‌صفر باشد درصورتی‌که $(Z_8 , \oplus , \otimes)$ دارای مقسوم علیه‌صفر است $(2\times 4=0)$

۷ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

A , B پادمتقارن و تعویض‌پذیر $\Rightarrow$

$A'+-A$ و $B'=-B$ و $AB=BA$

$(AB)'=(BA)'=A'B'=(-A)(-B)=AB$

۸ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا:

به طور کلی مقادیر ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ از معادلهٔ

$k^2-(a+d)k+ad-bc=0$

به‌دست می‌آید. پس داریم:

$a+d=(-1)+(-1)=-2$ و $ad-bc=-3$

$\Rightarrow k^2+2k-3=0\Rightarrow k=1$ یا $k=-3$

۹ ـ گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا:

می‌دانیم اگر A یک ماتریس متعامد باشد همواره

$A^{-1}=A'$

پس: $(A^{-1})'=(A')'=A$

۱۰ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است زیرا:

$11^{10}-1=(11-1)(11^9+11^8+\dots+1)$

$=10(11^9+11^8+\dots+1)$

از طرفی $11\overset{10}{\equiv}1$ پس خواهیم داشت:

$\overbrace{11^9+11^8+\dots+1}^{\text{۱۰ مرتبه}}\overset{10}{\equiv}1+1+\dots+1=10$

$\Rightarrow 11^{10}-1=10(10k)=100k$

۱۱ ـ گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا:

$2x\overset{7}{\equiv}1\Rightarrow 2x\overset{7}{\equiv}7+1\Rightarrow 2x\overset{7}{\equiv}8$

$\Rightarrow x\overset{7}{\equiv}4\Rightarrow x=7k+4$

۱۲ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است زیرا:

$2^3\overset{7}{\equiv}1$ و $13\overset{7}{\equiv}-1\Rightarrow$

$$۲^{۳n+۱}+۱۳^{۲n+۱}\equiv(۲^۳)^n\times ۲+(۱۳)^{۲n}\times ۱۳$$

$$\Rightarrow ۲^{۳n+۱}+۱۳^{۲n+۱}\overset{۷}{\equiv}۲-۱=۱$$

حل مسائل جبر سال اول

-۱

A)
$$\left(\sqrt[۷]{۲-\sqrt{۳}}\right)\left(\sqrt[۷]{۲+\sqrt{۳}}\right)=\sqrt[۷]{۴-\sqrt{۹}}$$
$$=\sqrt[۷]{۴-۳}=\sqrt[۷]{۱}=۱$$
$$a\sqrt[۴]{a^{-۴}}=a\times a^{\frac{-۴}{۴}}=a\times a^{-۱}=a^{۱-۱}=a^۰=۱$$

بنابراین حاصل : $\xRightarrow{\text{حاصل}}۱-۱=۰$

B)
$$\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}}=\sqrt[۵]{\sqrt{۲}\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}}=\sqrt[۵]{\sqrt[۶]{۲\sqrt{۸}}}$$
$$=\sqrt[۵]{\sqrt[۶]{۲^۶\times ۸}}=\sqrt[۳۰]{۲^۶\times ۲^۳}=\sqrt[۳۰]{۲^۹}=۲^{\frac{۹}{۳۰}}$$
$$=۲^{\frac{۳}{۱۰}}=۲^{۰/۳}$$
$$\left(\sqrt{\sqrt[۵]{۲}}\right)^۳=\left(\sqrt[۱۰]{۲^۳}\right)=۲^{\frac{۳}{۱۰}}=۲^{۰/۳}$$
$$\sqrt[۱۰]{۸}=\sqrt[۱۰]{۲^۳}=۲^{\frac{۳}{۱۰}}=۲^{۰/۳}$$

بنابراین حاصل:

$$\xRightarrow{\text{حاصل}}۲^{۰/۳}+۲^{۰/۳}-۲^{۰/۳}-۲^{۰/۳}=۰$$

C) $\sqrt{۴+\sqrt{۷}}-\sqrt{۴-\sqrt{۷}}-\sqrt{۲}=?$

به‌طور کلی اگر داشته باشیم $A^۲-B=C^۲$ داریم:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

بنابراین داریم : $۴^۲-۷=۱۶-۷=۹$

و در نتیجه داریم:

$$\sqrt{۴+\sqrt{۷}}=\sqrt{\frac{۴+۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۴-۳}{۲}}$$
$$\sqrt{۴-\sqrt{۷}}=\sqrt{\frac{۴+۳}{۲}}-\sqrt{\frac{۴-۳}{۲}}$$
$$\xRightarrow{\text{حاصل}}\sqrt{\frac{۷}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۷}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt{۲}$$
$$=۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt{۲}=۰$$

-۲

A)
$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}$$
$$=\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{(۱+\sqrt{۲})^۲-۳}=\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$$
$$=\frac{\sqrt{۲}+۲-\sqrt{۶}}{۴}$$

B)
$$\frac{۵}{\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۷^۲}+\sqrt[۳]{۲\times ۷}+\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۷^۲}+\sqrt[۳]{۲\times ۷}+\sqrt[۳]{۲^۲}}$$
$$=\frac{۵(\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۱۴}+\sqrt[۳]{۴})}{۵}=\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۱۴}+\sqrt[۳]{۴}$$

C)
$$\frac{C}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt[۳]{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt[۳]{a}-\sqrt{b})}{\sqrt[۳]{a^۲}-b}\times$$
$$\frac{\sqrt[۳]{a^۴}+b\sqrt[۳]{a^۲}+b^۲}{\sqrt[۳]{a^۴}+b\sqrt[۳]{a^۲}+b^۲}=$$
$$\frac{c(\sqrt[۳]{a}-\sqrt{b})(a\sqrt[۳]{a}+b\sqrt[۳]{a^۲}+b^۲)}{a^۲-b^۳}$$

D)
$$\frac{۶}{۱+\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}}\times$$
$$\frac{(۱+\sqrt[۳]{۲^۲}+\sqrt[۳]{۳^۲}-\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۶})}{(۱+\sqrt[۳]{۲^۲}+\sqrt[۳]{۳^۲}-\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۶})}=$$
$$\frac{۶(۱+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۶})}{۱+۲+۳-۳\sqrt[۳]{۱\times ۲\times ۳}}=$$
$$\frac{۱+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۶}}{۱-\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴}}}$$

(در قسمت D از اتحاد:

$$a^۳+b^۳+c^۳-۳abc=$$
$$(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ac)$$

استفاده شد).

$$=\frac{۱+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۶}}{۱-\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴}}}\times$$
$$\frac{۱+\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴}}+\sqrt[۳]{\frac{۹}{۱۶}}}{۱+\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴}}+\sqrt[۳]{\frac{۹}{۱۶}}}=$$
$$\frac{(۱+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۶})\left(۱+\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴}}+\sqrt[۳]{\frac{۹}{۱۶}}\right)}{۱-\frac{۳}{۴}}$$
$$=(۱+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۶})$$
$$(۴+\sqrt[۳]{۴۸}+\sqrt[۳]{۳۶})$$

۳ - برای به دست آوردن ریشه‌های معادله کافی است هریك از عامل‌ها را مساوی صفر قراردهیم. بنابراین داریم:

$$۲x^۲+۵=۰\Rightarrow x^۲=\frac{-۵}{۲}\quad(\text{ریشهٔ حقیقی ندارد})$$
$$x^۳-۱=۰\Rightarrow x^۳=۱\Rightarrow x=۱$$
$$x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$
$$x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۲)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\x-۲=۰\Rightarrow x=۲\end{cases}$$
$$۲x-۱=۰\Rightarrow ۲x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب چنین است:

$$R=\left\{x\,|\,x=۱(\text{ریشهٔ سه گانه}),x=-۱,x=\frac{۱}{۲},x=۲\right\}$$
$$x\in\left\{-۱,\frac{۱}{۲},۱,۲\right\}$$

-۴

$$\begin{cases}\dfrac{(xy)^۳}{x^۳+y^۳}=\dfrac{۸}{۹}\\[2mm]\dfrac{x^۳-y^۳}{(xy)^۳}=\dfrac{۷}{۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^۳+y^۳}{x^۳y^۳}=\dfrac{۹}{۸}\\[2mm]\dfrac{x^۳-y^۳}{x^۳y^۳}=\dfrac{۷}{۸}\end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}\dfrac{۱}{y^۳}+\dfrac{۱}{x^۳}=\dfrac{۹}{۸}\\[2mm]\dfrac{۱}{y^۳}-\dfrac{۱}{x^۳}=\dfrac{۷}{۸}\end{cases}$$

از جمع دو رابطهٔ دستگاه داریم:

$$\Rightarrow\frac{۲}{y^۳}=\frac{۹+۷}{۸}\Rightarrow y^۳=\frac{۱۶}{۱۶}\Rightarrow y^۳=۱$$
$$\Rightarrow\boxed{y=۱}\quad\text{و}\quad ۱+\frac{۱}{x^۳}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow$$
$$\frac{۱}{x^۳}=\frac{۹}{۸}-۱\Rightarrow\frac{۱}{x^۳}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow$$
$$x^۳=۸\Rightarrow\boxed{x=۲}$$

-۵

$$\begin{cases}۱\quad\dfrac{۳x-۱}{۲}+\dfrac{۲x+۱}{۳}>\dfrac{x-۱}{۶}\\[2mm]۲\quad\dfrac{۵x-۱}{۳}-\dfrac{x+۲}{۴}<\dfrac{۲x-۱}{۱۲}\end{cases}$$
$$۱:\ \frac{۳x-۱}{۲}+\frac{۲x+۱}{۳}>\frac{x-۱}{۶}\Rightarrow$$
$$\frac{۳(۳x-۱)+۲(۲x+۱)}{۶}>\frac{x-۱}{۶}$$

$$9x-3+4x+2>x-1 \Rightarrow$$
$$13x-1>x-1 \Rightarrow 13x-x>0 \Rightarrow$$
$$12x>0 \Rightarrow \boxed{x>0}$$
$$\frac{5x-1}{3}-\frac{x+2}{4}<\frac{2x-1}{12} \Rightarrow$$
$$\frac{4(5x-1)-3(x+2)}{12}<\frac{2x-1}{12}$$
$$20x-4-3x-6<2x-1 \Rightarrow$$
$$17x-10<2x-1 \Rightarrow 15x<9 \Rightarrow$$
$$\boxed{x<\frac{3}{5}} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow$$
$$0<x<\frac{3}{5}$$ (جواب نامعادله)

$$0 \quad <x<\frac{3}{4}$$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینهٔ (د) صحیح است زیرا داریم:

$$m(mx-1)=2x$$
$$m^2x-m=2x \Rightarrow m^2x-2x=m \Rightarrow$$
$$x=\frac{m}{m^2-2} \Rightarrow m^2-2=0 \Rightarrow$$
$$m^2=2 \begin{cases} m=\sqrt{2} \\ m=-\sqrt{2} \end{cases}$$

۲ ـ گزینهٔ (ج) صحیح‌است. زیرا اگردرجهٔ مقسوم را به n و درجهٔ مقسوم‌علیه‌را به m نمایش‌دهیم. بدیهی‌است‌درجهٔ خارج‌قسمت $n-m$ است و درجهٔ باقی‌مانده حداقل یك درجه از درجهٔ مقسوم‌علیه‌کمتراست که دراین‌صورت درجهٔ باقی‌مانده $m-1$ می‌شود. بنابراین اگردر یك تقسیم درجهٔ خارج‌قسمت و باقی‌مانده باهم برابرباشند، خواهیم داشت:

$$n-m=m-1 \Rightarrow 2m=n+1$$
$$\Rightarrow m=\frac{n+1}{2}$$

۳ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$(x-3y)^8+(y^2-2x)^6=0 \Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ y^2-2x=0 \end{cases}$$
$$x=3y \Rightarrow y^2-2(3y)=0 \Rightarrow y^2-6y=0$$
$$\Rightarrow y(y-6)=0 \begin{cases} y=0 \rightarrow x=0 \\ y=6 \rightarrow x=18 \end{cases}$$

۴ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2}=\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{1}{3+2-2\sqrt{6}}=\frac{1}{5-2\sqrt{6}}\times\frac{5+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}$$
$$=\frac{5+2\sqrt{6}}{25-24}=5+2\sqrt{6}$$

۵ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا در صورتی عددی بر ۹ بخش‌پذیراست که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد. بنابراین مقادیری برای x و y قابل‌قبول است که اولاً در رابطهٔ

$$2x+3y=21$$

صدق کنند و ثانیاً مجموع ارقام عدد $\overline{34x3y}$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد یعنی:

$$3+4+x+3+y=10+x+y=9k \Rightarrow$$
$$x+y=9K-10 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

۶ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^3-27}}}=\sqrt[60]{x^3-27} \Rightarrow$$
$$x^3-27\geqslant 0 \Rightarrow x^3\geqslant 27 \Rightarrow x\geqslant 3$$

۷ ـ گزینهٔ (د) صحیح‌است. زیرادستگاه درحالت کلی:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

وقتی جواب‌نداردکه داشته باشیم: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ بنابراین

دستگاه $\begin{cases} 3x-2my=2 \\ 2y+x+4=0 \end{cases}$ وقتی‌جواب‌ندارد‌که‌داشته‌باشیم:

$$\frac{3}{1}=\frac{-2m}{2}$$

و از این تساوی نتیجه می‌شود:

$$m=\frac{-9}{2} \quad \text{یا} \quad m=-3$$

۸ ـ گزینهٔ (د) صحیح است. زیرا داریم:

$$\frac{(x^4-1)(x^4+x^2+1)}{x(x^2+1)(x^6-1)}$$
$$=\frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+x^2+1)}{x(x^2+1)(x^6-1)}$$
$$=\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x(x^6-1)}=\frac{x^6-1}{x(x^6-1)}=\frac{1}{x}$$

۹ ـ گزینهٔ (د) صحیح‌است. زیرا داریم:

$$(x^2+y^2-2xy)(1-\frac{2xy}{x^2+y^2})\times$$
$$(x^2+y^2)^2(x^2+y^2+2xy)(1-\frac{2xy}{(x+y)^2})$$
$$=(x-y)^2(\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2})\times$$
$$(x^2+y^2)^2(x+y)^2[\frac{(x+y)^2-2xy}{(x+y)^2}]$$
$$=(x-y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)(x^2+y^2)$$
$$=(x-y)^4(x^2+y^2)^2$$

۱۰ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$\frac{x^2}{4}+4y^2 : \frac{x^2}{4}\pm\cdots+4y^2$$
$$=(\frac{x}{2}\pm 2y)^2 : \frac{x^2}{4}\pm 2xy+4y^2$$

بنابراین اگرعبارت $\pm 2xy$ را اضافه‌کنیم عبارت فوق مربع کامل می‌شود.

حل مسائل جبر دوم ریاضی

-۱

A) $$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x}+(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x=2$$
$$(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x=y \Rightarrow$$
$$\frac{1}{y}+y=2 \Rightarrow 1+y^2=2y \Rightarrow$$
$$y^2-2y+1=0$$
$$(y-1)^2=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$$
$$(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x=1 \Rightarrow$$
$$\boxed{x=0}$$ (جواب معادله)

B) $$\frac{x+1}{x}=y \Rightarrow y^2+\frac{1}{y^2}=2 \Rightarrow$$
$$y^4+1=2y^2 \Rightarrow y^4-2y^2+1=0$$

$$(y^2-1)^2=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x}=\pm 1 \Rightarrow x+1=\pm x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=x \Rightarrow 1=0 & \text{غیرممکن} \\ x+1=-x \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\boxed{x=-\frac{1}{2}}$$ (جواب معادله)

C) $x^3-3x^2+3x-6=0 \Rightarrow$

$$x^3-3x^2+3x-1-5=0$$

$$(x-1)^3=5 \Rightarrow x-1=\sqrt[3]{5} \Rightarrow$$

$$\boxed{x=1+\sqrt[3]{5}}$$

D) بافرض: $x^2-x=y \Rightarrow \sqrt{y+1}+\sqrt{y+2}=3$

$$\Rightarrow \sqrt{y+1}=3-\sqrt{y+2}$$

$$y+1=9+y+2-6\sqrt{y+2} \Rightarrow$$

$$6\sqrt{y+2}=10 \Rightarrow 3\sqrt{y+2}=5$$

$$9(y+2)=25 \Rightarrow y+2=\frac{25}{9} \Rightarrow$$

$$y=\frac{25}{9}-2=\frac{25-18}{9}=\frac{7}{9} \Rightarrow y=\frac{7}{9}$$

$$x^2-x=\frac{7}{9} \Rightarrow x^2-x-\frac{7}{9}=0 \Rightarrow$$

$$9x^2-9x-7=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81+4\times 7\times 9}}{18}$$

$$\Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{333}}{18} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{9+\sqrt{333}}{18} \approx 1/514 \\ x_2=\frac{9-\sqrt{333}}{18} \approx -0/514 \end{cases}$$

(ریشه‌های معادله)

۲ -

A) $2mx+(10m-3)y+9-26m=0$

از m فاکتور می‌گیریم ونتیجه می‌شود:

$$m(2x+10y-26)+9-3y=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+10y-26=0 \\ 9-3y=0 \Rightarrow \boxed{y=3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x+10\times 3-26=0 \Rightarrow$$

$$2x=-4 \Rightarrow \boxed{x=-2} \Rightarrow M\begin{vmatrix}-2\\3\end{vmatrix}$$

M نقطه‌ای است که به ازای جمیع مقادیر m خط فوق از آن می‌گذرد.

B) $(4m^2-1)x+(12m^2+4m+1)y$
$-20m^2-8m-3=0$

از m و m^2 فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$m^2(4x+12y-20)+m(4y-8)$$
$$+(y-x-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+12y-20=0 \\ 4y-8=0 \\ y-x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=2 \\ x=-1 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow M\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$$

دستگاه‌اخیر سه‌معادله ودومجهول است. از دومعادلهٔ اول دستگاه y و x را محاسبه کرده‌ایم ودر معادلهٔ سوم دستگاه قرار داده‌ایم، چون مقادیر به‌دست آمده درمعادلهٔ سوم نیزصدق‌می‌کند بنا براین‌دستگاه سازگار است و درنتیجه نقطهٔ موردنظر نقطه‌ای است که به‌ازای‌جمیع مقادیر m خط فوق ازآن عبور می‌کند.

۳ - a و b را باید طوری تعیین کنیم که

$$\begin{cases} D: ax+y=-1 \\ D': ay+bx=1 \\ D'': 2x-y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{اولاً: } D'\perp D'' \\ \text{ثانیاً: } D'\parallel D \end{cases}$$

ضریب‌زاویه‌های خطوط چنین است:

$$m_{D''}=2 \text{ و } m_{D'}=\frac{-b}{a} \text{ ، } m_D=-a$$

$$\begin{cases} D'\perp D'' \Rightarrow m_{D'}\cdot m_{D''}=-1 \\ D'\parallel D \Rightarrow m_{D'}=m_D \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\frac{-b}{a}\right)(2)=-1 \\ \left(\frac{-b}{a}\right)=-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2b \\ ab\neq 0 \\ b=a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ دوخط D و D' ابتدا یك نقطه‌دلخواه از D یا D' انتخاب کرده و سپس‌فاصلهٔ این نقطه که مثلاً روی خط D است را ازخط D' محاسبه می‌کنیم. این‌فاصله در واقع فاصلهٔ دوخط موازی D و D' است. نقطه‌ای مانند A را روی خط D درنظر می‌گیریم:

$$D: \frac{1}{2}x+y+1=0 \Rightarrow A\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$$

$$D': \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0$$

فاصلهٔ AD' در واقع فاصلهٔ دو خط موازی D و D' است و داریم:

$$AD'=\frac{\left|\frac{1}{4}x_A+\frac{1}{2}y_A-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{2}(-1)-1\right|}{\frac{\sqrt{5}}{4}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

برای‌تعیین خط: $y=mx+h$ که از نقطهٔ تقاطع D' و D'' بگذرد و با خط:

$$2x+3y+1=0$$

موازی‌باشد. ابتدا باید نقطهٔ‌تلاقی دوخط D' و D'' رابه‌دست آورد:

$$\begin{cases} D': \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-1=0 \\ D'': 2x-y-\frac{1}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+y-2=0 \\ 2x-y-\frac{1}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow 2x+\frac{1}{2}x-2-\frac{1}{4}=0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\frac{9}{10} \Rightarrow$$

$$x=0/9 \text{ و } y=\frac{31}{20}=1/55$$

خط مفروض باید ازنقطهٔ $B\begin{vmatrix}0/9\\1/55\end{vmatrix}$ یعنی نقطهٔ تلاقی دو خط D' و D'' بگذرد وبا خطی‌باضریب زاویه‌ای $m=\frac{-2}{3}$ موازی باشد. بنا براین نقطهٔ $B\begin{vmatrix}0/9\\1/55\end{vmatrix}$ باید درخط مفروض صدق کند وضریب زاویهٔ خط مفروض‌باید برابر $m=\frac{-2}{3}$ باشد.

$$\begin{cases} 0/9m+h=1/55 \\ m=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$۰/۹\left(-\frac{۲}{۳}\right)+h=۱/۵۵ \Rightarrow h=۲/۱۵$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+۲/۱۵$$ (خط‌مطلوب)

۴ـ

$$\frac{۲^n-۳}{۲^{n+۱}}=\frac{۶۱}{۱۶} \Rightarrow ۱۶(۲^n-۳)=۲^{n+۱}\times ۶۱$$

$$۱۶\times ۲^n-۳\times ۱۶=۶۱\times ۲\times ۲^n \Rightarrow$$

$$۱۶(۲^n)^۲-۱۲۲(۲^n)-۴۸=۰$$

$$۸(۲^n)^۲-۶۱(۲^n)-۲۴=۰ \Rightarrow$$

$$۲^n=\frac{۶۱\pm\sqrt{۶۱^۲+۴\times ۸\times ۲۴}}{۱۶}$$

$$۲^n=\frac{۶۱+۶۷}{۱۶}=\frac{۱۲۸}{۱۶}=۸=۲^۳ \Rightarrow$$

(جواب قابل قبول)

$$\boxed{n=۳}$$ (سومین جمله)

۵ـ

$$\begin{cases}a_K=a_۱+(K-۱)d=S\\ a_R=a_۱+(R-۱)d=P\end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix}(K-۱)d+a_۱=S\\ (R-۱)d+a_۱=P\end{vmatrix}$$

از تفاضل دومعادلهٔ دستگاه داریم:

$$(K-۱)d-(R-۱)d=S-P$$

$$\Rightarrow (K-R)d=S-P \Rightarrow$$

$$d=\frac{S-P}{K-R}$$ (قدر نسبت تصاعد) و $$a_۱=S-(K-۱)\frac{S-P}{K-R}$$ (جمله اول تصاعد)

۶ـ

$$\begin{cases}t_p=t_۱q^{p-۱}=R\\ t_s=t_۱q^{s-۱}=T\end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix}t_۱q^{p-۱}=R\\ t_۱q^{s-۱}=T\end{vmatrix}$$

از تقسیم دو معادلهٔ دستگاه داریم:

$$\frac{t_۱q^{p-۱}}{t_۱q^{s-۱}}=\frac{R}{T} \Rightarrow q^{p-s}=\frac{R}{T}$$

$$\Rightarrow q=\sqrt[p-s]{\frac{R}{T}}$$ و $$t_۱q^{p-۱}=R \Rightarrow$$

$$t_۱=Rq^{۱-p}=R\left(\frac{R}{T}\right)^{\frac{p-۱}{s-p}}$$

(قدر نسبت تصاعد) $q=\left(\frac{R}{T}\right)^{\frac{۱}{p-s}}$

$$t_۱=R\left(\frac{R}{T}\right)^{\frac{p-۱}{s-p}}$$ (جمله اول تصاعد)

۷ـ اگر اعداد $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۷}$ تشکیل تصاعد هندسی بدهند داریم:

$$\cdots,\sqrt{۳},\cdots,\sqrt{۵},\cdots,\sqrt{۷},\cdots \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}}=q^k\\ \frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۵}}=q^s\end{vmatrix} \quad (k,s\in z) \quad (\text{قدر نسبت } q)$$

از تقسیم دو رابطهٔ اخیر داریم:

$$\frac{\sqrt{\frac{۵}{۳}}}{\sqrt{\frac{۷}{۵}}}=\frac{q^k}{q^s} \Rightarrow \sqrt{\frac{۲۵}{۲۱}}=\frac{k}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{s}=\frac{۵}{\sqrt{۲۱}} \Rightarrow \sqrt{۲۱}=\frac{۵s}{k}$$

(غیرممکن)

k و s اعدادصحیح می‌باشند. بنابراین $\sqrt{۲۱}$ برابر یک عدد گویا شده است که غیرممکن‌است. به‌طریق مشابه (برای تصاعد حسابی) نیز ثابت می‌شودکه اعداد $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۷}$ نمی‌توانند جملاتی‌از یک‌تصاعد حسابی باشند.

۸ـ

A) $۲^x-۲^{۵-x}=۴ \Rightarrow ۲^x-۲^۵\times ۲^{-x}=۴$

طرفین رابطهٔ اخیر را در ۲^x ضرب می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$۲^{۲x}-۲^۵=۴\times ۲^x \Rightarrow (۲^x)^۲-۴(۲^x)-۳۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲^x=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶+۱۲۸}}{۲}=\frac{۴\pm ۱۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲^x=\frac{۴+۱۲}{۲}=\frac{۱۶}{۲}=۸$$

$$۲^x=۲^۳ \Rightarrow \boxed{x=۳}$$ (جواب قابل‌قبول)

B) $۳^{۴+۸+۱۲+\cdots+۴x}=۸۱ \Rightarrow$

$$۳^{۴(۱+۲+۳+\cdots+x)}=۳^۴$$

$$۴(۱+۲+۳+\cdots+x)=۴ \Rightarrow$$

$$۱+۲+۳+\cdots+x=۱$$

$$\frac{x(x+۱)}{۲}=۱ \Rightarrow x(x+۱)=۲$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$

$$(x-۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow \boxed{x=۱}$$

(جواب قابل قبول)

C) $۲۵^x=۲۰^x+۱۶^x \Rightarrow ۵^{۲x}=(۴\times ۵)^x+۴^{۲x}$

$$\Rightarrow \frac{۴^{۲x}+۴^x\times ۵^x}{۵^{۲x}}=۱ \Rightarrow$$

$$\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲x}+\left(\frac{۴}{۵}\right)^x-۱=۰$$

$$\left(\frac{۴}{۵}\right)^x=y \Rightarrow y^۲+y-۱=۰$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\left(\frac{۴}{۵}\right)^x=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow$$

$$\boxed{x=\log_{\frac{۴}{۵}}\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}}$$ (جواب قابل‌قبول)

D) $۲^{\log x}+x^{\log ۲}=۲ \Rightarrow$ (می‌دانیم: $x^{\log ۲}=۲^{\log x}$)

با توجه به تساوی اخیر داریم:

$$۲^{\log x}+۲^{\log x}=۲$$

$$۲\times ۲^{\log x}=۲ \Rightarrow ۲^{\log x}=۱ \Rightarrow$$

$$\log x\ \log ۲=\log ۱$$

$$\log x\ \log ۲=۰ \Rightarrow \log x=۰ \Rightarrow \boxed{x=۱}$$

E) $\log^x_{۲^{\frac{۱}{۲}}}+\log^x_{۳^{\frac{۱}{۳}}}+\cdots+\log^x_{n^{\frac{۱}{n}}}=۱ \Rightarrow$

(می‌دانیم: $\log^x_{a^{\frac{۱}{n}}}=\log^{x^n}_a$)

با توجه به تساوی اخیر داریم:

$$\log_۲{x^۲}+\log_۳{x^۳}+\cdots+\log_n{x^n}=۱$$

$$\frac{\log x^۲}{\log ۲}+\frac{\log x^۳}{\log ۳}+\cdots+\frac{\log x^n}{\log n}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲\log x}{\log ۲}+\frac{۳\log x}{\log ۳}+\cdots+\frac{n\log x}{\log n}=۱$$

$$\Rightarrow \log x\left[\frac{۲}{\log ۲}+\frac{۳}{\log ۳}+\cdots+\frac{n}{\log n}\right]=۱$$

$$\Rightarrow \log x=\frac{۱}{\left(\frac{۲}{\log ۲}+\frac{۳}{\log ۳}+\cdots+\frac{n}{\log n}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=۱۰^{\left(\frac{۲}{\log ۲}+\frac{۳}{\log ۳}+\cdots+\frac{n}{\log n}\right)^{-۱}}}$$

۹ـ از $\log_{\frac{۴}{۳}}(x^۲-۱)\geqslant -۲$ نتیجه می‌شود:

$$x^۲-۱\geqslant\left(\frac{۴}{۳}\right)^{-۲} \Rightarrow x^۲\geqslant ۱+\frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow x^۲\geqslant\frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \begin{cases}x\geqslant\frac{۵}{۴}\\ \text{یا}\\ x\leqslant -\frac{۵}{۴}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{|x|\geqslant\frac{۵}{۴}}$$

۱۰ ـ با فرض :

$$\log x=\log y=\log z=k$$

عبارت : $P=\sqrt[7]{\dfrac{x^5\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[5]{x^3y^2z}}}$

چنین است :

$$\log P=\log\left(\sqrt[7]{\frac{x^5\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[5]{x^3y^2z}}}\right)$$

$$\Rightarrow \log P=\frac{1}{7}\left[5\log x+\frac{2}{3}\log y-\frac{3}{5}\log x-\frac{2}{5}\log y-\frac{1}{5}\log z\right]$$

$$\log P=\frac{1}{7}\left[5k+\frac{2}{3}k-\frac{3}{5}k-\frac{2}{5}k-\frac{1}{5}k\right]$$

$$\log P=\frac{k}{7}\left[5+\frac{2}{3}-\frac{6}{5}\right]$$

$$\log P=\frac{k}{7}\left(\frac{75+10-18}{15}\right)=\frac{67k}{105}$$

$$\log P=\frac{67k}{105}\Rightarrow \boxed{P=10^{\frac{67k}{105}}}$$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\begin{cases}x'+x''=-2m\\ x'x''=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log a+\log b=-2m\\ \log a\log b=-3\end{cases}$$

$$\frac{\log(ab)}{\log a\log b}=\frac{\log a+\log b}{\log a\log b}=\frac{-2m}{-3}=\frac{2m}{3}$$

۲ ـ گزینهٔ (ب) صحیح است، زیرا اگر یك ریشهٔ معادلهٔ

$$ax^2+bx+c=0$$

به شکل گنگ $p+\sqrt{q}$ باشد وضرایب a و b و c گویاباشند، ریشهٔ دیگرمعادله $p-\sqrt{q}$ است . پس اگـر یك ریشهٔ معادله $2-\sqrt{3}$ بـاشد ریشهٔ دیگر معادله $2+\sqrt{3}$ است که برابر $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ می‌شود.

۳ـ گزینه (ب) صحیح است، زیرا باتوجه به اتحاد:

$$(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC)=A^3+B^3+C^3-3ABC$$

داریم :

$$x^6+y^6+z^6=3x^2y^2z^2\Rightarrow (x^2)^3+(y^2)^3+(z^2)^3-3(x^2)(y^2)(z^2)=0$$

$$(x^2+y^2+z^2)\times(x^4+y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=0\Rightarrow \begin{vmatrix}x=0\\y=0\\z=0\end{vmatrix}\\ \text{یا}\\ x^4+y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2=0\end{cases}$$

$$x^4+y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2\equiv$$

$$\frac{1}{2}[(x^2-y^2)^2+(x^2-z^2)^2+(y^2-z^2)^2]=0$$

از تساوی اخیر داریم: $x^2=y^2=z^2$

پس عبارت $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}}$ برابر است با:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2+x^2+x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$

(بهازای جواب $x=y=z=0$ عبارت مبهم است).

۴ ـ گزینه (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x^n+1+\frac{1}{x^n}}=\frac{1}{4}$$

$$x^n+\frac{1}{x^n}+1=4\Rightarrow x^n+\frac{1}{x^n}=3$$

و $\dfrac{x^{2n}}{x^{4n}+x^{2n}+1}=\dfrac{1}{x^{2n}+1+\frac{1}{x^{2n}}}$

$$=\frac{1}{x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}+1}=\frac{1}{(x^n+\frac{1}{x^n})^2-2+1}$$

$$=\frac{1}{(x^n+\frac{1}{x^n})^2-1}=\frac{1}{(3)^2-1}=\frac{1}{8}$$

۵ ـ گزینه (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\sqrt{\log(x^2-3)}\Rightarrow\log(x^2-3)\geqslant 0$$

$$\log(x^2-3)\geqslant\log 1\Rightarrow x^2-3\geqslant 1\Rightarrow$$

$$x^2\geqslant 4\Rightarrow x\geqslant 2\quad \text{یا}\quad x\leqslant -2$$

۶ ـ گزینه (د) صحیح است. زیرا داریم:

$$\frac{n}{\log_2 n+1}+\frac{n}{\log_{\frac{3}{2}} n+1}+\dots+\frac{n}{\log_{\frac{n+1}{n}} n+1}$$

$$=n\log_{n+1}2+n\log_{n+1}\frac{3}{2}+\dots+n\log_{n+1}\frac{n+1}{n}$$

$$=n\left(\log_{n+1}2+\log_{n+1}\frac{3}{2}+\dots+\log_{n+1}\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=n\log_{n+1}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\dots\times\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=n\log_{n+1}^{n+1}=n$$

۷ ـ گزینه (ب) صحیح است. زیرا مجموع جملات یك تصاعدحسابی با قدرنسبت d وجمله اول a برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

و یا :

$$S_n=an+\frac{n(n-1)d}{2}$$

و یا :

$$S_n=\frac{dn^2}{2}+(a-\frac{d}{2})n\equiv 6n^2+9n\log_n\frac{1}{n}$$

$$=6n^2-9n\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{2}=6\Rightarrow d=12\\ a-\frac{d}{2}=-9\end{cases}$$

$$a-6=-9\Rightarrow a=-3$$

۸ ـ گزینه (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$x'+x''=\frac{m}{2}\text{ و }x'x''=\frac{4}{2}=2$$

$\frac{m}{2}$ واسطه حسابی بین اعداد ۲ و ۵ است پس:

$$\frac{m}{2}=\frac{5+2}{2}\Rightarrow m=7$$

۹ ـ گزینه (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\left[(1-\frac{1}{3})^2(1-\frac{1}{4})^2(1-\frac{1}{5})^2\dots(1-\frac{1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[(\frac{2}{3})^2(\frac{3}{4})^2(\frac{4}{5})^2\dots(\frac{n-1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\dots\times\frac{n-1}{n})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{4}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{n}$$

۱۰ ـ گزینه (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$\log 5^{25}=25\log 5=25\log\frac{10}{2}=25[\log 10-\log 2]$$

$$=25[1-\log 2]=25[1-0/301]$$

$$=25\times 0/699=17/475\Rightarrow$$

$\log 5^{25} = 17/475$

می‌دانیم مفسر لگاریتم هرعدد بااضافه یك، تعداد ارقام عدد را نتیجه می‌دهد ودرنتیجه تعداد ارقام عدد 5^{25} برابراست با: $18 = 1 + 17$ پس ۱۸ رقمی است.

حل مسائل جبر سوم ریاضی

-۱

$$\lim_{x\to 1}(3x-2)=$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow$$

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-1|<\delta \Longrightarrow$$

$$|3x-2-1|<\varepsilon$$

$$|3x-2-1|=|3x-3|=3|x-1|<\varepsilon \Longrightarrow$$

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow \delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

اگر $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ اختیارشود رابطه شرطی یك گزاره همیشه‌درست است ودر واقع‌یك‌رابطه‌شرطی همیشه‌درست‌است که‌یك‌استلزام منطقی می‌باشد زیرا:

$$0<|x-1|<\delta<\frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Longrightarrow 3|x-1|<\varepsilon$$

$$|3x-3|<\varepsilon \Longrightarrow |3x-2-1|<\varepsilon$$

-۲

A) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{0}{0}$ مبهم $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{(x-1)}=$$ (رفع ابهام)

$$\lim_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)=n$$

رفع ابهام می‌کنیم یعنی عامل ابهام $(x-1)$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

B) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^n-1)}{x^2-1} \Longrightarrow$

$$x-1=t \Longrightarrow \underset{x\to 1\ \ t\to 0}{x=t+1} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin[t((t+1)^{n-1}+(t+1)^{n-2}+\dots+1)]}{t(t+2)}$$

$$\cong \lim_{t\to 0}\frac{t[(t+1)^{n-1}+(t+1)^{n-2}+\dots+1]}{t(t+2)}=$$

رفع ابهام:

$$\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^{n-1}+(t+1)^{n-2}+\dots+1}{t+2}=\frac{n}{2}$$

C) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{0}{0} \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$ رفع ابهام:

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=-\frac{1}{2}$$

-۳

A) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=$

(حالت مبهم $\infty-\infty$)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}\right)=$$ رفع ابهام:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}\right)=\frac{1}{4}$$

B) $\lim_{x\to 1}(1-x^2)tg\frac{\pi x}{2}=0\times\infty$ حالت مبهم

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{cotg\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0} \Longrightarrow$$ قاعده هوپیتال $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-2x}{-\frac{\pi}{2}(1+cotg^2\frac{\pi x}{2})}=\frac{4}{\pi}$$

C) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgtgtgtg x\ tg mx}{\sin\sin\sin x\ \sin nx}\right)\overset{\text{هم‌ارزی}}{\cong}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\times mx}{x\times nx}=\frac{m}{n}$$

-۴ شرط پیوستگی تابع درنقطهٔ $x_0=-1$ چنین‌است.

$$f(x)=\begin{cases}5-k^2x^2 & x>-1\\ x+2 & x\leqslant -1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^-}f(x)=f(-1)=1$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x+2)=1\\ \lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}(5-k^2x^2)=5-k^2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow 5-k^2=1 \Longrightarrow k^2=4 \Longrightarrow k=\pm 2$$

-۵

A) $y=\frac{x^{100}+3x^{75}+x^{51}}{x^{50}} \Longrightarrow$

$$y'=\frac{(100x^{99}+225x^{74}+51x^{50})x^{50}-50x^{49}(x^{100}+3x^{75}+x^{51})}{(x^{50})^2}$$

$$\Longrightarrow y'=\frac{x^{100}(100x^{49}+225x^{24}+51-50x^{49}-150x^{24}-50)}{x^{100}}$$

$$\Longrightarrow y'=50x^{49}+75x^{24}+1$$

(روش ساده‌تر: کسررا تفکیك می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم)

B) $y=\sqrt[5]{x^3+x+1} \Longrightarrow$

$$y'=\frac{3x^2+1}{5\sqrt[5]{(x^3+x+1)^4}}$$

-۶ معادله خط‌قائم برمنحنی‌نمایش تابع $y=\frac{x-1}{x+1}$ درنقطه‌ای به طول $x_0=1$ چنین است:

$$y(1)=\frac{1-1}{1+1}=0$$

$$y'=\frac{2}{(x+1)^2} \Longrightarrow m=\frac{2}{(1+1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow m'=-2$ ضریب زاویه خط قائم

$$y-0=-2(x-1) \Longrightarrow$$

معادله خط قائم: $\boxed{y=-2x+2}$

-۷ همان طورکه می‌دانیم محل تلاقی مجانب‌های افقی و قائم منحنی هموگرافیك مرکز تقارن منحنی است. بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Longrightarrow \text{مرکز تقارن } \omega \left| \begin{array}{l} x=-\frac{d}{c} \\ y=\frac{a}{c} \end{array} \right.$$

$$\omega \left| \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} -\frac{d}{c}=-\frac{2}{3} \\ \frac{a}{c}=2 \end{array} \right.$$ و

$$\Longrightarrow d=\frac{2}{3}c \quad \text{و} \quad a=2c$$

از طرفی منحنی همرگرافیك بر خط $y=x-1$ باید مماس باشد.

بنابراین معادله درجه دومی که از قطع دومنحنی حاصل می‌شود باید ریشه مضاعف داشته‌باشد. یعنی:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \\ y=x-1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d}=x-1 \Longrightarrow$$

$$cx^2+(d-c-a)x-(b+d)=0$$

$$\Delta=(d-c-a)^2+4c(b+d)=0 \Longrightarrow$$

$$\overset{\text{فرض}}{(c\neq 0)} \Longrightarrow b=-\frac{73}{36}c$$

$$f(x)=\frac{2cx-\frac{73}{36}c}{cx+\frac{2}{3}c}=\frac{2x-\frac{73}{36}}{x+\frac{2}{3}}=\frac{72x-73}{36x+24}$$

جواب تشریحی تستها

۱ ـ گزینه (ج) صحیح‌است. زیرا داریم:

$$P(x)=(x^{990})x^9+(x^{880})x^8+\cdots+(x^{110})x+1$$

$$g(x)=\frac{(x-1)(x^9+x^8+\cdots+x+1)}{x-1}$$

$$=\frac{x^{10}-1}{x-1}=0 \Longrightarrow x^{10}-1=0 \Longrightarrow x^{10}=1$$

$$P(x)=(x^{10})^{99}x^9+(x^{10})^{88}x^8+\cdots+$$
$$(x^{10})^{11}x+1$$

$$R(x)=1^{99}\times x^9+1^{88}\times x^8+\cdots+$$
$$1^{11}\times x+1=x^9+x^8+\cdots+x+1$$

چون $R(x)=g(x)$ پس: $R=0$

۲ ـ گزینه (الف) صحیح‌است. زیرا داریم:

$$\text{جمله عمومی بسط}=\binom{k}{n}X^{n-k}Y^k$$

$$\text{جمله } k+1 \text{ام}=\binom{k}{n}(\sqrt[3]{x^2})^{n-k}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)^k$$

$$=\binom{k}{n}x^{\frac{2(n-k)}{3}}\times x^{-\frac{3k}{5}}=\binom{k}{n}x^{\frac{2(n-k)}{3}-\frac{3k}{5}}$$

$$\text{جمله } k+1 \text{ام}=\binom{k}{n}x^{\frac{10(n-k)-9k}{15}}$$

$$=\binom{k}{n}x^{\frac{10n-19k}{15}} \xRightarrow{(\text{مستقل از } x)}$$

$$10n-19k=0 \Longrightarrow n=\frac{19k}{10}$$

$$n\in N \Longrightarrow k=10m \Longrightarrow$$

$$n=\frac{19(10m)}{10}=19m \Longrightarrow n=19k$$

۳ ـ گزینه (ج) صحیح‌است. زیرا داریم:

$$x\in(0,1) \Longrightarrow 0<x<1 \Longrightarrow 1<x+1<2$$

$$\Longrightarrow [x+1]=1 \Longrightarrow f([x+1]\log x)=f(\log x)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \log x=0\rightarrow x=1 \\ \log x=1\rightarrow x=10 \end{cases} \Longrightarrow x\in(1,10)$$

۴ ـ گزینه (الف) صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}\right)$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}\right)$$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}\overset{\text{هوپیتال}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{24x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=}\frac{-8}{24}=-\frac{1}{3}$$

۵ ـ گزینه (ب) صحیح است.

$$y=x^2+\cos x$$

$$y'=2x-\sin x \Longrightarrow$$

$$m=y'(0)=2\times 0-\sin 0=0 \Longrightarrow$$

$$m=0 \quad \text{ضریب زاویه خط مماس} \quad m'=\frac{1}{m}$$

$$y(0)=0+\cos 0=1 \Longrightarrow M\left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$y-y_1=m'(x-x_1)$$

معادله خط مماس چنین است:

$$y-1=0$$

بنابراین خط مماس خطی است به عرض $y=1$ و موازی محور xها است. بنابراین معادله خط قائم $x=0$ است.

حل مسائل جبر چهارم ریاضی

۱ـ حد تابع $y=\frac{\sin\sin\cdots\sin x}{tg\,tg\cdots tg\,x}$ وقتی $x\rightarrow 0$ برابر است با:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin\sin\cdots\sin x}{tg\,tg\,tg\cdots tg\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg\,x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

۲ـ پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_0=1$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\frac{x-1}{|x-1|}+1 & \text{اگر } x\neq 1 \\ 1 & \text{اگر } x=1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\frac{x-1}{x-1}+1 & \text{اگر } x>1 \\ 1 & \text{اگر } x=1 \\ x^2-\frac{x-1}{x-1}+1 & \text{اگر } x<1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{اگر } x>1 \\ 1 & \text{اگر } x=1 \\ x^2 & \text{اگر } x<1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+2)=3 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2)=1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim_{x\to 1^-} f(x) \Longrightarrow$$

درنقطهٔ $x_0=1$ تابع حد ندارد

بنابراین چون تابع درنقطهٔ $x_0=1$ حد ندارد بنابراین تابع در این نقطه ناپیوستگی اساسی‌دارد.

۳ ـ برای مشتق‌پذیری یك تابع دریك نقطه باید داشته باشیم: $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

$$f'_+(-3)=\lim_{x\to -3^+}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=$$

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{Ax+5+4}{x+3}=\lim_{x\to -3^+}\frac{Ax+9}{x+3}$$

$\Longrightarrow A(-3)+9=0$

$$f'_-(-3)=\lim_{x\to -3^-}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{Cx^2+B+4}{x+3}=\lim_{x\to -3^-}\frac{Cx^2+B+4}{x+3}.$$

$\Longrightarrow C(-3)^2+B+4=0$

$$\Longrightarrow\begin{cases}-3A+9=0 \Longrightarrow \boxed{A=3}\\ 9C+B+4=0 \Longrightarrow \boxed{B=-9C-4}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{3x+9}{x+3}=3\\ \lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{Cx^2-9C-4+4}{x+3}=-6C\end{cases}$$

$$\Longrightarrow -6C=3\quad \boxed{C=\frac{-1}{2}}\quad \text{و}\quad \boxed{B=\frac{1}{2}}$$

(روش ساده‌تر استفاده از شرایط پیوستگی است.)
(زیرا هرتابع مشتق‌پذیر باشد پیوسته‌نیز می‌باشد)

۴ ـ مشتق دوم $f(x^3+x)$ چنین‌است:

مشتق مرتبهٔ اول:

$[f(x^3+x)]' \Longrightarrow (3x^2+1)f'(x^3+x)$

و مشتق مرتبهٔ دوم:

$[(3x^2+1)f'(x^3+x)]' \Longrightarrow$
$(6x)f'(x^3+x)+(3x^2+1)^2f''(x^3+x)$

۵ـ اگر منحنی‌تابع: $y=\dfrac{3x+6}{3x^2+Kx+S}$ فقط مجانب قائمی به معادلهٔ $x-2=0$ داشته‌باشد، معادلهٔ‌درجهٔ‌دوم مخرج‌باید ریشهٔ مضاعف $x'=x''=2$ داشته باشد. بنابراین داریم:

$3x^2+Kx+S=0$

$$\begin{cases}\Delta=K^2-12S=0 \Longrightarrow\\ S=\dfrac{K^2}{12}=\dfrac{(-12)^2}{12}=12 \Longrightarrow \boxed{S=12}\\ x'=x''=\dfrac{-K}{2\times 3}=\dfrac{-K}{6}=2 \Longrightarrow\\ -K=12 \Longrightarrow \boxed{K=-12}\end{cases}$$

۶ـ ابتدا معادلهٔ درجهٔ سوم:

$x^3-3x^2+4x+m=0$

را با تبدیل $x=X+1$ به معادلهٔ ناقص‌تبدیل می‌کنیم.

$(X+1)^3-3(X+1)^2+4(X+1)+m=0$

$X^3+3X^2+3X+1-3X^2-6X-3+4X$
$+4+m=0$

پس‌از اختصار لازم داریم:

$X^3+X+m+2=0 \Longrightarrow \Delta x=4p^3+27q^2$

$\Delta_X=4(1)^3+27(m+2)^2$

همان‌طور که از مبین معادله مشخص است

$$\begin{cases}\Delta_X<0 & \text{معادله سه‌ریشهٔ حقیقی دارد.}\\ \Delta_X=0 & \text{یک‌ریشه مضاعف و یک‌ریشهٔ‌ساده}\\ \Delta_X>0 & \text{یک ریشهٔ حقیقی دارد.}\end{cases}$$

معادله همواره و به ازای هر m حقیقی یک ریشهٔ حقیقی دارد زیرا همواره $\Delta_X>0$ است. ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ‌سوم:

$X^3+pX+q=0$

درحالت $\Delta\geqslant 0$ چنین است:

$$X=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\Longrightarrow$$

$m=2:\ X^3+X+4=0$

بنابراین داریم:

$X^3+X=4=0 \Longrightarrow$

$$X=\sqrt[3]{-\frac{4}{2}+\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{4}{2}-\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3}}$$

ریشهٔ معادله:

$$X=\sqrt[3]{-2+\sqrt{4+\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{4+\frac{1}{27}}}\Longrightarrow x=X+1$$

۷ ـ

$$A)\ \int\frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\int\frac{x^3\times x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{5}}}dx=$$

$$\int x^{3+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}}dx=\int x^{\frac{46}{15}}dx=\frac{x^{\frac{46}{15}+1}}{\frac{46}{15}+1}+C$$

$$=\frac{15}{61}x^{\frac{61}{15}}+C$$

$B)\ \dfrac{cotg^{100}3x}{sin^2 3x}dx=?$

$$\int\frac{cotg^{100}3x}{sin^2 3x}dx=\int cotg^{100}3x(1+cotg^2x)dx$$

$$=-\frac{cotg^{101}3x}{101}+C$$

$$C)\ \int\frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^9}dx \Longrightarrow$$

$3x^2+2x+7=u \Longrightarrow (6x+2)dx=du$

$2(3x+1)dx=du \Longrightarrow (3x+1)dx=\dfrac{du}{2}$

$$\int\frac{(3x+1)dx}{(3x^2+2x+7)^9}=\int\frac{\frac{du}{2}}{u^9}(u=3x^2+2x+7)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^9}=\frac{-1}{16}u^{-8}+c$$

$$=-\frac{1}{16}(3x^2+2x+7)^{-8}+c$$

۸ـ حجم‌حادث از دوران سطح محصور بین منحنی‌تابع
$y=\sqrt{5-5x^2}$
و محورxها چنین است:

$$v=\int_a^b \pi y^2dx$$

(نقاط تقاطع منحنی با محورxها)

$(y=0 \Longrightarrow 5-5x^2=0 \Longrightarrow x=\pm 1$

$$v=\pi\int_{-1}^{1}(\sqrt{5-5x^2})^2dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(5-5x^2)dx=5\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

$$v=5\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$=5\pi\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=5\pi\left(2-\frac{2}{3}\right)$$

$v=5\pi\left(\dfrac{4}{3}\right) \Longrightarrow v=\dfrac{20}{3}\pi$:حجم‌حادث

۹ـ سطح محصور بین‌دومنحنی نمایش تغییرات توابع:

$$\begin{cases}y=x^2+3\\ y=-x^2+5x\end{cases}$$

چنین است:

(نقاط تقاطع دو منحنی:

$(x^2+3=-x^2+5x \Longrightarrow$

$$(2x^2-5x+3=0 \;\Bigg|\; x=1,\quad x=\frac{3}{2}$$

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}[(-x^2+5x)-(x^2+3)]dx=$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x^2+5x-3)dx$$

$$S=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x\right]_1^{\frac{3}{2}}=$$

$$\left(-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)\right)-\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-3\right)$$

$$S=\frac{9}{8}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{8}+\frac{7}{6}=\frac{52+56}{48}=\frac{110}{48}$$

$$\Longrightarrow S=\frac{55}{24}$$ واحد سطح

۱۰- چون تابع موردنظر در $\frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است، بنابراین می‌توان به شکل زیر عمل کرد:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+tg^n x}$$

$$I=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{dx}{1+tg^n x}=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{dx}{1+\frac{\sin^n x}{\cos^n x}}$$

$$=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{\cos^n x\,dx}{\cos^n x+\sin^n x}\qquad(1)$$

درانتگرال (۱) با تبدیل $x\to(a-x)$ داریم:

$$I=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{\cos^n(a-x)d(a-x)}{\cos^n(a-x)+\sin^n(a-x)}$$

$$I=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx\qquad(2)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

$$2I=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=$$

$$\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^a dx=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}^-}\left(x\Big|_0^a\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$2I=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow \boxed{I=\frac{\pi}{4}}$$

جواب تشریحی تستها

۱- گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{x+1}$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\sqrt{x+1}\Longrightarrow\frac{x}{x+1}=t$$

$$\Longrightarrow x=xt+t\Longrightarrow x=\frac{t}{1-t}$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{t}{1-t}+1}=\sqrt{\frac{t+1-t}{1-t}}=\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\Longrightarrow 1-x>0\Longrightarrow x<1$$

$$\Longrightarrow D_f=(-\infty,1)$$

۲- گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا قرینهٔ منحنی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$ نسبت به نیمساز ربع اول وسوم، منحنی نمایش تابع معکوس f است. چون f یك به یك است پس معکوس‌پذیر است وضابطهٔ معکوس آن چنین است:

$$y=f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}\Longrightarrow y^3=x^3+1\Longrightarrow$$

$$x^3=y^3-1\Longrightarrow x=\sqrt[3]{y^3-1}$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$$

۳- گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+5}-ax-b)$$

$$\lim_{x\to+\infty}[|x-2|-ax-b]=\lim_{x\to+\infty}(x-2-ax-b)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[(1-a)x-b-2]=0\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}1-a=0\\-b-2=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}\Longrightarrow$$

$$a+b=-1$$

۴- گزینهٔ (ج) صحیح است. زیرا داریم:

$$\lim_{x\to-1^+}(ax^2-b)=\lim_{x\to-1^-}(ax+2b)=-1$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a-b=-1\\-a+2b=-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-2\end{cases}$$

$$a+b=-5$$

۵- گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا هر تابع که در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته است و داریم:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to1^+}(Ax+1)=\lim_{x\to1^-}(Bx^2+2)=3$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}A+1=3\\B+2=3\end{cases}\Longrightarrow A=2 \text{ و } B=1\Longrightarrow$$

$$A-B=2-1=1\Longrightarrow A-B=1$$

حل مسائل جبر سوم تجربی

-۱

$$\text{الف)}\ \lim_{x\to0}\frac{1+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{1+\sin x-\cos x}=\frac{0}{0}\Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{1+\sin x-\cos x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{4}+2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{4}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{4}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)}{2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\text{ب)}\ \lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$$

(راه اول: با استفاده از دستور هوپیتال)

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\div\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}=0\div0\right)\frac{1}{2}=0$$

راه دوم: $$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(1+\sqrt{\cos x})\times2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2(1+\sqrt{\cos x})\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\div\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2\right]\times$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{\cos x}}=1\times 0=0$$

راه سوم: استفاده از هم ارزی

ج) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\cdots\sin\frac{x}{n}}{x^n}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\times\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}\times\cdots\times\frac{\sin\frac{x}{n}}{x}\right)$$

$$=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{n}=$$

$$\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}=\frac{1}{n!}$$

تبصره: حاصل ضرب عددهای طبیعی از n تا ۱ را فاکتوریل n می‌نامند و به صورت $n!$ نشان می‌دهند.

$6!=6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1$ $\quad$ $4!=4\times 3\times 2\times 1$

-۲

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{a|x-1|+2x-1}{|3-x|+ax+3}=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{a(-x+1)+2x-1}{3-x+ax+3}=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(2-a)x+a-1}{(a-1)x+6}=\frac{2-a}{a-1}=\frac{3}{4}\Longrightarrow$$

$$3a-3=8-4a\Longrightarrow a=\frac{11}{7}$$

۳- شرط پیوسته بودن تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ آن است که:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$$

باشد، بنابراین داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^3+ax & ,\ x>2\\ 3 & ,\ x=2\\ bx+1 & ,\ x<2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=2b+1=3\Longrightarrow b=1$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=8+2a=3\Longrightarrow a=\frac{-5}{2}$$

-۴

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}\ ,\ g(x)=\operatorname{tg}x\ ,$$

$$(fog)'(x)=f(g(x)(=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\sin 2x)$$

$$(fog)'(x)=2\cos 2x\Longrightarrow(fog)'(\frac{\pi}{8})=$$

$$2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

-۵

$$y=\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\Longrightarrow$$

$$y=\frac{x+b-x-a}{x^2+(a+b)x+ab}\Longrightarrow$$

$$y=\frac{b-a}{x^2+(a+b)x+ab}\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{y}=\frac{x^2+(a+b)x+ab}{b-a}\Longrightarrow$$

$$\frac{-y'}{y^2}=\frac{2x+a+b}{b-a}\Longrightarrow$$

$$\frac{-y''y^2+2y'^2y}{y^4}=\frac{2}{b-a}\Longrightarrow$$ (با فرض $y\neq 0$)

$$\frac{2y'^2-y''y}{y^3}=\frac{2}{b-a}$$

-۶

$$y=x^2+ax-1\qquad S(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$$

$$\Longrightarrow S(\frac{-a}{2},\frac{-4-a^2}{4})\Longrightarrow$$

$$-\frac{a}{2}+\frac{-4-a^2}{4}=-\frac{7}{4}\Longrightarrow$$

$$2a+4+a^2=7\Longrightarrow a^2+2a-3=0\Longrightarrow$$

$$a=1\quad,\quad a=-3$$

-۷

$$y=x^3+bx^2+cx-2\ ,\ x+y=2$$

$$x=-2\Longrightarrow -2+y=2\Longrightarrow$$

$y=4\Longrightarrow$ نقطهٔ تماس $(-2,4)$

$\xrightarrow{\text{در تابع}} 4=-8+4b-2c-2\Longrightarrow$

$$2b-c=7\qquad(1)$$

$y'=3x^2+2bx+c$ ، $m=-1$ مماس ،

به ازای x تماس $m=y'$ مماس ، $x=-2$ تماس

$$\Longrightarrow -1=12-4b+c\Longrightarrow$$

$$-4b+c=-13\qquad(2)$$

$$\begin{cases}2b-c=7\\ -4b+c=-13\end{cases}\Longrightarrow b=+3\ \text{و}\ c=-1$$

جواب تشریحی تستها

(۱)-۱

$$\frac{\overline{CA}+\overline{AB}+2\overline{BC}}{\overline{BA}+\overline{AD}+\overline{DB}+3\overline{CB}}=$$

$$\frac{\overline{CB}+2\overline{BC}}{\overline{BA}+\overline{AB}+3\overline{CB}}=\frac{\overline{BC}}{3\overline{CB}}=-\frac{1}{3}$$

۲-(۴) دستگاه دو معادلهٔ یک مجهولی

$$\begin{cases}m-1=0\\ 2m+3=0\end{cases}$$

متوافق نیست.

(۱)-۳

$$A\begin{vmatrix}x=a\\ y=1-2a\end{vmatrix}\ ,\ OA=\sqrt{x^2+y^2}\Longrightarrow$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{a^2+(1-2a)^2}\Longrightarrow 5a^2-4a-1=0$$

$$\Longrightarrow a=1\ ,\ a=-\frac{1}{5}\Longrightarrow$$

$A_1\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$ و $A_2(1,-1)$

A_2 در ربع دوم نیست پس جواب نیست.

(۳)-۴

$$f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{x-1} & ,\ x>0\\ x+b & ,\ x\leqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(2)=\frac{2a}{2-1}=2a=2\Longrightarrow a=1\\ f(-2)=-2+b=0\Longrightarrow b=2\end{cases}\Longrightarrow$$

$$a+b=1+2=3$$

(۲)-۵

$A(3,5)\Longrightarrow$ A_1 قرینهٔ A نسبت به نیمساز ربع اول و سوم

$A_1(5,3)\Longrightarrow AA_1$ وسط $A'(4,4)$ ،

(۱)—۶

$$\lim_{x\to ۰}\frac{k\sin x\sin ۲x}{\cos ۲x(۱-\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{k\sin x\times ۲\sin x\cos x}{\cos ۲x\times ۲\sin^۲\frac{x}{۲}}=$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲k\sin^۲x\cos x}{۲\cos ۲x\sin^۲\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{kx^۲\cos x}{\cos ۲x\times\frac{x^۲}{۴}}=۴k$$

۷— (۴)، درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج کسر باید کمتر باشد.

(۱)—۸

حد: شرط پیوستگی در $x=۰$ $\lim_{x\to ۰}f(x)=f(۰)\Rightarrow$

$a=۲a+۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

(۴)-۹

$f(x)=ax^۳+bx^۲+cx-۱$

$f'(x)=۳ax^۲+۲bx+c$

$f''(x)=۶ax+۲b$ ، $f'''(x)=۶a$

$f'(۱)=۰\Rightarrow ۳a+۲b+c=۰$ (۱)

$f''(-۲)=۶\Rightarrow -۱۲a+۲b=+۶$ (۲)

$f'''(۲)=-۶\Rightarrow ۶a=-۶$ (۳)

$(۱)+(۲)+(۳)\Rightarrow -۳a+۲b+c=۰$

$\Rightarrow ۳a-۲b-c=۰$

(۴)-۱۰

$f(x)=tg(\cos\frac{x}{۲})\Rightarrow$

$f'(x)=-\frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲}(۱+tg^۲(\cos\frac{x}{۲}))$

$f'(\pi)=-\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}(۱+tg^۲(\cos\frac{\pi}{۲}))=-\frac{۱}{۲}$

(۴)-۱۱

$y'=۳x^۲+۲x+۵$

$y'=۰\Rightarrow ۳x^۲+۲x+۵=۰$

$\Delta'=-۱۴<۰\Rightarrow y'>۰$

(۲)-۱۲

$y=x^۲+ax+b$ ، $S(-۲,۲)$

$\frac{-a}{۲}=-۲\Rightarrow a=۴$ و

$\frac{۴(۱)(b)-a^۲}{۴\times ۱}=۲\Rightarrow$

$۴b-a^۲=۱۶\Rightarrow b=۸\Rightarrow ۲a+b=۱۶$

(۱)-۱۳

$y=-x^۲+۲x$ ، $y=-۳\Rightarrow$

$-۳=-x^۲+۲x\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰$

$\Rightarrow x=۳$ و $x=-۱\Rightarrow A\begin{vmatrix}x=۳\\y=-۳\end{vmatrix}$

نقطهٔ مطلوب $B\begin{vmatrix}x=-۱\\y=-۳\end{vmatrix}$

$y'=-۲x+۲\Rightarrow$ B مماس در $m=۲+۲=۴$

$\Rightarrow$ B قائم در $m=-\frac{۱}{۴}$

(۳)-۱۴

$y=x^۳+ax^۲+bx+۱\Rightarrow$

$y'=۳x^۲+۲ax+b$ ، $x=-۲\xrightarrow{\text{درمشتق}}$

$۱۲-۴a+b=۰\Rightarrow ۴a-b=۱۲$

حل مسائل جبر چهارم تجربی

-۱

$x^۲+y^۲+ax+b=۰\Rightarrow$

$(x+\frac{a}{۲})^۲+y^۲=\frac{a^۲}{۴}-b\Rightarrow$

$O'(-\frac{a}{۲},۰)$ و $R^۲=\frac{a^۲}{۴}-b$

$-\frac{a}{۲}=۱\Rightarrow a=-۲$

مرکز دایره $O'(۱,۰)$ و $۳x-۴y+۱۲=۰\Rightarrow$

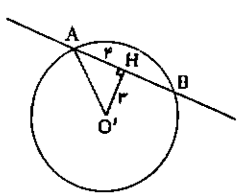
$O'H=\frac{|۳+۱۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۳$

$AH=\frac{AB}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$

$O'A^۲=R^۲=O'H^۲+AH^۲=۹+۱۶=۲۵$

$\Rightarrow R^۲=۲۵\Rightarrow R=۵$ شعاع دایره

$R^۲=\frac{a^۲}{۴}-b\Rightarrow ۲۵=\frac{۴}{۴}-b\Rightarrow b=-۲۴$



۲- نقطهٔ تقاطع دو محور تقارن $x=۲$ و $y=-۱$ مرکز بیضی است.

$\begin{cases}x=۲\\y=-۱\end{cases}\Rightarrow$ مرکز بیضی $C\begin{vmatrix}۲\\-۱\end{vmatrix}$

خط $x=۲$ محور کانونی بیضی موازی محور عرضها است (بیضی حالت عمودی دارد).

$\begin{cases}۳x+۲y-۱۰=۰\\x=۲\end{cases}\Rightarrow A\begin{vmatrix}x=۲\\y=۲\end{vmatrix}$

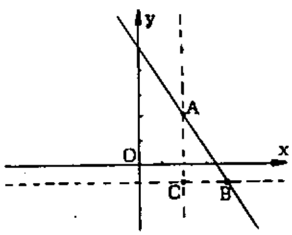
$\begin{cases}۳x+۲y-۱۰=۰\\y=-۱\end{cases}\Rightarrow B\begin{vmatrix}x=۴\\y=-۱\end{vmatrix}$

$CA=|y_A-y_C|=|۲+۱|=۳=a$

$CB=|x_B-x_C|=|۴-۲|=۲=b$

$\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}+\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow$

معادلهٔ بیضی $\boxed{\frac{(y+۱)^۲}{۹}+\frac{(x-۲)^۲}{۴}=۱}$



-۳

$۲x^۲+۲y^۲+۶x-۴y-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow$

$x^۲+y^۲+۳x-۲y-\frac{۳}{۴}=۰\Rightarrow$

مرکز دایره $C(\frac{-۳}{۲}$ و $۱)$ و $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۴+۳}=۲\Rightarrow R=۲$

مرکز بیضی موردنظر منطبق برمرکز دایره یعنی نقطهٔ

$C(-\frac{۳}{۲}$ و $۱)$

است و اندازهٔ قطر بزرگ بیضی مساوی قطر دایره‌است یعنی

$۲a=۲R=۴$

از آنجا $a=۲$ است اما $۲c=۲$ پس $c=۱$ است.

$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۴=b^۲+۱\Rightarrow$

$b^۲=۳\Rightarrow b=\sqrt{۳}$

$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow$

معادلهٔ بیضی $\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$

۴-

$y^2-x^2+2x-4y+1=0 \Rightarrow$

$y^2-4y-(x^2-2x)+1=0 \Rightarrow$

$(y-2)^2-4-[(x-1)^2-1]+1=0 \Rightarrow$

$(y-2)^2-(x-1)^2=2 \Rightarrow$

$\frac{(y-2)^2}{2}-\frac{(x-1)^2}{2}=1 \Rightarrow$

$a^2=b^2=2 \Rightarrow$ $C(1,2)$ مرکز هذلولی

هذلولی متساوی‌الساقین است. $a=b=\sqrt{2}$

$\begin{cases} y^2-x^2+2x-4y+1=0 \\ y=mx+5 \end{cases} \Rightarrow$

$(mx+5)^2-x^2+2x-4(mx+5)+1=0$

$\Rightarrow (m^2-1)x^2+2(3m+1)x+6=0$

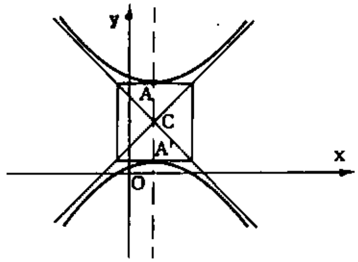
معادلهٔ طولهای نقاط تلاقی

$\Delta'=(3m+1)^2-6(m^2-1)=0 \Rightarrow$

$3m^2+6m+7=0$

$\Delta'_{\Delta'}=9-21=-12<0$ و $a=3>0 \Rightarrow$

معادلهٔ تلاقی همواره دوجواب دارد یعنی خط $y=mx+5$ همواره هذلولی‌را در دونقطهٔ قطع می‌کند



$x_I=\frac{x'+x''}{2}=\frac{-b}{2a}=\frac{-2(3m+1)}{2(m^2-1)}=\frac{3m+1}{1-m^2}$

$\Rightarrow y_I=m(\frac{3m+1}{1-m^2})+5 \Rightarrow$

$y=\frac{3m^2+m+5-5m^2}{1-m^2}=\frac{-2m^2+m+5}{1-m^2}$

$\Rightarrow I\left(x=\frac{3m+1}{1-m^2}\right.$ و $\left.y=\frac{-2m^2+m+5}{1-m^2}\right)$

$x=\frac{3m+1}{1-m^2} \Rightarrow x-m^2x=3m+1 \Rightarrow$

$m^2x+3m+1-x=0 \Rightarrow$

$m=\frac{-3\pm\sqrt{9-4x+4x^2}}{2x}$

$y=\frac{-2\left(\frac{-3\pm\sqrt{9-4x+4x^2}}{2x}\right)+}{1-\left(\frac{-3\pm\sqrt{9-4x+4x^2}}{2x}\right)^2}$

$\frac{-3\pm\sqrt{9-4x+4x^2}}{2x}+5$

۵- هذلولی افقی‌است زیرا محور کانونی آن‌خط $y=2$ موازی محورطولها است، ازطرفی نقطهٔ‌تقاطع محورکانونی و مجانب‌آن مرکزهذلولی است.

$\begin{cases} y-2=0 \\ y=7x-1 \end{cases} \Rightarrow 2=7x-1 \Rightarrow$

$x=\frac{3}{7}$ و $y=2 \Rightarrow$

مرکز هذلولی $C\left(\frac{3}{7}\right.$ و $\left.2\right)$

$P\begin{vmatrix} \alpha+c=3 \Rightarrow \frac{3}{7}+c=3 \Rightarrow \\ \beta=2 \end{vmatrix}$

$c=+\frac{18}{7}$ نصف فاصلهٔ کانونی

$m=\pm 7=\pm\frac{b}{a}$ مجانب‌ها در حالت افقی $\Rightarrow$

$b=7a$ ، $c^2=b^2+a^2 \Rightarrow$

$\left(\frac{18}{7}\right)^2=49a^2+a^2=50a^2$

$\Rightarrow a=\frac{9\sqrt{2}}{35} \Rightarrow b=\frac{9\sqrt{2}}{5}$

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow$

$\frac{(x-\frac{3}{7})^2}{(\frac{9\sqrt{2}}{35})^2}-\frac{(y-2)^2}{(\frac{9\sqrt{2}}{5})^2}=1$

۶-

الف) $f(x)=\sin^2x\sin 3x=\frac{1-\cos 2x}{2}\sin 3x$

$=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin 3x\cos 2x)$

$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sin 3x-\frac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)\right)$

$=\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{4}(\sin 5x+\sin x)$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\times-\frac{\cos 3x}{3}-\frac{1}{4}\times$

$(\frac{-1}{5}\cos 5x-\cos x)+c \Rightarrow$

$F(x)=-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{20}\cos 5x+\frac{1}{4}\cos x+c$

ب) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{(1+\cos^2x)^2}}+\frac{x+5}{x^3+3x^2+3x+1}$

$=\sin 2x(1+\cos^2x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x+5}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow f(x)=\sin 2x(1+\cos^2x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x+1+4}{(x+1)^3}$

$=\sin 2x(1+\cos^2x)^{-\frac{2}{3}}+(x+1)^{-2}+$
$4(x+1)^{-3} \Rightarrow$

$F(x)=-3(1+\cos^2x)^{\frac{1}{3}}+\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+$
$\frac{4(x+1)^{-2}}{-2}+c$

$=-3\sqrt[3]{1+\cos^2x}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+c$

۷-

$F(x)=\int(x^2-x-1)^{\frac{2}{3}}dx \Rightarrow$

$F'(x)=(x^2-x-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$

$F'(2)=(4-2-1)^{\frac{2}{3}}=1$

۸-

$\begin{cases} y=x^3-3x \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow x^3-3x=-x \Rightarrow$

$x^3-2x=0 \Rightarrow x(x^2-2)=0 \Rightarrow$

$x=0$ و $x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow$

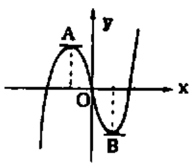
$O(0,0)$, $A(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $B(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$y_1=x^3-3x$ ، $y_2=-x \Rightarrow$

$d(x)=y_1-y_2=x^3-3x+x=x^3-2x$

$D(x)=\frac{x^4}{4}-x^2+c$

$S^0_{-\sqrt{2}}=\left[\frac{x^4}{4}-x^2\right]^0_{-\sqrt{2}}=1$ واحد سطح



جواب تشریحی تستها

۱- (۱)

$$\begin{cases} ax+y+3=0 \\ 2x-y-2=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left|\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{دراولی}} a+3=0 \Rightarrow a=-3$$

۲- (۲)

$$A\left|\begin{matrix} x=\alpha \\ y=2\alpha+1 \end{matrix}\right. \quad , \quad 2=\frac{|3\alpha-8\alpha-4-1|}{\sqrt{9+16}}$$

$$\Rightarrow |-5\alpha-5|=10 \Rightarrow |\alpha+1|=2 \Rightarrow$$

$$\alpha=1 \text{ و } \alpha=-3 \Rightarrow A_1\left|\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right. \quad A_2\left|\begin{matrix} -3 \\ -5 \end{matrix}\right.$$

۳- (۱)

$$f(x) \, . \, g(x)=1 \Rightarrow$$
$$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=0$$

۴- (۱)

$$z=f(tg x) \Rightarrow z'=(1+tg^2x)f'(tg x)$$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}}=\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{\cos 2x}$$

۵- (۱)

$$y=-2x^3+x^2 \quad , \quad y'=-6x^2+2x$$
$$y''=-12x+2 \quad , \quad y''=0 \Rightarrow$$

$x=\frac{1}{6}$ طول نقطهٔ عطف

$\Rightarrow$ بازای x تماس $m=y'$ مماس

مماس در نقطهٔ عطف $m=-6\left(\frac{1}{6}\right)^2+2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ قائم در نقطهٔ عطف $m=-6$

۶- (۱)

$$y=x^3+ax^2+3x-1 \Rightarrow$$
$$y'=3x^2+2ax+3 \quad , \quad 3x^2+2ax+3=0$$
$$\begin{cases} \Delta'=a^2-9<0 \\ 3>0 \end{cases} \Rightarrow a^2<9 \Rightarrow$$
$$-3<a<+3$$

۷- (۱)

$$(x-1)^3+(4-2x)^3+(x-3)^3=0$$
$$(x-1)+(4-2x)+(x-3)=$$
$$2x+4-2x-4=0 \Rightarrow$$
$$(x-1)^3+(4-2x)^3+(x-3)^3=$$
$$3(x-1)(4-2x)(x-3)=0$$
$$\Rightarrow x=1 \text{ و } x=2 \text{ و } x=3$$

۸- (۴)

$$y=x^3-3x^2+2 \Rightarrow y'=3x^2-6x$$
$$y'=0 \Rightarrow x=0 \text{ و } x=2$$
$$\left|\begin{matrix} x=0 \\ y=2 \end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix} x=2 \\ y=-2 \end{matrix}\right. \Rightarrow d=|2+2|=4$$

۹- (۲)

$$y=\frac{(m-1)x+2}{x-2m} \Rightarrow O'\left|\begin{matrix} x=2m \\ y=m-1 \end{matrix}\right.$$
$$\Rightarrow y=\frac{x}{2}-1$$

۱۰- (۲) نقطهٔ M باید برمرکز دایره منطبق باشد یعنی:

$$\begin{cases} a-2=1 \\ b+1=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a+2b=0$$

۱۱- (۳)

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow O_1\left|\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right. \text{ و } R=2$$
$$(x-4)^2+(y+3)^2=1 \Rightarrow$$
$$O_2\left|\begin{matrix} 4 \\ -3 \end{matrix}\right. \text{ و } R=1$$

خط‌المرکزین دو دایره $d=O_1O_2=\sqrt{16+9}=5$

$$TT'=\sqrt{d^2-(R+R')^2}=\sqrt{25-(2+1)^2}=4$$

۱۲- (۲) محور کانونی بیضی موازی محور عرضها و $a=3$ و $b=2$ است.

۱۳- (۱)

$FF'\|x'x$ مرکز بیضی $C\left|\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right. \quad , c=2 \quad , \quad b=1$

$$\Rightarrow a=\sqrt{5} \quad , \quad AA'=2a=2\sqrt{5}$$

۱۴- (۴)

طول مرکز $x=\alpha=1 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ مجانب}} 2y-1=3$

$$\Rightarrow y=2$$

۱۵- (۲)

مرکزهذلولی C(۱ و −۱) $\quad , \quad c=\sqrt{2} \Rightarrow$

$$a=b=1 \Rightarrow (x-1)^2-(y+1)^2=1 \Rightarrow$$
$$x^2-y^2-2x-2y=1$$

۱۶- (۲) مکان‌هندسی نقاطی که از آن‌نقاط دومماس عمود برهم برسهمی می‌توان رسم‌نمود خط‌هادی سهمی‌است پس:

$$(y-1)^2=-2(x+2) \, , \, S(\alpha=-2 \, , \, \beta=1)$$
$$2P=-2 \quad , \quad P=-1 \quad , \quad x=\alpha-\frac{P}{2}$$
$$\Rightarrow x=-2+\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{-3}{2} \Rightarrow$$
$$2x+3=0$$

۱۷- (۲)

$$f''(x)=6x \Rightarrow f'(x)=3x^2+c \text{ و } f'(1)=0$$
$$\Rightarrow c=-3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow$$
$$f(x)=x^3-3x+c_1 , \left|\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix}\right. \Rightarrow$$
$$c_1=2 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$$

۱۸- (۲)

نقاط تلاقی $\begin{cases} y^2=2Px \\ x^2=2Py \end{cases} \Rightarrow O(0,0) \text{ و } A(2P,2P)$

$$y_1=\sqrt{2Px} \quad , \quad y_2=\frac{x^2}{2P}$$
$$S_0^{2P}=\int_0^{2P}\left(\sqrt{2Px}-\frac{x^2}{2P}\right)dx=\frac{4}{3}P^2$$

تبصره ـ P مثبت فرض شده است ولی می‌تواند منفی هم باشد.

حل مسائل مثلثات سال دوم تجربی و ریاضی

۱-

الف) $\text{cosec}^4 2x-4=0 \Rightarrow$

$$(\text{cosec}^2 2x+2)(\text{cosec}^2 2x-2)=0 \Rightarrow$$
$$\text{cosec}^2 2x+2\neq 0 \Rightarrow \text{cosec}^2 2x-2=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 2x}-2=0 \Rightarrow 1-2\sin^2 2x=0$$
$$\Rightarrow \cos 4x=0 \Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$
$$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

ب) $\cot g x+tg x=\text{cosec} x+\sec x \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos x} \Rightarrow$$

$$\sin x+\cos x=1 \Longrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \Longrightarrow$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow$$

$x=2k\pi$ و $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ غیرقابل‌قبول

ج) $2\sin^3 x+\sin^2 x-2\sin x-1=0 \Longrightarrow$

$$2\sin x(\sin^2 x-1)+\sin^2 x-1=0 \Longrightarrow$$

$$(\sin^2 x-1)(2\sin x+1)=0 \Longrightarrow$$

$$\sin^2 x=1 \Longrightarrow \sin x=\pm 1=\sin(\pm\frac{\pi}{2}) \Longrightarrow$$

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

$$2\sin x+1=0 \Longrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$\Longrightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ و $x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$

د) $\sin^3 x+\cos^3 x=1 \Longrightarrow$

راه اول: $\sin^6 x+\cos^6 x+2\sin^3 x\cos^3 x=(1)^2=1$

$$\Longrightarrow 1-3\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^3 x\cos^3 x=1 \Longleftarrow$$

$$\sin^2 x\cos^2 x(-3+2\sin x\cos x)=0 \Longrightarrow$$

$$\sin^2 x\cos^2 x(-3+\sin 2x)=0 \Longrightarrow$$

$\sin 2x=3>1$ جواب ندارد

$$\sin^2 x\cos^2 x=0 \Longrightarrow \sin x=0 \Longrightarrow$$

$\boxed{x=2k\pi}$ جواب

$x=2k\pi+\pi$ جواب خارجی و

$$\cos^2 x=0 \Longrightarrow \cos x=0 \Longrightarrow$$

$\boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ جواب

و $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ جواب خارجی

راه دوم: $\sin^3 x+\cos^3 x=1 \Longrightarrow$

$$(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)=1$$

$$\Longrightarrow (\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=1$$

$\sin x+\cos x=z$ فرض می‌کنیم $\Longrightarrow$

$\sin x\cos x=\frac{z^2-1}{2}$ $\xrightarrow{\text{در معادله}}$

$$z(1-\frac{z^2-1}{2})=1 \Longrightarrow z^3-3z+2=0 \Longrightarrow$$

$$z^3-3z+2=(z-1)(z^2+z-2)=0 \Longrightarrow$$

$z=1$ و $z^2+z-2=0 \Longrightarrow z=1$

$z=-2<-\sqrt{2}$ غیرقابل‌قبول

$$z=1 \Longrightarrow \sin x+\cos x=1 \Longrightarrow$$

$$\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=2k\pi \\ x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \end{array}}$$

۲-

(الف) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x$$

$$\sin 2x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1) \Longrightarrow$$

$$2\cos x+1=0 \Longrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin 2x=\cos x \Longrightarrow 2\sin x\cos x=\cos x \Longrightarrow$$

$\cos x=0$ ، $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$$2\sin x=1 \Longrightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \Longrightarrow$$

$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

ب) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x \Longrightarrow$

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1-\cos 6x}{2} \Longrightarrow$$

$$1+\cos 6x=\cos 2x+\cos 4x \Longrightarrow$$

$$2\cos^2 3x-2\cos 3x\cos x=0 \Longrightarrow$$

$$2\cos 3x(\cos 3x-\cos x)=0 \Longrightarrow$$

$$\cos 3x=0 \Longrightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

$$\cos 3x-\cos x=0 \Longrightarrow \cos 3x=\cos x \Longrightarrow$$

$3x=2k\pi\pm x \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$ و $x=k\pi$

تذکر: درقسمت (الف) از بسط $\sin x=\sin(2x-x)$ و در قسمت (ب) از بسط $\sin 3x=\sin(2x+x)$ و $\cos 3x=\cos(2x+x)$ و $\cos 2x=\cos(3x-x)$ استفاده شده است.

۳-

$$\begin{cases} \operatorname{cosec} x-\sin x=a \\ \sec x-\cos x=b \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin x}-\sin x=a \\ \frac{1}{\cos x}-\cos x=b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}=a \\ \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\cos^2 x}{\sin x}=a \\ \frac{\sin^2 x}{\cos x}=b \end{cases} \Longrightarrow tg^3 x=\frac{b}{a} \Longrightarrow$$

$$tg\,x=\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \Longrightarrow \frac{\cos x}{tg\,x}=a \Longrightarrow \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=a$$

$\Longrightarrow \cos x=\sqrt[3]{a^2 b}$ ، $tg\,x\sin x=b \Longrightarrow$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\times\sin x=b \Longrightarrow \sin x=\sqrt[3]{ab^2}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Longrightarrow \sqrt[3]{a^2b^4}+\sqrt[3]{a^4b^2}=1$$

$$\Longrightarrow a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{a^2b}=1$$

۴-

$$y=a\sin x+b\cos x=a(\sin x+\frac{b}{a}\cos x) ،$$

$$\frac{b}{a}=tg\alpha \Longrightarrow y=a(\sin x+tg\alpha\cos x)=$$

$$a(\sin x+\frac{\sin\alpha\cos x}{\cos\alpha})=a(\frac{\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha}{\cos\alpha})$$

$$y=\frac{a\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$$

$$=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Longrightarrow$$

$$y=\pm\frac{a\sin(x+\alpha)}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\pm\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$$

با توجه به اینکه $-1\leqslant\sin(x+\alpha)\leqslant 1$ است پس:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant y=a\sin x+b\cos x\leqslant+\sqrt{a^2+b^2}$$

جواب تشریحی تستها

۱- (۴)

$$\frac{3k\pi}{5} = 2k'\pi \Rightarrow 3k = 10k' \Rightarrow k=10$$

(۱۰ و ۳ نسبت به هم اولند)

۲- (۴) $\frac{\sin\alpha}{tg\,\alpha}>0 \Rightarrow \cos\alpha>0$

۳- (۴) راه اول:

$$-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant \sin x\leqslant 1$$

$$\sin^2 x - 2\sin x = (\sin x -1)^2 - 1$$

$$Max: (-\frac{1}{2} - 1)^2 - 1 = \frac{5}{4}$$

راه دوم: $y=\sin^2x - 2\sin x \Rightarrow$

$y' = +2\sin x\cos x - 2\cos x$ ، $y'=0 \Rightarrow$

$2\cos x(\sin x - 1)=0$

$x = k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$x=-\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
y'	0	−	0	+	0
y	3	↗	−1	↗	3

در فاصله $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ تابع نزولی است پس، ماگزیمم آن برابر است با:

$$x=-\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\sin^2(-\frac{\pi}{6}) - 2\sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{4}$$

۴- (۴)

$$\sin\frac{217\pi}{6} = \sin(36\pi+\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos(-\frac{217\pi}{6}) = \cos\frac{217\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg(-\frac{137\pi}{6}) = tg(-\frac{137\pi}{6}+24\pi) = tg\frac{7\pi}{6} =$$

$$tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\frac{217\pi}{6}\cos(-\frac{217\pi}{6})tg(-\frac{137\pi}{6})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{4}$$

۵- (۲)

عبارت $= tgx+\cos x+cotgx-\cos x$

$$=tgx+cotgx=\frac{2}{\sin 2x}$$

۶- (۳)

$$1+cotg^2\varphi=\frac{1}{\sin^2\varphi}\Rightarrow$$

$$1+(m-1)^2=(m+1)^2 \Rightarrow m=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\sin\varphi=\frac{4}{5}$ و $cotg\varphi=\frac{-3}{4}\Rightarrow \cos\varphi=\frac{-3}{5}$

۷- (۱)

$$\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x=1$$

۱- (۸)

$$\cos(2x-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{6})\Rightarrow$$

$x=\frac{4k\pi}{5}-\frac{4\pi}{15}$ و $x=\frac{4k\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$

$x_1=\frac{8\pi}{15}$ و $x_2=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{8\pi}{15}+\frac{2\pi}{3}=\frac{6\pi}{5}$

حل مسائل مثلثات سوم تجربی

۱-

الف) $2\sin x - 4\sin^3x=\cos3x+\cos x$

$$2\sin x(1-2\sin^2x)=2\cos2x\cos x$$

$$2\sin x\cos2x=2\cos2x\cos x \Rightarrow \cos2x=0$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\sin x=\cos x\Rightarrow tgx=1=tg\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

ب) $1-4\cos^4(3x-\frac{\pi}{4})=\sin6x$

$$1-4\left(\frac{1+\cos(6x-\frac{\pi}{2})}{2}\right)^2=\sin6x$$

$$1-4\times\frac{(1+\sin6x)^2}{4}=\sin6x\Rightarrow$$

$$1-(1+\sin^26x+2\sin6x)=\sin6x$$

$$\Rightarrow \sin^26x+3\sin6x=0\Rightarrow$$

$$\sin6x(\sin6x+3)=0$$

$$\sin6x=0\Rightarrow6x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{6}$$

$\sin6x+3=0$ ریشه ندارد

ج) $Arctg\frac{x+1}{x^2+1}+2Arccos\frac{1}{2}-Arccos(-\frac{1}{2})$

$$=Arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Arc\,tg\frac{x+1}{x^2+1}+2(\frac{\pi}{3})-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

$$Arctg\frac{x+1}{x^2+1}=+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{x+1}{x^2+1}=tg\frac{\pi}{4}=1$$

$\Rightarrow x^2+1=x+1\Rightarrow x=0$ و $x=1$

۲-

الف) $4\sin^22x\cos3x=2\cos3x(1-\cos4x)$

$$=2\cos3x-2\cos4x\cos3x$$

$$=2\cos3x-(\cos7x+\cos x)$$

$$=2\cos3x-\cos7x-\cos x$$

ب) $4\cos x\cos(60-x)\cos(60+x)$

$$=2\cos x[\cos(60-x+60+x)+\cos(60-x-60-x)]$$

$$=2\cos x(\cos120+\cos2x)$$

$$=-\cos x+2\cos x\cos2x$$

$$=-\cos x+\cos3x+\cos x=\cos3x$$

۳-

الف) $y=\sin^2\sqrt[5]{x^2+x-1}\Rightarrow$

$$y'=\frac{2(2x-1)}{5\sqrt[5]{(x^2+x-1)^4}}\cos\sqrt[5]{x^2+x-1}$$

$$\sin\sqrt[5]{x^2+x-1}$$

ب) $y=tg\sqrt{x}+\sqrt{tgx}\Rightarrow$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+tg^2\sqrt{x})+\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{tgx}}$$

ج) $y=\cos\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}\Rightarrow$

$$y'=\frac{\frac{+3}{(x-1)^2}}{3\sqrt[3]{(\frac{x+2}{x-1})^2}}\sin\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2\sqrt[3]{(\frac{x+2}{x-1})^2}}\sin\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$$

د) $y = tg^3 2x \cdot cotg^5(x+\sqrt{x}) \Rightarrow$

$y' = 3\times 2(1+tg^2 2x)tg^2 2x \cdot cotg^5(x+\sqrt{x}) - 5(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})\times [1+cotg^2(x+\sqrt{x})]cotg^4(x+\sqrt{x})\cdot tg^3 2x$

۴-

$y = \sin^3 2x\cos 2x - \cos^3 2x \sin 2x$

$= \sin 2x\cos 2x(\sin^2 2x - \cos^2 2x) =$

$-\frac{1}{2}\sin 4x\cos 4x = -\frac{1}{4}\sin 8x \Rightarrow$

$y = -\frac{1}{4}\sin 8x \Rightarrow y' = -2\cos 8x \Rightarrow$

$y'' = +16\sin 8x \Rightarrow y'' = +16\sin 8x$

$= -64(-\frac{1}{4}\sin 8x) \Rightarrow y'' = 64y \Rightarrow$

$y''+64y=0$

جواب تشریحی تستها

۱- (۲)

$\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{8} \Rightarrow \pi<x<\frac{5\pi}{4} \Rightarrow$

$\sin x > \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x > 0 \Rightarrow$

$\sin x+\cos x-(\sin x-\cos x)=2\cos x$

۲- (۴)

$-\frac{\pi}{12}<x\leqslant\frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{-\pi}{3}<4x\leqslant\frac{\pi}{3}\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\leqslant \cos 4x \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\leqslant 3m-2\leqslant 1$

$\Rightarrow \frac{5}{6}\leqslant m\leqslant 1$

۳- (۲)

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos x<0 \Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow tg\frac{x}{4} = tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

۴- (۳)

$2\sin(3x-x)=1 \Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12}$ و $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$

$x_1=\frac{13\pi}{12}$ و $x_2=\frac{17\pi}{12}$

۵- (۲)

اتحاد: $tgx\,tg(60-x)tg(60+x)=tg3x$

$x=10^\circ \Rightarrow tg10\,tg50\,tg70=tg30=\frac{\sqrt{3}}{3}$

۶- (۳)

$\sin 42+\cos 72=\sin 42+\sin 18$

$=2\sin 30\cos 12=\cos 12$

۷- (۱)

$\sin[3(\frac{\pi}{4})+2(\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{3}-2(\frac{5\pi}{6})]=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

۸- (۴)

عبارت $=\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 2x+\sin 6x-\sin 4x+\sin 8x-\sin 6x)-\frac{1}{2}\sin 8x=0$

حل مسائل مثلثات چهارم تجربی

۱-

$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin(x+\frac{\pi}{4})\leqslant 1$

راه اول:

$\sin 2x=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\frac{1}{4}\Rightarrow$

$2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)-1=\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{5}{8}\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$

$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4}-x)=+\frac{\sqrt{10}}{4}$

راه دوم:

$2\sin x\cos x=\frac{1}{4}\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2=\frac{5}{4}\Rightarrow 2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})=\frac{5}{4}$

$\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{10}}{4}$

۲- $(m-2)\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=m+3$

اولاً: $a^2+b^2\geqslant c^2\Rightarrow(m-2)^2+1\geqslant(m+3)^2$

$\Rightarrow m\leqslant-\frac{2}{5}$

ثانیاً: $x=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\text{در معادله}}(m-2)\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=m+3$

$\Rightarrow m\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=m+3$

$m(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)=3+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

$m=\frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=\frac{(6+\sqrt{2})(\sqrt{2}+2)}{2-4}$

$=-(7+4\sqrt{2})$

ثالثاً: $(c+b)tg^2\frac{x}{2}-2a\,tg\frac{x}{2}+c-b=0$

$\xrightarrow{\text{در این مسئله}}(m+3+1)tg^2\frac{x}{4}-2(m-2)tg\frac{x}{4}+m+3-1=0$

$(m+4)tg^2\frac{x}{4}-2(m-2)tg\frac{x}{4}+m+2=0$

$tg\frac{x}{4}=2\xrightarrow{\text{در معادله}}4(m+4)-4(m-2)$

$+m+2=0\Rightarrow 4m+16-4m+8+m+2$

$=0\Rightarrow m=-26$

۳-

الف) $\sin^2 2x-\cos(\frac{3\pi}{2}-4x)=1\Rightarrow$

$\sin 4x=1-\sin^2 2x=\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$

$\Rightarrow 2\sin 4x-\cos 4x=1\Rightarrow$

$(1-1)tg^2 2x-4tg2x+1+1=0\Rightarrow$

$tg2x=\infty=tg\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $\boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$ و

$-4tg2x+2=0\Rightarrow tg2x=\frac{1}{2}=tg\alpha$

$\Rightarrow 2x=k\pi+\alpha\Rightarrow$

$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}Arctg\frac{1}{2}$

ب) $cotg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{2}=2\sqrt{3}\Rightarrow 2cotgx=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow cotgx=\sqrt{3}=cotg\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6}$

ج) $2\sin\frac{x}{2}+\sin x=1+2\cos\frac{x}{2}\Rightarrow$

$2(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1$

معادله کلاسیک نوع چهارم

$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=z \Rightarrow 2z+2\left(\frac{1-z^2}{2}\right)=1$

$\Rightarrow 2z+1-z^2=1 \Rightarrow 2z-z^2=0 \Rightarrow$

$z=2>\sqrt{2}$ جواب نیست

جواب $z=0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0 \Rightarrow$

$tg\frac{x}{2}=1=tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

د) $\cos 3x\cos 2x=\sin 3x\sin 2x-1 \Rightarrow$

$\cos 3x\cos 2x-\sin 3x\sin 2x=-1 \Rightarrow$

$\cos(3x+2x)=-1 \Rightarrow \cos 5x=-1=\cos\pi$

$\Rightarrow 5x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5}$

-۴

$y=\frac{a\sin x}{a+2\cos 2x}$ ، $x=\frac{2\pi}{3} \to a+2\cos 2x=0$

$\Rightarrow a+2\cos\frac{4\pi}{3}=0 \Rightarrow$

$a+2(-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow a=1$

-۵

$a=10$ و $b=4$ و $\cos C=\frac{3}{5}$

$\cos C=\frac{3}{5} \Rightarrow \sin C=\frac{4}{5}$

$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}=\frac{1}{2}\times 10\times 4\times\frac{4}{5}=16$

$\Rightarrow S=16$ واحد سطح

-۶

$b=2a\cos\hat{C} \Rightarrow \cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Rightarrow$

$b=2a\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \Rightarrow b^2=a^2+b^2-c^2$

$\Rightarrow a^2-c^2=0 \Rightarrow a^2=c^2 \Rightarrow a=c$

پس مثلث متساوی‌الساقین در رأس B است.

-۷

$y=\frac{\cos x}{2\cos x-1}$ ، $y'=\frac{\sin x}{(2\cos x-1)^2}$

$y'=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$

$\Rightarrow x=0$ و $x=\pi$ و $x=2\pi$

$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pi\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\pi\\y=1\end{cases}$

x	0		π		2π
y'	0	−	0	+	0
y	1	↘	$\frac{1}{3}$	↗	1
	Max		Min		Max

مینیمم تابع‌فوق درفاصله $[0,2\pi]$ برابر $\frac{1}{3}$ می‌باشد.

جواب تشریحی تستها

۱- (۲)

$2\pi<x<3\pi \Rightarrow \pi<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{2}$ و

$tg\frac{x}{2}=2-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{13\pi}{12} \Rightarrow x=\frac{13\pi}{6}$

$\Rightarrow tg2x=tg\frac{26\pi}{3} \Rightarrow tg2x=tg\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$

۲- (۲) راه اول:

$\frac{\sin x+2\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+2\cos 2x+\cos 3x}=\frac{2\sin 2x(1+\cos x)}{2\cos 2x(1+\cos x)}$

$=tg2x$

راه دوم: با فرض $x=\frac{\pi}{3}$ داریم:

$-\sqrt{3}=$ عبارت ، و گزینه‌ها

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پس گزینهٔ (۲) درست است.

۳- (۴)

$tg\frac{x}{2}+cotg\frac{x}{2}=4 \Rightarrow \frac{2}{\sin x}=4 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$

۴- (۴)

$a^2+b^2\geqslant c^2 \Rightarrow m^2+(m-3)^2\geqslant(2-m)^2$

$\Rightarrow m^2-2m+5\geqslant 0$ ، $m^2-2m+5>0$ همواره

۵- (۳)

راه اول: $y=1-\cos^2x+3\cos x=\sin^2x+3\cos x$

$\Rightarrow y'=2\sin x\cos x-3\sin x$

$y'=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \Rightarrow$

$x=0$ و $x=\pi$ و $x=2\pi$

$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pi\\y=-3\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\pi\\y=3\end{cases}$

راه دوم: $1-\cos^2x+3\cos x=1-(\cos^2x-3\cos x)$

$=1-\left[(\cos x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\right]=$

$\frac{13}{4}-(\cos x-\frac{3}{2})^2$

Max عبارت: $\cos x=1 \Rightarrow$ عبارت $=\frac{13}{4}-\frac{1}{4}=3$

۶- (۲)

$T_1=\frac{4\pi}{2}=2\pi$ و $T_2=2\pi \Rightarrow T=2\pi$

۷- (۱)

$8\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{12}\sin\frac{x}{12}=4\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{6}$

$=2\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=\sin\frac{2x}{3}=1 \Rightarrow$

$\frac{2x}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$x=3k\pi+3\pi=(3k+1)\pi$

اسامی تعدادی از عزیزانی که حلّ مسائل مسابقه‌ای و مسائلی برای حل را در زمان تعیین شده برای ما فرستاده‌اند.

۱ - امیر حسن نافعی (تهران)
۲ - علیرضا برنده فرد (قزوین)
۳ - مجید نمازی فر (قزوین)
۴ - اکبر هنرمند (تهران)
۵ - احمد باغبانها (قزوین)
۶ - لیلا اسدالهی (زنجان)
۷ - ارشام بروند سعید (کرمان)
۸ - داود خجسته (لنگرود)
۹ - نعمت اله کارخانه (اراک)
۱۰ - شانت شهبازیان (تهران)
۱۱ - معصومه فراهانی (تهران)
۱۲ - فایق رشید زاده (مهاباد)
۱۳ - بهمن اسماعیلی (نوشهر)
۱۴ - حسین سبزرو (تهران)
۱۵ - علی ابوالقاسمی (تهران)
۱۶ - حسین رحامی (اراک)
۱۷ - مسعود ساروی (آمل)
۱۸ - معصومه پریون (لاهیجان)
۱۹ - عباس دلدار (مرند)
۲۰ - سام کاوسی (تهران)
۲۱ - عباس زوار (تکاب)
۲۲ - علی محمیدی (گرمسار)

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

در صورتی که مدل مورد نیاز ۸،۰۰۰،۰۰۰ مرتبه سبکتر از برج ایفل باشد و هر دو از یک فلز ساخته شده باشند، در این صورت حجم مدل باید ۸،۰۰۰،۰۰۰ مرتبه کمتر از حجم برج واقعی باشد. می‌دانیم که احجام اشکال مشابه نسبت به یکدیگر برابر مکعبات ارتفاعاتشان است. در نتیجه، مدل مزبور باید ۲۰۰ مرتبه کوچکتر از نوع واقعیش باشد زیرا

$$۲۰۰ \times ۲۰۰ \times ۲۰۰ = ۸،۰۰۰،۰۰۰$$

ارتفاع برج واقعی ۳۰۰ متراست. بنابراین، ارتفاع مدل باید

$$۳۰۰:۲۰۰ = ۱\frac{۱}{۲} \text{ متر}$$

باشد.

به این ترتیب، مدل مورد بحث به ارتفاع در حدود قد یک انسان خواهد بود.

از: Figures for Fun
Ya. Perelman

جواب ۲

$$\forall x ;[(S(x) \wedge P(x)) \Rightarrow \sim D(x)] \Rightarrow \exists y ; (Ry \wedge A(y))$$

جواب ۳

شعاع دایره ۱۰=۵+۵ است بنابراین ۱۰=BD می‌باشد. اما BD قطر مستطیل است و در مستطیل اقطار مساوی‌اند، بنابراین AC نیز مساوی ۱۰ می‌باشد.

جواب ۴.

کریم از فروشندهٔ لوازم خانگی بلندتر است، بنابراین فروشندهٔ لوازم خانگی و فروشندهٔ دوره‌گرد نیست، پس حسابدار است.

فروشندهٔ دوره‌گرد کریم و کرام (که متأهل است) نیست، بنابراین کرم است.

با استفاده از حذف، کرام فروشندهٔ لوازم خانگی است.

In the name of God

Borhān

VOL. I. NO. 3

August 1992

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each is sue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

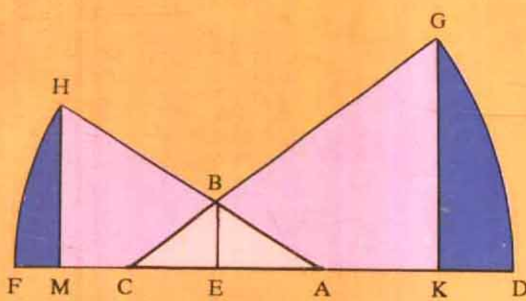
All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e-Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents :

1. You, too, may be successful in your mathematics lesson — Parviz Shahryari
2. Analytic geometry — Mohammad Ābedi
3. A brief history of Persian mathematics journals — Gholam Reza Yassipour
4. Geometric Progression — Ahmad Ghandehari
5. Rules of inference — Gholam Reza Yassipour
6. Finding the Sum and Difference Formuls — Hamid Reza Amiri
7. Short articles of authentic mathematics journals — Golam Reza Yassipour
8. Solving a fundamental problem of mathematics by elementary methods — G. Yassipour
9. Introduction of mathematics books
10. Contest problems — S.H. Seyyed Moosavi
11. Problems — Rostami , Amiri , Hashemi
12. Solution of contest problems of No.2 — Hashemi
13. An swers of problems of No. 2 — Rostami , Amiri , Hashemi

اثبات ابوریحان بیرونی (۳۶۲-۴۴۲ هجری قمری) از قضیهٔ سینوسها در فصل سوم کتاب «قانون مسعودی»



مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. به مرکز رأس A و به شعاع واحد کمان HF را رسم می‌کنیم تا امتداد ضلعهای AB و AC را، به ترتیب، در H و F قطع کند. به همین ترتیب، G و D به ترتیب، روی امتداد ضلعهای CB و CA اند و GD کمانی از دایرهٔ به مرکز C و شعاع واحد است. عمودهای HM ، GK و BE را بر خط راست FD فرود می‌آوریم. روشن است که

$$|HM| = \sin\hat{A} \quad و \quad |GK| = \sin\hat{C}$$

از تشابه دو مثلث ABE و AHM به دست می‌آید:

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|AH|}{|HM|} = \frac{۱}{\sin\hat{A}} \qquad (۱)$$

و از تشابه دو مثلث CBE و CGK :

$$\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|CG|}{|GK|} = \frac{۱}{\sin\hat{C}} \qquad (۲)$$

و از تقسیم دو رابطهٔ (۱) و (۲) بر یکدیگر:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$$

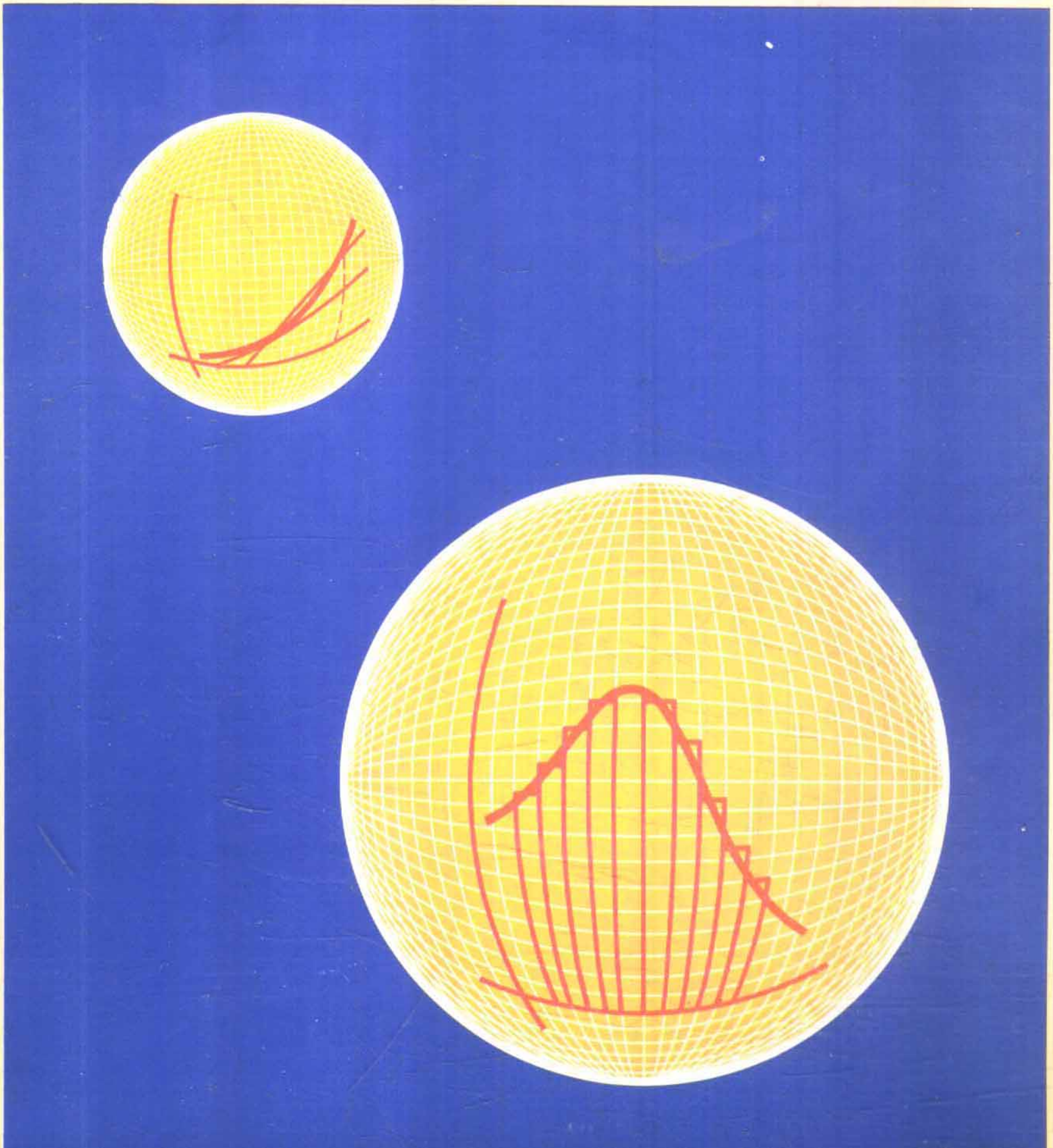
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۴

سال اول، پاییز ۱۳۷۱ بهاء ۵۰۰ ریال



چاپ سوم

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه

● صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

● مدیر مسئول: عبدالعظیم فریدون

● سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:

آقایان: ● حمیدرضا امیری

● محمد هاشم رستمی

● احمد قندهاری

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

● غلامرضا یاسی‌پور

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و محمد عابدی)

● مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی

● صفحه‌آرا و رسام: محسن کریمخانی

● حروفچینی: یگانه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن

۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ ـ طرح معماهای ریاضی

۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه ولطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

- مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاداست.
- مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، پلاک ۲۶۸، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش وپرورش تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷

مطالب این شماره

مطلب	صفحه
● سخن سردبیر	۱
● شماهم می‌توانیددردرس ریاضی خودموفق باشید(۴) پرویز شهریاری	۲
● هندسه تحلیلی محمد عابدی	۷
● تاریخچه مجلات ریاضی ایران(۳)	۲۶
● اتحادهای مهم جبری احمد قندهاری	۳۲
● درباغ تجربه‌ها(مصاحبه با معلمین شما)	۳۶
● تابع و بررسی خاصیت یک به یکی درانواع توابع حمیدرضا امیری	۴۴
● مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبرجهان(۲)	۵۸
● مثالهای هندسی برای تابعهای گسسته دکتر احمد شرف‌الدین	۶۲
● اثبات نادرستی و ناتمامی قواعد استنتاج غلامرضا یاسی پور	۶۴
● طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روش مقدماتی(۲)	۷۰
● معرفی کتابهای ریاضی	۷۴
● مسائل مسابقه‌ای و مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی محمدهاشم رستمی	۷۶
● مسائل برای حل	۷۸
● حل مسائل شمارهٔ ۳	۸۴

سخن سردبیر

«قدرو قیمت لحظات شیرین زندگی خود را بدانید و خودتان را برای یک مبارزهٔ علمی و عملی بزرگ تا رسیدن به اهداف انقلاب اسلامی آماده کنید.»

امام خمینی(ره)

چهار فصل از چاپ اولین شمارهٔ مجله ریاضی«برهان» گذشت و ما اکنون چهارمین شمارهٔ این مجله را در پیش روداریم.

در این چهار شماره ما همواره از نظرات، پیشنهادات، مقالات و مسائلی که شما خوانندگانِ عزیز برای ما فرستاده‌اید کمالِ استفاده را برده و اِن شاءا... سعی خواهیم کرد که از این شماره مقالات و مسائل شما عزیزان را در مجله بیشتر منعکس کنیم.

از این شماره به‌بعد در بخش «مسائل برای حل» مسائل فرستاده شده را با ذکر نام فرستنده درج خواهیم‌کرد. قسمتهای متنوع دیگری نیز به مجله اضافه کرده‌ایم که امیدواریم مورد توجه و عنایت خوانندگان گرامی قرارگیرد.

در این شماره با یکی از معلمین خوب و دلسوز ریاضی مصاحبه‌ای انجام شده که محتوای آن حتماً مورد استفاده شما قرار خواهد گرفت و ما نیز امیدواریم بتوانیم این مصاحبه‌ها را ادامه داده تا از تجربیات این عزیزان بیشتر استفاده شود.

ـ به خواست خدا ـ از شماره آینده قصد داریم صفحه‌ای از مجله را به‌کار ترجمهٔ متونِ ریاضی از زبانِ انگلیسی اختصاص دهیم و در هر شماره مطلبی یا مسأله‌ای مفید را به زبان انگلیسی چاپ کرده و لغات آن را معنی کنیم و در نهایت ترجمه شدهٔ آن متن را در مقابلِ آن قرار دهیم تا هم عده‌ای که علاقه‌مند به فنّ ترجمه هستند بهره‌مندشوند و هم از آن مطلب یا مسأله ـ که در سطح دبیرستان خواهد بود ـ استفاده کنند.

دراین‌جا از عزیزانی که برای ما مطالبی را ترجمه کرده و می‌فرستند تقاضا داریم که فتوکپی متن انگلیسی را نیز به‌همراه آن بفرستند و نیز اگر «مسائل برای حل» را از منابعی انتخاب می‌کنید، منبع مورد استفاده را قید کرده تا بررسی آنها دقیقتر انجام شود.

عده‌ای از دانش‌آموزان درخواست کرده‌اند که مهلت جواب به مسائل مسابقه‌ای را افزایش‌دهیم لذا تصمیم‌گرفتیم جوابهای مسائل مسابقه‌ایِ هر شماره را در دو شمارهٔ بعد چاپ کنیم و مهلت ارسال جوابها را از یک‌ماه به سه ماه افزایش دهیم. از شمارهٔ بعد ـ باتوجه به درخواست خوانندگان ـ درنظرداریم دربخش «مسائل برای حل» مانندآنچه درشمارهٔ ۲ ملاحظه‌کردید، درکنارمسائل‌تست نیز قرار دهیم.

اِن شاءا... تصمیم داریم در صورت امکان، همراه شمارهٔ ۵ «ویژه‌نامه کنکور» شاملِ صورت و حل تشریحی تستهای کنکورِ ۲ ـ ۳ سال اخیر را به چاپ برِسانیم.

ضمناً درصدد هستیم درصورت امکان چهار شمارهٔ این مجله را به شکل یک دورهٔ تک‌جلدی منتشر کرده و در اختیار علاقه‌مندان قرار دهیم.

به هر حال توانایی و استمرار ما در چاپ مجلهٔ خودتان، توجه و عنایات شما را می‌طلبد که اِن شاءا... همواره برقرار خواهد بود.

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۴)

پرویز شهریاری

دربارهٔ «واژه‌نامهٔ ریاضی» صحبت می‌کردیم که بحث به جاهای دیگری کشیده شد.

اگر «واژه‌نامهٔ ریاضی» را در کنار «دفتر خاطره‌های علمی» خود داشته باشید و اگر هردوی آنها را با پی‌گیری و دقت ادامه دهید، نه تنها به درس روزانهٔ شما کمک می‌کنند و شما را وامی‌دارند تا درمورد هرمطلب تازه یاکهنه دقیق شوید، در عمق مفهومهای علمی و ریاضی فرورروید و، به جای استفاده از حافظه و به خاطر سپردن فرمولها و قاعده‌ها، خود را به‌ریشه‌های موضوع موردنظرتان برسانید، بلکه مهمتر از همه، موجب می‌شوند تا ذهن و اندیشهٔ شما سمت پیدا کند؛ آن وقت، باتوجه به‌هدفی که دارید، تمامی ساعتهای زندگی شما، به صورتی دلپذیر و برنامه‌ریزی شده و در جهت علاقه‌های علمی پر می‌شود، به نحوی که گاه، برای دست یافتن به چیزی که به دنبال آن هستید، چنان شور وشوقی پیدا می‌کنید که سراسر زندگی فرهنگی و معنوی شما را، لبریز از شادی و نشاط می‌کند، زندگی از حالت یکنواختی و ملال‌آور خود خارج می‌شود و احساس می‌کنید، شما هم برای ساختن بنای پرشکوه تمدن بشری سهمی دارید و برای آزاد کردن انسان از قید ناشناخته‌ها و ابهامها، گامی برداشته‌اید. هدف موفق شدن در امتحانها و تلاش برای پیش‌افتادن از دیگران در کنکورها و مسابقه‌ها، هدف نادرستی نیست، ولی زودگذر است و به همین مناسبت، آینده‌ساز نیست؛ چراکه بعداز رسیدن به آن، آدمی را دچار رخوت و بی‌هدفی می‌کند. انسان وقتی می‌تواند در تمامی زندگی خود موفق باشد که، در کنار هدفهای فرعی و موضعی و کوتاه مدت، هدفی دراز مدت هم داشته‌باشد که به سراسر زندگی او معنا ببخشد؛ بداند در چه جهتی حرکت می‌کند و از تلاش خود چه انتظاری دارد!

«دفتر خاطره‌های علمی» و «واژه‌نامهٔ ریاضی»، وسیله‌های نیرومندی برای دستیابی به‌این هدف دراز مدت و شکل دادن به آن هستند. ولی برای این‌که از این «اهرم پرقدرت» استفاده کنید، برای این که «واژه‌نامهٔ» شما، به واقع سودمند باشد و در جهت دادن به اندیشهٔ علمی شما، نقش واقعی خود را ایفا کند، باید پیش خود، شرایطی را برای تنظیم آن درنظربگیرید. برخی‌از این شرایط را خواهیم آورد، ولی قبل‌از آن، به پرسشی که به‌طور طبیعی پیش‌می‌آید، پاسخ بدهیم، می‌پرسند: «اگر ما نخواهیم ریاضی‌دان بشویم و به چیز دیگری و مثلاً موسیقی علاقه‌مند باشیم، از صرف وقت خود در تنظیم این «واژه‌نامه» چه بهره‌ای می‌بریم؟» در پاسخ به این پرسش، باید گفت: اولاً شما به هر شاخه‌ای از دانش، هنر یا صنعت علاقه‌مند باشید، بی‌نیاز از ریاضیات نیستید و برای این که در رشتهٔ مورد علاقهٔ خود موفق شوید، باید ذهنی منظم و اندیشه‌ای هدفمند داشته باشید و ریاضیات، علاوه برآن که به این امر خدمت می‌کند، در رشتهٔ اختصاصی مورد علاقهٔ شما هم (هرقدر که گمان می‌کنید دور از ریاضیات است) به کارتان می‌آید. ثانیاً مگر کسی مانع شما شده‌است که، درکنار «واژه‌نامهٔ ریاضی»، به واژه‌نامه‌های دیگری هم، که با ذوق و علاقهٔ شما سازگاری بیشتری دارد، بپردازید: «واژه‌نامهٔ فیزیک»، «واژه‌نامهٔ موسیقی»، «واژه‌نامهٔ سیاسی»، «واژه‌نامهٔ اصطلاح‌های تجاری»، ...؟ گمان نکنید، در این صورت، کار شما متفرق می‌شود و یا وقت کم می‌آورید! آزمایش کنید، خیلی زود قانع

می‌شوید که هر «واژه‌نامه‌ای» می‌تواند برای شما مفید باشد، به خصوص که با تلاش در جهتهای مختلف، سرانجام خواهید توانست ذوق و علاقهٔ واقعی خود را بازیابید و با اطمینان بیشتری، آن را دنبال کنید. دربارهٔ کمبود وقت صحبتی نمی‌کنم، همین‌قدر می‌گویم که توان واقعی شما، آن قدر زیاد است که، با همین وقت محدود خود، و بدون این که به کار رسمی درسی شما لطمه‌ای وارد آید، قادرید خیلی بیش از این‌ها تلاش کنید ... به آزمایشش می‌ارزد.

برگردیم به نکته‌هایی که توجه به آنها، برای تنظیم «واژه‌نامهٔ ریاضی» ضروری است.

۱) سعی نکنید، یکبار و برای همیشه، کار مربوط به یک واژه را تمام کنید. آن چه را که امروز به نظر تان می‌رسد، یا درکتابی دیده‌اید یا از زبان کسی شنیده‌اید، یادداشت کنید، ولی کار را تمام شده نپندارید. چند صفحه از دفتر خود را، برای بحثها و یافته‌های بعدی خود، آزاد بگذارید. آگاهی شما دربارهٔ این واژه، در روزها، ماهها و سالهای آینده، بیشتر می‌شود که باید همهٔ آنها را در دفتر خود جا بدهید. ممکن است دربارهٔ واژه‌ای یا مفهومی، پرسشی به‌نظر تان برسد که، پاسخ آن، برای شما روشن نباشد، این پرسش را یادداشت کنید و با پی‌گیری به دنبال پاسخ آن باشید. هر وقت فرصتی دست داد، به سراغ کتابها بروید، با دانش‌آموزان کلاس خود مشورت کنید، از معلم خود راهنمایی بگیرید. با وجود این، هیچ پاسخی را قطعی به‌حساب نیاورید. آن را در دفتر خود، همراه با نظر مثبت یا منفی خودتان بنویسید و باز هم جست و جو را ادامه دهید.

به عنوان مثال، واژهٔ «حد» را درنظر می‌گیریم، اول باید برای خودتان روشن کنید، واژهٔ «حد» در زبان فارسی چه معنا یا معناهایی دارد و درکجا به کار می‌رود؟ بعد، به سراغ تعریف ریاضی آن بروید. در کتابهای درسی، تعریفی برای مفهوم «حد» داده‌اند؟ آیا برای شما قابل فهم است؟ آیا قانع کننده است؟ آیا می‌توان از تعریف دیگری، که احتمالاً ساده‌تر و ملموستر باشد، استفاده کرد؟ ... به‌دنبال کتابهای دیگری بروید. آنها دربارهٔ «حد» چه نوشته‌اند؟ آیا کتاب مستقلی دربارهٔ «حد»، در زبان فارسی وجود دارد؟ ... در جایی می‌خوانید که «مفهوم حد» را می‌توان به یاری مفهوم «دنباله» تعریف کرد. «دنباله» یعنی چه؟ چند جور «دنباله» داریم؟ به چگونه دنباله‌ای، «دنبالهٔ عددی» می‌گویند؟ «حد دنباله» یعنی چه؟ آیا جمله‌های پیاپی یک تصاعد نامتناهی (حسابی یا هندسی) تشکیل یک دنباله می‌دهند؟ واژهٔ دیگری مطرح شد: «نامتناهی» یعنی چه؟ فرق «دنبالهٔ متناهی» با «دنبالهٔ نامتناهی» چیست؟ آیا داشتن «حد»، به نامتناهی بودن دنباله ربط دارد؟ «حد یک دنباله» با «حد مجموع جمله‌های یک دنباله» چه تفاوتی دارند؟ آیا بجز تصاعدها، می‌توانید دنباله‌ای عددی یا دنباله‌ای شامل چند جمله‌ایها بنویسید؟ بین این دنباله‌ها و مفهوم حد، چه رابطه‌ای وجود دارد؟...

در یک نشریهٔ ریاضی، زیر تیتر «عددگنگ $\sqrt{۲}$ به عنوان حد یک کسر مسلسل نامتناهی» نوشته بود:

$$\sqrt{۲}=۱+(\sqrt{۲}-۱)=۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=۱+\frac{۱}{۲+(\sqrt{۲}-۱)}=$$

$$۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{\sqrt{۲}+۱}}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+(\sqrt{۲}-۱)}}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{\sqrt{۲}+۱}}}$$

$$=\cdots=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cdots}}}$$

چقدر جالب! عدد گنگ $\sqrt{۲}$، به وسیلهٔ عملهای روی عددهای درست ۱ و ۲ نشان داده شده است. ولی «کسر مسلسل نامتناهی» چه تعریفی دارد؟ آیا عدد گنگ π را هم می‌توان به کمک کسر مسلسل نشان داد؟ اصلاً عدد گنگ یعنی چه؟ چند جور عدد گنگ داریم؟ عدد گنگ $\sqrt{۲}$، ریشهٔ معادلهٔ $x^{۲}-۲=۰$ است. چرا نمی‌توان معادله‌ای با ضریبهای درست نوشت که، یکی از ریشه‌های آن، برابر π باشد؟ راستی، چگونه می‌توان معادله‌ای با ضریبهای درست را پیداکرد، به نحوی که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ یکی از ریشه‌های آن باشد. اگر داشته باشیم $x=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$، آن وقت $x^{۲}=۵+۲\sqrt{۶}$ و $x^{۲}-۵=۲\sqrt{۶}$، یعنی $(x^{۲}-۵)^{۲}=۲۴$ یا $x^{۴}-۱۰x^{۲}+۱=۰$، چه خوب! معادله‌ای

دو مجذوری با ضریبهای درست به دست آمد که، یکی از ریشه‌های آن، برای $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ است. ولی این معادله چهار ریشه دارد. سه ریشهٔ دیگر آن، چه خویشاوندی با عدد $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ دارند؟ آیا بدون حل معادله، می‌توان آنها را نوشت؟...

می‌بینید تا کجاها می‌توان پیش‌رفت. اگر رشتهٔ اندیشه‌های خود را پاره نکنیم، می‌توان به‌جاهای دورتری رفت و پرسشهای باز هم جالبتری را برای خود طرح کرد: این عدد π از کجا سر درآورده است؟ وجود آن، تنها مربوط به ریاضیات است یا ساختار طبیعت چنان است که، یکی از مصالح آن، همین عدد π است؟ آیا می‌توانیم ریاضیات را به‌گونه‌ای بسازیم که بی‌نیاز از عدد π باشد؟...

رشتهٔ خیال را می‌توان همچنان ادامه داد و البته، اینها، تنها خیال نیستند؛ این پرسشها و جست و جوی پاسخ آنها (ولو این که به سادگی به آنها نرسیم)، نشانه‌ای از «حقیقت‌جویی» ماست و نشانهٔ آن است که ما در راه دانش گام نهاده‌ایم ... همین پرسشها و همین جست وجوهاست که می‌تواند از شما یک دانشمند بسازد. دانشمند شدن نعمتی نیست که تنها نصیب افرادخاص و «برگزیده» بشود. هرکسی می‌تواند به این نعمت برسد. فقط باید آن‌رابخواهد و با حوصله و پی‌گیر به دنبالش برود. ولی این پی‌گیری باید باسرسختی و حتی «لجاجت» همراه باشد. سفر به نقطه‌های دور و نزدیک، خیلی چیزها به مامی‌آموزد، ولی کسی که می‌خواهد دانشمند بشود، باید در اندیشه، خود هم سفرکند، همین سفرهای گاه پرمخاطرهٔ ذهنی است‌که زندگی ما را مملو از عشق و شور و شیفتگی می‌کند و، اگر بابرنامه‌ای درست همراه باشد، ما را به‌مقصود می‌رساند.

کوتاه سخن: حتی یک واژه می‌تواند وسیله‌ای برای گسترش دامنه خیال باشد و با پرسشهایی که از خود می‌کنید، در همهٔ سرزمینهای زیبا و رؤیایی ریاضیات، به گشت و گذار مشغول شوید. از وسعت گرفتن پرسشهایی که به دنبال هم پیش‌می‌آید و شل درختی تنومند، به سمت ساقه‌ها و شاخه‌های تازه و تازه‌تری رشد می‌کند، نهراسید، همهٔ آنها را یادداشت کنید و در جست و جوی پاسخ آنها، علاوه بر آن که در درون خود می‌اندیشید، به هرجایی سربزنید و از هرامکانی استفاده کنید.

۲) پی‌گیری و استمرار در کار، شرط اصلی موفقیتهای آینده است. با کار تفننی و گاه به گاه، نمی‌توان در ریاضیات موفق شد. تنها شب‌زنده‌داریهای نزدیکیهای امتحان، برای تسلط بر دانش (و از آن جمله، ریاضیات) کافی نیست. برعکس، ریاضیات را باید با آرامش خاطر، در سرکلاس، در خلوت تنهایی، در بحث با دوستان و یا مراجعه به کتابهای مختلف یادگرفت و شب امتحان را، آسوده و بی‌خیال استراحت کرد. در ساعتهایی که هیجان و اضطراب نزدیک شدن امتحان، شما را می‌آزارد، مثلاً می‌توان باگوش دادن به یک موسیقی ملایم، تماشای نقاشیهای نقاشان بزرگ، وَر رفتن به گل و گیاه و یا خواندن شعر و رمان خوب، آرامش خود را بازیافت. کار علمی با تشویش ونگرانی سازگار نیست و باید به موقع خود بیرون از اضطرابهای مربوط به «امتحان» و «کنکور»، یعنی در تمامی طول سال انجام گیرد، نه در ساعتهای زودگذر و پرشتاب نزدیک شدن «لحظهٔ سرنوشت». اگر شما در طول سال، در اندیشهٔ درک عمیق و درست موضوعهای درسی خود باشید، بدون این که به شیوه‌های نادرست «روش امتحان دادن» و «راه تست‌زدن» متوسل شوید، می‌توانید از عهدهٔ هر «آزمایشی» برآیید... درست است که برخی کوشیده‌اند «دکانهایی» برای «تضمین» گذشتن شما از سدهای «امتحان» و «کنکور» بازکنند و «نسخه‌هایی» را آماده کرده‌اند که «اگر با پرسشی این‌گونه روبه‌رو شدید، این طور عمل کنید»؛ ولی به یاد داشته باشید که از این راه (حتی اگر به تصادف از سد امتحان هم عبور کنید) به دانشی دست نیافته‌اید و تمامی زندگی علمی آیندهٔ خود را به مخاطره انداخته‌اید.

کار علمی، استمرار در کار، حوصله و پی‌گیری می‌خواهد و هر راه دیگری، ذهن و اندیشه را تباه می‌کند و شما را به صورت آدمی سطحی بار می‌آورد و روزبه‌روز از دانش واقعی دورتر می‌کند. به این توصیهٔ **نوربرت**، یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان زمان ما در زندگی‌نامهٔ خود به نام «من ریاضی‌دانم» گوش کنید:

... این، نمایش غم‌انگیزی از زندگی آدمی است که، درآن، درخشش و شکفتگی کوتاه نخستین، جای خود را به رشتهٔ بی‌پایانی از روزهای یکنواخت و ملال‌آور می‌دهد. اگر

ریاضی‌دان می‌خواهد به چنین سرنوشتی دچار نشود، اگر می‌خواهد اعتبار علمی او روزبه روز پایین نیاید، باید با استفاده از همهٔ لحظه‌های شکفتگی نیروهای خلاق خود، به‌کاوش در چنان زمینهٔ ناشناخته‌ای از دانش و یا بررسی چنان مسأله‌های تازه‌ای بپردازد که هم محتوای درونی آنها غنی باشد و هم دارای این ارزش واقعی باشد که امکان کار ثمربخش او را، در طول تمامی زندگیش، فراهم کند. من بخت بلندی داشتم. موضوعهایی که جوانی مرا دچار تشویش کرده بود، چنان بزرگ و غنی بود که از آغاز فعالیت علمی خود تاکنون، هنوز حرارت خود را از دست نداده‌ام و حالا، در شصت سالگی، باید تمامی نیروهای باقی‌ماندهٔ خود را جمع کنم تا بتوانم از عهدهٔ آنچه به‌صورت برنامهٔ روزانه برای خودم چیده‌ام، برآیم...

۳) همان‌طوربنویسید که می‌اندیشید. اگر چندی بعد، نوشتهٔ خود را نارسا یا اشتباه دیدید، آن‌را حذف نکنید و از بین نبرید. نوشتهٔ گذشته را تکرار کنید و به تجزیه و تحلیل نارساییها و نقطه ضعفهای آن بپردازید. مسیر پیشرفت اندیشهٔ علمی خود را حفظ کنید، حتی درصورت لزوم (مثلاً اگر زمانی تصمیم به نوشتن زندگی نامهٔ علمی خود گرفتید) از بیان این اشتباهها نهراسید. به یادداشته باشید، تنها کسی اشتباه نمی‌کند که دست به هیچ‌گونه کار علمی و عملی نمی‌زند. ذهن و اندیشهٔ آدمی، ضمن کار و برخورد با واقعیتها و یا آگاهیهای تازه، رشد می‌کند و به او دیدی عمیق‌تر و منطقی‌تر می‌دهد. هراس از اشتباه و یا، بدتر از آن، هراس از برملاشدن اشتباه، مانعی جدی در راه پیشرفت است.

سعی کنید نوشتهٔ شما روشن و خالی از هرگونه رمز و استعاره باشد، پیچیده ننویسید، تلاش نکنید نوشتهٔ شما به اصطلاح «آراسته» و «ادبی» باشد، از «پرده‌پوشی» و «معمانویسی» ـ که هم خودتان را از مسیر اصلی منحرف می‌کند و هم درک نوشته‌های شما برای دیگران دشوار می‌شود ـ پرهیز کنید. تنها شرطی را که باید رعایت کنید، این است که نوشته‌هایتان، درست و قابل فهم باشد. دنبال هیچ «پیرایه‌ای» نروید و تنها به درستی و روانی مطلب توجه داشته باشید.

نوشته‌های پیچیده، غیرقابل فهم و رازگونه، مربوط به زمانهایی بوده است که، صاحبان فرهنگ و ادب، جرأت ابراز عقیدهٔ درونی خود را، حتی در زمینهٔ دانش، نداشته‌اند و از فاش شدن دیدگاههای خود وحشت می‌کرده‌اند.امام‌محمدغزالی که مشهورتر از آن است که نیازی به معرفی او داشته باشیم، مردی هوشمند، متفکر و با ایمان بود، برای ایمان و اعتقادهای دینی، اولویت قایل بود و به همین جهت، با فیلسوفان و آموزشهای فلسفی موافق نبود، باوجود این با روشن‌بینی، دانش را نفی نمی‌کرد و مطالعهٔ حساب و هندسه و اخترشناسی را، نه از جهت نفی و نه از جهت اثبات، به امور ایمانی مربوط نمی‌دانست ولی همین تأیید نسبی او از دانش، متعصبان را خوش نیامد، در بسیاری جاها او را تکفیر کردند و حتی نوشته‌های او را به آتش سپردند. به این سخنان پردرد خیام، هم عصر امام محمد غزالی، که در مقدمهٔ کتاب جبر خود آورده، توجه کنید:

... دچار زمانه‌ای شده‌ایم که اهل علم از کارافتاده و جز عدهٔ کمی باقی‌نمانده که از فرصت برای بحث و تحقیقات علمی استفاده کنند. برعکس، حکیم‌نمایان دورهٔ ما، همه دست‌اندرکارند که حق را با باطل بیامیزند؛ جز ریا و تدلیس کاری ندارند؛ اگر دانش و معرفتی نیز دارند، صرف اغراض پست جسمی می‌کنند. اگر با انسانی مواجه شدند که در جست و جوی حقیقت راسخ و صادق است و روی از باطل و زورمی‌گرداند و گرد تدلیس و مردم فریبی نمی‌گردد، او را استهزا و تحقیر می‌کنند...

و به همین دلیل است که در رباعیهای خود می‌نالد:

ناآمدگان، اگر بدانند که ما
از دهر چه می‌کشیم، نایند دگر

و به احتمالی، از ترس «استهزا و تحقیر» همین «حکیم نمایان» است که، باگوشه‌نشینی و فرار از بحث در اجتماع، به نوعی محافظه‌کاری تن داده بود. خود او می‌گوید:

خورشید به گل نهفت، می‌نتوانم
و اسرار زمانه گفت، می‌نتوانم

نه می‌توانم منکر حقیقت بشوم و نه امکان و جرأت بیان آن‌را دارم. ابن‌سینا، مطلب را روشنتر بیان‌می‌کند. او در «حکمة‌المشرقین» نوشته است:

... بسیاری از اغلاط را با پردهٔ تغافل پوشیدم. علت این تغافل و پرده‌پوشی، این بود که نخواستم با چیزهایی مخالفت نموده باشم که از فرط شهرت، برای جهّال بدیهی شده و به مقامی رسیده که ممکن است در روشنایی روز شک کنند، ولی در صحت آن مسائل، شکی ندارند...

مطلب روشن است. ابن سینا، به خاطر مخالفت مردم جاهل و نادان، از کنار بعضی اشتباهها می‌گذرد و به آنها نمی‌پردازد. البته همین ابن‌سینا، در جای دیگری توصیه می‌کند: «چنان که وضع اسرار به نزدیک جاهل خطاست، منع معانی از عاقل ناستوده است».

با همهٔ اینها، واقع این است که، زمینهٔ رشد علم، در کشورهایی همچون ایران، بسیار مساعدتر از دوران مشابه خود در اروپای غربی بود؛ چراکه مثلاً آمبروز (Ambrose) اسقف میلان در سدهٔ چهارم میلادی، معتقد بود: «کسانی که به اخترشناسی و هندسه مشغول‌اند، به معنای آن است که راه نجات را رها کرده‌اند و راه تباهی و گناه را پذیرفته‌اند». و اوگوستین شاگرد او (سدهٔ چهارم و پنجم میلادی)، از این هم جلوتر رفته و معتقد است که «ریاضیات، آدمی را از خدا دور می‌کند» و...

به استناد همین سخنان بود که «پائولولولمس»، ریاضی‌دان اسپانیایی را، به دستور محکمهٔ تفتیش عقاید و به جرم کشف راه حل جبری معادلهٔ درجهٔ چهارم و در سدهٔ پانزدهم سوزاندند و «پیرراموس» ریاضی‌دان فرانسوی و هوادار نظریهٔ خورشید مرکزی کوپرنیک را، در کشتار معروف «بارتلمی» پاریس، در سال ۱۵۷۲ کشتند.

ولی همهٔ اینها مربوط به گذشته است. شما در زمانی زندگی می‌کنید که کسی، ارزش کار علمی را نفی نمی‌کند، روزبه روز به تعداد کتابها و مجله‌های ریاضی به زبان فارسی، افزوده می‌شود، دوستان شما در المپیادهای جهانی ریاضی شرکت می‌کنند و در میان همسالان خود در دیگر کشورها، هماورد می‌طلبند. در چنین شرایطی، معمانویسی و پناه گرفتن در زیر پردهٔ رمزها و استعاره‌ها کاری مصنوعی است و اگر زمانی، برای بیان «اسرار» به «عاقل» و دورنگه‌داشتن «معانی» از «جاهل» ضرورت داشت و نوعی حرکت علمی بود، امروز حتی می‌تواند به مفهومی، حرکتی ضد دانش باشد.

ساده و قابل فهم بنویسید، درست‌بنویسید، از پیرایه و استعاره پرهیز کنید و سخن خود را، به همان گونه که می‌اندیشید، به روی کاغذ بیاورید.

تابعد

ادب ریاضی

هیچ چیز برای مرد علم ضروریتر از تاریخ آن و منطق اکتشاف نیست ... راه کشف کردن خطا، به کاربردن فرضیّه و تخیّل و روش آزمودن.

لرد آکتن
منطق اکتشاف علمی
کارل ریموند پوپر، ترجمهٔ احمد آرام

هندســـه تحلیـــلی

(قسمت دوم)

محمد عابدی

مورد استفاده دانش‌آموزان چهارم ریاضی

۱۰ـ دترمینان

بخش مختصری از دترمینانها که درهندسه تحلیلی کاربرد دارند بررسی می‌کنیم. جدول ۲ × ۲ به صورت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

را که شامل دوسطر و دوستون می‌باشد دترمینان ۲ × ۲ می‌نامیم و مقدار آن را $ab'-a'b$ تعریف می‌کنیم، داریم:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$$

خواص دترمینان

۱: اگریك سطر و یا یك ستون دترمینان‌را درعددی‌ضرب کنیم مقدار دترمینان در آن عددضرب می‌شود مثلاً سطراول را در k ضرب‌نموده داریم:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a' & b' \end{vmatrix} = kab'-kba' = k(ab'-a'b)$$

$$= k\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۲: اگرجای دو سطر یا دوستون دترمینان را عوض‌کنیم مقدار دترمینان درمنها ضرب می‌شود مثلاً جای‌ستون اول ودوم را عوض‌نموده داریم:

$$\begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} = a'b-ab' = -(ab'-a'b)$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۳: اگر دوسطر یا دوستون دترمینان مساوی باشند مقدار دترمینان‌صفر است. مثلاً اگر دوسطر دترمینان‌برابر باشندداریم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab-ab = \boxed{0}$$

۴: اگریك سطر دترمینان‌را در عددی ضرب کرده آن‌را با سطردیگر جمع‌کنیم و یا یك ستون‌را در عددی ضرب‌کنیم و آن‌را با ستون دیگرجمع‌کنیم درمقدار دترمینان تغییری‌حاصل نمی‌شود. مثلاً سطردوم دترمینان‌را در k ضرب‌نموده باسطراول آن جمع می‌کنیم داریم:

$$\begin{vmatrix} a+a'k & b+b'k \\ a' & b' \end{vmatrix} =$$

$$b'(a+a'k)-a'(b+b'k)=ab'-a'b=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

۵: اگرجای تمامی سطرهارا با ستونها عوض کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند داریم:

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

جدول ۳×۳ به صورت

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

را دترمینان ۳×۳ نامند و ثابت می‌کنند این دترمینان را می‌توان برحسب هرسطر ویا هرستون به صورت زیر بسط داد مثلاً بسط دترمینان فوق برحسب سطر اول به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=$$

$$a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}=$$

$$a(b'c''-b''c')-b(a'c''-a''c')+$$
$$c(a'b''-b''a')$$

اگر i را نماینده سطر و j را نماینده ستون هریك از اعضای دترمینان بگیریم دراین‌صورت هرعضو دترمینان را به صورت a_{ij} نمایش می‌دهند مثلاً عضو a_{23} یعنی عضوی که در سطر دوم و ستون‌سوم قرار گرفته‌است وعلامت‌ضریب این‌عضو $(-1)^{2+3}$ یعنی‌منها می‌باشد وعلامت‌ضریب‌عضو a_{ij} به‌صورت $(-1)^{i+j}$ است و دترمینان‌ضریب a_{ij} برابراست با دترمینانی که‌ازحذف سطر iام وستون jام به دست می‌آید مثلاً عضو b را که در سطر اول و ستون دوم قرار گرفته است درنظر گرفته دترمینان ضریب این عضو به صورت

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

یعنی $\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}$ می‌باشد. توجه داشته باشید خواصی که بیان گردید برای هردترمینان $n\times n$ برقرار می‌باشد حال دترمینان بالارا برحسب ستون‌سوم بسط می‌دهیم حاصل این‌بسط با بسط قبلی برابرمی‌باشد داریم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+3}c'\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}c''\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$=c(a'b''-a''b')-c'(ab''-a''b)$$
$$+c''(ab'-a'b)$$

توجه به این‌نکته حائزاهمیت است که علامتها یك درمیان تغییر می‌کنند.

۱۱ـ حل دستگاه مبادلات به‌کمك دترمینان

۱: حل دستگاه دومعادله دو مجهولی

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

مخرج کسرهای بالا دترمینان ضرایب مجهولات بوده و برای به دست آوردن صورت کسرها به‌جای ضرایب مجهول، اعداد معلوم c و c' را قرارداده سپس دترمینان ضرایب مجهولات را درصورت نظیر مجهول می‌نویسیم. این مطلب برای دستگاه سه معادله سه مجهولی نیز برقرار می‌باشد. داریم:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

تبصره ۱: شرط سازگار بودن دستگاه

$$\begin{cases} ax+by=c & (۱) \\ a'x+b'y=c' & (۲) \\ a''x+b''y=c'' & (۳) \end{cases}$$

را بنویسید.

حل : می‌خواهیم بررسی کنیم چه‌شرطی باید وجودداشته باشد تاجواب معادلات (۱) و (۲) درمعادله (۳) صدق نماید. دستگاه مزبور را به صورت

$$\begin{cases} ax+by+\circ\times z=c \\ a'x+b'y+\circ\times z=c' \\ a''x+b''y+\circ\times z=c'' \end{cases}$$

می‌نویسیم.

دراین دستگاه z هرعدد دلخواهی می‌تواند باشد

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & \circ \\ a' & b' & \circ \\ a'' & b'' & \circ \end{vmatrix}}$$

اگر دترمینان مخرج‌را برحسب ستون سوم که تمامی اعضای‌آن صفراست بسط دهیم حاصل‌صفر مـی‌شود چون مخرج کسرصفر می‌باشد و z نیزمقداری‌دلخواه‌است، پس‌باید صورت کسرصفر

شود تا z دلخواه باشد زیـرا جواب $\frac{0}{0}$، مبهم، یعنی دلخواه است پس شرط سازگار بودن دستگاه آن می‌باشد دترمینان ضرایب مجهولات یعنی

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

باشد.

تبصره ۲ : شرط آنکه دستگاه

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{cases}$$

جوابهایی غیراز $x=y=z=0$ داشته باشد چیست؟

حل :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

اگر دترمینان صورت کسر را برحسب ستون اول بسط دهیم حاصل صفر می‌شود و در صورتی که مخرج کسر عددی مخالف صفر باشد آن گاه $x=0$ است، اما چون می‌خواهیم معادله جوابی غیراز صفر داشته باشد باید مخرج کسر صفر شود تا جواب معادله به‌صورت $\frac{0}{0}$ یعنی عدد دلخواه در آید بنابراین شرط جواب غیرصفر دستگاه آن است که دترمینان ضرایب مجهولات یعنی

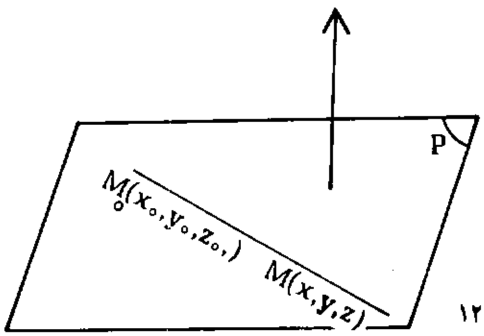
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

باشد.

۱۲- معادله صفحه N(A,B,C)

بردار $\vec{N}(A,B,C)$ عمود بر صفحه P را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم نقطه $M_0(x_0,y_0,z_0)$ در صفحه P باشد می‌دانیم شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه دلخواه $M(x,y,z)$ در صفحه P باشد آن است که بردار $\overrightarrow{M_0M}$ بر بردار $\vec{N}$ عمود باشد داریم (شکل ۱۲):

و



شکل ۱۲

$$\vec{N}(A,B,C) \quad , \quad \overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M}=0 \Longrightarrow P \overset{\text{به معادله}}{\equiv}$$

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

یا

$$Ax+By+Cz-\underbrace{(Ax_0+By_0+Cz_0)}_{-D}=0 \Longrightarrow$$

$$P \overset{\text{به معادله}}{\equiv} \boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

مثال ۱ : معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط (d) با پارامترهای هادی (a,b,c) و خط d′ با پارامترهای هادی (a′,b′,c′) بوده و از نقطه $M_0(x_0,y_0,z_0)$ بگذرد.

حل : چون صفحه از نقطه $M_0(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و معادله آن به صورت

$$A(x-x_\circ)+B(y-y_\circ)+C(z-z_\circ)=\circ$$

می‌باشد و چون بردار عمود برصفحه یعنی برداز

$$\vec{N}(A\ ;\ B\ ,\ C)$$

برخطوط d و d' عمود می‌باشد پس:

$$Aa+Bb+Cc=\circ \text{ و } Aa'+Bb'+Cc'=\circ$$

وشرط آنکه دستگاه سه‌معادله سه‌مجهولی

$$\begin{cases}(x-x_\circ)A+(y-y_\circ)B+(z-z_\circ)C=\circ\\ aA+bB+cC=\circ\\ a'A+b'B+c'C=\circ\end{cases}$$

با مجهولهای A و B و C جوابهایی غیرازصفرداشته‌باشد آن است که دترمینان ضرایب A و B و C صفرباشد یعنی

$$P \xlongequal{\text{صفحه P به معادله}} \begin{vmatrix} x-x_\circ & y-y_\circ & z-z_\circ \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=\circ$$

مثال ۲ : معادله صفحه‌ای‌را بنویسید که از سه‌نقطه

$$M(۱,۲,۳) \text{ و } N(۲,۳,۴) \text{ و } P(-۱,\circ,\circ)$$

بگذرد .

حل :

$$\overrightarrow{MN}(۲-۱\ ,\ ۳-۲\ ,\ ۴-۳) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{MN}(۱,۱,۱) \text{ و } \overrightarrow{PN}(۲+۱=۳,۳,۴)$$

یعنی می‌خواهیم معادله‌صفحه‌ای‌را بنویسیم که از نقطه

$$P(x_\circ=-۱\ ,\ y_\circ=\circ\ ,\ z_\circ=\circ)$$

بگذرد وشامل دوخط با پارامترهای هادی

$$(a=۱\ ;\ b=۱\ ,\ c=۱) \text{ و }$$

$$(a'=۳\ ,\ b'=۳\ ,\ c'=۴)$$

باشد پس:

$$P\equiv\begin{vmatrix} x-x_\circ & y-y_\circ & z-z_\circ \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} x+۱ & y & z \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۳ & ۴ \end{vmatrix}=\circ$$

این دترمینان‌را برحسب سطراول بسط داده داریم:

$$(x+۱)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix}=\circ$$

$$\Longrightarrow (x+۱)(۴-۳)-y(۴-۳)+z(۳-۳)=\circ$$

$$\Longrightarrow x+۱-y=\circ \Longrightarrow$$

$$\boxed{P\equiv x-y+۱=\circ}$$

مثال ۳ : معادله صفحه‌ای‌را بنویسید که طول وعرض و ارتفاع‌از مبدأآن‌به ترتیب a و b و c باشد.

حل : صفحه مزبور از نقاط

$$Q(\circ,\circ,c) \text{ و } N(\circ,b,\circ) \text{ و } M(a,\circ,\circ)$$

می گذرد، داریم:

$$\overrightarrow{MN}(-a,b,\circ) \text{ و } \overrightarrow{NQ}(\circ,-b,c)$$

صفحه از نقطه $M(x_\circ=a\ ,\ y_\circ=\circ\ ,\ z_\circ=\circ)$ گذشته و شامل دوخط با پارامترهای‌هادی $(-a,b,\circ)$ و $(\circ,-b,c)$ می‌باشد پس:

$$P\equiv\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & \circ \\ \circ & -b & c \end{vmatrix}=\circ \Longrightarrow$$

$$(x-a)bc-y(-ac)+z(ab)=0$$

طرفین رابطه اخیر را بر abc بخش می‌کنیم:

$$\frac{x-a}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

مثال ۴ : معادلات صفحاتی را بنویسید که برصفحات مختصات عمود باشند.

حل : صفحه‌ای که برصفحه xoy عمود است موازی محور zها می‌باشد بنابراین بردار عمود برصفحه ، برمحور zها عمود می‌باشد وتصویر آن روی محور zها صفراست یعنی بردار $\vec{N}(A,B,0)$ وچون معادله صفحه به صورت

$$Ax+By+Cz+D=0$$

است. پس معادله‌صفحه عمود برصفحه xoy به صورت

$$\boxed{Ax+By+D=0}$$

می‌باشد یا می‌توانیم بگوییم چون تصویر هر نقطه ازصفحه عمود برصفحه xoy خطی است که روی‌صفحه xoy می‌باشدومعادله این خط که در صفحه xoy است به صورت

$$Ax+By+D=0$$

می‌باشد ومعادله‌صفحه عمود برصفحه xoz به صورت

$$\boxed{Ax+Cz+D=0}$$

و معادله‌صفحه عمودبرصفحه yoz به صورت

$$\boxed{By+Cz+D=0}$$

می‌باشد .

مثال ۵ : معادلات صفحاتی‌را بنویسیدکه ازمحورهای مختصات بگذرند.

حل : چون‌صفحات از محورها می‌گذرند پس از مبدأ مختصات نیز می‌گذرند و معادله آنها به صورت:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Longrightarrow$$

$$A(x-0)+B(y-0)+C(z-0)=0 \Longrightarrow$$

$$Ax+By+Cz=0$$

اگرصفحه برمحور oz بگذرد بردارعمود برصفحه برمحور zها عمود بوده وتصویر آن روی محور zها صفر است یعنی

$$\vec{N}(A\ ,\ B\ ,\ 0)$$

و معادله‌صفحه‌به صورت $\boxed{Ax+By=0}$ ومعادله صفحه‌ای که بر oy می‌گذرد به صورت $\boxed{Ax+Cz=0}$ ومعادله صفحه‌ای که بر ox می‌گذرد به صورت

$$\boxed{By+Cz=0}$$

می‌باشد .

مثال ۶ : پارامترهای‌هادی‌خط (d) فصل‌مشترک‌دوصفحه

$$\begin{cases} P\equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ Q\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

را بیابید .

حل : بردار $\vec{v}(a,b,c)$ از خط (d) که فصل مشترک دوصفحه P و Q می‌باشد را در نظر گرفته ، بردار

$$\vec{N}(A\ ,\ B\ ,\ C)$$

که برصفحه P عمود می‌باشد برکلیه خطوط صفحه P یعنی بر بردار $\vec{v}$ عموداست ونیز بردار $\vec{N'}(A',B',C')$ که برصفحه

Q عموداست بربردار $\vec{v}$ از صفحه Q عمود بوده داریم:

$$\vec{N} \perp \vec{v} \Longrightarrow aA+bB+cC=0$$

$$\vec{N'} \perp \vec{v} \Longrightarrow aA'+bB'+cC'=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Aa+Bb=-cC \\ A'a+B'b=-cC' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$a=\frac{\begin{vmatrix} -cC & B \\ -cC' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} A & -cC \\ A' & -cC' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

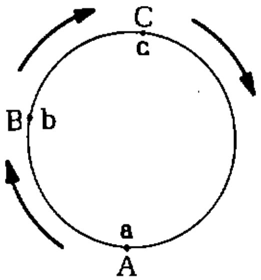
در دترمینانهای صورت جای دوستون‌را عوض نموده بنا براین دترمینان در منها ضرب می‌شود ونیز از هرستون از C فاکتور گرفته داریم:

$$a=\frac{C\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \quad \text{و} \quad b=\frac{C\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}=\dfrac{c}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} & (1) \\[2ex] \dfrac{b}{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}=\dfrac{c}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} & (2) \end{cases}$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\frac{a}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}=\frac{b}{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}=\frac{c}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}}$$



برای یادگیری رابطه بالا تبدیلات دوری را روی حروف انجام می‌دهیم.

مثال ۷ : معادله صفحه‌ای‌را بنویسیدکه از نقاط

$M(2,3,4)$ و $N(-1,0,2)$

بگذرد و با دوصفحه

$$\begin{cases} R\equiv 2x+4y-z=1 \\ Q\equiv x+y+z=3 \end{cases}$$

موازی باشد.

حل:

$$\frac{a}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{b}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{c}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \Longrightarrow$$

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{-3}=\frac{c}{-2}$$

پارامترهای‌هادی‌فصل مشترک دوصفحه راکه متناسب با ۳,۵ — ، ۲ — می باشد می توان ۳،۵ — ۲، — فرض نمود:

$$\overrightarrow{NM}(۲+۱ , ۳-۰ , ۴-۲) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{NM}(۳ , ۳ , ۲)$$

از نقطه N خطی به موازات بردار $\vec{v}(۵, -۳, -۲)$ رسم نموده این خط در صفحه مطلوب می‌باشد حال باید معادله صفحه‌ای را بنویسیم که از نقطه N بگذرد و شامل بردارهای $\overrightarrow{NM}$ و $\vec{v}$ باشد داریم:

$$\begin{vmatrix} x-x_{\circ} & y-y_{\circ} & z-z_{\circ} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x+۱ & y-۰ & z-۲ \\ ۳ & ۳ & ۲ \\ ۵ & -۳ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ \Longrightarrow$$

$$(x+۱)(-۶+۶)-y(-۶-۱۰)+$$

$$(z-۲)(-۹-۱۵)=۰ \Longrightarrow$$

$$(x+۱)(۰)+۱۶y+(z-۲)(-۲۴)=۰ \Longrightarrow$$

$$۱۶y-۲۴z+۴۸=۰$$

$$\boxed{P \equiv ۲y-۳z+۶=۰}$$

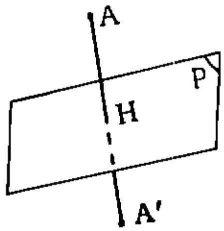
مثال ۸ : مختصات قرینه نقطه $A(-۲ , ۰ , ۴)$ را نسبت به صفحه‌ای که طول و عرض و ارتفاع از مبدأ آن (۱) می‌باشد کدام است؟

حل :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱ \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{۱}+\frac{y}{۱}+\frac{z}{۱}=۱ \Longrightarrow P \equiv x+y+z-۱=۰$$

از نقطهٔ A عمود AH را برصفحه P فرودآورده آن را به‌اندازه خود امتداد داده تا نقطهٔ A' قرینه نقطه A به‌دست آید (شکل ۱۳):



شکل ۱۳

پارامترهای هادی عمود AA' ضرایب صفحه P یعنی (۱,۱,۱) می‌باشد و چون خط از نقطه

$$A(x_{\circ}=-۲ , y_{\circ}=۰ , z_{\circ}=۴)$$

می‌گذرد معادله آن به صورت:

$$AA' \equiv \frac{x-x_{\circ}}{a}=\frac{y-y_{\circ}}{b}=\frac{z-z_{\circ}}{c} \Longrightarrow$$

$$\frac{x+۲}{۱}=\frac{y-۰}{۱}=\frac{z-۴}{۱}=t \Longrightarrow$$

$$x=t-۲ , y=t , z=t+۴$$

این خط را با صفحه P قطع می‌دهیم یعنی به جای x و y و z معادلات بالا را در معادله صفحه P قرار می‌دهیم داریم:

$$(t-۲)+t+(t+۴)-۱=۰ \Longrightarrow ۳t+۱=۰$$

$$\Longrightarrow t=-\frac{۱}{۳} \Longrightarrow x_H=-\frac{۱}{۳}-۲=\boxed{-\frac{۷}{۳}}$$ و

$$y_H=\boxed{-\frac{۱}{۳}}$$ و $$z_H=-\frac{۱}{۳}+۴=\boxed{\frac{۱۱}{۳}}$$ و

$$x_H=\frac{x_A+x_{A'}}{۲} \Longrightarrow -\frac{۷}{۳}=\frac{-۲+x_{A'}}{۲} \Longrightarrow$$

$$-۱۴=-۶+۳x_{A'} \Longrightarrow \boxed{x_{A'}=-\frac{۸}{۳}}$$

$$y_H=\frac{y_A+y_{A'}}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{3}=\frac{0+y_{A'}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y_{A'}=-\frac{2}{3}}$$

$$z_H=\frac{z_A+z_{A'}}{2} \Longrightarrow \frac{11}{3}=\frac{4+z_{A'}}{2} \Longrightarrow$$

$$22=12+3z_{A'} \Longrightarrow \boxed{z_{A'}=\frac{10}{3}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{A'\left(-\frac{8}{3}\ ,\ -\frac{2}{3}\ ,\ \frac{10}{3}\right)}$$

مثال ۹ : معادله صفحه‌ای راکه از نقاط

$Q(x_3,y_3,z_3)$ و $N(x_2,y_2,z_2)$ و $M(x_1,y_1,z_1)$

می گذردبه صورت دترمینان بنویسید.

حل : چون‌صفحه ازنقاط M وN وQ می گذردمختصات این‌نقاط در معادله صفحه

$$Ax+By+Cz+D=0$$

صدق می کند داریم:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 \\ Ax_3+By_3+Cz_3+D=0 \end{cases}$$

شرط آنکه دستگاه چهار معادلـه چهار مجهولی بـا مجهولات A وB وC وD جوابهایی‌غیر ازصفرداشته‌باشد آن‌است که دترمینان ضرایب مجهولات صفر باشد یعنی:

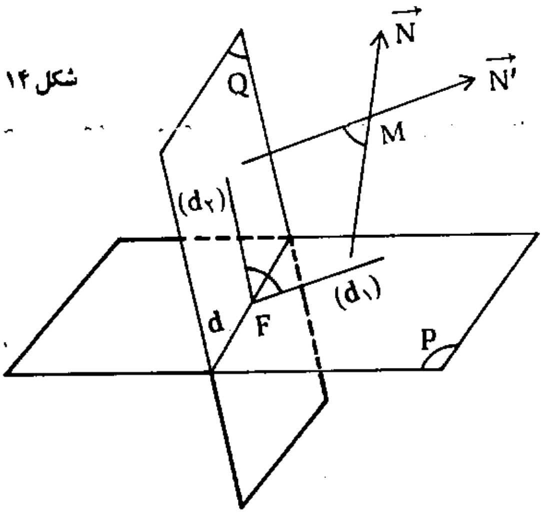
$$P\equiv\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

۱۳ـ زاویه بین دوصفحه و زاویه بین‌خط وصفحه

برای‌به دست‌آوردن زاویه بین دوصفحهٔ P وQ از نقطه F روی خط (d) فصل مشترک‌دوصفحه عمودهای d_1 وd_2 را دردوصفحه P وQ رسم می‌کنیم. زاویه‌بین این دوعمود یعنی‌زاویه $\hat{F}$ زاویه بین دوصفحه می‌باشد اگر از نقطه M خارج دوصفحه دوعمود بردوصفحه P وQ فرود آوریم چون‌اضلاع این‌زاویه براضلاع زاویه $\hat{F}$ عمودند لذا دو زاویه $\hat{F}$ و $\hat{M}$ یا مساوی‌اند و یـا مکمل‌اند. اگرمعادلات دوصفحه P و Q رابه صورت:

$$\begin{aligned} P &\equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \\ Q &\equiv \end{aligned}$$

در نظربگیریم، چون بردار $\vec{N}(A,B,C)$ و بردار $\vec{N'}(A'\ ,\ B'\ ,\ C')$ می‌باشند (شکل ۱۴).



شکل ۱۴

بنابراین:

$$\cos(\widehat{\vec{N},\vec{N'}}) = \cos\hat{M} = \cos\hat{F} =$$

$$\frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^{2}+B^{2}+C^{2}}\sqrt{A'^{2}+B'^{2}+C'^{2}}}$$

چون معمولاً زاویه حاده بین دوصفحه را درنظرمی‌گیریم لذا

$AA'+BB'+CC'$

را در داخل قدرمطلق نوشتیم. اگر دوصفحه برهم عمود باشند

$$\cos\hat{F} = \cos 90^\circ = 0$$

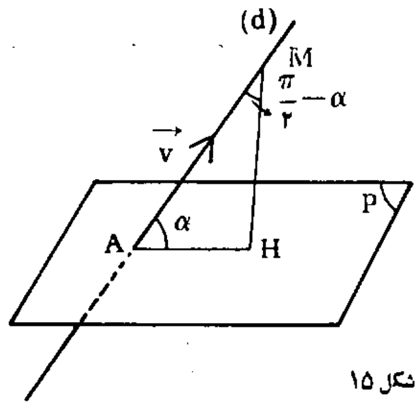
$$\boxed{AA'+BB'+CC' = 0}$$

تبصره: اگردوصفحه P وQ موازی باشند بردارهای عمود براین دوصفحه، یعنی بردار $\vec{N}(A,B,C)$ با بردار

$\vec{N'}(A' , B' , C')$

موازی خواهدبود و داریم:

$$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}}$$



شکل ۱۵

مسلماً اگر دوصفحه برهم منطبق باشند

$$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}}$$

خواهد بود.

برای به دست آوردن زاویه بین خط d وصفحه

$$P \equiv Ax+By+Cz+D=0$$

فرض می‌کنیم خط d صفحه P را درنقطه A قطع کند از نقطه M روی خط (d) عمود MH رابرصفحه P فرودمی‌آوریم. زاویه حاده $\widehat{HAM}=\alpha$ زاویه بین خط d وصفحه P می‌باشد (شکل ۱۵). اگر بردار $\vec{v}(a,b,c)$ باشد چون بردار عمود برصفحه که در امتداد HM می‌باشد به تصاویر (A,B,C) است بنابراین

$$\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{HM}}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha =$$

$$\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^{2}+B^{2}+C^{2}}\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}}}$$

بخصوص اگرخط d باصفحه موازی باشد داریم:

$$\sin\alpha = 0 \iff \boxed{Aa+Bb+Cc=0}$$

مثال ۱۰ : معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه

$M(1 , 0 , 0)$

بگذرد و بردو صفحه

$$\begin{cases} Q \equiv x+y+z=1 \\ R \equiv 2x-y+z=3 \end{cases}$$

عمود باشد.

حل: اگر از نقطه M دوعمود برصفحات Q و R فرود آوریم صفحه $P \equiv Ax+By+Cz+D=0$ که از این دوعمود می‌گذرد جواب مسأله است چون صفحه P برصفحات

Q و R عموداست پس داریم:

$$P\perp Q \Longrightarrow A(1)+B(1)+C(1)=0\ ,$$
$$P\perp R \Longrightarrow A(2)+B(-1)+C(1)=0$$

و چون صفحه از نقطه $M(x_0=1\ ,\ y_0=0\ ,\ z_0=0)$ می‌گذرد، معادله آن به صورت:

$$P\equiv A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$\Longrightarrow A(x-1)+By+Cz=0$$

شرط آنکه دستگاه

$$\begin{cases}(x-1)A+yB+zC=0\\ A+B+C=0\\ 2A-B+C=0\end{cases}$$

نسبت به مجهولات A وB وC جوابهایی غیرازصفر داشته باشد آن است که:

$$P\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow$$

$$(x-1)(1+1)-y(1-2)+z(-1-2)=0$$
$$\Longrightarrow 2x-2+y-3z=0 \Longrightarrow$$
$$\boxed{P\equiv 2x+y-3z-2=0}$$

مثال ۱۱ : زاویهٔ خط (d) به معادله

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{-2}$$

و صفحه P به معادله $x+y+2=0$ کدام است؟

حل :

$$a=2\ ,\ b=1\ ,\ c=-2$$
$$A=1\ ,\ B=1\ ,\ C=0$$

$$\sin\alpha=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|2+1+0|}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{4+1+4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Longrightarrow \boxed{\alpha=\frac{\pi}{4}}$$

مثال ۱۲ : معادله‌خطی‌رابنویسیدکه ازنقطه $M(1,1,1)$ بگذرد و با صفحه $x+y-z=1$ موازی‌باشد و با محور yها زاویه 60° بسازد.

حل : پارامترهای هادی خط (d) را (a,b,c) گرفته چون این‌خط موازی‌صفحه $P\equiv Ax+By+Cz+D=0$ است داریم :

$$Aa+Bb+Cc=0 \Longrightarrow$$
$$1\times a+1\times b+(-1)c=0 \Longrightarrow$$
$$a+b-c=0$$

$$\cos\beta'=\beta=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{4}=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \Longrightarrow a^2+b^2+c^2=4b^2$$
$$\Longrightarrow a^2+c^2=3b^2 \text{ و } a+b-c=0 \Longrightarrow$$
$$c=a+b \Longrightarrow a^2(a+b)^2=3b^2 \Longrightarrow$$
$$2a^2+2ab+b^2=3b^2 \Longrightarrow$$
$$2a^2+2ab=2b^2 \Longrightarrow a^2+ba-b^2=0$$
$$\Longrightarrow a=\frac{-b\pm\sqrt{5}\,b}{2}\ ,$$
$$c=b+a=b+\frac{-b\pm\sqrt{5}b}{2} \Longrightarrow$$

$$c=\frac{b\pm\sqrt{5}\,b}{2}$$

پارامترهای هادی $= b\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$

$$b\ ,\ b\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\ \text{یا}\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$d\equiv\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\Longrightarrow$$

$$d\equiv\frac{x-1}{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}\Longrightarrow$$

$$\boxed{d\equiv\frac{x-1}{-1\pm\sqrt{5}}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1\pm\sqrt{5}}}$$

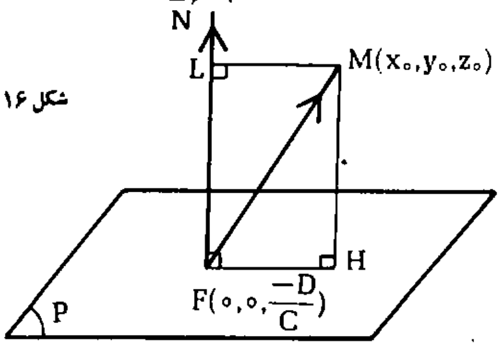
۱۴ـ فاصله نقطه $M(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ از صفحه

$$P\equiv Ax+By+Cz+D=0$$

در معادله صفحه به جای x و y صفر قرارداده

$$z=\frac{-D}{C}$$

به دست می‌آید. نقطه $F\left(0\ ,\ 0,\frac{-D}{C}\right)$ نقطه‌ای از صفحه می‌باشد. از نقطه F عمودی بر صفحه P اخراج نموده بردار $\vec{N}(A\ ,\ B\ ,\ C)$ را روی این عمود درنظر گرفته داریم:



شکل ۱۶

$$\vec{FM}\left(x_0,y_0,z_0+\frac{D}{C}\right)\ ,\ \vec{N}(A,B,C)$$

$$\vec{FM}\cdot\vec{N}=Ax_0+By_0+C\left(z_0+\frac{D}{C}\right)$$

$$=Ax_0+By_0+Cz_0+D=|\vec{N}|\times$$

(تصویر بردار $\vec{FM}$ روی بردار $\vec{N}$) =

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\times\overline{FL}=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\times\overline{HM}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{HM=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

مثال ۱۳ : معادله صفحه نیمسازهای صفحات

$$\begin{cases}Q\equiv Ax+By+Cz+D=0\\ R\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0\end{cases}$$

را بنویسید.

حل : اگر نقطه $M(x,y,z)$ فاصله‌اش از دو صفحه Q و R به یك اندازه باشد آنگاه نقطه M روی صفحه نیمساز Q و R می‌باشد و برعکس اگر نقطه M روی صفحه نیمساز باشد فاصله‌اش از دو صفحه R و Q به یك اندازه خواهد بود پس:

Q فاصله M از صفحه $=MH=$

$$\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

R فاصله M از صفحه $=MH'=$

$$\frac{|A'x+B'y+C'z+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

$$MH=MH'\Longrightarrow\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|A'x+B'y+C'z+D'|}{\sqrt{A'^{2}+B'^{2}+C'^{2}}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{P\equiv\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^{2}+B^{2}+C^{2}}}=\pm\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{\sqrt{A'^{2}+B'^{2}+C'^{2}}}}$$

مثال ۱۴ : معادله کره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه

$C(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$

بوده و برصفحه $x+2y+2z=-4$ مماس باشد.

حل : اگر از مرکز کره به نقطه تماس وصل کنیم برصفحه مماس عمود است بنابراین فاصله مرکز کره تا صفحه مماس شعاع کره می‌باشد داریم:

$$P\equiv x+2y+2z+4=0$$

$$CH=R=\frac{|Ax_{0}+By_{0}+Cz_{0}+D|}{\sqrt{A^{2}+B^{2}+C^{2}}}=$$

$$\frac{|1+2(1)+2(1)+4|}{\sqrt{1^{2}+2^{2}+2^{2}}}=\frac{9}{3}=3 \Longrightarrow R=3$$

معادله کره : $(x-\alpha)^{2}+(y-\beta)^{2}+(z-\gamma)^{2}=9$

$$\Longrightarrow \boxed{(x-1)^{2}+(y-1)^{2}+(z-1)^{2}=9}$$

مثال ۱۵ : مطلوب است فاصله دوصفحه

$$\begin{cases}P\equiv x+y+z-2=0\\ Q\equiv 2x+2y+2z+4=0\end{cases}$$

حل : چون $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{1}{2}$ می‌باشد دوصفحه موازی‌اند. درصفحه P نقطه M به طول وعرض صفر را در نظر گرفته در نتیجه $z=2$ می‌شود پس نقطه $M(0,0,2)$ در صفحه P می‌باشد از این نقطه عمود MH را برصفحه Q فرود آورده طول این عمود فاصله دوصفحه می‌باشد.

$$MH=\frac{|2\times0+2\times0+2\times2+4|}{\sqrt{2^{2}+2^{2}+2^{2}}}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{12}}=\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

و به طور کلی اگر دوصفحه

$$\begin{cases}P\equiv Ax+By+Cz+D=0\\ Q\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0\end{cases}$$

موازی باشند یعنی

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}=K$$

$$A'=AK\ ,\ B'=BK\ ,\ C'=CK \Longrightarrow$$

$$AKx+BKy+CKz+D'=0 \Longrightarrow$$

$$Ax+By+Cz+\frac{D'}{K}=0\ ,\ \frac{D'}{K}=L \Longrightarrow$$

$$Q\equiv Ax+By+Cz+L=0$$

نقطه‌ای مانند $M\left(0\ ,\ 0\ ,\ -\frac{D}{C}\right)$ در روی صفحه P در نظر گرفته فاصله نقطه M ازصفحه Q فاصله بین دوصفحه می‌باشد:

$$MH=\frac{\left|A(0)+B(0)+C\left(-\frac{D}{C}\right)+L\right|}{\sqrt{A^{2}+B^{2}+C^{2}}}$$

$$=\boxed{\frac{|L-D|}{\sqrt{A^{2}+B^{2}+C^{2}}}}$$

مثلاً برای به دست آوردن فاصله دوصفحه فوق طرفین معادله صفحه Q را بر (۲) تقسیم کرده داریم:

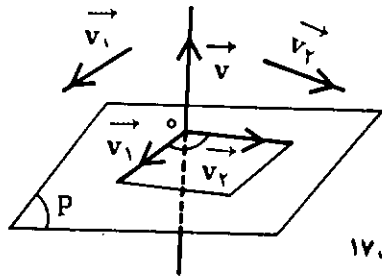
$$\begin{cases} P \equiv x+y+z-۲=۰ \\ Q \equiv x+y+z+۲=۰ \end{cases}$$

$$MH=\frac{|۲-(-۲)|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲+۱^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۳}}=\boxed{\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}}$$

۱۵- حاصلضرب خارجی دو بردار برحسب تصاویر آنها

می‌دانیم که اگر $\vec{v}_۱(a,b,c)$ و $\vec{v}_۲(a',b',c')$ باشند، حاصلضرب خارجی آنها $\vec{v}_۱\times\vec{v}_۲$ برابر است با:

$$\vec{v}_۱\times\vec{v}_۲=\vec{i}(bc'-cb')-\vec{j}(ac'-ca')+\vec{k}(ab'-ba')=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$



شکل ۱۷

حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{v}_۱(a\ ,\ b\ ,\ c)$ و $\vec{v}_۲(a'\ ,\ b'\ ,\ c')$ برداری می‌باشد که از بسط دترمینانی که سطر اول آن $(\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ و سطر دوم آن (a,b,c) و سطر سومش (a',b',c') می‌باشد به دست می‌آید.

مثال ۱ : بردار یکانی حاصلضرب خارجی بردارهای $\vec{v}_۱(۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳)$ و $\vec{v}_۲(۰\ ,\ -۱\ ,\ -۲)$ کدام است؟

$$v=\vec{v}_۱\times\vec{v}_۲=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}(-۴+۳)-\vec{j}(-۲-۰)+\vec{k}(-۱-۰)$$

$=-\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{u}=(\vec{v})$ بردارواحد $=$

$$\frac{-\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{(-۱)^۲+(۲)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{-\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{۶}}$$

$$=\boxed{-\frac{۱}{\sqrt{۶}}\vec{i}+\frac{۲}{\sqrt{۶}}\vec{j}-\frac{۱}{\sqrt{۶}}\vec{k}}$$

مثال ۲ : حجم هرم OABC را که در آن O مبدأ مختصات و $A(۱,۰,۰)$ و $B(۰,۲,۰)$ و $C(۰,۰,۳)$ می‌باشد کدام است؟

حل :

$$\overrightarrow{AB}(a=-۱\ ,\ b=۲\ ,\ c=۰)$$

$$\overrightarrow{AC}(a'=-۱\ ,\ b'=۰\ ,\ c'=۳)$$

معادله صفحه ABC که از نقطه $C(x_۰=۰,y_۰=۰,z_۰=۴)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$P_{ABC}=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=$$

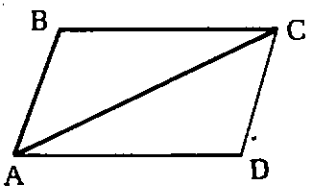
$$x(6-0)-y(-3-0)+(z-3)(0+2)=0$$

$$\Longrightarrow 6x+3y+2z-6=0$$

برای به دست آوردن ارتفاع هرم باید فاصلهٔ رأس O را از صفحه بالا به دست آوریم:

$$OH=\frac{|6(0)+3(0)+2(0)-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\boxed{\frac{6}{7}}$$

اگر روی مثلث ABC متوازی‌الاضلاع ABCD را بسازیم مساحت مثلث ABC (شکل ۱۸) $\frac{1}{2}$ مساحت متوازی‌الاضلاع می‌باشد و می‌دانیم اندازه این مساحت برابر است با اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.



شکل ۱۸

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=7$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 7=\frac{7}{2}$$

چون حجم هرم برابر است با سطح قاعده ضرب در ثلث ارتفاع داریم:

$$V_{\text{هرم}}=S_{ABC}\times\frac{OH}{3}=\frac{7}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{6}{7}$$

$$=\frac{7}{2}\times\frac{2}{7}=\boxed{1}$$

مثال ۳ : معادله پارامتری خط (d) فصل مشترک صفحات

$$\begin{cases} P\equiv x+y+z-2=0 \\ Q\equiv 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$$

کدام است؟

حل : به جای z صفر قرار داده x و y را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Longrightarrow 3x=3 \Longrightarrow x=1$$

$$\Longrightarrow y=1 \Longrightarrow M_0(1,1,0)$$

فصل مشترک دو صفحه یعنی خط (d) بر بردارهای عمود بر صفحه یعنی بردارهایی که تصاویرشان ضرایب صفحه می‌باشند عمود می‌باشد. اگر $\vec{v}$ را برداری از خط d بگیریم چون بردار $\vec{v}$ بر بردارهای:

$$\vec{v}_2(2\,,\,-1\,,\,3) \text{ و } \vec{v}_1(1\,,\,1\,,\,1)$$

عمود است پس:

$$\vec{v}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}(3+1)-\vec{j}(3-2)+\vec{k}(-1-2)$$

$$=۴\vec{i}-\vec{j}-۳\vec{k} \quad \text{و} \quad d\equiv\begin{cases}x=x_۰+at\\ y=y_۰+bt\\ z=z_۰+ct\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases}x=۱+۴t\\ y=۱-t\\ z=۰-۳t=-۳t\end{cases}}$$

معادلات پارامتری خط (d)

مثال ۴ : درستی رابطه

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\circ\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\circ\vec{C})\vec{A}$$

را برای بردارهای

$$\vec{A}(۱,۲,۳) \text{ و } \vec{B}(۰,۱,۱) \text{ و } \vec{C}(-۲,۰,۰)$$

بررسی نمایید.

حل :

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۱\end{vmatrix}$$

$$=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k} \ , \ \vec{A}\times\vec{B}(-۱,-۱,۱)$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۱ & -۱ & ۱\\ -۲ & ۰ & ۰\end{vmatrix}$$

$$=-۲\vec{j}-۲\vec{k} \Longrightarrow$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=-۲\vec{j}-۲\vec{k} \qquad (۱)$$

$$\vec{A}\circ\vec{C}=(۱)(-۲)+۲(۰)+۳(۰)=-۲ \Longrightarrow$$

$$(\vec{A}\circ\vec{C})\vec{B}=-۲(\vec{j}+\vec{k})=-۲\vec{j}-۲\vec{k}$$

$$\vec{B}\circ\vec{C}=(۰)(-۲)+(۱)(۰)+(۱)(۰)=۰$$

$$(\vec{B}\circ\vec{C})\vec{A}=\vec{۰}$$

$$(\vec{A}\circ\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\circ\vec{C})\vec{A}=-۲\vec{j}-۲\vec{k} \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) داریم:

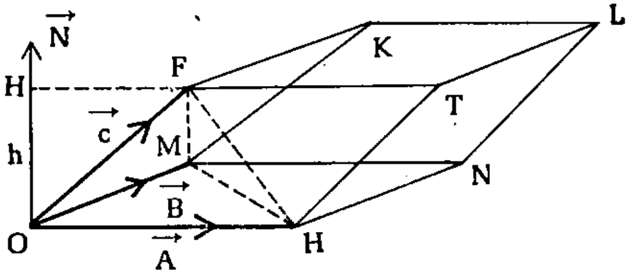
$$\boxed{(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\circ\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\circ\vec{C})\vec{A}}$$

رابطه بالا به‌نام رابطه‌ضرب برداری سه‌گانه معروف بوده و ثابت می‌کنند این‌رابطه همواره‌بین سه‌بردار برقرار می‌باشد.

۱۶ـ ضرب عددی سه‌گانه سه‌بردار

ضرب عددی سه‌گانه‌بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ به صورت $(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}$ که برابر یک‌عدد می‌باشد تعریف می‌شود. روی سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ متوازی السطوحی می‌سازیم و بـردار $\vec{N}=\vec{A}\times\vec{B}$ برداری عمود برصفحه OMNH است واندازه آن برابر است با عدد مساحت متوازی‌الاضلاع OMNH از طرفی داریم:

شکل ۱۹



$$\vec{N}\circ\vec{C}=|\vec{N}|\times \text{تصویر بردار } \vec{C} \text{ روی بردار } \vec{N}$$

$$=S_{OMNH}\times\overline{OH} \qquad (\text{شکل ۱۹})$$

چون S_{OMNH} سطح قاعده متوازی‌السطوح و قدر مطلق $\overline{OH}$ ارتفاع متوازی‌السطوح می‌باشد لذا قدرمطلق

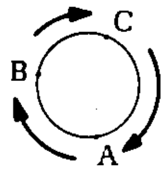
$$\vec{N}\circ\vec{C}=(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}$$

حجم متوازی‌السطوحی است که روی یالهای بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ساخته می‌شود. ازطرفی با استفاده از تبدیل دوری (A به B) و (B به C) و (C به A) می‌توان ثابت کرد:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\circ\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\circ\vec{B}\implies$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\circ\vec{A}=\vec{A}\circ(\vec{B}\times\vec{C})\implies$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}=\vec{A}\circ(\vec{B}\times\vec{C})$$



اگر $\vec{A}(a,b,c)$ و $\vec{B}(a',b',c')$ و $\vec{C}(a'',b'',c'')$ داریم:

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}$$

$$=(b'c''-c'b'')\vec{i}-(a'c''-a''c')\vec{j}$$

$$+(a'b''-a''b')\vec{k}\ :\ \vec{A}(a,b,c)$$

$$\vec{B}\times\vec{C}(b'c''-c'b'',-(a'c''-a''c'),a'b''-a''b')$$

$$\implies \vec{A}\circ(\vec{B}\times\vec{C})=a(b'c''-c'b'')$$

$$-b(a'c''-a''c')+c(a'b''-a''B')=$$

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}$$

یعنی $(\vec{A}\times\vec{B})\circ\vec{C}$ برابراست با دترمینان ۳×۳ که سطرهای آن به ترتیب تصاویر بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ می‌باشد وقدرمطلق این دترمینان برابراست با حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ساخته می‌شود.

تبصره مهم: اگردرشکل (۲۰) ازنقطه F به‌نقاط O و M و H وصل کنیم حجم‌هرم FOMH که رأس‌آن F و قاعده‌اش مثلث OMH می‌باشد برابراست با سطح قاعده مثلث OMH ضرب در ثلث ارتفاع OH. از طرفی

$$S_{OMH}=\frac{۱}{۲}S_{OMNH}$$

می‌باشد پس:

$$v_{هرم}=S_{OMH}\times\frac{h}{۳}=\frac{۱}{۲}S_{OMNH}\times\frac{h}{۳}$$

$$=\frac{۱}{۶}\times S_{OMNH}\times h=\frac{۱}{۶}\text{حجم متوازی‌السطوح}$$

بنابراین اگر بردارهای

$$\vec{A}(a,b,c)\ و\ \vec{B}(a',b',c')\ و\ \vec{C}(a'',b'',c'')$$

یالهای همرس (متقارب) درنقطه O باشند قدرمطلق حجم هرم برابراست با:

$$\frac{۱}{۶}\begin{vmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & b''\end{vmatrix}$$

مثال ۱: حجم متوازی‌السطوح OMNHFKLT که در آن O(۰,۰,۰) و M(۲,۳,۴) و H(−۲,−۱,۲) و

$F(-۱,۰,-۲)$ می‌باشد کدام‌است (شکل ۱۹)؟

حل :

$\overrightarrow{OH}(-۲,-۱,۴)$ و $\overrightarrow{OM}(۲,۳,۴)$ و

$\overrightarrow{OF}(-۱,۰,-۲)$

$$V_{\text{حجم}}=\left|\begin{vmatrix}-۲ & -۱ & ۴\\ ۲ & ۳ & ۴\\ -۱ & ۰ & -۲\end{vmatrix}\right|۱=$$

$$|-۲(-۶-۰)+۱(-۴+۴)+۴(۰+۳)|$$

$$=|۱۲+۱۲|\Rightarrow \boxed{V=۲۴}$$ واحدحجم

مثال ۲ : حجم هرم $OABC$ را کـه در آن O مبدأ مختصات

$C(-۲,۱,-۳)$ و $B(-۱,-۲,-۴)$ و $A(۱,۲,۳)$

می‌باشد کدام است؟

حل :

$\overrightarrow{OA}(۱,۲,۳)$ و $\overrightarrow{OB}(-۱,-۲,-۴)$ و

$\overrightarrow{OC}(-۲,۱,-۳)$

$$V=\left|\frac{۱}{۶}\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & -۲ & -۴\\ -۲ & ۱ & -۳\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{۱}{۶}|۱(۶+۴)-۲(۳-۸)+۳(-۱-۴)|$$

$$=\frac{۱}{۶}|۱۰+۱۰-۱۵|=\frac{۱}{۶}\times ۵=\boxed{\frac{۵}{۶}}$$ واحدحجم

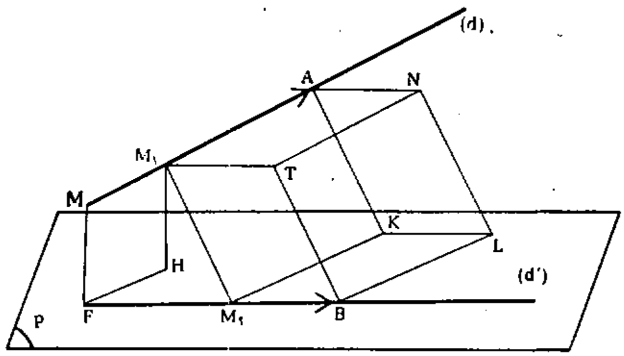
۱۷ـ محاسبه فاصله عمود مشترک دوخط متنافر

فرض می‌کنیم دو خط

$$d:\frac{x-x_۰}{a}=\frac{y-y_۰}{b}=\frac{z-z_۰}{c}$$

$$d':\frac{x-x'_۰}{a'}=\frac{y-y'_۰}{b'}=\frac{z-c'}{c'}$$

متنافر باشند. می‌خواهیم طول پاره‌خطی را که متکی به‌دوخط‌مزبور بوده و بر این دوخط عمود می‌باشد محاسبه‌کنیم:



شکل ۲۰

فرض می‌کنیم نقطه $M_۱(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $\overrightarrow{M_۱A}(a,b,c)$ و نقطه $M_۲(x'_۰,y'_۰,z'_۰)$ و $\overrightarrow{M_۲B}(a',b',c')$ بـاشد روی بردارهای $\overrightarrow{M_۲B}$ و $\overrightarrow{M_۲M_۱}$ و $\overrightarrow{M_۱A}$ متوازی‌السطوحی‌می‌سازیم. از نقطه $M_۱$ عمود $M_۱H$ را برصفحه قاعده متوازی السطوح فرود می‌آوریم_ازنقطه H خطی موازی d رسم می‌کنیم تا خط d' رادر نقطه F قطع‌کند. ازنقطه F عمودی برصفحه (P) اخراج می‌کنیم تاخط d را در نقطه M قطع نماید FM عمود مشترک دوخط d و d' است زیرا چون FM برصفحه (P) عمود است بر کلیه خطوط‌صفحه P من‌جمله برخط d' و FH عموداست و چون‌خط d باخط FH موازی می‌باشد پس FM برخط d هم عموداست بنابراین $FM=HM_۱$ که بردوخط d و d' متکی وبر آنها عموداست عمود مشترک‌دوخط dوd' است‌وسطح‌قاعده

متوازی‌السطوح برابراست با:

$$S=|\overrightarrow{M_2K}\times\overrightarrow{M_2B}|=|\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}|$$

وحجم متوازی‌السطوح‌بالا (شکل ۲۰) برابر است با:

$$v=S_{\text{قاعده}}\times HM_1=|\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}|\times FM$$

$$=|(\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B})\circ\overrightarrow{M_1M_2}|$$

$$\Longrightarrow \boxed{FM=\frac{|(\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B})\circ\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}|}}$$

که صورت کسر قدرمطلق دترمینانی می‌باشد که سطرهای آن به ترتیب تصاویر بردارهای

$\overrightarrow{M_1A}(a,b,c)$ و $\overrightarrow{M_2B}(a',b',c')$

$\overrightarrow{M_1M_2}(x'_0-x_0,\ y'_0-y_0,\ z'_0-z_0)$

است.

مثال: مطلوب است طول عمود مشترک دو خط متنافر

$$d: x=2t+2,\ y=4t+1,\ z=-t-1$$

$$d': x=3t'-31,\ y=2t'+6,\ z=6t'+3$$

حل:

$$d: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{-1}$$

$$d': \frac{x+31}{3}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-3}{6}$$

$M_1(2,1,-1)$ و $M_2(-31,6,3)$ $\Longrightarrow$

$\overrightarrow{M_1M_2}(-33,5,4)$

$\overrightarrow{M_1A}(2,4,-1)$ و $\overrightarrow{M_2B}(3,2,6)$

$$\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=26\vec{i}-15\vec{j}-8\vec{k},\ |\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B}|$$

$$=\sqrt{26^2+(-15)^2+(-8)^2}$$

$$=\sqrt{676+225+64}=\sqrt{965}$$

$$(\overrightarrow{M_1A}\times\overrightarrow{M_2B})\circ\overrightarrow{M_1M_2}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \\ -33 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=2(8-30)-4(12+198)$$

$$-1(15+66)=-44-840-81$$

$$=-965,\ FM=\frac{|-965|}{\sqrt{965}}$$

$$=\frac{965}{\sqrt{965}}=\boxed{\sqrt{965}}$$

ادب و ریاضی

در سن یازده سالگی، اقلیدس را آغاز کردم ... این یکی از مهمترین حادثه‌های زندگیم، به خیره‌کنندگی مهر نخستین بود. تصور نمی‌کردم که در دنیا چیزی این همه لذت بخش وجود داشته باشد.

برتراند راسل، اتوبیوگرافی

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران ۳

بررسی مجلهٔ ریاضیات دکتر مصاحب ناتمام ماند و ادامهٔ آن به این شماره موکول گردید. در شمارهٔ قبل به موضوعی به نام عشق به حساب رسیدیم و ذکر چند مسأله که در آن آورده شده بود.

مسأله: عبارت

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$

را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید.

حل: برای حل این مسأله قبلاً به ذکر قضیهٔ ذیل که در بعضی موارد دانستن آن خالی از اهمیت نیست می‌پردازیم.

قضیه: هرگاه مجموع سه عدد جبری a و b و c صفر باشد، مجموع مکعباتشان مساوی است با سه برابر حاصل ضربشان، زیرا:

$$(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

اما از شرط $a+b+c=0$ نتیجه می‌شود:

$$a+b=-c \quad \text{و} \quad b+c=-a \quad \text{و} \quad c+a=-b$$

۱ـ حال اگر این مقادیر را در اتحاد فوق قرار دهیم، چنین نتیجه می‌شود:

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

پس از ایراد این مقدمه گوییم چون مجموع سه مقدار $x-y$ و $y-z$ و $z-x$ صفر است مجموع مکعبات آنها مساوی است با سه برابر حاصل ضربشان، یعنی:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 \equiv 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

طریق دیگر: عبارت مفروض را پس از بسط پرانتزها و مرتب کردن به حسب قوای یکی از حروف، مثلاً x، می‌توان مرتباً چنین نوشت:

$$3[x^2(z-x)-(z^2-y^2)x+yz(z-y)]$$

$$=3(z-y)[x^2-x(z+y)+yz]$$

$$=3(z-y)[x(x-z)-y(x-z)]=3(z-y)(x-z)(x-y)$$

مسأله: معادلهٔ $x^4+4b^3x+3b^4=0$ را حل کنید.

حل: دو جملهٔ اول طرف اول معادلهٔ فوق متعلق است به بسط $(a+b)^4$ زیرا:

$$(x+b)^4=x^4+4b^3x+6b^2x^2+4bx^3+b^4$$

با این ملاحظه، معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$(x+b)^۴ - ۶b^۲x^۲ - ۴bx^۳ + ۲b^۴ = ۰ \qquad (۱)$$

فرض کنیم $x+b=y$، معادلهٔ (۱) به این صورت بیرون می‌آید:

$$y^۴ - ۴by^۳ + ۶b^۲y^۲ = ۰$$

از آنجا $y^۲ = ۰$، یعنی، $x=-b$ و یا $y^۲ - ۴by + ۶b^۲ = ۰$، از آنجا

$$y = b(۲ \pm \sqrt{-۲})$$

پس

$$x = b(۱ \pm \sqrt{-۲})$$

مساله: مکعب کاملی به صورت $aab۰۰daaa$ چنان بیابید که $b+d=a$ (مصاحب).

حل: فرض می‌کنیم $N=aab۰۰daaa$، باقیماندهٔ تقسیم N بر ۳ مساوی است با باقیماندهٔ: $۵a+b+d=۶a$، پس N به ۲۷ قابل قسمت است، خلاصه:

$$N=۱۱۰۰۰۱۱۱۱a+۹۹۹۰۰۰b \qquad (۱)$$
$$=۴۰۷۴۱۱۵\times۲۷a+۶a+۲۷\times۳۷۰۰۰b=$$
$$۶a+\text{مضرب ۲۷}$$

پس باید $۶a$ مضرب ۲۷ باشد و چون $a\leq۹$ ناچار $a=۹$، اینک تساوی (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$N = ۳^۳(۳۶۶۶۷۰۳۷ + ۳۷۰۰۰b)$$

اما، $۳۶۶۶۷۰۳۷ = ۳۷\times۹۹۱۰۰۱$، پس:

$$N = ۳^۳ \times ۳۷(۹۹۱۰۰۱ + ۱۰۰۰b)$$

بنابراین مقدار داخل پرانتز باید به صورت $۳۷^۲k^۳$ باشد. اما منتها حد داخل پرانتز ۱۰۰۰۰۰۱ است، پس $۳۷^۲k^۳ \leq ۱۰۰۰۰۰۱$، یعنی $k^۳\leq۷۳۰$ بنابراین $k\leq۹$. از طرف دیگر $۳۷^۲\times k^۳$ باید به یک ختم شود و چون $۳۷^۲$ به ۹ ختم می‌گردد ناچار باید $k^۳$ به ۹ مختوم باشد و چون $k^۳$ سه رقمی است، مساوی ۷۲۹ یعنی $k=۹$ خواهد بود به قسمی که

$$۹۹۱۰۰۱+۱۰۰۰b=۹^۳\times۳۷^۲$$

از حل این معادله معلوم می‌شود که $b = ۷$، به قسمی که عدد مطلوب عبارت است از

$$۹۹۷۰۰۹۹۹۹ = ۳^۳ \times ۹^۳ \times ۳۷^۳$$

و کعب آن ۹۹۹ است.

مسأله: تحصیل یکی از دستورات ریاضیات عالی به طریق مقدماتی

۱ - اعدادی مانند $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$،... چنان بیابید که اتحاد ذیل محقق شود:

$$\log(۱+x) \equiv a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + a_۴x^۴ + \cdots$$

حل: اگر در طرفین رابطهٔ فوق به جای x صفر قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$a_۰ = ۱$$

پس

$$\log(۱+x) = a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + \cdots$$

اگر در طرفین این رابطه به جای x، $۲x + x^۲$ قرار دهیم طرف اول آن معادل:

$$\log(۱+۲x+x^۲)=۲\log(۱+x)=۲(a_۱x+a_۲x^۲+a_۳x^۳+\cdots)$$

و طرف ثانی مساوی[۱]:

$$a_1(2x+x^2)+a_2(2x+x^2)^2+a_3(2x+x^2)^3+$$

$$\equiv 2a_1x + x^2(a_1+4a_2) + x^3(4a_2+8a_3) + x^4(a_2+12a_3+16a_4)+\cdots$$

می‌شود و برای این که این دو مقدار عین یکدیگر باشند لازم است که ضرایب قوای متساویهٔ x مساوی باشند، یعنی:

$$2a_2=4a_2+a_1,\ 2a_3=4a_2+8a_3,\ 2a_4=a_2+12a_3+16a_4,\ldots$$

و هکذا. از این معادلات نتیجه می‌شود:

$$a_2=-\frac{a_1}{2},\ a_3=\frac{a_1}{3},\ a_4=-\frac{a_1}{4},\ldots$$

پس

$$\log(1+x)=a_1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right) \qquad (1)$$

۲ ـ ضریب a_1 که در دستور فوق مشاهده می‌شود مربوط است به مبنای لگاریتم و آن را **اساس** دستگاه مفروض خوانند و در حالتی که $a_1=1$ باشد، لگاریتم را **طبیعی** نامند و مبنای آن به e نموده می‌شود. لگاریتم طبیعی اعداد را به علامت L_x می‌نماییم، پس:

$$L(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad (2)$$

اگر a مبنای دیگری باشد بنابر (I ـ قسمت ۴)[2]:

$$\log_a(1+x)=a_1\,L(1+x) \qquad (3)$$

بنا براین برای به‌دست آوردن لگاریتم عددی در مبنای a کافی است لگاریتم طبیعی آن را در اساس دستگاه ضرب کنیم.

۳ ـ اگر در دستور (۳) به جای x+۱ عدد e را قرار دهیم حاصل می‌شود:

$$a_1=\log_a e \qquad (4)$$

بنابراین اساس هر دستگاه لگاریتم مساوی است با لگاریتم عدد e در آن دستگاه.

۴ ـ ظاهراً به نظر می‌آید که به مدد دستور (۲) می‌توان لگاریتم طبیعی تمام اعداد را تا هر حدی از تقریب که خواسته باشیم حساب کرد، ولی در عمل چنین نیست مثلاً برای اینکه از روی این دستور لگاریتم عدد ۲ را تا ۳ رقم اعشار به دست آوریم محاسبهٔ هزار جمله از رشتهٔ فوق لازم است و چنین محاسبه‌ای عملی نیست، لهذا دستورات دیگری به کار می‌برند که جمع آنها خیلی سریع تنزل کند و ما ذیلاً راه به دست آوردن این دستورات را متذکر می‌شویم:

اگر در دستور (۲)، x را به x− تبدیل کنیم حاصل می‌شود:

$$L(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \qquad (5)$$

(اگر طرفین (۳) و (۵) را)[2] از هم کم کنیم حاصل می‌شود:

$$L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right) \qquad (6)$$

فرض می‌کنیم $\frac{x+1}{1-x}=\frac{z+1}{z}$ از آنجا: $x=\frac{1}{2z+1}$ و چون این مقادیر را در دستور (۶) قرار دهیم این دستور به دست می‌آید:

$$L(z+1)=L\,z+2\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\cdots\right) \qquad (7)$$

چنانکه دیده می‌شود جمل رشتهٔ داخل پرانتز خیلی به سرعت کوچک می‌شوند و دستور (۷) را می‌توان برای محاسبهٔ لگاریتم طبیعی اعداد استعمال کرد.

در دستگاهی که اساسش a_1 باشد، دو دستور (۶) و (۷) چنین می‌شود:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2a_1\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right) \qquad (\acute{6})$$

$$\log(1+z)=\log z + 2a_1\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{5(2z+1)^3}+\cdots\right) \qquad (\acute{7})$$

۵ - برای مثال اساس دستگاه اعشاری و لگاریتم عدد ۲ را در آن دستگاه حساب می‌کنیم:

برای این مقصود در دستور (٦́) به جای x مرتباً $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{9}$ قرار می‌دهیم حاصل می‌شود:

$$\log_{10}2 = 2a_1\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\right)$$

$$1-3\log_{10}2 = 2a_1\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\cdots\right)$$

مقدار داخل پرانتز اول مساوی است با: ۰/۳۴۶۵۷۳۵۹۰۳۰۰… و مقدار داخل پرانتز ثانی معادل است با: ۰/۱۱۱۵۷۱۷۷۵۷… و از حل دو معادلهٔ دو مجهولی فوق نتیجه می‌شود:

$a_1 = 0/434294448\cdots \qquad \log_{10}2 = 0/30103\cdots$

برای محاسبهٔ عدد e گوییم مطابق دستور (۴) [۴]:

$\log_{10}e = 0/434294448\cdots$

از آنجا: $e = 2/718281828\cdots$

مجله مقالات مسلسلی تحت عنوان ریاضیّون ایرانی به قلم آقای مشیری[۵] دارد که در این جا برای مزید فایده، مقالهٔ مربوط به **ابوالوفای بوزجانی** آن را - گرچه به اختصار - می‌آوریم:

اسمش محمدبن‌محمد بن یحیی بن اسمعیل بن العباس از اهل بوزجان خراسان (در چهار منزلی نیشابور و شش منزلی هرات) و تولدش در بوزجان در سال ۳۲۸ روز چهارشنبهٔ اول رمضان بوده و ابتدا نزد **ابی‌عمرالمغازلی و ابی عبدالله محمد بن عنبسه** که عمو و دایی او بودند حساب و هندسه و علوم مربوط به آن را خواند و در سنهٔ ۳۴۸ عزم مسافرت عراق را نمود و در دربار عضدالدوله [۳۳۷ - ۳۷۲] و خلفا به عزّت می‌زیست. ابوالوفا یکی از جمله اشخاصی است که بر صحت عملیات و یجن‌بن رستم[۶] به معیت عدهٔ دیگر تصدیق نوشته است. **ابوالوفا و امیرابونصرعراق و ابومحمدخجندی** از واضعین علم مثلثاتند. ابوالوفا یکی از بزرگترین مخترعین هندسه است، و شکل ظلّی[۷] که در مثلثات کروی قدما عمل می‌شود بدو منسوب است، در تعدیلات اهلّهٔ قمر[۸] زحماتی کشیده. خواجه نصیرالدین طوسی و امیرابونصر عراق در اغلب از مصنفات خود ابوالوفا را استاد دانسته و به بزرگی ذکرش را آورده‌اند.

(بعضی از) مصنفات (او):

۱ - شرح بر کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی

۲ - تفسیر مجسطی ذینوفنطس یونانی اسکندرانی (جبر و مقابله)

۳ - کتاب تفسیر کتاب ابرخس (هیپارک) در جبر و مقاله

۴ - کتاب المدخل الی‌الارثما طیقی و غیره.

***

عنوان بعضی از مقالات و مطالب مهم و جالب مجله عبارت است از:

۱ - **«نظریهٔ نسبی بودن خصوصی و عمومی»** به قلم آلبرت اینشتین

۲ - **چند مسأله از حساب عالی**

۳ - **ارزش ناپلئون**

۴ - **مسائل راجع به اسب شطرنج،** با این قطعهٔ منسوب به سعدی:

زمانی درس علم و بحث تنزیل[۹]
که باشد نفس انسان را کمالی
زمانی شعر و شطرنج و حکایات
که خاطر را بود دفع ملالی

۵ - معّما، با این قطعه:

من از اعداد دانم یک عدد را
کز او یک کم نمودم می‌نشد کم
ورآن یک برسرش هم می‌فزودم
از آن، افزوده بر خود می‌نشد هم
از آن دشوارتر چیزی نباشد
برون آور به علم جبر، محکم

۶ - پیردوفرما، که در آن از قول پاسکال آمده که: «من در مسائل حساب فرما را اول شخص دنیا می‌دانم»، و در مورد آخرین قضیهٔ فرما آورده شده که:

پس از مرگ فرما در کتابخانهٔ او نیز چند کتاب که شامل حواشی و یادداشتهای فرما بود یافتند. در حاشیهٔ یکی از این کتب، مطلب ذیل یادداشت شده بود:

«ممکن نیست مکعب کاملی را به مجموع دو مکعب کامل تجزیه کرد و یا قوهٔ چهارم کاملی را به مجموع دو قوهٔ چهارم کامل تجزیه نمود و هکذا... من این قضیه را به وجه تعجب آوری ثابت کرده‌ام، اثبات آن در این حاشیه نمی‌گنجد[۱۰]».

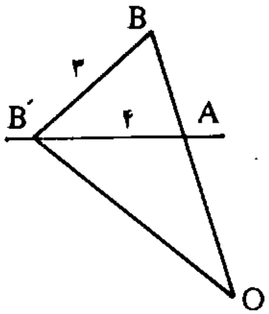
لازم است متذکر شویم که قبل از اینکه فرما این قضیه را طرح کند مسلمین آن را می‌دانستند و آن را جزو معضلات علوم ریاضی می‌شمردند چنانکه **شیخ بهاءالدین عاملی** علیه‌الرحمه (۱۰۳۰ ه) در کتاب خلاصة الحساب خود می‌فرماید:

قَد وقَع لِلحُكَماءِ الرّاسِخين فی هذَا الفَنِّ مسائِلُ صَرفوا فی حَلِّها اَفكارهم وَ وجَّهوا اِلىٰ اِستِخْراجِها انظارهم و تَوَصَّلوا اِلىٰ كشفِ نِقابِها بكلِّ حيلَةٍ و تَوَسَّلوا اِلىٰ رفعِ حجابِها بكلِّ وَسيلَةٍ فَما اسْتَطاعوا اِلَيها سَبيلاً و لا وجَدوا عَلَيها مُرشِداً و دَليلاً فَهِیَ باقيَةٌ علىٰ عَدَمِ الاِنحلالِ مِنْ قَديمِ الزَّمانِ اِلىٰ هذَا الآنِ... و اَنا اوردتُ فی هٰذِهِ الرِّسالَةِ سَبْعَةً مِنها عَلىٰ سبيلِ الاُنموذَجِ اِقْتِداءً بِمنارِهِمْ وَ اِقْتِفاءً لِاٰثارِهِم و هِیَ هٰذِه: الاولی... الرّابِعَة عَدَدٌ مُكَعَّبٌ قُسِّمَ بِقسمَينِ مُكَعَّبين[۱۱].

۷ - دو مسأله از مفتاح الحساب[۱۲]

— چند نفر داخل باغی شدند، اولی یک انار چید، دومی دو انار، سومی سه انار، و هکذا. بعد کلّیهٔ انارها را بالسّویه[۱۳] بین خود تقسیم کردند و به هر یک ۶ انار رسید. مطلوب است عدهٔ آنان.

تیری مایلاً درآب قرار دارد و سه ذرعش از آب خارج است (AB=۳). در اثر وزش باد رأس تیر بر سطح آب فرود آمد (وضع OB´). بنابر آنکه فاصلهٔ دو وضع رأس تیر ۲ ذرع (BB´=۲) و فاصلهٔ دو مطلع آن از آب ۴ ذرع (AB´=۴) باشد، طول آن را معلوم کنید.



۸ - **نظریهٔ اضافیت خصوصی و عمومی**، که ادامهٔ نظریهٔ نسبی بودن خصوصی و عمومی است که در آن پس از این که مذکور افتاده که به کلی از جنبهٔ ادبی عاری است از قول اینشتین در مقدمهٔ آن چنین آمده:

«برای وضوح غالباً تکرار مطلب را لازم دیدم بدون اینکه توجه به جنبهٔ ادبی داشته باشم، در این باب نصیحت عالم نظری معروف[۱۴] را پیروی کردم که می‌گوید: آن به که اندیشه‌های ظرافت و لطافت را به خیاطها و کفشدوزها واگذاریم.»

۹ - **تنوری آنسامبل**[۱۵]، که در آن غیر از مطالب جالب معمول چند مطلب جالبتر زیر را می‌خوانیم:

امروز نیز، بسیاری از علمای ریاضی این نظریه را مورد مطالعه قرار داده و نه فقط از این جهت که در بحث خواص توابع اهمیت و موارد استعمال عدیده دارد در آن کار می‌کنند، بلکه از این لحاظ که خود فی حد ذاته یک مبحث و نظریهٔ علمی است در آن مطالعه

می‌نمایند. منتهی چون اصول اولیهٔ آن در سر حد ریاضیات و فلسفه قرار دارند آرای علما دربارهٔ آنها متفاوت است.

تعریفات. در اصطلاح منطق چیزی را که تعریف می‌کنیم مُعَرَّف (به فتح راء) و آنچه را مُعَرَّف به وسیلهٔ آن تعریف می‌شود مُعَرِّف (به کسر راء) خوانند. بدیهی است که مُعَرِّف باید از مُعَرَّف واضح‌تر باشد والا تعریف فایده‌ای نخواهد داشت. منطقیون این مطلب را به این شکل بیان می‌کنند که می‌گویند در تعریف باید معرِّف اجلیٰ از مُعَرَّف باشد.

از این جهت است که بسیاری از مبادی علوم را نمی‌توان تعریف کرد. مثلاً در علم ماوراءالطبیعه که از وجود بحث می‌کنند آن را تعریف نمی‌نمایند زیرا مقصود از تعریف وجود آن است که به کسی که مفهوم وجود را نمی‌داند به وسیلهٔ مفاهیم ساده‌تری معنی وجود را بفهمانیم و این ممکن نمی‌باشد، زیرا مفهومی از مفهوم وجود واضح‌تر نیست. هم چنین عدد و زمان و فضا و امثال آنها را نمی‌توان تعریف کرد.

«آنسامبل» نیز که در لغت به معنی مجموعه است از این قبیل می‌باشد. مفاهیم: مجموعهٔ اعداد صحیح واقعه بین ۱۰ و ۱۰۰، مجموعهٔ اعداد صحیح، مجموعهٔ مثلثهای متساوی الأضلاع، مجموعهٔ قوسهایی که جیب آنها اصم است و امثال اینها به قدری واضح است که ذکر تعریفی برای آنها ممکن نیست.

مجله گرچه گاه‌گاه غلطهای معدود خود را تصحیح می‌کند، از غلطهای البته سهوی خالی نیست و مثلاً در مسألهٔ ۱۰۳ از شمارهٔ ۵ سال اولش در حل مسألهٔ مربوط به اثبات

$$\operatorname{tg} k\alpha + \operatorname{tg} k\beta + \operatorname{tg} k\gamma = \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg} k\beta \operatorname{tg} k\gamma$$

هم از فرض $\alpha + \beta + \gamma = \pi$، هم از شرط $k \in Z$ استفاده کرده است در حالی که هیچ یک از این دو در صورت مسأله نیست.

***

مجلهٔ ریاضیات در نوع خود بی‌نظیر است و شخصیت دقیق و جامع دکتر مصاحب - رحمةالله علیه - در سراسر شماره‌های آن آشکار است.

در اینجا از خوانندگان محترم به خصوص اعضای خانوادهٔ دکتر مصاحب و همکاران و شاگردان آن استاد کامل تقاضا می‌کنیم که علاوه بر شرح حال ایشان خاطرات خود را از این مرد عالم و کوشا در اختیار نویسندهٔ این مقالات قرار دهند تا در نوشتن تاریخ ریاضیات و ریاضیدانهای معاصر ایران از آن استفاده شود. وَاللّهُ اَعْلَمُ بِالصَّواب

++++

یادداشتها

۱ - مساوی و معادل به یک مفهوم به کار رفته‌اند که ظاهراً چنین نیست.

۲ - در (I - قسمت ۴) فرمول تغییر مبنای لگاریتم یعنی Log bN=Logba.LogaN آمده است. «قسمت» را به جای علامت دست نوشته‌ای که ندانستم چیست، به حدس آورده‌ام.

۳ - قسمت داخل پرانتز در متن اصلی در انتهای صفحه بوده و به تیغ صحاف از صفحه کاغذ معدوم شده است و ما آن را به قیاس آورده‌ایم.

۴ - یعنی دستور تغییر مبنا در لگاریتم، به ۲ رجوع کنید.

۵ - از این شخص اطلاعی نداریم، اگر خوانندگان دارند ما را هم بی‌نصیب نگذارند.

۶ - راجع به رصد کواکب سبعه

۷ و ۸ - این دو را ندانستیم که چیستند. از خوانندگان آگاه تقاضامندیم که توضیح مختصری در این دوباب بیاورند.

۹ - تفسیر قرآن.

۱۰- صورت امروزی این قضیه چنین است: هرسه جواب x و y و z معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$، با $n\geq 3$ و $n\in N$، نمی‌توانند صحیح باشند.

۱۱- ترجمهٔ آن چنین است:

همانا که برای حکیمان متخصص این فن (یعنی فن حساب) مسائلی پیش آمد که اندیشه‌شان را صرف حل آنها کردند و نظرشان را معطوف به استخراج آنها آوردند و برای برداشتن روپوششان به هر حیله‌ای دست زدند و در رفع حجابشان به هر وسیله‌ای متوسل شدند، اما راهی به سوی آنها نتوانستند و دلیلی به جانب آنها ندانستند، و این مسائل از ازمنهٔ قدیم تا به امروز همچنان حل ناشده باقی است... و من با رهروی به انوارشان و پیروی از آثارشان هفت مسأله از مسائل مزبور را ذکر می‌کنم و آن مسائل عبارتند از: مسألهٔ اول ... مسألهٔ چهارم: عدد مکعبی که به دو عدد مکعب تقسیم شود.

۱۲ - اثر غیاث الدین جمشید کاشانی

۱۳ - به طور مساوی

۱۴- این عالم معروف از نظر اینشتین را نشناختیم.

۱۵- Ensemble فرانسوی و به معنی مجموعه.

اتحادهای مهم جبری

احمد قندهاری

(۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(۳) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

(۴) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

(۵) $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

یا

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

(۶) $(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$

یا

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

(۷) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(۸) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(۹) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

اتحادهای کمکی:

۱ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

۲ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

۳ $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$

۴ $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$

۵ $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

۶ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۷ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

نتیجه اتحاد (۵)

۸ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

نتیجه اتحاد (۶)

۹ $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

۱۰ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

۱۱ اگر $\begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

توجه: شماره‌های ۱۰ و ۱۱ به اتحاد اولر- لاگرانژ معروف است.

مثال ۱: $\left(2x^2+\frac{3}{4}y^3\right)^2=?$

$$\left(2x^2+\frac{3}{4}y^3\right)^2=(2x^2)^2+\left(\frac{3}{4}y^3\right)^2$$

$$+2(2x^2)\left(\frac{3}{4}y^3\right)$$

$$\left(2x^2+\frac{3}{4}y^3\right)^2=4x^4+\frac{9}{16}y^6+3x^2y^3$$

مثال ۲ : ، $a,b>0$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=?$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

بنابه اتحاد سوم

مثال ۳ : $a.b>0$

$$(\sqrt[4]{ab}-1)(\sqrt[4]{ab}+1)(\sqrt{ab}+1)=?$$

$$(\sqrt[4]{ab}-1)(\sqrt[4]{ab}+1)=\sqrt{ab}-1 \implies$$

$$(\sqrt[4]{ab}-1)(\sqrt[4]{ab}+1)(\sqrt{ab}+1)=$$

$$(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{ab}+1)=ab-1$$

مثال ۴ : اگر

$$A=ab+ac+bc \quad \text{و} \quad a+b+c=0$$

آنگاه A چگونه عددیست؟

داریم:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

ازطرفی می‌دانیم هرجمله که توانش زوج باشد مثبت یاصفر است

پس $(a^2+b^2+c^2)$ عددیست مثبت یا صفر

$$\implies \underbrace{(a+b+c)^2}_{\text{صفر است}}=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{مثبت یاصفر}}+2A$$

نتیجه می گیریم عدد A باید منفی یاصفرباشد تا تساوی فوق برقرار باشد.

مثال ۵ : اگر

$$x=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$$

آنگاه (x^3-3x) مساوی‌چه عددی است؟

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}_{b}$$

$$x=a+b$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم

$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$x^3=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\quad(x)$$

$$x^3=4+3\sqrt[3]{4-3}(x)\implies$$

$$x^3=4+3x\implies x^3-3x=4$$

مثال ۶ : اگر $x+\frac{1}{x}=3$ مطلوب است محاسبه:

$$x^2+\frac{1}{x^2}\ ,\ x^3+\frac{1}{x^3}\ ,\ x^6+\frac{1}{x^6}\ ,\ x^9+\frac{1}{x^9}$$

حل : طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x+\frac{1}{x}=3$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2x\cdot\frac{1}{x}=9\implies$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=9\implies x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم $x+\frac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=27$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\times1\times3=27 \Rightarrow$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم

$$x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

داریم:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}+3(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=343$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}+3(7)=343 \Rightarrow x^6+\frac{1}{x^6}=322$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

داریم: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$x^9+\frac{1}{x^9}+3(x^3)\left(\frac{1}{x^3}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=5832$$

$$x^9+\frac{1}{x^9}+3(18)=5832 \Rightarrow$$

$$x^9+\frac{1}{x^9}=5778$$

مثال ۷ : اگر

$$a^2+b^2+c^2+3=2(a+b+c)$$

آنگاه؟ $a+b+c=?$

حل :

$$a^2+b^2+c^2+1+1+1-2a-2b-2c=0$$

$$(a^2+1-2a)+(b^2+1-2b)+$$

$$(c^2+1-2c)=0$$

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$$

قبلاً گفته‌شد که اگر جمله‌ای توان زوج داشته باشد مثبت یا صفر است. این تساوی وقتی می‌تواند برقرار باشد که داخل هر پرانتز صفر باشد بنابراین:

$$\begin{aligned} a-1&=0\\ b-1&=0 \Rightarrow a=b=c=1 \Rightarrow\\ c-1&=0 \end{aligned}$$

$$a+b+c=3$$

مثال ۸ : حاصل کسر مقابل‌را بیابید.

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

با شرط اینکه a و b و c مساوی نباشند.

حل :

عبارت مخرج $=a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc$
$+c^2+a^2-2ac$

عبارت مخرج $=2a^2+2b^2+2c^2-2ab$
$-2ac-2bc$

عبارت مخرج $=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

عبارت‌صورت: بنابه اتحادهای کمکی‌شمارهٔ (۱۰) مساویش‌را می‌نویسیم.

$$\text{کسر}=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2}$$

مثال ۹: اگر $a+b-c=1$ ، آنگاه

$$a^2+b^2-c^2=?$$

حل: طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

$$a+b=c+1$$

$$a^2+b^2+2ab=c^2+1+2c$$

$$a^2+b^2-c^2=1+2c-2ab$$

$$a^2+b^2-c^2=2\left(\frac{1}{2}+c-ab\right)$$

مثال ۱۰: ثابت کنید:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=$$
$$3(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$a-b=x \qquad b-c=y \qquad c-a=z$$

حل:

$$a-b+b-c+c-a=0$$

$$\Longrightarrow x+y+z=0 \Longrightarrow$$

بنا به اتحاد کمکی شماره (۱۱) $x^3+y^3+z^3=3xyz$

$$\Longrightarrow (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$$
$$=3(a-b)(b-c)(c-a)$$



مردی در حال کندن چاهی، در حالی که در آن ایستاده، می‌باشد. بلندی مرد ۵ فوت و ۱۰ اینچ است. زمانی که به سروقت او می‌رویم می‌گوید که: یک چهارم کار را انجام داده و هنگامی که کار را تمام کند فرق سرش سه برابر مقداری که اکنون بالای زمین است زیر زمین خواهد بود. عمق چاه در پایان کار چقدراست؟

جواب در صفحهٔ ۹۶



در باغ تجربه‌ها

مصاحبه با معلمین شما

آقای موسی آذرنوش

معلم موفق و باتجربهٔ ریاضی

اگر خدا یاری کند قصد داریم هر از چندگاهی به‌زیارت برخی از حق‌داران بر فرهنگ میهن اسلامیمان (در زمینه تدریس ریاضی) برویم و از آب جاری و زلال تجربیاتِ زیبایشان جرعه‌هایی برگیریم و به شما عرضه کنیم.

باشد که این مصاحبه‌ها، هم یادی سپاس‌گونه از این عزیزان شود و هم پلی برای انتقال برخی تجربیات گرانبها که در طول سالیان پرزحمت عمر به‌دست آمده‌است.

بعضی از قسمتهای این مصاحبه به‌صورت شفاهی انجام گرفته که از نوار پیاده شده و قسمتهایی را نیز ایشان کتباً جواب داده‌اند که ما همه را تلفیق و یکدست کرده‌ایم. البته سعی ما در تلخیص این مصاحبه بوده اما هیچ نکته لازمی از قلم نیفتاده‌است. به‌هرحال امیدواریم مورد استفادهٔ معلمین و دانش‌آموزان عزیز واقع شود.

■ **لطفاً ضمن معرفی، بفرمایید کودکی و نوجوانی و دوران جوانی خود را چگونه گذراندید؟**

بنده موسی آذرنوش، فرزند عیسی آذرنوش هستم. در سال ۱۲۹۵ هجری شمسی در شهرستان رشت متولد شدم، در سال ۱۳۱۵ ازدواج کردم، همسرم متأسفانه در سال ۱۳۵۰ در اثر ابتلاء به سرطان ریه درگذشت و در سال ۱۳۵۲ مجدداً ازدواج کردم و فرزند ندارم.

نزدیک منزل ما در رشت مکتب‌خانه‌ای در گوشه‌ای از مسجد محلّه دایر بود. پدرم مرا در سن چهارسالگی به آنجا برد و به مکتب‌دار سپرد و هنگام خداحافظی به او گفت: «آقامیرزا، فقط پوست و استخوانش مال ما» کنایه از این‌که اگر از دستورات شما کوتاهی کرد از هیچ‌گونه تنبیهی دریغ نورزید. یکسال در مکتب‌خانه بودم و علاوه بر قرآن چیزهایی آموختم و از ترس چوب و فلک سعی می‌کردم دستورات درسی و آموزشی را طبق دستور و به‌نحواحسن انجام دهم. سال بعد در جوار مکتب، دبستان ملی دایر شد که پدرم مرا به دبستان سپرد. رئیس دبستان که به آقامیرزا معروف بود وِردزبانش این بود: «شما را بستنی هستم» منظور این بود که اگر درس نخوانید و یا بازیگوشی پیشه کنید شما را به فلک می‌بندم و فلک هم هرروز دایر بود، گرچه نه‌تنها من فلک نشدم (از بیم تنبیه در کار خود جدی بودم)، بلکه یک کتاب اخلاق کوچک جیبی از آن دوران برایم باقی مانده که در گوشه صفحه‌اول آن نوشته‌شده: «چون موسیٰ خان شاگرد اول شده این کتاب به‌عنوان جایزه به‌ایشان اهدا می‌گردد.»

درزمان نوجوانی و جوانی ما این برنامه‌های گوناگون و سرگرمیهای مختلف برای نوجوانان و جوانان وجود نداشت. در محیط خانه هم مرد سالاری برقرار بود و کسی در منزل از اوامر پدر سرپیچی نمی‌کرد لذا از عصر پنجشنبه تا شب شنبه سرگرم آماده‌ساختن و آموختن مطالب درسی بودم تا آنچه از برنامه هفتگی هفته آینده را می‌توانستم کم‌کم مطالعه می‌کردم، تکالیف را انجام می‌دادم و از انجام آنها نیز لذت می‌بردم. و چون سرگرمی دیگری

وجودنداشت ارضاء می‌شدم.

در اوایل سال سوم متوسطه مرحوم پدرم برای معالجه عازم پاریس بود (البته از راه خشکی، از طریق بندرانزلی و بادکوبه، زیرا هواپیما وجودنداشت) شبی ازمن که فرزند ارشد خانواده بودم سؤال کردند از پاریس چه‌می‌خواهی برایت بیاورم؟ گفتم اگر امکان داشته‌باشد چند جلد حل‌المسائل ریاضی و فیزیک F.G.M (که در آن زمان معروف و گران قیمت بود)، پدرم باتعجب اظهار کردند: کتاب؟!! البته ایشان در مراجعت این کتابها را که قیمتشان سنگین هم بود آوردند. تا آخر سال ششم علمی این چند جلد کتاب فوق‌العاده به من کمک کرد و باعث شد که بتوانم جزو شاگردان ممتاز کلاس شوم. البته شرح استفاده از حل‌المسائل برای دانش‌آموزان را جداگانه به‌عرض می‌رسانم که با چه شرایطی مفید است و در غیر این‌صورت علاوه براینکه مفید نیست ضرر نیز دارد.

خاطرهٔ دیگر این‌که تازه دوماه بود که سال اول متوسطه آن‌زمان شروع شده بود و من درمدت این دو ماه به آموزش زبان فرانسه که جزو برنامهٔ تحصیلی ما بود مشغول بودم. روزی به‌اتفاق پدرم به داروخانه‌ای مراجعه کردیم که پدرم الکل می‌خواست بخرد، داروفروش در شیشه‌ای کوچک الکل پرکرد و روی برچسب شیشه نوشت «Alcoole» و شیشه را به‌دست من داد، در بین راه به پدرم گفتم داروفروش این کلمهٔ فرانسه را غلط نوشته‌است(چه یک O زیادی است). بعد از یک هفته مجدداً با پدرم به همان داروخانه مراجعه کردیم، پدرم به داروساز گفت به ایراد پسرم توجه کنید که چه می‌گوید، من ایراد خود را بیان کردم، داروفروش گفت حق با پسر شمااست و من غلط نوشتم، بعدها که به کلاس ششم متوسطه آمدم و کتاب شیمی را خواندیم دیدم الکل را با دوتا"O" نوشته، آن‌وقت به حقارت خود و بزرگواری داروفروش که نخواست غرورم را نزد پدرم بشکند پی بردم و به او آفرین گفتم.

سه سال اوّل متوسطه را در دبیرستان شاهپور رشت گذراندم اغلب دبیران ما دیپلمه و یا حتیٰ پایین دیپلم بودند که از تهران می‌آمدند. حتیٰ گاهی در کلاس ریاضی و یا فیزیک بین دانش‌آموزان و دبیر جروبحثهایی درمی‌گرفت که با سکوت دانش‌آموز تمام می‌شد. کلاسهای چهارم و پنجم متوسطه (علمی) را در دبیرستان دارالفنون تهران گذراندم. اغلب دبیران فرانسوی و کتب ما نیز به‌زبان فرانسه بود، تمام وقت ما صرف درک مطالب علمی به زبان فرانسه بود و به‌دلیل عدم تسلّط به‌زبان فرانسه هیچ دانش‌آموزی سؤالی از دبیر نمی‌کرد. از دبیران برجستهٔ ایرانی آن‌زمان، مرحوم فروزانفر دبیر ادبیات ما بود که کلاسش خیلی قابل استفاده بود. متأسفانه سابقاً به درس ادبیات فارسی اهمیت چندانی نمی‌دادند. از خاطرات دبیرستانی من این است که آقای مرتضیٰ قلی اسفندیاری که لیسانسیه فیزیک از فرانسه و تازه به استخدام وزارت فرهنگ درآمده بود و دبیر رسم‌فنی ما بود، من درتمام ساعات تفریح برای پرسش معنی لغات فرانسه مزاحم ایشان می‌شدم. و گاهی که احساس می‌کردم ایشان خسته‌شده‌اندو جوابهای کوتاه و سرسری می‌دهند، به‌روی خودم نمی‌آوردم و از ایشان باز سؤال می‌کردم.

خاطره‌ای دیگر: به‌محض خاتمه ساعات درس قبل از ظهر بلافاصله سریعاً به‌طرف دبیرستان شرف تهران که سابقاً در خیابان سعدی جنوبی بود می‌رفتم تا از شاگردانی که خارج می‌شدند و از شاگردان چهارم و پنجم چنانچه درس علمی داشتند و دبیر مربوطه مسأله‌ای برای تکلیف داده‌بود خواهش می‌کردم و صورت مسئله را ضمن راه رفتن، یادداشت می‌کردم و شب خود برای حل آنها تلاش می‌کردم تا موقعیت تحصیلی خود را با دبیرستان و شاگردان دیگر مقایسه کنم.

سال ششم دبیرستان، چون در رشت همان سال (۱۳۱۰ ـ ۱۳۱۱ هـ. ش) کلاس ششم علمی دایر شده‌بود به رشت آمدم و در دبیرستان شاهپور رشت ثبت نام کردم. چون تمام دبیران ما دراین کلاس دیپلمه بودند من از کتابهای فرانسهٔ کلاس ششم که از تهران آورده بودم و از حل المسائلی که پدرم سوغات آورده بودند استفاده می کردم، و احتیاجات درسی خود را رفع و تأمین می‌نمودم.

در امتحانات نهایی آخر سال که سؤالات از تهران می‌آمد و در ادارهٔ فرهنگ از ما دانش‌آموزان که جمعاً ۱۲ نفر بودیم امتحان به‌عمل آمد، پنج نفر قبول شدیم که من شاگرد اول شدم. مدیرکل فرهنگ گیلان من را تشویق کرد و در جشن پایان تحصیلی، فوق‌العاده از من تجلیل کرد و دو جلد فرهنگ به‌عنوان جایزه به‌من داد و در روزنامه اطلاعات نیز اسمم را نوشتند.

خاطرات دانشگاه: اواخر تابستان ۱۳۱۱ برای ادامهٔ تحصیلات عالیه به‌تهران آمدم و قصد داشتم در دانشکدهٔ فنی به‌تحصیل ادامه دهم. درهمان سال، دانشکده فنی به‌دلیل نداشتن داوطلب کافی تعطیل اعلام شد و بنده به‌ناچار در دانشکده علوم در رشتهٔ ریاضیات دانشسرای عالی ثبت نام کردم.

در شروع سال دوم، روال دانشکده علوم چنین بود که بعدازظهرهای روز دوشنبه تمام دانشکده در آمفی‌تئاتر جمع می‌شدیم و آقای دکترصدیق (صدیق اعلم) رئیس دانشکده سخنرانی می‌کرد.

در آن‌روز او بایک پوشه وارد سالن شد و بعد از تشریفات، پشت تریبون قرارگرفت و چنین گفت: شاگرد اول سال اول رشته ریاضیات آقای موسیٰ آذرنوش.

هیچ‌وقت تصورش را نمی‌کردم که میان یکصدوبیست‌وچندنفر شاگرد اول شده‌باشم.

در امتحانات سال سوم (سال آخر لیسانس) نیز شاگرد اول شدم و یک دوره شاهنامه فردوسی از طرف دانشکده علوم و یک مدال درجه دوم علمی از طرف وزارت معارف جایزه گرفتم.

■ کدام‌یک از معلمین بیشتر روی شما تأثیر گذاشته‌اند و چرا؟

همانطور که قبلاً عرض کردم معلمین متوسطه ما غیر از فرانسویها که لیسانسیه بودند، همه دیپلمه بودند و کاملاً از عهده تدریس برنمی‌آمدند، به‌زحمت می‌توانستند مطالب کتاب را تفهیم کنند، حتی گاهی به‌کمک دانش‌آموزان نیاز داشتند و درمورد معلمین فرانسوی به‌دلیل اشکال زبان و یادداشت مطالب گفته‌شده که با سرعت انجام می‌گرفت فرصت تحت تأثیر قرارگرفتن برای ما نبود.

■ درمورد سابقه تدریستان بفرمایید.

مدت ۴۴ سال متوالی از مهرماه ۱۳۱۵ ـ بعد از اخذ لیسانس ریاضیات و علوم تربیتی و انجام خدمت وظیفه ـ تا خرداد ۱۳۵۹ به‌تدریس اشتغال داشتم و در سال ۱۳۴۳ به‌تقاضای خود با سابقه ۲۹ سال و یک ماه تدریس دولتی بازنشسته شدم و سپس در مدارس ملّی و مدارس گروه فرهنگی آذر که خود یکی از مؤسسین آن بودم به‌تدریس اشتغال داشتم.

اولین ابلاغم از طرف رئیس ستاد ارتش آن‌زمان (سرلشگر ضرغامی) بود و در دبیرستان نظام کرمانشاه به‌تدریس پرداختم که به‌زور دژبان فرستاده شدم. چون میل نداشتم در کرمانشاه باشم. وقتی‌که برای گرفتن خرج سفر به افسر مربوطه مراجعه کردم و متوجه شد که برای شغل دبیری می‌روم با تعجب نگاهی به‌من کرد و گفت: «پسر نرو می‌خورنت.» گفتم من نمی‌خواهم بروم، دژبان پشت دَر است و به‌اجبار می‌روم. علت ایراد افسر مربوطه این بود که خیلی جوان بودم(درسن ۲۰ یا ۲۱ سالگی به دبیری می‌رفتم) گرچه بعد از اقدامات زیادی برای انصراف از رفتن به‌کرمانشاه، قرارشد برای یکسال در آنجا خدمت کنم، ولی برای بازگشت هرسال با مخالفت رئیس دبیرستان نظام و ستاد ارتش مواجه‌می‌شدم، بالنتیجه مدت ۵ سال در دبیرستان نظام کرمانشاه خدمت کردم. سپس مدت ۲ سال در دبیرستان فردوسی بندرانزلی و مدت ۲ سال در دبیرستانهای رشت به‌تدریس اشتغال داشتم و در سال ۱۳۲۴ به‌تقاضای خود به‌تهران منتقل شدم و تا سال ۱۳۵۹ در تهران مشغول تدریس بودم.

اولین محل تدریسم در دبیرستان البرز تهران بود که مدت ۱۶ سال دراین دبیرستان بودم. در خلال همین ۱۶ سال ساعات موظفم را در دبیرستان دارالفنون و بقیه را به‌صورت حق‌التدریس در دبیرستان البرز مشغول بودم.

در دانشگاه تدریس نکردم. امایک‌روز صبح که با ماشین به‌دبیرستان دارالفنون می‌رفتم از رادیوی ماشینی که سوار بودم شنیدم که شورای دانشگاه صلاحیت تدریس من و چند نفر از همکاران در دانشگاه تهران را تصویب کرده، ولی چون شخصاً مایل به‌تدریس در دانشگاه نبودم نپذیرفتم.

■ کدام‌یک از دبیرستانها محل مناسبتری برای تدریس بوده‌اند و چرا؟

اگر بگویم در اداره کلاس و تدریس هیچگونه زحمتی نداشتم شاید مورد قبول نباشد، نمی‌دانم از شانس خودم بوده یا در رفتار و گفتار من رازی بود، هیچ‌وقت در هیچ کلاسی ناراضی و ناراحت نبودم، شاید به‌دلیل رعایت انضباط و مقررات شدید کلاسها و

دبیرستانها بوده‌باشد. در تمام مدت ۴۴ سال تدریس به‌یاد ندارم یك‌دقیقه (باصراحت می‌گویم) یك‌دقیقه تأخیر ورود به کلاس داشته‌باشم و هیچ‌وقت شاگردان را در زنگ تفریح به‌دلیل کمبود وقت در کلاس نگه نمی‌داشتم، همواره مطالب را طوری شروع می‌کردم که در اواخر وقت کلاس مطالب درسی نیز پایان می‌یافت و این موضوع مورد تأیید همکاران من نیز بود. به‌محض اینکه زنگ کلاس نواخته می‌شد اولین نفری بودم که به‌کلاس می‌رفتم. همیشه در اولین جلسه شروع سال تحصیلی وضع توقع و طرزکار خود را با دانش‌آموزان درمیان می‌گذاشتم و انتظارات خود را به آنها می‌گفتم و متذکر می‌شدم که وقت کلاس به دانش‌آموزان تعلق دارد، هروقت مطلبی که بیان کردم درست و خوب متوجه نشدید سؤال کنید، آن‌قدر سؤال کنید تا کاملاً مطلب را درك کنید. از اینکه چندبار سؤال کنید شرمنده نباشید، از نظر سؤال کردن در کلاس آزادی عمل دارید.

در شروع تدریس ذهن شاگردانم را با موضوع درس با مثالهای ملموس روزمره تطبیق می‌دادم طوری آنها را آماده‌می‌کردم که مطالب درسی برایشان روشن باشد. با این همه پذیرفتن این روش از طرف دانش‌آموزان شدت و ضعف داشت.

■ **از شاگردان بازیگوش خود چه خاطره‌ای دارید و بفرمایید باآنها چگونه برخورد می‌کردید؟**

همان‌طور که قبلاً عرض‌کردم به شاگردان بازیگوش کمتر برخورده‌ام، چون بیشتر ساعات تدریسم در کلاس ششم بود. دانش‌آموزان سال ششم دبیرستان اگر از نظر تدریس ارضاء می‌شدند دیگر بازیگوشی دربین نبود.

با این وجود ممکن بود گاهی بابعضی‌ها برخوردی کنم که در این‌صورت سعی می‌کردم نکته و یا نکات مثبتی در آنها پیداکنم و در مورد آن کار آنها را مورد تشویق قرار دهم، به این ترتیب آنها را در رودربایستی قرار می‌دادم.

■ **از شاگردان باهوش خود چه خاطراتی دارید؟**

همواره شاگردان باهوش مورد تشویق و احترامم بودند، معمولاً شاگردان باهوش منضبط نیز هستند. اگر به سؤالی برمی‌خوردم که جوابش را نمی‌دانستم، متوسل به حیله نمی‌شدم، صراحتاً می‌گفتم: نمی‌دانم بعد از مطالعه جوابش را خواهم گفت.

■ **آیا اکنون نیز بعضی از شاگردان خود را می‌شناسید یا می‌بینید؟**

روزی برای معاینه و معالجه نزد آقای دکتر سید محمد سنادیزاده، پزشك و جرّاح مجاری کلیه مراجعه کردم، درحالی‌که با موهای سفید و حالتی متین مرا پذیرفت مرا شناخت و اظهار داشت که در دبیرستان دارالفنون شاگرد من بوده‌است. مراتب علمی ایشان تقریباً عالمگیر شده به‌طوری‌که ایشان در آمریکا به حذاقت در کارخود معروفند. دیگر از شاگردان آقای پروفسور اکبرزاده محقق علوم ریاضی است که در پاریس مشغولند، هروقت به ایران می‌آیند احوالی از بنده می‌پرسند و لطف خاصی نسبت به بنده دارند. آقای دکتر نوّاب متخصص بیهوشی، آقای دکتر پزشك جراح و متخصص چشم، اگر بخواهم نام ببرم مسلماً در مدت ۴۴ سال تدریس با آن ساعات فشرده به تعداد زیادی از شخصیّت‌های علمی برخواهم خورد، آقای دکتر ایرج صادقیان متخصص امراض قلبی که در آمریکا معروفند.

از اشخاص معروف دیگر شهید دکتر چمران و شهید رجایی که اولی در دارالفنون و دومی در آذر شاگرد من بودند. آقای مهندس فروزش مهندس راه‌و ساختمان که فعلاً در آمریکا هستند و ...

■ **وضع تدریس ریاضیات در قدیم چگونه بوده آیاخودتان آن را می‌پسندیده‌اید؟**

مطابق برنامهٔ تدریس دروس به‌زبان فرانسه در همان موقع (قدیم) خوب بود، درمورد اینکه آنرا می‌پسندیده‌ایم یا خیر؟

به‌ذکر خاطره‌ای می‌پردازم. سالی از طرف یونسکو به‌اتفاق پنج یا شش نفر از همکاران برای مدت ۲۰ روز در ایام فروردین به پاریس دعوت شدیم. در پاریس راهنمایی فرانسوی داشتیم، که من از ایشان خواهش کردم که خیلی میل دارم وضع تدریس کلاسهای چهارم وپنجم و ششم ریاضی یکی از مدارس معروف پاریس را از نزدیك ببینم و با ایران مقایسه کنم، ایشان پذیرفتند و مرا به‌مدرسه متوسطهٔ



وُلتِر معرفی کردند و من یک روز تمام وقت با معرفی رئیس دبیرستان ولتر به کلاسهای چهارم و پنجم و ششم و کلاسهای کنکور(Pereparatoiz) رفتم و ناظر عمل یک ساعت دبیر و دانش‌آموز بودم. برنامه کلاسهای متوسطه آنها عیناً مثل کلاسهای ما بود البته با تفاوت بسیار در محتوا؛ هر دانش‌آموزی که وارد کلاس می‌شد تکلیف خود را روی ورقه‌ای تمیز و حاشیه‌دار- برای نظرات دبیر- روی میز دبیر می‌گذاشت. سپس درجای خود می‌نشست. و دبیر در تمام ساعات روز در همان دبیرستان وقت صرف می‌کرد و در ساعات غیردرسی تکالیف شاگردان را مورد مطالعه قرار می‌داد و در حواشی دفترشان نظرش را می‌نوشت و نمره می‌داد. بعدازاینکه دانش‌آموز دیپلمه شد، یک‌سال کلاس کنکور را درهمان دبیرستان زیر نظر دبیران طی می‌کرد و آخر سال اگر در امتحانی‌که دبیرستان از شاگردان کنکوری خود به‌عمل می‌آورد قبول می‌شد، دانشگاه مربوطه آن دانش‌آموز را می‌پذیرفت، چون به کادر علمی دبیرستان اعتماد داشت و نمرهٔ آنها مورد تأئید مقامات دانشگاهی بود. به‌این ترتیب هم دبیرستان و هم دانش‌آموز و هم وزارت فرهنگ راحت و با آسایش کارشان رامی‌گذراندند.

البته درحال حاضر از وضع تحصیلی فرانسه اطلاع ندارم، نمی‌دانم باز همین روال ادامه دارد یاخیر. در ایران یک دبیر روزانه به چند دبیرستان و در چند کلاس، دو یا سه و یا کمتر، سر می‌کشد، تدریس می‌کند و بلافاصله وقت او در جای دیگر و در دبیرستان دیگر و در کلاس دیگر پرمی‌شود. دبیر فرصت بررسی اوضاع تحصیلی، هوشی و اجتماعی شاگردان خود را ندارد و فقط به مواد درسی و تعداد قبولی شاگردان خود توجه دارد، حتیٰ تکالیف شاگردان را نمی‌تواند مطالعه کند. حتیٰ دبیران با قیافه شاگردان خود آشنا نیستند، فقط چند نفرشان را به‌دلایلی می‌شناسند.

■ بفرمایید وضع تألیف کتابهای ریاضی قدیم چگونه بوده‌است؟

تصور می‌کنم منظورتان وضع تألیف کتب ریاضی درسی و کلاسیک باشد. به‌اختصار جواب این قسمت را عرض می‌کنم. باعرض معذرت از همکاران مؤلف کتب درسی، باید بگویم وضع تألیف کتب کلاسیک به‌صورت رقابت تجاری درآمده بود، هردسته از مؤلفین با «من بمیرم و تو بمیری» و دوست و رفیق بازی سعی داشتند به‌وسیله چند نفر از ایادی خود تعداد فروش کتب تألیفی خود را به شاگردان تحمیل نمایند و سطح فروش کتابهای خود را بالا ببرند و در نتیجه حق‌التألیف بیشتری نصیب خود نمایند. وقتی هم که وزارت فرهنگ خواست جلوی این کار رابگیرد هیئتی را برای انتخاب بهترین کتاب درسی موجود مأمور نمود تا آنها را برای انحصاری کردن در سطح کشورتوصیه نمایند. متأسفانه این عده سعی کردند هر دسته از مؤلفین را راضی نگهدارند، گاهی بهترین کتاب مورد قبول قرار نمی‌گرفت و گاهی برعکس.

■ نام بعضی از مدرسین و مؤلفین مورد توجه خود را با ذکر دلیل توجه به آنها بیاورید؟

از مؤلفین، آقای دکتر محمود بهزاد که ترجمه‌های مفید ایشان و تدریس قابل استفاده‌شان زبان‌زد شاگردان ایشان بوده و هست.

آقای احمد بیرشک که ایشان نیز با پشتکار و جدّیت خود تحسین

همگان را برانگیخته‌اند. نه تنها در قسمت ریاضیات بلکه در قسمت دایرةالمعارف نیز فعالیت دارند.

به‌دوست و همکار قدیم خود آقای پرویز شهریاری اعتقاد دارم، چه ایشان در تمام موارد و باتمام مشکلات خود را از ترجمه و تألیف برکنار نداشته و با پشتکار قابل ملاحظه‌ای به ترجمه و تألیف پرداخته‌اند.

از مدرسین نیز دوست و همکار ارجمند و باارزش خود آقای پیله‌رودی دبیر لیسانسیه نامی فیزیک و آقای کاظم مهین بخت دبیر ارزشمند شیمی که بعد از چند سال بازنشستگی هنوز فعالیت تدریس را رها نکرده‌اند، مورد علاقهٔ من هستند. هرچند خود را کوچکتر از آن می‌دانم که در مورد این عزیزان اظهار نظر و عقیده نمایم.

■ آیا خودتان در زمینهٔ ریاضی تألیف یا ترجمه‌ای دارید؟

بله، تعداد ۳۲ جلد کتاب ریاضیات کلاسیک به‌کمک بعضی از دوستان و همکاران خود تألیف کردیم که مدت چند سال در مدارس تهران و شهرستانها تدریس می‌شد.

پس از چند سال، وزارت فرهنگ چندین جلد از آنها را انحصاراً برای تدریس در کلاسهای دبیرستانی در سطح کشور انتخاب کرد که تدریس می‌شد.

■ وضعیت کتابهای درسی کنونی چگونه است؟

آن‌طور که می‌دانم کتابهای درسی با نظر چند تن از دبیران متخصص و باتجربه تألیف و تدوین گردیده و به‌نظر من خوب است ولی باید دید این مطالب چگونه به دانش‌آموزان آموخته و تفهیم می‌شود. خوشبختانه اخیراً به‌وضع روحی و پرورشی دانش‌آموزان خوب رسیدگی می‌شود. ای‌کاش به‌وضع آموزش بچه‌ها نیز بهمین طریق رسیدگی شود.

■ برای اینکه شاگردی در ریاضیات موفق باشد باید چه کار کنند؟

به‌تصور من جواب این سؤال تنها مربوط به ریاضیات نیست، هرکه بخواهد در تحصیل هر علمی چه ریاضیات و چه غیر آن موفق باشد باید در جریان مطالب روز و دیروز باشد، چه مطالب هر علمی مانند زنجیر به‌هم مربوط است. اگر دانه‌ای از آن پاره شود و یا از قلم بیفتد، این زنجیر پاره خواهدشد. شخص باید از مطالب گذشته اطلاع داشته باشد و آن‌را نزد خود نگه دارد تا به مطلب دیگری که خواهد آمد برسد. و برای این پیوستگی، پشتکار لازم و ضروری است.هر چیزی‌که شخص آموخت باید دنبالش را بگیرد و در غیر این‌صورت در مدت کوتاهی از ذهن خارج می‌شود ولی پشتکار در آن باعث حفظ آن می‌گردد. خوشبختانه علوم ریاضی فرمولی است و قالب دارد خیلی زود می‌شود آن‌را یادگرفت به‌شرط آنکه تعقیب آن به‌وسیله تمرینهای زیاد باعث تقویت ذهن و فراگیری آن گردد.

■ یک کتاب درسی خوب چگونه باید باشد؟

معمولاً کتب درسی باید مطابق فهم و درک دانش‌آموز و خالی از کلمات و عبارات ثقیل باشد، چه روانی مطالب و تلفیق آن با ذوق و

هر چیزی‌که شخص آموخت باید دنبالش را بگیرد و در غیر این‌صورت در مدت کوتاهی از ذهن خارج می‌شود ولی پشتکار در آن باعث حفظ آن می‌گردد.

درک دانش‌آموز باعث می‌شود که دانش‌آموز آن‌را زمین نگذارد و از آن خسته نشود.

کتاب درسی باید مانند گفتار دبیر در کلاس ساده و قابل فهم باشد.

■ آیا وجود کتابهای کمک درسی را لازم می‌دانید و اگر لازم‌اند چه مشخصاتی باید داشته باشد؟

منظور از کتاب کمک درسی چیست؟ اگر کتابی است که برای مدرسین تدوین شده باشد، شاید کمکی به آنها کند و اگر کتابهایی است برای دانش‌آموزان با شرح و بسط بیشتر، که این کار به‌وسیله مدرسین انجام می‌گیرد. و چنانچه حل‌المسائل کتابهای درسی است، در این مورد نظراتی دارم که عرض می‌کنم.



مقدمتاً باید بگویم هنگامی‌که وزارت فرهنگ کتاب جبر سال ششم ریاضی (از تألیفات ما را) منحصراً برای تدریس در سطح کشور انتخاب کرد، بنده در زمان تدوین این کتاب کلیه مسائل آنرا حل نموده و در دفتری برای خودم نگه داشتم، دوستانم در زمان تدریس انحصاری آن در سطح کشور اصرار داشتند این کتاب حل‌المسائل را چاپ و منتشر نماییم به این دلیل که فروش خوبی خواهد داشت، من نمی‌پذیرفتم، چون سوابق بدی از انتشار حل‌المسائل کتب درسی داشتم، به دفعات شاگردانی را پای تخته سیاه احضار کرده و حل مسأله‌ای را از آنها خواستم که در کتاب بود و به‌عنوان تکلیف شب معین کرده‌بودم درحالی‌که در جزوهٔ خودش به‌درستی حل کرده و

کتاب درسی باید مانند گفتار دبیر در کلاس ساده و قابل فهم باشد.

نوشته بود ولی از حل آن در پای تخته عاجز بود البته من می‌فهمیدم که از حل‌المسائل آن‌را بدون زحمت فهم و یادگرفتن رونویسی کرده. ممکن است این سؤال پیش آید که پس خودت چگونه از حل‌المسائل ریاضیات استفاده می‌کردی؟ اینک جوابش:

اولاً تذکر این نکته ضروری است که حل‌المسائل آن زمان (شامل مسأله‌ها و حل آنها) مجموعه‌ای علمی از مسائل خارج از کتب درسی و متنوع بود ولی حل‌المسائل حالا تنبل خانهٔ شاه‌عباسی است.

بلی آن مسائل جزو تکلیف درسی نبودند، من هروقت از مطالعه و یادگیری درسی(هرچه بود) خسته می‌شدم از حل‌المسائل ریاضی و یا فیزیک صورت یک مسئله را انتخاب می‌نمودم و روی آن فکر می‌کردم، همین تغییر فکر از درسی به درس دیگر باعث رفع خستگی‌ام می‌شد، اگر قادر به حل مسئله بودم از نظر تطبیق بعد از حل به حل‌المسائل مراجعه می‌کردم و اگر موفق نمی‌شدم آن را حل کنم، آن را رها نموده و دنبالهٔ درس قبلی را می‌گرفتم، بعد از خاتمه کار و انجام تکالیف شبانه، حل مسأله را دنبال می‌کردم، اگر آن شب قادر به حل آن نبودم، حل آن‌را به فردا یا شب بعد موکول می‌نمودم بعد از یکی دو روز که به عجز خود در حل آن پی می‌بردم به حل‌المسائل مراجعه می‌کردم، در این حال چون یکی دو روز یا کمتر یا بیشتر در

اغلب دانش‌آموزان به‌محض دیدن صورت مسئله به حل آن نیز مراجعه و آن را رونویسی می‌کنند، نمی‌گذارند در اثر ممارست و فکر کردن در موارد مختلف مسأله فکر به جریان بیفتد و کم‌کم آمادهٔ حل مسائل شود. این عمل باعث رکود فکری دانش‌آموزان می‌شود.

فکر آن بودم بعد که حلّش را در حل‌المسائل می‌دیدم، آن راه حل دیگر هیچ وقت از یادم نمی‌رفت چون روی آن خیلی زحمت کشیده بودم. درحالی که اغلب دانش‌آموزان به محض دیدن صورت مسئله به حل آن نیز مراجعه و آن را رونویسی می‌کنند، نمی‌گذارند در اثر ممارست و فکرکردن در موارد مختلف مسأله فکر به جریان بیفتد و کم‌کم آمادهٔ حل مسائل شود. این عمل باعث رکود فکری دانش‌آموزان می‌شود.

■ یک ریاضیدان غیر از ریاضیات باید از چه علومی آگاهی داشته باشد؟ مثلاً آیا دانستن ادبیات برای ریاضیدان لازم است؟

تصور می‌کنم یک ریاضیدان قبل از تبحر در ریاضیات قطعاً با منطق و فلسفه و ادبیات خود را آمادهٔ درک مطالب ریاضی

نموده‌است. برای یک ریاضیدان دانستن ادبیات برای بیان و تفهیم مطالب ریاضی حتماً ضروری است. مثلاً آقای دکتر مصاحب که ریاضیدان بود، به دلیل اینکه در ادبیات نیز دستی قوی داشت بیان و قلمش خیلی نافذ بود و همچنین آقای دکتر هشترودی نیز همین وضع را داشت.

■ آقای آذرنوش با تشکر از شما اگر مطلب دیگری به نظرتان می‌رسد بفرمایید.

باید اقرار کنم که در ریاضی تبحر ندارم، فقط روش تدریسی که بعد از چندین سال تجربه به آن عادت کرده بودم و آن را برای تفهیم به دانش‌آموزان مفید تشخیص می‌دادم دنبال می‌کردم و دانش‌آموزان از آن روش راضی به نظر می‌رسیدند و گذشته از آن چون به شغل و کارم عشق می‌ورزیدم و آنرا قلباً دوست داشتم، با جان و دل برای دانش‌آموزان زحمت می‌کشیدم، به طوری که بعدها شنیدم روش تدریس و طرز رفتار و کردارم روی دانش‌آموزان اثر مطلوب بجا می‌گذاشت. به هرحال از همهٔ شما متشکرم و ازخداوند برایتان توفیق طلب می‌کنم.

> ***چون به شغل و کارم عشق می‌ورزیدم و آنرا قلباً دوست داشتم، با جان ودل برای دانش‌آموزان زحمت می‌کشیدم.***

ادب و ریاضی

هاردی، ریاضیدان بزرگ انگلیسی، در اثرش به نام اعتذار یک ریاضیدان می‌نویسد که به خاطر زیبایی ریاضیات به آن پرداخته است، نه به خاطر ارزش عملیش. او با بی‌پروایی بیان می‌کند که هیچگونه کاربردی برای نظریهٔ اعداد یا نسبیت نیافته است. از آن زمان تنها چهل سال گذشته است که پیامدهای نظریهٔ تجریدی اعداد به آنجا کشیده شده که برای امنیت ملی مفید واقع می‌شود.

آرتور جفی ـ ترجمهٔ سیدمرادعلی هاشمی
مجلهٔ ریاضی ش ۲

حدود چهل سال قبل، اعضای یک محفل ریاضی در کمبریج، از لزوم به‌کاربردن کلمات در کتابهای درسی فیزیک ـ ریاضی مرتباً اظهار تأسف می‌کردند. ایده‌آل آنها دنیایی بود عاری از هر چیز به جز فرمول، که گرچه نمی‌توان به آن دست یافت ولی می‌توان بسیار به آن نزدیک شد. اما آدم در طی چهل سال چیزهایی یاد می‌گیرد، و از این رو امروز افراد باقیماندهٔ آن محفل برداشت کاملاً متفاوتی از موضوع پیدا کرده‌اند. آنها بر حسب تجربه آموخته‌اند که ریاضیات را، دست کم تا آنجایی که در تحقیقات فیزیکی مطرح می‌شود، صرفاً ابزاری کمکی برای تفکر بدانند، این یکی از بزرگترین حقایقی بود که دستاوردهای **فارادی** در طول زندگی علمیش، آن را به کرسی نشاند.

پی. جی. تیت
ترجمهٔ امیر اکبری مجدآبادنو
نشر ریاضی سال ۴ ش ۱ و ۲

تابع و بررسی خاصیت یك به یکی در انواع توابع

● حمیدرضا امیری

(برای دانش‌آموزان سال‌های دوم و سوم و چهارم دبیرستان)

صحبت از تابع است، مفهومی ریاضی که ریاضیات بدون آن هیچ است! مفهومی که حد و پیوستگی آن، مشتق و انتگرال گیری از آن کتابهای مارا اشباع کرده و ریاضیدانان بسیاری را به خود مشغول داشته است مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیك، مکانیك و کلیه رشته‌های فنی نقشهای مهم ایفا کند. پس جا دارد که خواص چنین مفهوم یا مفاهیمی را بیشتر مورد بررسی و تفحص قرار دهیم که فعلاً به بررسی یکی از این خواص یعنی خاصیت یك به یکی می‌پردازیم:

می‌دانیم هرگاه A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند خواهیم داشت :

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

که هر (x,y) را یك زوج مرتب نامیده و از دو شیئی مانند x و y که برای آنها ترتیب قائل هستیم تشکیل شده است، و اگر:

$$(x\ ,\ y) = (z\ ,\ t)$$

خواهیم داشت:

$$x = z \wedge y = t$$

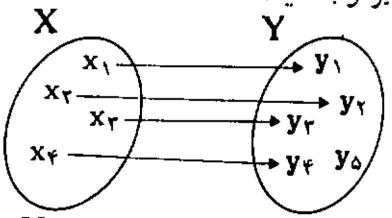
از طرفی هر زیرمجموعه از یك حاصلضرب دکارتی مانند $A \times B$ را یك رابطه می‌نامیم پس اگر رابطهٔ R از A در B تعریف شده باشد داریم:

$$R \subset A \times B$$

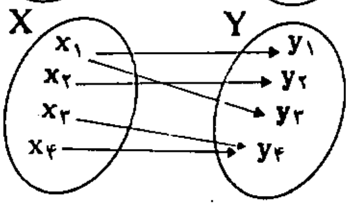
اینکه انواع رابطه‌ها چگونه‌اند و چه خواصی دارند از بحث ما خارج است وفقط ما نوع خاصی از این رابطه‌ها را که به آنها تابع می‌گوییم بررسی می‌کنیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

هرگاه رابطهٔ R از A در B تعریف شده باشد آن را **تابع** می‌نامیم درصورتی که هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌های اول برابر در آن یافت نشود، به عبارت دیگر، اگر مجموعهٔ مؤلفه‌های اول زوجهای مرتب موجود در یك رابطه را **دامنه** و مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم آن رابطه را **برد** بنامیم، «رابطه‌ای تابع نام دارد که به‌ازای هر عضو از دامنه‌اش یکی وفقط یك عضو از بردش وجود داشته باشد.»

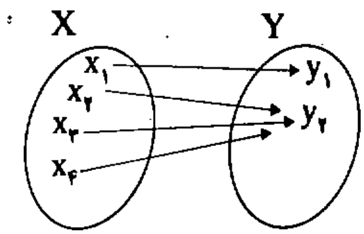
درحقیقت هرگاه نمودار پیکانی یك تابع را رسم کنیم نباید از هیچ یك از اعضای دامنه بیش از یك پیکان خارج شود. به نمودارهای زیر توجه کنید:



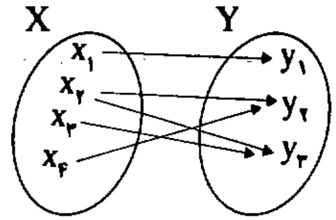
تابع است



تابع نیست



تابع است



تابع نیست

این مفهوم (تعریف تابع) را می‌توان با زبان ریاضی به صورت زیر بیان کرد:

رابطهٔ f تابع است $\Leftrightarrow$

$$\left([(x_1,y_1)\in f \wedge (x_1,y_2)\in f] \Rightarrow y_1=y_2\right)$$

(برای اثبات تابع بودن یك رابطه خودمان فرض می‌کنیم دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول برابر در رابطه وجود داشته‌باشد واگر با این فرض بتوانیم ثابت کنیم مؤلفه‌های دوم این‌دو زوج باهم برابرند درحقیقت دو زوج باهم برابر شده وثابت کرده‌ایم که هیچگاه چنین زوجهای مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابردر رابطه نمی‌توان یافت.)

قرارداد: اگر $R\subset A\times A$ ، دراین‌صورت اصطلاحاً می‌گوییم رابطه R روی A تعریف‌شده است.

مثال ۱ - رابطهٔ f روی IR (مجموعهٔ اعداد حقیقی) به صورت‌زیر تعریف شده‌است آیا این‌رابطه تابع است؟

$$\forall x,y\in IR ، (x,y)\in f \Leftrightarrow x^2=y$$

فرض کنیم:

$$[(x_1\,,\,y_1)\in f \wedge (x_1\,,\,y_2)\in f] \Rightarrow$$
$$x_1^2=y_1 \wedge x_1^2=y_2 \Rightarrow y_1=y_2$$

پس طبق تعریف تابع، رابطهٔ فوق تابع می‌باشد.

مثال ۲ - رابطهٔ f را روی IR به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم آیا این رابطه تابع است؟

$$\forall x,y\in IR ، (x,y)\in f \Leftrightarrow x=y^2$$

فرض کنیم:

$$(x_1\,,\,y_1)\in f \wedge (x_1\,,\,y_2)\in f \Rightarrow$$
$$x_1=y_1^2 \wedge x_1=y_2^2$$
$$\Rightarrow y_1^2=y_2^2 \Rightarrow y_1=\pm y_2 \quad (1)$$

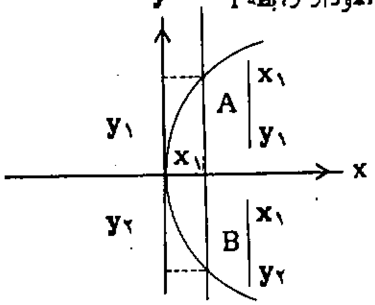
حال با یك مثال نقض نشان می‌دهیم که‌رابطهٔ f تابع‌نیست. برای‌به دست‌آوردن مثال‌نقض از رابطهٔ (۱) استفاده می‌کنیم.

$$4=(-2)^2 \wedge 4=(2)^2 \Rightarrow$$
$$(4,-2)\in f \wedge (4,2)\in f$$

یعنی‌دو زوج مرتب‌در f یافتیم که مؤلفه‌های‌اول برابردارند لذا f تابع نیست.

لازم‌به تذکر است که هرزوج مرتب‌با مؤلفه‌های‌حقیقی‌را می‌توان متناظر با یك‌نقطه درصفحهٔ مختصات دکارتی فرض‌کرد که مؤلفهٔ‌اول‌آن مشخص‌کننده طـول‌آن نقطه و مؤلفه دوم آن معین‌کنندهٔ عرض‌آن نقطه‌است. حال‌اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های‌اول یکسان‌باشند درحقیقت دارای‌طولهای برابرند و لذا روی‌خطی موازی‌با محور yها واقع‌اند پس هرگاه نمودار یك‌رابطه را رسم‌کنیم وخطوطی موازی‌محور yها بکشیم اگر یکی‌از این‌خطوط نمودار رابطه را در بیش‌ازیك‌نقطه قطع‌کند آن رابطه تابع نیست.

نمودار رابطهٔ f



قرارداد : اگرتابع f از A در B تعریف شده‌باشد این مطلب‌رابه صورت زیرنمایش می‌دهیم:

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

یعنی‌تابع f روی xهـای مجموعهٔ A اثرکرده و آنها را تحت قانون‌خاصی به اعضایی یا yهایی در مجموعهٔ B منتقل می‌کند پس f(x) یعنی تأثیر f روی x که همان y∈B است. اینکه f به چه‌صورتی روی‌xهای مجموعهٔ A اثر می‌کند، همان ضابطهٔ تعریف f است‌که با f(x) نمایش می‌دهیم.

مثلاً وقتی می‌نویسیم $f : Z \to Z$ ضابطهٔ تعریف f به صورت $f(x)=x^۲+۱$ بیان‌شده‌است واین‌همان‌تغییری‌است که تابع f روی‌اعضای Z می‌دهد!

یعنی هرعدد صحیح‌که f بر آن اثرکند به‌توان۲ می‌رسد وبا عدد یك‌جمع می‌شود، پس اگرتابع باضابطهٔفوق‌را درنظر بگیریم خواهیم‌داشت:

$$f(۴)=(۴)^۲+۱=۱۷$$

یـا

$$f(-۴)=(-۴)^۲+۱=۱۷$$

$$f(k)=k^۲+۱$$

یـا

$$f(a+۵)=(a+۵)^۲+۱=a^۲+۱۰a+۲۶$$

اگردامنهٔ تعریف‌یك‌تابع‌را به چندزیرمجموعه تقسیم کنیم‌می‌توان روی‌هرکدام از این زیرمجموعه‌های دامنهٔ تعریف، یك ضابطهٔ مجزابرای‌تابع‌تعریف‌کرد که‌به‌چنین‌توابعی،توابع‌**چندضابطه‌ای** می‌گوییم .

مثال ۳ - تابع زیریك تابع ۳ ضابطه‌ای است، مطلوب است محاسبهٔ:

$$f(|a|)\ ,\ f(a+۳)\ ,\ f(۲)\ ,\ f(۴)\ ,\ f(-۲)$$

$$f : IR \to IR$$

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۵ & x>۲ \\ ۰ & x=۲ \\ ۳-۴x & x<۲ \end{cases}$$

چون $-۲<۲$ پس:

$$f(-۲)=۳-۴(-۲)=۳+۸=۱۱$$

چون $۴>۲$ پس:

$$f(۴)=۲(۴)-۵=۸-۵=۳$$

چون $۲=۲$ پس:

$$f(۲)=۰$$

حال $f(a+۳)$ را محاسبه می‌کنیم

$$f(a+۳)=\begin{cases} ۲(a+۳)-۵ & a+۳<۲ \\ ۰ & a+۳=۲ \\ ۳-۴(a+۳) & a+۳<۲ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(a+۳)=\begin{cases} ۲a+۱ & a>-۱ \\ ۰ & a=-۱ \\ -۹-۴a & a<-۱ \end{cases}$$

ودر نهایت‌به بررسی $f(|a|)$ می‌پردازیم:

می‌دانیم برای‌هر a∈IR همواره $|a|\geqslant ۰$ بنابراین

$$f(|a|)=\begin{cases} ۲|a|-۵ & |a|>۲ \\ ۰ & |a|=۲ \\ ۳-۴|a| & |a|<۲ \end{cases}$$

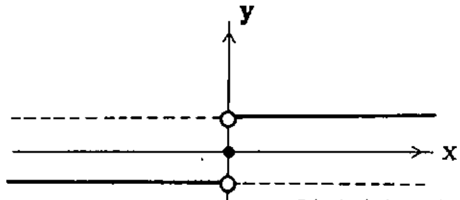
$$\Longrightarrow f(|a|)=\begin{cases} ۲|a|-۵ & a>۲ \text{ یا } a<-۲ \\ ۰ & a=\pm۲ \\ ۳-۴|a| & -۲<a<۲ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(|a|)=\begin{cases} 2a-5 & a>2 \\ -2a-5 & a<-2 \\ 0 & a=\pm 2 \\ 3-4a & 0\leqslant a<2 \\ 3+4a & -2<a<0 \end{cases}$$

مثال ۴ - تابع زیر را که به تابع‌علامت معروف است در نظرمی گیریم:

$$S:\mathrm{IR}\to Z$$

$$S(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$



(نمودار $S(x)$)

مطلوب است محاسبهٔ

$S(x^2)-S(x)$ و $S(6)$ و $S(-5)$

$-5<0 \Longrightarrow S(-5)=-1$

$6>0 \Longrightarrow S(6)=1$

اگر $\rightarrow x>0 \Longrightarrow (S(x)=1$ و $S(x^2)=1)$

$\Longrightarrow S(x^2)-S(x)=1-1=0$

گر $\rightarrow x<0 \overset{x^2>0}{\Longrightarrow} (S(x)=-1$ و $S(x^2)=1)$

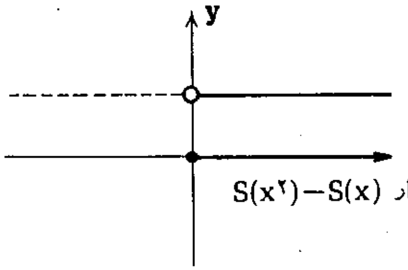
$\Longrightarrow S(x^2)-S(x)=1-(-1)=2$

اگر $\rightarrow x=0 \Longrightarrow (S(x)=0$ و $S(x^2)=0)$

$\Longrightarrow S(x^2)-S(x)=0-0=0$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S(x^2)-S(x)=\begin{cases} 0 & x\geqslant 0 \\ 2 & x<0 \end{cases}$$



(نمودار $S(x^2)-S(x)$)

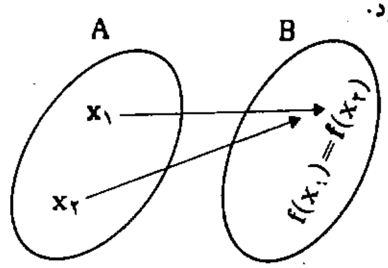
قرارداد : اگر f تابعی‌از مجموعهٔ A درمجموعهٔ B باشد یعنی $f:A\to B$ ، $x\to f(x)$ واگرداشته باشیم $(x_1,y_1)\in f$ می‌نویسیم:

$$f(x_1)=y_1$$

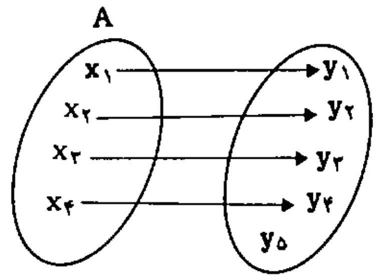
حال آمادگی داریم تا به بررسی یك‌خاصیت مهم برای بعضی‌از توابع یعنی خاصیت یك به یکی بپردازیم. توابعی که دارای این‌خاصیت می‌باشند در ریاضیات از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند ودر نظریه‌مجموعه‌ها نیز برای‌اثبات برقراری‌تناظر یك‌به‌یك بین‌دومجموعه می‌توان ازتابع استفاده کرد وتابعی بین آن دومجموعه تعریف کرد که ازجمله خواصی که آن تابع باید دارا باشد همین‌خاصیت یك‌به‌یکی است.

تعریف: تابع $f:A\longrightarrow B$ ، $x\to f(x)$ مفروض‌است می گوییم‌این تابع یك‌به‌یك‌است هرگاه هیچ‌دو زوج مرتب‌متمایز بامؤلفه‌های دوم برابر در آن یافت نشود به بیان‌دیگر تابعی‌را یك‌به‌یك‌می‌نامیم هرگاه‌به ازای‌هرعضو ازبردش‌یکی وفقط یك عضو از دامنه‌اش وجود داشته‌باشد.

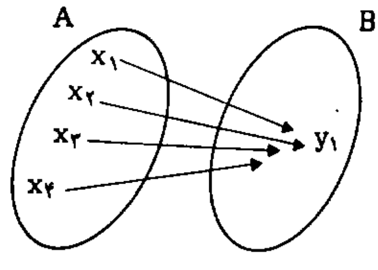
تذکر: لفظ یك‌به‌یك همان‌طور که از تعریف بـرمی‌آید کاملاً با نوع و نحوهٔ عملکرد تابع مطابقت‌دارد یعنی واقعاً تابع هریکی را به یکی می‌برد اگر تابعی چنین‌نباشد، به صورت زیر خواهد بود.



و همان طور که مشاهده می‌شود این تابع **دو به یك** است!



تابع یك‌به‌یك است



تابع یك‌به یك نیست (تابع ثابت)

تعریف ریاضی تابع یك‌به‌یك

تابع $f : A \longrightarrow B$ یك‌تابع یك‌به‌یك است هر گاه:
$x \longrightarrow f(x)$

$$\forall x_1 , x_2 \in D_f \text{ ، } x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

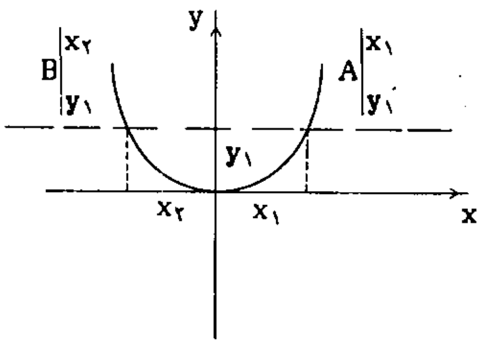
حال با توجه‌به اینکه هر گزارهٔ شرطی‌چون $p \Longrightarrow q$ با عکس نقیض خودش‌یعنی $\sim q \Longrightarrow \sim p$ هم‌ارز است پس تعریف ریاضی‌تابع یك‌به‌یك را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد.

تابع f یك‌به‌یك است $\Longleftrightarrow \forall x_1 , x_2 \in D_f$

$$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$$

با توجه به اینکه تابع f ، x_1 را به $f(x_1)$ و x_2 را به $f(x_2)$ تبدیل می‌کند واضح است که $f(x_1)$ و $f(x_2)$ هردو مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب در تابع f می‌باشند که ما فرض کرده‌ایم با هم مساوی‌اند و ثابت می‌کنیم $x_1=x_2$ یعنی باید مؤلفه‌های اول‌چنین زوجهای مرتبی‌نیز باهم‌برابر باشند درحقیقت دوزوج به یك‌زوج تبدیل می‌شوند پس‌تابع یك‌به‌یك خواهد شد.

اگر تابعی یك‌به‌یك نباشد پس حداقل دو زوج مرتب با مؤلفه‌های‌دوم برابردر آن یافت می‌شود که اگراین دو زوج را دونقطه روی‌نمودار تابع‌بدانیم، چون‌عرضهای‌این‌دو نقطه‌برابر است پس‌هردو روی‌خطی موازی‌با محورxها واقع‌می‌شوند‌حال برای نشان دادن اینکه تابعی یك‌به‌یك نیست اگر نمودار تابع مفروض‌باشد می‌توان‌از عکس مطلب بالا استفاده‌کرد. یعنی اگر خطوطی موازی‌با محورxها رسم‌کنیم ویکی‌از این‌خطوط‌نمودار تابع‌را دربیش از یك نقطه‌قطع‌کند‌آن نمودار‌نمی‌تواند به یك تابع یك‌به‌یك تعلق داشته‌باشد، به‌شکل زیر توجه‌کنید.



مثال ۵ - خاصیت یك‌به‌یکی‌را برای‌تابع باضابطهٔ

$$f(x)=\frac{x+4}{2x-3}$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $f(x_1)=f(x_1)$ پس خواهیم داشت:

$$\frac{x_1+4}{2x_1-3}=\frac{x_2+4}{2x_2-3} \Rightarrow$$

$$2x_2x_2-3x_1+8x_2-12=2x_1x_2+$$

$$8x_1-3x_2-12 \Rightarrow 11x_2=11x_1 \Rightarrow$$

$x_1=x_2$ پس طبق تعریف تابع یک‌به‌یک است

مثال ۶ - آیا تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+4$ با دامنهٔ تعریف IR یک‌به‌یک است؟

فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ پس‌خواهیم داشت:

$$x_1^2+4=x_2^2+4 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1|=|x_2|$$

$$\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

دراین‌نوع مسائل توجه داریم که اگرنتوانیم ثابت‌کنیم که دقیقاً $x_1=x_2$ دلیل بریک‌به‌یک‌نبودن تابع‌نمی‌باشد و برای ردخاصیت یک‌به‌یکی تابع‌باید حتماً بایک مثال نقض این عمل انجام‌شود، که البته آخرین رابطه‌ای‌که برحسب x_1 و x_2 به دست می‌آوریم به اینکه چگونه مثال‌نقض‌را بیابیم کمک می‌کند در مثال بالا چون‌داریم $x_1=\pm x_2$ لذا اگر قراردهیم

$x_2=-2$ و $x_1=2$ خواهیم داشت:

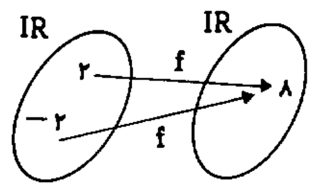
$f(x_1)=f(2)=2^2+4=8$ و

$f(x_2)=f(-2)=(-2)^2+4=8$

یعنی x_1 و x_2 ای در D_f یافتیم‌که $x_1\neq x_2$ ولی

$f(x_1)=f(x_2)$

ولذا تابع یک‌به‌یک نیست.



مثال ۷ - آیا تابع با ضابطهٔ $f: IR \to IR$ یک‌به‌یک

$f(x)=|x|$

است؟

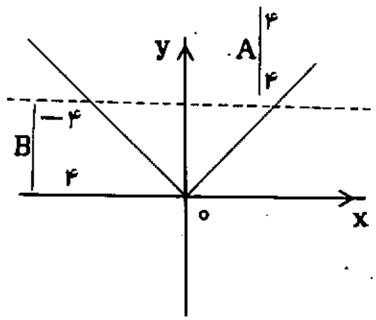
فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ پس‌خواهیم داشت:

$$|x_1|=|x_2| \Rightarrow x_1=\pm x_2$$

مثال نقض : $x_1=4$ و $x_2=-4 \Rightarrow$

$|x_1|=|4|=4$ و $|x_2|=|-4|=4$

نمودار تابع $f(x)=|x|$ به‌شکل‌زیراست و همان‌طور که مشاهده می‌شود تابع یک به‌یک نیست.



مثال ۸ - آیا تابع باضابطهٔ $f: IR \to IR$ $(a\in IR)$

$f(x)=|x+a|$

یک‌به‌یک است ؟

فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ پس‌خواهیم داشت:

$$|x_1+a|=|x_2+a| \Rightarrow$$

$$(x_1+a)=\pm(x_2+a) \Rightarrow$$

$$(x_1+a)=(x_2+a) \Rightarrow \boxed{x_1=x_2} \quad I$$

$$(x_1+a)=-x_2-a \Rightarrow \boxed{x_1=-x_2-2a} \quad II$$

پس‌دقیقاً نتوانستیم ثابت‌کنیم درهرحالت $x_1=x_2$ حال‌به‌دنبال مثال‌نقض می‌باشیم که ازرابطهٔ II کمک‌می‌گیریم اگرقراردهیم

$x_2=2$ داریم، $x_1=-2-2a$

$$f(x_1)=f(-2-2a)=|-2-2a+a|$$
$$=|-2-a|=|-(2+a)|=|2+a|$$
$$f(x_2)=f(2)=|2+a|$$

و همان طور که مشاهده می‌شود $x_1\neq x_2$ ولی

$$f(x_1)=f(x_2)$$

پس تابع یك به‌یك نمی‌باشد.

مثال ۹- آیا تابع باضابطهٔ $f: IR\to IR$ یك‌به یك

است ؟ $$f(x)=\frac{\sqrt{2x}-4}{3+\sqrt{x}}$$

(قابل توجه است که دامنهٔ تعریف تابع فوق زیر مجموعهٔ IR^+ می‌باشد درحقیقت $D_f=IR^+$ زیرا در غیراین صورت $\sqrt{x}$ تعریف نمی‌شود) حال فرض کنیم

$$f(x_1)=f(x_2)$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{2x_1}-4}{3+\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{2x_2}-4}{3+\sqrt{x_2}}\implies$$
$$3\sqrt{2x_1}-12+\sqrt{2x_1x_2}-4\sqrt{x_2}=$$
$$3\sqrt{2x_2}-12+\sqrt{2x_1x_2}-4\sqrt{x_1}$$
$$\implies 3\sqrt{2}\sqrt{x_1}+4\sqrt{x_1}=3\sqrt{2}\sqrt{x_2}+4\sqrt{x_2}$$
$$\implies (3\sqrt{2}+4)\sqrt{x_1}=(3\sqrt{2}+4)\sqrt{x_2}$$
$$\implies \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\implies(\sqrt{x_1})^2=(\sqrt{x_2})^2$$
$$\implies \sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\implies |x_1|=|x_2|$$
$$\xrightarrow{x_2,x_1>0\ \text{چون}} x_1=x_2$$

پس تابع یك‌به‌یك است.

بررسی خاصیت یك‌به‌یکی برای توابع از IR^2 به IR^2 و از IR^2 به IR و از IR به IR^2

اگر تابعی چون f از IR^2 به IR^2 مفروض باشد در این صورت چون، $D_f\subset IR^2$ بنابراین تابع f روی زوج مرتبهایی از IR^2 اثر کرده وحاصل عمل نیز زوج مرتبی منحصر به فرد از IR^2 خواهد بود ولی تعریف یك‌به‌یکی ثابت است و برای اینگونه توابع نیز به همان ترتیب عمل می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم تأثیر تابع f روی دو زوج مرتب از IR^2 باهم مساوی باشد و ثابت می‌کنیم خود آن دو زوج مرتب باید باهم برابر باشند یعنی:

فرض می‌کنیم $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ و ثابت می‌کنیم

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

مثال ۱۰- تابع f با ضابطهٔ $f: IR^2\to IR^2$ مفروض

$$f(x,y)=(x-6,y+4)$$

است، آیا این تابع یك‌به‌یك است؟

$$\text{فرض کنیم}\to f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)\implies$$
$$(x_1-6\ ,\ y_1+4)=(x_2-6\ ,\ y_2+4)$$
$$\implies\begin{cases}x_1-6=x_2-6\\ y_1+4=y_2+4\end{cases}\implies$$
$$\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}\implies(x_1,y_1)=(x_2,y_1)$$

پس تابع یك‌به‌یك است.

مثال ۱۱- تابع f با ضابطهٔ

$$f: IR^2\to IR^2$$
$$f(x,y)=(x-3y,2x+y)$$

مفروض است آیا این تابع یك‌به‌یك است؟

فرض کنیم $\leftarrow f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ پس با توجه به ضابطه تابع خواهیم داشت:

$$(x_1-3y_1,2x_1+y_1)=(x_2-3y_2,2x_2+y_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-3y_1=x_2-3y_2 \\ 3\times\ 2x_1+y_1=2x_2+y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1-3y_1=x_2-3y_2 \\ 6x_1+3y_1=6x_2+3y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7x_1=7x_2 \Rightarrow \boxed{x_1=x_2} \qquad (1)$$

حال مقدار $x_1=x_2$ را در یکی از معادلات دستگاه قرار می‌دهیم که خواهیم‌داشت،

$$x_1-3y_1=x_1-3y_2 \Rightarrow -3y_1=-3y_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1=y_2} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

پس تابع یك به یك است.

مثال ۱۲- تابع f با ضابطهٔ

$$f: IR^2 \to IR^2$$
$$f(x,y)=(x^2+1,y-4)$$

مفروض‌است. آیا این‌تابع یك به یك است؟

فرض کنیم:

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$$

پس با توجه به ضابطهٔ تابع خواهیم داشت،

$$(x_1^2+1,y_1-4)=(x_2^2+1,y_2-4) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1^2+1=x_2^2+1 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2 \\ y_1-4=y_2-4 \Rightarrow y_1=y_2 \end{cases}$$

بنابراین نمی‌توان نتیجه‌گرفت تابع یك به یك است پس به دنبال مثال نقض هستیم که اگر قرار دهیم: $x_1=2$ و $x_2=-2$ و مثلاً $y_1=y_2=5$ خواهیم داشت:

$$(x_1,y_1)=(2,5) \Rightarrow$$
$$f(2,5)=(2^2+1,5-4)=(5,1)$$
$$(x_2,y_2)=(-2,5) \Rightarrow$$
$$f(-2,5)=((-2)^2+1,5-4)=(5,1)$$

یعنی ثابت شد

$$f(2,5)=f(-2,5)=(5,1)$$

درحالی‌که $(2,5)\neq(-2,5)$ پس تابع یك به یك نمی‌باشد.

مثال ۱۳- اگر c_1 و c_2 اعدادحقیقی ثابتی باشندتابع با ضابطهٔ زیر یك به یك نمی‌باشد

$$f: IR^2 \to IR^2$$
$$f(x,y)=(c_1,c_2)$$

تابع یك به یك نیست، زیرا مثلاً خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(\sqrt{2},\frac{3}{5})=(c_1,c_2) \\ f(2,3)=(c_1,c_2) \end{cases}$$

در صورتی‌که $(2,3)\neq\left(\sqrt{2},\frac{3}{5}\right)$

مثال ۱۴ - ثابت‌کنید تابع با ضابطهٔ

$$f: IR^2 \to IR^2$$
$$f(x,y)=(x-2y,2x-4y)$$

نه یك به یك و نه پوششی است. فرض‌کنیم:

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$$

و با توجه به ضابطهٔ تابع خواهیم‌داشت:

$$(x_1-2y_1,2x_1-4y_1)=(x_2-2y_2,2x_2-4y_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-2y_1=x_2-2y_2 \\ 2x_1-4y_1=2x_2-4y_2 \end{cases}$$

وهمان‌طور که ملاحظه می‌شود دستگاه بالا فاقد جواب است. (در حقیقت دو معادلهٔ $x-2y=0$ و $2x-4y=0$ یک معادله‌اند وخطی را مشخص می‌کنند که از مبدأ مختصات عبور می‌کند) پس برای یافتن مثال نقض کافی است نقاطی را بیابیم که‌در این‌خط صدق می‌کنند.

$$x-2y=0 \nearrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad x-2y=0 \searrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$f(0,0)=(0-2\times 0,\ 2\times 0-4\times 0)=(0,0)$$

$$f(2,1)=(2-2\times 1,\ 2\times 2-4\times 1)=(0,0)$$

یعنی ثابت شد $f(0\ ,\ 0)=f(2\ ,\ 1)=(0\ ,\ 0)$

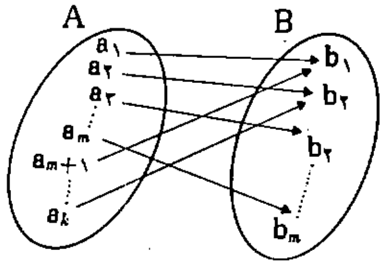
ولی $(2,1)\neq(0,0)$ پس‌تابع یک به یک نمی‌باشد.

حال پس‌از بررسی خاصیت یک‌به یکی برای توابع از IR^2 به IR^2 درحالتهای مختلف به سراغ بررسی این خاصیت برای‌توابع از IR^2 به IR می‌رویم اما قبل‌از آن‌مطلبی‌را تحت عنوان‌یک قضیه‌ثابت‌کرده‌که پس‌از اثبات آن فهم مطالب بعدی آسانترمی‌نماید.

قضیه: هرگاه $n(A)=k$ و $n(B)=m$ و $k>m$ (تعداد اعضای مجموعهٔ A بیشتر از تعداد اعضای مجموعهٔ B باشد).

دراین‌صورت هیچ تابع یک‌به‌یک از A به B نمی‌توان تعریف‌کرد.

برهان: فرض‌کنیم $f: A \rightarrow B$ تابعی‌یک‌به یک‌باشد و $D_f=A$ بنابراین f روی‌هرعضو A اثرمی‌کند وچون مجموعهٔ A دارای $(k-m)$ عضو بیشتراز مجموعهٔ B است لذاناچاراً تابع f علاوه براینکه با m عضو A اعضای B را می‌پوشاند باید روی $(k-m)$ عضواز اعضای B دوبار اثرکند واین با یک‌به‌یک بودن f تناقض‌دارد. لذاهیچ تابع یک‌به‌یک‌از A به B نمی‌توان تعریف‌کرد.



مثال ۱۵- تابع با ضابطهٔ $f: IR^2 \rightarrow IR$، مفروض

$$f(x,y)=x+y$$

است. خاصیت‌یک‌به‌یکی‌را برای آن بررسی کنید.

فرض‌کنیم $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ پس‌با توجه به‌ضابطهٔ تعریف‌تابع داریم:

$$x_1+y_1=x_2+y_2 \qquad (1)$$

لذا نتوانستیم ثابت‌کنیم $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ پس‌با توجه‌به رابطهٔ (۱) به دنبال مثال‌نقض هستیم.

اگر قرار دهیم:

$$(x_1,y_1)=(5,-2)\ ,\ (x_2,y_2)=(1,2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(5,-2)=5+(-2)=3 \\ f(1,2)=1+2=3 \end{cases}$$

پس ثابت شد $f(5,-2)=f(1,2)$ ولی

$$(5\ ,-2)\neq(1\ ,\ 2)$$

پس‌تابع یک‌به‌یک نیست.

مثال ۱۶- تابع با ضابطهٔ $f: IR^3 \rightarrow R^2$ مفروض

$$f(x,y,z)=(x+y,z)$$

است. ثابت‌کنید این تابع یک به یک نیست. (اثبات به عهدهٔ خواننده).

مثال ۱۷- تابع با ضابطهٔ $f : IR \to IR^{2}$ مفروض

$$f(x)=(x,x+1)$$

است. خاصیت یك‌به‌یکی‌را برای‌این تابع بررسی کنید.

فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ پس‌با توجه‌به‌ضابطهٔ‌تعریف تابع داریم:

$$(x_1,x_1+1)=(x_2,x_2+1) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \boxed{x_1=x_2} \\ x_1+1=x_2+1 \Longrightarrow \boxed{x_1=x_2} \end{cases}$$

ودر هردوصورت ثابت‌شد $x_1=x_2$ لذا تابع یك‌به‌یك است.

مثال ۱۸- تابع با ضابطهٔ $f : IR^{2} \to IR^{3}$ مفروض

$$f(x,y)=(x^{2},x,y)$$

است. آیا این‌تابع یك‌به‌یك است؟

فرض‌کنیم $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ پس‌خواهیم‌داشت:

$$(x_1^{2},x_1,y_1)=(x_2^{2},x_2,y_2) \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{2}=x_2^{2} \\ x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases}$$

ازاینکه $x_1^{2}=x_2^{2}$ نتیجه می‌شودکه $x_1=\pm x_2$ ولی با توجه‌به اینکه داریم $x_1=x_2$ لذا همواره، $x_1=x_2$ می‌باشد پس، $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ بنابراین تابع یك‌به‌یك است.

مثال ۱۹- تابع با ضابطهٔ $f : IR^{2} \to IR^{3}$ مفروض

$$f(x,y)=(x^{2},y,6)$$

است. آیا این‌تابع یك‌به‌یك است؟

فرض‌کنیم $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ بنابراین باتوجه‌به ضابطهٔ تعریف‌تابع داریم:

$$(x_1^{2},y_1,6)=(x_2^{2},y_2,6) \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{2}=x_2^{2} \\ y_1=y_2 \end{cases}$$

تساوی $x_1^{2}=x_2^{2}$ نتیجه می‌دهد $x_1=\pm x_2$ بنابراین بـه دنبال مثال نقض هستیم مثلاً اگر قرار دهیم

$$(y_1=y_2=4 \text{ و } x_2=-2 \text{ و } x_1=2)$$

خواهیم داشت:

$$(x_1,y_1)=(2,4) \text{ و } (x_2,y_2)=(-2,4)$$

$$\Longrightarrow f(2,4)=(2^{2},4,6) \text{ و}$$

$$f(-2,4)=((-2)^{2},4,6)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(2,4)=(4,4,6) \\ f(-2,5)=(4,4,6) \end{cases}$$

یعنی ثابت‌کردیم $f(2,4)=f(-2,4)$ ولی

$$(2,4)\neq(-2,4)$$

پس تابع یك‌به‌یك نیست.

* * *

درآخرین بحث این مقاله‌به بررسی خاصیت یك‌به یکی برای‌توابع چندضابطه‌ای می‌پردازیم درحقیقت به دنبال ایـن مطلب‌هستیم کـه یك‌تابع چندضابطه‌ای باچه شرط یا شرطهایی دارای خاصیت یك‌به‌یکی است و آیا برقراری خاصیت یك به یکی در توابع چند ضابطه‌ای نیاز به تحمیل شرط جدیدی دارد یا خیر؟

شاید در وهلهٔ‌اول تصورکنیم یك‌تابع‌چندضابطه‌ای اگر درتمام ضابطه‌هایش یك‌ به یك باشد می‌توان نتیجه گرفت‌که در کل‌نیز یك‌به‌یك است،که تصوری‌غلط است!

این‌تصور را بایك مثال‌بسیار ساده می‌توان باطل‌کرد.

دیدیم تابع $f : IR \to IR$ یك‌تابع دوضابطه‌ای بود

$$f(x)=|x|$$

که فاقدخاصیت‌یك‌به‌یکی می‌باشد زیرا مثلاً:

$$f(-2)=f(2)=2$$

ولی اگر قرار دهیم:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

وخاصیت یك به‌یکی را در هرضابطه‌به طور مجزا بررسی‌کنیم خواهیم داشت:

$$\text{اگر} \rightarrow x_۱\ ,\ x_۲\geqslant ۰\ ,\ f(x_۱)=f(x_۲)\Longrightarrow x_۱=x_۲$$

$$\text{اگر} \rightarrow x_۱\ ,\ x_۲<۰\ ,\ f(x_۱)=f(x_۲)$$

$$\Longrightarrow -x_۱=-x_۲ \Longrightarrow x_۱=x_۲$$

یعنی‌تابع $f(x)=|x|$ درهریك ازضابطه‌هایش‌یك به‌یك است ولی درکل یك‌به‌یك نیست.

بنابراین ماعلاوه‌براینکه‌خاصیت یك‌به‌یکی‌رادرهرضابطهٔ یك‌تابع چندضابطه‌ای باید بررسی‌کنیم نیاز به بررسی شرط دیگری‌نیز داریم یعنی‌یك‌به‌یکی تمام ضابطه‌های یك تابع چند ضابطه‌ای‌برای یك‌به‌یك بودن‌تابع لازم‌است اما‌کافی‌نیست!

حال‌به همان تابع $f(x)=|x|$ برمی‌گردیم، دیدیم‌که مثلاً:

$$f(-۲)=f(۲)=۲$$

یعنی عدد حقیقی ۲ هم‌در برد ضابطهٔ بالایی وهم در برد ضابطهٔ پایینی تابع‌قرارداشت لذا اگرهرضابطهٔ تابع‌را به عنوان‌تابعی مجزا فرض‌کنیم بردهای این‌دوتابع نقطه مشترك داشت.

این همان‌شرط اضافی‌است‌که به دنبالش بودیم.

یعنی اگردریك‌تابع چندضابطه‌ای حتی‌بردهای دوضابطهٔ تابع باهم اشتراك داشته‌باشند این مسأله‌را ایجاب می‌کند که تابع‌چندضابطه‌ای‌باید دوعضو متمایزاز دامنه‌را تحت دوضابطهٔ مختلف‌به یك‌عضو مشترك از بردش منتقل‌کند واین‌یك به یك‌بودن را نقض می‌کند لذا تعریف‌یك به‌یکی برای‌توابع چند ضابطه‌ای را به شکل زیربیان می‌کنیم:

تابع $y=f(x)$ اگرتابعی باچندضابطه‌باشد درصورتی یك به‌یك است‌که «اولاً در هرضابطه‌اش یك‌به‌یك باشد و ثانیاً بردهای هیچ دوضابطه‌ای از ضابطه‌های آن نقطهٔ مشترك نداشته باشند.»

مثال ۲۰- تابع f بـا ضابطهٔ $f: IR \rightarrow IR$ مفروض

$$f(x)=\frac{x}{۲+۳|x|}$$

است. خاصیت‌یك‌به‌یکی‌را برای این‌تابع بررسی‌کنید.

ابتدا تابع‌را باتوجه به تعریف قدرمطلق به صورت یك تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{۲+۳x}=f_۱ & x\geqslant ۰ \\[2ex] \dfrac{x}{۲-۳x}=f_۲ & x<۰ \end{cases}$$

حال‌خاصیت یك‌به‌یکی را برای‌هردوضابطه‌به‌طور مجزا بررسی می‌کنیم.

$$\text{اگر} \rightarrow x_۱\ ,\ x_۲\geqslant ۰\ ,\ f(x_۱)=f(x_۲)$$

$$\Longrightarrow \frac{x_۱}{۲+۳x_۱}=\frac{x_۲}{۲+۳x_۲}$$

$$\Longrightarrow ۲x_۱+۳x_۱x_۲=۲x_۲+۳x_۱x_۲$$

$$\Longrightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع $f_۱(x)=\dfrac{x}{۲+۳x}$ برای‌xهای‌بزرگتریا مساوی‌صفر یك به‌یك است.

$$\text{اگر} \rightarrow x_۱\ ,\ x_۲<۰\ ,\ f(x_۱)=f(x_۲)$$

$$\Longrightarrow \frac{x_۱}{۲-۳x_۱}=\frac{x_۲}{۲-۳x_۲}$$

$$\Longrightarrow ۲x_۱-۳x_۱x_۲=۲x_۲-۳x_۱x_۱$$

$$\Longrightarrow x_۱=x_۲$$

یعنی تابع $f_۲(x)=\dfrac{x}{۲-۳x}$ برای $x<۰$ نیزیك به‌یك‌است.

لذا تابع $y=f(x)$ در هردو ضابطه یك‌به‌یك است از طرفی واضح است‌که:

و f_1 برد $= R_{f_1} \subseteq IR^+ \cup \{0\}$

f_2 برد $= R_{f_2} \subseteq IR^-$

زیرا اگر $x \geqslant 0$ در این صورت

$$f_1(x) = \frac{x}{2+3x} \geqslant 0$$

و اگر $x<0$

$$f_2(x) = \frac{x}{2-3x} < 0$$

وچون $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \varnothing$ لذا تابع طبق تعریف یك‌به‌یك است.

مثال ۲۱- تابع f باضابطه $f : R \to R$ مفروض است

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>2 \\ x-1 & 0<x\leqslant 2 \\ x+1 & x\leqslant 0 \end{cases}$$

آیا این تابع یك‌به‌یك است.

اگر سه‌ضابطه این تابع‌را از بالابه پائین‌به‌ترتیب f_1، f_2 و f_3 بنامیم دراین‌صورت باتوجه‌به دامنهٔ هریك‌از این توابع خواهیم داشت:

$$R_{f_1} = \{x \in IR \mid x>5\}$$
$$R_{f_2} = \{x \in IR \mid -1<x\leqslant +1\}$$
$$R_{f_3} = \{x \in IR \mid x\leqslant 1\}$$

و همانطورکه مشاهده می‌شود :

$$R_{f_2} \cap R_{f_3} = \{1\}$$

لذا طبق تعریف تابع یك به یك نمی‌باشد. در حقیقت می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} f(0)=0+1=1 \\ f(2)=2-1=1 \end{cases} \Longrightarrow f(0)=f(2) \quad \text{و} \quad 0\neq 2$$

مثال ۲۲- تابع‌باضابطهٔ$f : [0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty,0]$

$$f(x) = \log\cos x$$

مفروض‌است. آیا این تابع یك‌به‌یك‌است؟

فرض‌کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ لذا باتوجه‌به‌ضابطهٔ تعریف تابع داریم:

$$\log\cos x_1 = \log\cos x_2 \Longrightarrow \cos x_1 = \cos x_2$$
$$\Longleftarrow x_1 = 2k\pi \pm x_2$$

و چون $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ پس $x_1 = x_2$ درنتیجه تابع یك‌به یك است.

مثال ۲۳- تابع با ضابطهٔ $f : IN \to Z$ مفروض‌است.

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{زوج } n \\ \frac{n-1}{2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

آیا این تابع یك‌به‌یك است؟

یك‌به‌یك بودن هرضابطه در دامنه خودش بدیهی است و بررسی آن به عهده‌خواننده‌!حال به تعیین برددوضابطه‌می‌پردازیم اگرضابطهٔ بالایی‌را f_1 وپایینی‌را f_2 بنامیم.

$$n \in IN \text{ و زوج } \Longrightarrow n>0 \Longrightarrow$$

$$f(n) = \frac{-n}{2} < 0 \Longrightarrow R_{f_1} = Z^-$$

$$n \in IN \text{ و فرد } \Longrightarrow n\geqslant 1 \Longrightarrow \frac{n-1}{2} \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow f(n)=\frac{n-1}{2} \geqslant 0 \Longrightarrow R_{f_2} = Z^+ \cup \{0\}$$

$$\Longrightarrow R_{f_1} \cap R_{f_2} = \varnothing$$ پس‌تابع یك‌به‌یك است

مثال ۲۴- فرض کنیم توابع f و g به ترتیب با ضابطه‌های

$$g : A_2 \to B_2 \quad \text{و} \quad f : A_1 \to B_1$$
$$g(a_2)=b_2 \qquad f(a_1)=b_1$$

هردو توابعی یك به یك باشند ثابت کنید که تابع h با ضابطهٔ زیر یك به یك است

$$h : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$$
$$h(a_1,a_2)=(f(a_1),g(a_2))$$

فرض کنیم $h(a_1,a_2)=h(a'_1 , a'_2)$ ثابت می‌کنیم

$$(a_1 , a_2)=(a'_1 , a'_2)$$

$$h(a_1 , a_2)=h(a'_1 , a'_2) \Rightarrow$$

$$(f(a_1) , g(a_2))=(f(a'_1) , g(a'_2)) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(a_1)=f(a'_1) \xrightarrow{\text{f یك به یك است}} a_1=a'_1 \\ g(a_2)=g(a'_2) \xrightarrow{\text{g یك به یك است}} a_2=a'_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_1 , a_2)=(a'_1 , a'_2)$$

پس تابع یك به یك است.

مثال ۲۵- تابع با ضابطهٔ $f : IR \to IR$ مفروض است.

$$f(x)=x^3|x|$$

آیا این تابع یك به یك است؟

ابتدا تابع f را به‌صورت یك تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases} x^3 \cdot x=x^4 & x\geqslant 0 \\ x^3 \cdot (-x)=-x^4 & x<0 \end{cases}$$

حال درهرضابطه خاصیت یك به یکی را بررسی می‌کنیم.

اگر $1 \to x_1 , x_2\geqslant 0 \ , \ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$

$$x_1^4= x_2^4 \xrightarrow{x_1,x_2\geqslant 0} x_1= x_2$$

اگر $2 \to x_1 , x_2<0 \ , \ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$

$$-x_1^4=-x_2^4 \Rightarrow x_1^4=x_2^4 \xrightarrow{x_1,x_2<0}$$

$$-x_1=-x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

بنابراین تابع درهردوضابطه‌اش یك به یك است.

ازطرفی اگرضابطهٔ بالایی را f_1 وضابطهٔ پایینی را f_2 بنامیم دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$R_{f_1}=IR^+\cup\{0\} \ , \ R_{f_2}=IR^-$$

وچون $R_{f_1}\cap R_{f_2}=\varnothing$ پس‌درکل یك به یك است.

مثال ۲۶- بایك مثال‌نقض نشان‌دهیدکه تابع با ضابطهٔ

$$f : IR \to IR^2$$
$$f(x,y)=(x+y,xy)$$

یك به یك نیست.

$$f(1,-1)=(1+(-1),1\times(-1)) \Rightarrow$$

$$f(1,-1)=(0,-1)$$

$$f(-1,1)=((-1)+1,(-1)\times 1) \Rightarrow$$

$$f(-1,1)=(0,-1)$$

یعنی ثابت کردیم $f(1,-1)=f(-1,1)$ ولی

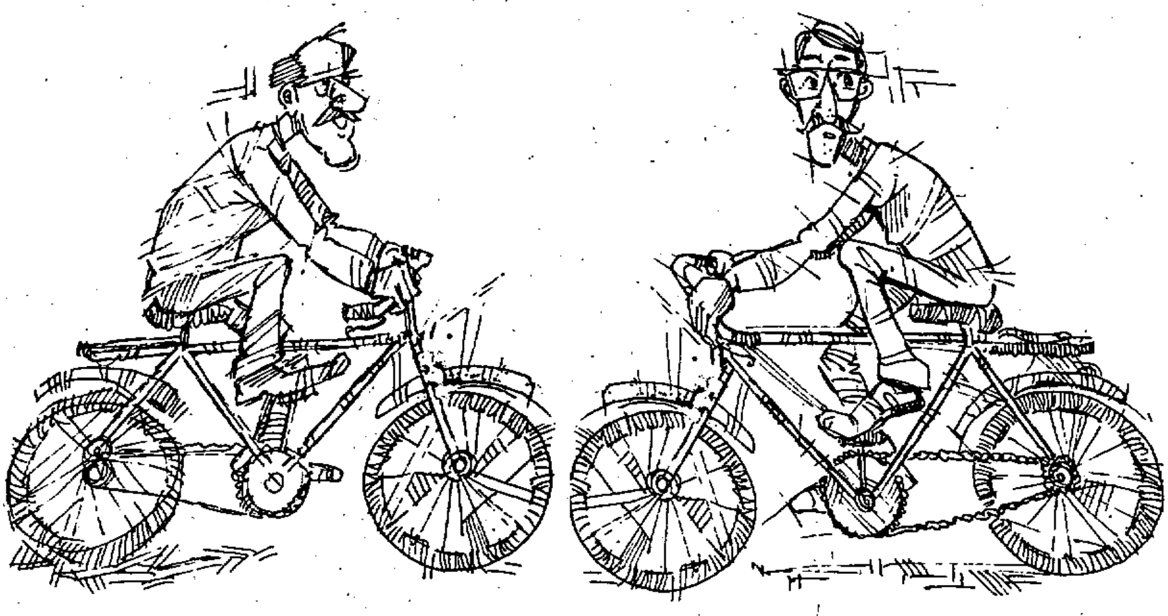
$$(1,-1)\neq(-1,1)$$

بنابراین‌تابع دوبه‌یك است!

درخاتمهٔ این مقاله متذکرمی‌شوم که باتوجه به‌محدودیت‌های موجودحتی‌الامکان‌سعی‌شده‌حالتهایی که‌احیاناًدانش آموزان عزیزدچار ابهاماتی‌هستند بررسی‌شود و انشاءالله درشماره‌های بعدی‌به بررسی خاصیت پوشایی توابع‌نیز پرداخته خواهدشد.

تفریح اندیشه ۲

A و B، دو دوچرخه سوار، به‌طور همزمان، اولی از نقطهٔ A' و دومی از نقطهٔ B'، آغاز به حرکت می‌کنند. آنها با سرعت ثابت به سوی هم طی طریق می‌نمایند. در ۳۰ دقیقهٔ بعداز یکدیگر می‌گذرند، و A، به سوی نقطهٔ B'، ۲۰ دقیقهٔ بعد به آنجا می‌رسد. B، چند دقیقه بعداز آن که A به نقطهٔ B' می‌رسد، به نقطهٔ A' می‌رسد؟



جواب در صفحهٔ ۹۶

۲ مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان

بهترین شکل یك قوطی حلبی

پی . ال . رو (P.L.Roe)

چندی پیش به کتابی برخوردم که هدفش عام کردن ریاضیات بود، و فصل آخرش با حساب دیفرانسیل و انتگرال سروکار داشت. بخش آخر کتاب که آشکارا نقطهٔ اوج کل اثر بود به حل مسألهٔ تعیین ابعاد یك قوطی حلبی به حجم ماکزیمم، از ماده‌ای به مقدار مفروض، پرداخته بود. البته راه‌حل معروف مسألهٔ مورد بحث این است که مادهٔ به‌کاررفته متناسب با

$$M = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (1)$$

باشد. دراین‌صورت نظر به این که $v = \pi r^2 h$ ، بنابراین

$$h = \frac{v}{\pi r^2} \qquad (2)$$

درج (۲) در (۱) و قراردادن $dM/dr = 0$ می‌دهد

$$4\pi r - \frac{2v}{r^2} = 0$$

یا ، بنابه (۲)

$$h = 2r$$

به عبارت‌دیگر، اقتصادی‌ترین شکل ارتفاعی برابر قطر قاعده‌دارد. سپس نویسندگان کتاب توجه‌خواننده‌را به این‌واقعیت جلب‌کرده بودندکه غالب قوطیها «مربع» نیستند و آن‌گاه به جستجوی توضیح اختلاف مزبور پرداخته، و نتیجه‌گرفته بودند که در دنیای‌تجارت باید به رسم و رسومات بیش‌از تفکرمنطقی بها داد ، و آخرین پیام‌شان به خواننده این اثر را داشت که زیبایی ذهنی‌خود پاداش خود است.

این روزها، یك چنین نظرگاههای اشراف منشانه‌ای در مورد ریاضیات، تجملی‌است که تعداد اندکی‌توان‌آن‌رادارند. نکتهٔ ظریف در این‌جاست‌که مثال اختیارشدهٔ فوق، و اختلاف بین مدل‌ریاضی و دنیای‌واقعی، عملاً به‌گونه‌ای‌نسبتاًدقیق منش راستین و ارزش‌ریاضیات کاربسته‌را مطرح می‌کند.

ابتدا درنظرمی گیریم که‌چون‌در و قاعدهٔقوطی‌موردبحث از ورقه‌ای بریده‌شوند، ضایعاتی‌به وجود می‌آیند، که احتمالاً برای‌تولید، مجدداً بازپس فرستاده می‌شوند، اما ارزش‌اندکی برای قوطی‌ساز دارند. اگرفرض‌کنیم‌که ورقهٔ موردبحث ابتدا به مربعهایی به‌ضلع $2r$ تقسیم‌می‌شوند، وبعدازهرمربع دایره‌ای بریده می‌شود، بایدبه جای معادلهٔ (۱)

$$M = 8r^2 + 2\pi rh \qquad (3)$$

قرار داد،که به

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \simeq 2.55 \qquad (4)$$

منجر می‌شود.

اما تدبیر بهتر (حداقل، ازنظرگاه ریاضی) تقسیم صفحهٔ فلزی‌به شانهٔ عسل مانندی ازشش‌ضلعیهاست. با چشم پوشی از

ضایعات واقع در لبهٔ صفحهٔ مورد بحث، درمی‌یابیم که

$$\frac{h}{r}=\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\simeq 2.21 \qquad (5)$$

گرچه این موضوع ممکن است جالب باشد، نه (۴) نه (۵) ابعاد یك‌قوطی‌را به خوبی توصیف نمی‌کنند. هنوز بعضی چیزهارا فراموش کرده‌ایم. به‌عنوان‌مثال، بررسی یك‌قوطی‌حلبی واقعی‌نشان می‌دهد که سروته آن ازقرصهایی به شعاع‌تااندازه‌ای بزرگترازr تشکیل شده‌اند، که دراین‌صورت در دو انتهای آن قالب می‌شوند. تصویب‌این‌مطلب به افزایش (h/r) می‌انجامد، همچنان‌که‌هرهزینهٔ فوق‌العاده‌ای‌در رابطه باشکل‌دادن‌درقوطی، یا ساختن‌آن از ماده‌ای ضخیم‌تر چنین می‌کند. مهم و ضروری است که درمورد هزینهٔ قوطی، علاوه برقیمت موادآن، مخارج ساخت‌آن درکارخانه را نیز به حساب آوریم. درصورتی‌که پرخرج‌ترین، عمل‌وصل‌کردن پهلو ولبه‌های قوطی باشد، هزینهٔ کل‌آن، دراقتصادی‌ترین مقطع، متناسب است با

$$c=4\sqrt{3}r^2+2\pi rh+k(4\pi r+h)$$

که درآن k طولی‌است که می‌تواند به‌ازای قیمت‌خرید واحد سطح‌ماده (بااین‌تعریف که معادلهٔ مزبور ازلحاظ ابعادسازگار است) وصل‌شود. دراین‌صورت تکرارتدبیرهای پیشین به

$$4\sqrt{3}r-\frac{v}{r^2}+2\pi k-\frac{kv}{\pi r^3}=0 \qquad (6)$$

به عنوان‌شرطی‌که باید توسط‌طرحی‌بهینه، البته همراه با (۲)، برآورده‌شود، می‌انجامد.

استخراج اطلاعات‌از (۶) بـه ابتکار نیاز دارد. تحلیل ابعادی وجود رابطه‌ای‌رابین (h/r) و(v/k^3) مطرح‌می‌کند، ودر واقع (۶) آن‌رابه دست می‌دهد. بعدازتقسیم طرفین (۶) بر r ، جمله‌های آن‌رابه صورت زیردسته‌بندی می‌کنیم.

$$4\sqrt{3}-\frac{v}{r}\left(\frac{1}{r}\right)^2+\frac{2\pi k}{r^{1/3}}\left(\frac{1}{r}\right)^{2/3}-\frac{kv}{\pi^{4/3}}\left(\frac{1}{r}\right)^{8/3}=0$$

و به جای جمله‌های $\left(\frac{1}{r}\right)$ می‌توانیم $(\pi h/v)^{1/3}$ قرارداده مورد زیررا به دست‌آوریم

$$4\sqrt{3}-\frac{v}{r}\cdot\left(\frac{\pi h}{v}\right)+\frac{2\pi k}{r^{1/3}}\left(\frac{\pi h}{v}\right)^{1/3}-\frac{kv}{\pi r^{4/3}}\left(\frac{\pi h}{v}\right)^{4/3}=0$$

و سرانجام، ازآن

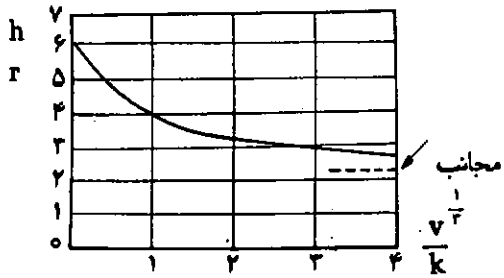
$$\left(4\sqrt{3}-\frac{\pi h}{v}\right)+\left(\frac{\pi k^3}{v}\right)\left(\frac{h}{r}\right)^{1/3}\left(2\pi-\frac{h}{r}\right)=0 \qquad (7)$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان به عنوان معادله‌ای درجه چهارم برحسب $(h/r)^{1/3}$، با k^3/v به عنوان‌پارامتر، درنظرگرفت، اما دراین مورد چندین مطلب بـلافاصله آشکار می‌شود. ابتدا، اگر وصل‌کردن ارزان (k) یـا قوطی بـزرگ (V) بـاشد، در ایـن صورت طرح اولیه $(h/r=4\sqrt{3}/\pi)$ را داریم. درحالات مقابلی‌که درآنها وصل‌کردن گران، یا قوطی‌کوچك است، $h/r=2\pi$ رابه‌دست می‌آوریم. این رابطه، هزینه‌های بسیار زیاد مربوط‌به ماده‌را باهزینه‌های‌کارخانه متناظر می‌کند، نیز، به ازای هـروضعیت دیگری، بنابه قضیهٔ p ، مقداری از (h/r) بین‌این دوحد موجود است‌که در (۷) صدق می‌کند.

رسم‌نمودار رابطهٔ‌کامل (۷)، به سادگی، با تبدیل‌آن به صورت

$$\frac{v}{k^3}=\pi\left(\frac{h}{r}\right)\left[\frac{2\pi-h/r}{\pi h/r-4\sqrt{3}}\right]^3$$

که اجازهٔ طرح این‌تصویر را می‌دهد، انجام می‌گیرد.



خط سیر پیشگویی‌شدهٔ مزبور را، که قوطیهای بزرگ باید تقریباً مربع باشند، درحالی که قوطیهای کوچك باید بلند و باریك باشند، می‌توان در سوپر مارکتی تحقیق کرد. به عنوان مثال، قوطیهای مارمالاد پرتقالی را با قوطیهای روغن زیتون مقایسه کنید. با این‌همه قوطیهایی موجودندکه با خط‌سیر مزبور جور درنمی‌آیند. گاهی توضیحی مستخرج ازطبیعت محصول موجود است (فی‌المثل، حلقه‌های آناناس). قوطیهای بسیار کوچك غالباً از آن چه‌انتظار می‌رود، شاید برای راحت به‌کار بردن در بازکن، کوتاه وعریض‌ترند. راحت‌بودن نیز می‌تواند درموردقوطیهایی که از آنها می‌نوشند رعایت شود.

به طور خلاصه، شکست مدل اولیه در پیشگویی شکل واقعی یك قوطی حلبی، از مدلی بسیار ساده بودن آن ناشی می‌شود.

مدلهای کاملتری که در حوزهٔ ریاضیات دبیرستانی قرار دارند، شروع به آشکار کردن تابع واقعی می‌کنند. می‌توان بدون پیچیده کردن تحلیل به جست‌وجوی بسیاری از سؤالات دیگر پرداخت. مثلاً، آیا در صورتی که ورقه‌های فلزی، تنها در اندازه‌های استاندارد در دسترس باشند، در استدلال فوق تأثیر می‌کنند؟ یا اگر بدانیم که ماشینهای قوطی‌سازی عملاً چگونه کار می‌کنند؟ آیا طرحمان در موردحجم مفروضی است؟ یا وزن مفروضی از محتویات قوطی؟ چگونه قوطیها برای حمل و نقل بسته‌بندی می‌شوند؟ اندکی منفك‌شدن از ابعادبهینه چقدرهزینه برمی‌دارد؟ آیا این‌هزینه با ذخیرهٔ دیگری جبران می‌شود؟

به این ترتیب مجال فراوانی برای گسترش درکی راستین از چگونگی سهم ریاضیات در تکنولوژی موجود می‌شود.

تفریح اندیشه ۳



خانم B، قطار به مقصد خانه‌اش را در ساعت ۴ سوار می‌شود و در ساعت ۶ به ایستگاه مقصد می‌رسد. همه روزه، شوهرش که با سرعتی ثابت رانندگی می‌کند، او را در ایستگاه مورد بحث ملاقات می‌کند. یک روز B، قطار را یک ساعت زودتر می‌گیرد و در ساعت ۵ وارد می‌شود. شوهرش برای ملاقات با او منزل را در ساعت همیشگی ترک می‌کند. بنابراین B پیاده به سمت خانه حرکت می‌کند. شوهر B او را در راه می‌بیند و آنها ۲۰ دقیقه زودتر از وقت معمول به خانه می‌رسند. B چند دقیقه پیاده حرکت کرده است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

ادب ریاضی

(The Beauty of Doing Mathematics , Serge Lang)

- زیبایی ریاضیات

آنچه را که شخصی واقعی می‌یابد، شخص دیگر مجرد تشخیص می‌دهد. این موضوع نسبت به ذهنتان، دانسته‌هاتان، استعداد ریاضیتان، هوشتان، ذوقتان، و احساستان کاملاً نسبی است. مفهوم مطلقی از اینکه واقعی چیست و مجرد کدام است وجود ندارد. فی‌المثل، ممکن است چیزی که دیروز یا امروز بس مجردش یافته‌اید، فردا در نظرتان واقعی بیاید... این موضوع، تا اندازه‌ای، مسألهٔ عادت است، و به اوضاع و احوال بستگی دارد. در این مورد پاسخ مطلقی موجود نیست. البته، ریاضی‌دان می‌تواند کاری را که دیگران درک نمی‌کنند انجام دهد. و این دیگران می‌توانند در بس مجرد یافتن آن، واکنش روانی داشته باشند، و آن را به جای «درک نمی‌کنم» بگویند.

پوانکاره ادعا کرد که عنصر غالب در آفرینش ریاضی، ره یافت زیبایی شناسانه است نه دیدگاه منطقی. هاردی در جایی نوشت که الگوهای ریاضیدان، همچون الگوهای نقاش یا شاعر، باید زیبا باشند. دیراک، فیزیکدان بزرگ نظری، نوشت که زیبایی نهفته در معادلات یک فیزیکدان خیلی مهمتر از سازگاری این معادلات با واقعیات تجربی است... قضاوت زیبایی شناسانه در ریاضیات وجود دارد، اهمیت دارد، می‌تواند تعلیم داده شود، می‌تواند از نسلی به نسل دیگر، از معلم به شاگرد و از نویسنده به خواننده، منتقل شود. اما در این باره که این ره یافت چیست و چگونه عمل می‌کند، توصیف رسمی چندانی در دست نیست.

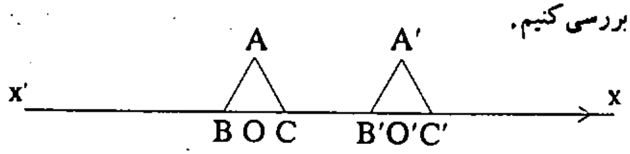
از «تجربهٔ ریاضی» اثر فیلیپ دیویس و روبن هرش
جُنگ ریاضی

مثالهای هندسی برای تابعهای گسسته

دکتر احمد شرف‌الدین

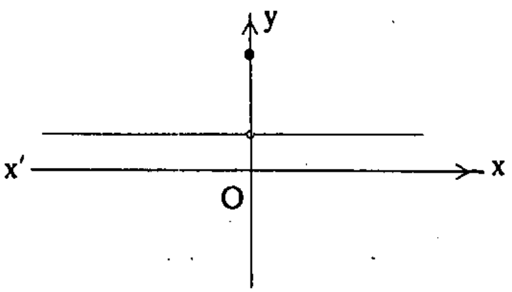
مثالهای هندسی در بعضی موارد احکام ریاضی را ملموس و فهم آنها را آسان می‌کنند. در سطور زیر چند مثال هندسی برای تابعهای گسسته طرح می‌کنیم.

مثال (۱). در صفحه P دو مثلث متساوی‌الاضلاع مساوی ABC و A′B′C′ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که دو ضلع BC و B′C′ آنها بر روی محور x′ox واقع‌اند و هر دو مثلث در یک طرف آن محور قرار دارند. وسطهای دو پاره‌خط BC و B′C′ را به ترتیب O و O′ می‌نامیم. طول نقطه O′ بر محور x′ox را با x نشان می‌دهیم. شکل حاصل از اجتماع دو مثلث مذکور را φ می‌نامیم. مثلث ABC را ثابت نگاه می‌داریم و مثلث A′B′C′ را روی محور x′x می‌لغزانیم. می‌خواهیم تغییرات تعداد محورهای تقارن شکل φ را برحسب x بررسی کنیم.

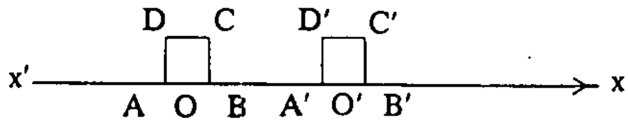


تعداد محورهای تقارن شکل φ را y می‌نامیم. y تابع x است. این تابع را به‌صورت $y = f(x)$ می‌نویسیم.

هنگامی که نقطه O′ در سمت راست O قرار دارد تعداد محورهای تقارن شکل φ مساوی یک است. اما هنگامی که مثلث A′B′C′ بر مثلث ABC منطبق شود یعنی $x = 0$ شود شکل φ یکمرتبه دارای سه محور تقارن می‌شود. وقتی نقطه O′ در سمت چپ O قرارگیرد شکل φ دارای یک محور تقارن است. پس تابع $y=f(x)$ به ازای $x \neq 0$ دارای یک محور تقارن و به ازای $x = 0$ دارای سه محور تقارن است. این تابع در $x = 0$ گسسته است. نمودار تابع مورد نظر چنین است.



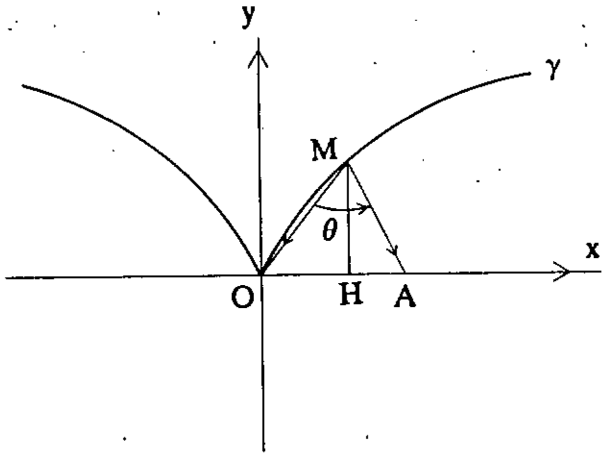
مثال (۲). در صفحه P دو مربع مساوی ABCD و A′B′C′D′ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که دو ضلع AB و A′B′ آنها بر روی محور x′ox واقع‌اند و هر دو مربع در یک طرف آن محور قرار دارند. وسطهای پاره‌خطهای AB و A′B′ را به ترتیب O و O′ می‌نامیم. طول نقطه O′ بر محور x′x را با x نشان می‌دهیم. شکل حاصل از اجتماع دو مربع مذکور را φ می‌نامیم. مربع ABCD را ثابت نگاه می‌داریم و مربع A′B′C′D′ را روی محور x′x می‌لغزانیم. می‌خواهیم تغییرات تعداد محورهای تقارن شکل φ را برحسب x بررسی کنیم.



تعداد محورهای تقارن شکل φ را y می‌نامیم. y تابع x است. این تابع را به‌صورت $y=f(x)$ می‌نویسیم. به ازای تمام مقادیر $x \neq 0$ شکل φ دارای دو محور تقارن است. به ازای $x = 0$ شکل دارای چهار محور تقارن است. تابع $y = f(x)$ به ازای $x = 0$ گسسته است.

مثال (۳). دو مثال بالا را در مورد دو چند ضلعی منتظم و همچنین دو چند وجهی منتظم بررسی کنید.

مثال (۴). در دستگاه مختصات دکارتی xoy، منحنی γ نمودار معادله $y = x^{\frac{2}{3}}$ و نقطه $A(1,0)$ را درنظر می‌گیریم. نقطه H را روی محور $x'x$ درنظر می‌گیریم و طول آن را x می‌نامیم. از نقطه H عمودی بر خط $x'x$ رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن خط عمود را با منحنی γ، نقطه M می‌نامیم. اندازه زاویه $(\vec{MO}, \vec{MA})$ را θ می‌نامیم. θ تابع x است زیرا به ازای هر نقطه H از محور $x'x$ فقط یک نقطه M از منحنی γ حاصل می‌شود و به ازای هر نقطه $M \neq O$ از منحنی γ یک، فقط یک زاویه θ به‌دست می‌آید. این تابع را به‌صورت $\theta = f(x)$ می‌نویسیم.



هنگامی که نقطه H بر نقطه O قرار گیرد نقطه M بر نقطه O قرار خواهد گرفت. در این صورت بردار $\vec{MA}$ بر بردار $\vec{OA}$ منطبق می‌شود اما امتداد بردار $\vec{MO}$ نامعین خواهد بود. لذا تابع $\theta = F(x)$ به ازای $x = 0$ تعریف نشده است. تابع مذکور به ازای $x = 0$ گسسته است.

ادب ریاضی

مدل‌سازی ریاضی چیست؟

مدل سازی ریاضی[1] عبارت از کاربرد مهارتهای ریاضی[2] در به دست آوردن پاسخهای مفید به مسائل واقعی است.

یادگیری به کار بردن مهارتهای ریاضی بسی مشکلتر از یادگیری خود ریاضیات است.

مدلها در حوزهٔ بسیار وسیعی از کاربردها به کار می‌روند، به طوری که بعضی از آنها در ابتدا نشان نمی‌دهند که طبیعتی ریاضی دارند.

مدلها غالباً سنجش سریع و آسان موارد مختلف را میسر کرده، منجر به جوابهای بهینه‌ای[3] می‌شوند که در غیر این صورت واضح نیستند.

در مورد مدل سازی ریاضی نه قواعد دقیق[4] نه پاسخهای صحیح[5] موجود نیست.

مدل سازی را تنها از راه انجام دادن می‌توان آموخت.

از:

Guide To Mathematical Modelling, Dilwyn Edwards & Mike Hamson

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

1. Mathematical Modelling
2. Mathematical Skills
3. Optimal Solutions
4. Precise Rules
5. Correct Answers

اثبات نادرستی و ناتمامی قواعد استنتاج

غلامرضا یاسی‌پور

> حقیقت را چو ما صد پاره کردیم
> تمیز ثابت و سیاره کردیم
> در آن عالم که جزو از کل فزون است
> قیاس رازی و طوسی جنون است[1]
> «اقبال لاهوری»

اثبات نادرستی[2]

درصورتی که بتوانیم نشان دهیم که تخصیصی از ارزشهای راستی[3] چنان موجود است که به ازای آن جمیع مقدمات[4] استدلالی[5] راست و نتیجهٔ[6] آن دروغ است ثابت کرده‌ایم که استدلال مورد بحث نادرست است. این کار را در حالت کلی با استفاده از رسم جدول ارزش[7] انجام می‌دهیم، اما این طریق به خصوص در مواردی که تعداد متغیرهای گزاره‌ای[8] موجود در استدلال زیاد باشد، طریقی طولانی و پرزحمت است. در این صورت اولی چنان است که طریق زیر را، که بسیار ساده‌تر است، اما به اندکی تمرکز حواس نیاز دارد، انتخاب کنیم.

در این طریق ابتدا از نتیجه آغاز می‌کنیم و به متغیرهای گزاره‌ای واقع در آن ارزشهایی چنان تخصیص می‌دهیم که آن را دروغ کنند. سپس به سراغ مقدمات می‌رویم و با رعایت ارزشهای قبلاً داده شده ارزشهایی به متغیرهای گزاره‌ای باقیمانده چنان تخصیص می‌دهیم که مقدمات را راست کنند. اگر چنین عملی امکان‌پذیر باشد استدلال‌مان نادرست است والاّ درست می‌باشد.

مثال ۱. نادرستی استدلال زیر را اثبات کنید:

اگر باران می‌بارد یا بهار است یا پاییز.
اگر پاییز باشد هوا سرد و ناخوشایند است.
هوا سرد نیست.
درنتیجه، اگر باران می‌بارد هوا ناخوشایند است.

فرض می‌کنیم:

A: باران می‌بارد
B: بهار است
C: پاییز است
D: هوا سرد است
E: هوا ناخوشایند است

و به این ترتیب استدلال فوق را به صورت زیر علامتی می‌کنیم:

$A \Rightarrow (B \vee C)$

$C \Rightarrow (D \vee E)$

$\sim D$

$\therefore\ A \Rightarrow E$

اکنون کاری می‌کنیم که نتیجهٔ استدلال یعنی $A \Rightarrow E$ دروغ شود و برای این کار به A و E به‌ترتیب T و F را تخصیص می‌دهیم. برای این‌که مقدمهٔ سوم یعنی D~ راست باشد باید D دروغ باشد، در این صورت باتوجه به این‌که E هم دروغ بوده برای راست شدن مقدمهٔ دوم $(C \Rightarrow (D \vee E))$ ناچاریم که به C ارزش F را تخصیص دهیم. اکنون به سراغ مقدمهٔ اول می‌رویم. به مقدم[9] آن یعنی A قبلاً ارزش T داده‌ایم، بنابراین برای این که مقدمه راست شود باید تالی[10] آن راست باشد. اما تالی آن ترکیبی فصلی[11] است که یک مؤلفهٔ[12] آن (C) قبلاً F گرفته، بنابراین باید به مؤلفهٔ دیگر آن (B)، T بدهیم. به این ترتیب توانستیم به متغیرهای گزاره‌ای واقع در صورت استدلالی‌مان ارزشهای راستی‌ای چنان تخصیص بدهیم که مقدمات استدلال را راست ونتیجهٔ آن‌را دروغ کنند، و دراین‌صورت استدلال نادرست است.

برای سادگی کارمی‌توان مراحل فوق را به‌ترتیب و با آغاز ازنتیجه و بعد مقدمات و سپس متغیرهای گزاره‌ای درسطری مطابق سطر زیر نوشت:

$A \Rightarrow E$	$\sim D$	$C \Rightarrow (D \vee E)$	$A \Rightarrow (B \vee C)$	A	B	C	D	E
F	T	T	T	T	T	F	F	F

مثال ۲. نادرستی استدلال زیر را اثبات کنید:

$T \equiv U$

$U \equiv (V \wedge W)$

$V \equiv (T \vee X)$

$T \vee X$

$\therefore\ T \wedge X$

چون به T یا X ارزش F دهیم نتیجه دروغ می‌شود، در این صورت دو حالت داریم:

۱) ارزش T دروغ و ارزش X راست است. آنگاه $T \vee X$ راست می‌شود، پس مقدمهٔ ۴ راست است و برای راست شدن مقدمهٔ ۳ باید V راست باشد. چون T دروغ است باید U دروغ باشد تا مقدمهٔ ۱ راست شود و به این ترتیب برای راستی مقدمهٔ ۲ باید مؤلفهٔ دوم آن $(V \wedge W)$ دروغ باشد و چون V راست است ناچار باید W دروغ باشد. به این ترتیب سطر زیر را داریم:

T	U	V	W	X
F	F	T	F	T

۲) ارزش T راست و ارزش X دروغ است. با استدلالی مشابه استدلال فوق سطر زیر را خواهیم داشت:

T	U	V	W	X
T	T	T	T	F

تبصره. در اینجا حالتی که در آن T و X هر دو دروغ باشند به کار نمی‌آید زیرا به ازای این حالت، مقدمهٔ ۴ $(T \vee X)$ دروغ می‌شود.

اکنون به اثبات ناتمام بودن قواعد استنتاج[13]مان می‌پردازیم. نوزده قاعده‌ای که تاکنون معرفی شده‌اند ناتمام[14]اند، به عبارت دیگر استدلال‌های درست تابع ارزشی[15] وجود دارند که درستی‌شان را نمی‌توان با استفاده از این نوزده قانون اثبات کرد. در مورد بحث و تعیین این ناتمامی[16] لازم است که تصور خاصیت ویژه‌ای را که «نسبت به یک مجموعهٔ قوانین استنتاج[17] موروثی» است معرفی کنیم، و برای این منظور تعریف زیر را مطرح می‌کنیم:

> خاصیت ویژهٔ $\varnothing$ نسبت به یک مجموعهٔ قوانین استنتاج موروثی است اگر و تنها اگر وقتی که $\varnothing$ به یک یا بیشتر از یک گزاره تعلق داشته باشد به هر گزاره که به کمک آن قوانین استنتاج از آنها استنتاج می‌شود نیز متعلق باشد.

به عنوان مثال، راستی خاصیت ویژه‌ای است که نسبت به قوانین نوزده‌گانهٔ استنتاجی که قبلاً معرفی شدند موروثی است. همان طور که قبلاً نیز خاطرنشان شده، هر نتیجه، درصورتی که بتواند به کمک نوزده قانون استنتاجمان از مقدمات راست استنتاج شود، راست است، و در حقیقت، نباید هیچ یک از قوانین استنتاجی را که راستی نسبت به آنها موروثی‌نیست به کار بریم.

اکنون برای اینکه ثابت کنیم که یک مجموعهٔ قوانین استنتاج ناتمام است باید خاصیت ویژهٔ $\varnothing$ و استدلال درست α را طوری پیدا کنیم که

(۱) $\varnothing$ نسبت به آن مجموعهٔ قوانین استنتاج موروثی باشد، و

(۲) $\varnothing$ به مقدمات α متعلق باشد اما به نتیجهٔ آن تعلق نداشته باشد.

خاصیت ویژهٔ راستی نسبت به هر مجموعه از قوانین استنتاج که ممکن است به آن به طوری جدی علاقه‌مند باشیم موروثی است، و بنابراین در شرط (۱) صدق می‌کند. اما از آنجا که α یک استدلال درست است، از تعریفمان از درستی بلافاصله نتیجه می‌شود که راستی هیچ گاه نمی‌تواند در شرط (۲) صدق کند. درنتیجه برای اثبات ناتمامی قوانین نوزده‌گانه‌مان، باید خاصیت ویژهٔ دیگری غیر از راستی، که نسبت به نوزده قانونمان موروثی باشد، و بتواند به مقدمات استدلال درستی مانند α متعلق باشد اما به نتیجهٔ آن تعلق نداشته باشد بیابیم.

برای به دست آوردن چنین خاصیت ویژه‌ای، نمونهٔ سه عضوی‌ای را، که علامات واقع در قوانین نوزده‌گانه‌مان بتوانند برحسب آن تفسیر شوند، معرفی می‌کنیم. این سه عضو اعداد ۰، ۱ و ۲ اند که نقشهایی مشابه نقشهای ارزشهای راستی راست (T) و دروغ (F) قبلاً معرفی شده ایفا می‌کنند. هر گزاره یکی از این سه عضو نمونه را به خود تخصیص می‌دهد، و گفته می‌شود که یکی از سه مقدار ۰، ۱، یا ۲ را به‌خود می‌گیرد، قبول می‌کند یا دارد. درست چون در موارد قبل که متغیرهای گزاره‌ای p، q، r، ... مجاز بودند که دو ارزش راستی T و F را بگیرند در اینجا نیز مجاز می‌کنیم که متغیرهای گزاره‌ای p، q، r، ... سه ارزش ۰، ۱ و ۲ را بگیرند.

پنج علامت «~»، «∧»، «∨»، «⇒» و «≡» را، که در نوزده قانونمان ظاهر می‌شوند، می‌توان بار دیگر برای (یا برحسب) نمونهٔ سه عضوی‌مان بااستفاده از جداول سه ارزشی زیر تعریف کرد:

p	~p
۰	۲
۱	۱
۲	۰

p	q	p ∧ q	p ∨ q	p ⇒ q	p ≡ q
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۲	۲	۰	۲	۲
۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۲	۱	۱	۱
۲	۰	۲	۰	۰	۲
۲	۱	۲	۱	۰	۱
۲	۲	۲	۲	۰	۰

در مورد این تعاریف می‌توان تعاریف تحلیلی (اما معادل) به گونه‌ای دیگری را که در آنها «min (x,y)» نمایشگر حداقل اعداد x و y و «max (x,y)» نمایشگر حداکثر اعداد x و y است، به ترتیب زیر، به دست داد.

$$\sim p = ۲ - p$$
$$p \wedge q = \max(p, q)$$
$$p \vee q = \min(p, q)$$
$$p \Rightarrow q = \min(۲ - p, q)$$
$$p \equiv q = \max(\min(۲ - p, q), \min(۲ - q, p))$$

خاصیت ویژهٔ مطلوب $\varnothing$ که نسبت به نوزده قانون استنتاجمان

موروثی است،خاصیت ویژهٔ دارا بودن ارزش صفر است. برای اینکه ثابت کنیم که این خاصیت نسبت به قوانین نوزده‌گانهٔ مورد بحث موروثی است کافی است که نشان دهیم که نسبت به هر یک از آنها موروثی است، این مطلب را می‌توان درمورد هریک از این قوانین به کمک جدولی سه ارزشی نشان داد. به عنوان مثال، این مطلب را که داشتن ارزش ۰ نسبت به قانون انفصال موروثی است، می‌توان با استفاده از بررسی جدول فوق که ارزش «$p \Rightarrow q$» را به‌عنوان تابعی از ارزشهای «p» و «q» تعریف می‌کند ملاحظه کرد. در این جدول مقدمات «p» و «$p \Rightarrow q$» تنها در سطر اول ارزش ۰ دارند، و در این سطر نتیجهٔ «q» نیز ارزش ۰ دارد. بررسی همین جدول نشان می‌دهد که داشتن ارزش ۰ برای تسهیل، ترکیب عطفی، و جمع نیز موروثی است. قرار دادن «$\sim p$» و «$\sim q$» در ستونهای اضافی نشان می‌دهد که داشتن ارزش ۰ نسبت به انفصال نقیض و قیاس فاصل نیز موروثی است. این مطلب که ارزش مورد بحث نسبت به قیاس فرضی نیز موروثی است را می‌توان با استفاده از جدول روبرو نشان داد:

در این جدول تنها سطرهای اول، دهم، نوزدهم، بیست و دوم، بیست و پنجم، بیست و ششم، و بیست و هفتم‌اند که مقدمات «$p \Rightarrow q$» و «$q \Rightarrow r$» در آنها ارزش ۰ دارند، و در هر یک از اینها نتیجهٔ «$p \Rightarrow r$» نیز دارای ارزش ۰ است، گرچه برای نشان دادن اینکه ارزش ۰ داشتن نسبت به برهان قاطع ذوحدین بانی و برهان قاطع دو حدین مخرب نیز موروثی است به جدولهایی بزرگتر از این جدول نیاز است، اما این جداول به سادگی رسم می‌شوند. (هر چند که ابداً به رسم آنها نیاز نیست، چه تعاریف تحلیلی سابق‌الذکر می‌توانند برای نشان دادن اینکه ارزش ۰ نسبت به برهانهای ذوحدین، آن چنان که بعداً نشان می‌دهیم، موروثی است، به کار روند.)

هنگامی که جداول سه ارزشی را، برای اثبات اینکه داشتن ارزش ۰ نسبت به این عمل که به جای گزاره‌ها معادلهای منطقی‌شان را قرار دهیم موروثی است، رسم می‌کنیم، به این موضوع نیز توجه می‌کنیم که هر چند که لازم نیست که خود دو شرطیها ارزش ۰ داشته باشند، عباراتی که در طرفین علامت تعادل واقع شده‌اند لزوماً دارای یک ارزشند. به

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۰	۲	۰	۲	۲
۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۲	۱	۱	۲
۰	۲	۰	۲	۰	۰
۰	۲	۱	۲	۰	۱
۰	۲	۲	۲	۰	۲
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۲	۰	۲	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۲	۱	۱	۱
۱	۲	۰	۱	۰	۰
۱	۲	۱	۱	۰	۱
۱	۲	۲	۱	۰	۱
۲	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۱	۰	۱	۰
۲	۰	۲	۰	۲	۰
۲	۱	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۱	۰	۱	۰
۲	۱	۲	۰	۱	۰
۲	۲	۰	۰	۰	۰
۲	۲	۱	۰	۰	۰
۲	۲	۲	۰	۰	۰

عنوان مثال،در جدول مربوط به قانون اول دومورگان، (صفحه‌بعد) عبارات معادل «$\sim(p \wedge q)$» و «$\sim p \vee \sim q$» در هر سطر دارای یک ارزشند حتی اگر گزارهٔ تعادلشان از داشتن ارزش ۰ در سطرهای دو، چهار، و پنج خودداری کند. اما باید واضح باشد که داشتن ارزش ۰ نسبت به قرار دادن هر گزارهٔ معادل به جای هر گزاره یا قسمتی از آن، موروثی است. می‌توان دراثبات دیگری از این موضوع که داشتن ارزش

۰ نسبت به این نوزده قانون موروثی است از تعاریف تحلیلی علایم منطقی‌مان استفاده به‌عمل آورد، و به‌عنوان مثال، این مطلب را که داشتن ارزش ۰ نسبت به برهان قاطع ذوحدین بانی موروثی است، می‌توان توسط استدلال زیر نشان داد. بنا به فرض، «$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$» و «$p \vee r$» هردو دارای ارزش ۰ اند. درنتیجه، هم «$p \Rightarrow q$» هم «$r \Rightarrow s$» ارزش ۰ دارند، بنابراین یا $p = ۲$ یا $q = ۰$ و، یا $r = ۲$ یا $s = ۰$ است. از آنجاکه «$p \vee r$» دارای ارزش ۰ است، یا $p = ۰$ یا $r = ۰$ می‌باشد. اگر $p = ۰$، دراین صورت $p \neq ۲$ و از آن $q = ۰$، و اگر $r = ۰$ در این صورت $r \neq ۲$ و از آن $s = ۰$، بنابراین یا $q = ۰$ یا $s = ۰$، که از آن همان‌طور که می‌خواستیم نشان دهیم «$q \vee s$» ارزش ۰ دارد.

p	q	~p	~q	p∧q	~(p∧q)	~p∨~q	~(p∧q)≡(~p∨~q)
۰	۰	۲	۲	۰	۲	۲	۰
۰	۱	۲	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۲	۲	۱	۲	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۱	۱	۲	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۲	۲	۰	۰	۰
۲	۱	۰	۰	۲	۰	۰	۰
۲	۲	۰	۱	۲	۰	۰	۰

اکنون که نشان دادیم که خاصیت ویژهٔ داشتن ارزش ۰ نسبت به قوانین نوزده‌گانه‌مان موروثی است، برای اثبات ناتمامی این قوانین تنها به این نیاز است که استدلال درستی را ارائه دهیم که مقدماتش ارزش ۰ دارند و نتیجه اش‌ارزش ۰ ندارد. چنین استدلالی

$$A \Rightarrow B$$
$$\therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$$

است که درستی‌اش به سادگی با استفاده از جدول ارزش مشخص می‌شود. در این استدلال، درحالتی که «A» ارزش ۱ و «B» ارزش ۰ دارد، مقدمهٔ «$A \Rightarrow B$» دارای ارزش ۰ است، درحالی‌که نتیجهٔ «$A \Rightarrow (A \wedge B)$» ارزش ۱ دارد. به این ترتیب نوزده قانونی که تاکنون معرفی شده‌اند ناتمامند.

\+ \+ \+

مراجع:

Irving M.Copi , Symbolic Logic

یادداشتها

۱. از کتاب گلشن راز جدید که اقبال لاهوری آن را در مقابل گلشن راز شیخ محمود شبستری سروده است. در این بیت مقصود از رازی «امام فخر رازی» و منظور از طوسی «خواجه نصیر طوسی» است.

2 - Proving Invalidity
3 - Truth Values
4 - Premisses
5 - Argument
6 - Conclusion
7 - Truth Table
8 - Statement Variable
9 - Antecedent
10 - Consequent
11 - Disjunction
12 - Component

۱۳. به مقالهٔ قواعد استنتاج مجلهٔ برهان شمارهٔ ۳ سال اول رجوع شود.

14 - Incomplete

۱۵. Truth Functionally Valid Arguments، استدلالاتی که مقدمات و نتیجه‌شان از گزاره‌های ساده یا مرکب تابع ارزش تشکیل شده باشند، و گزاره‌های مرکب تابع ارزش گزاره‌های مرکبی هستند که ارزش‌شان از ارزشهای مؤلفه‌هاشان تبعیت می‌کند، به‌عنوان مثال $p \wedge q$ یک گزارهٔ مرکب تابع ارزش است، زیرا ارزشش به ارزشهای مؤلفه‌های آن یعنی p و q وابسته است، و از آنها پیروی می‌کند.

۱۶. این اثبات از Professor Leo Simons از دانشگاه سین سیناتی است.

17- Set of Rules of Inference

ادب ریاضی

شرح حال اقلیدس

دربارهٔ اقلیدس حتی کمتر از فیثاغورس می‌دانیم. تنها این را می‌دانیم که حدود ۳۰۰ ق.م. رشد کرد و در اسکندریه، شهر یونانی واقع در مصری که در ۳۲۲ ق.م. توسط اسکندر بنا شد، آموزش دید. دو داستان در مورد او گفته‌اند. در اولی ـ همانند داستانی که در مورد سایخموس و اسکندر گفته شده ـ اقلیدس به سلطان بطلمیوس چنین می‌گوید که «در هندسه راه شاهانه وجود ندارد» و دومی دربارهٔ دانشجویی است که سؤال تکراری «فایدهٔ آموختن ریاضیات چیست؟» را مطرح کرده است. طبق روایت داستان، اقلیدس غلام خود را می‌خواند و می‌گوید: «سکه‌ای به او بده چه او می‌خواهد از آنچه می‌آموزد فایده برد.»

مهمترین واقعیت زندگی اقلیدس بدون شک نوشتن کتاب مقدمات[1] است، گرچه نمی‌دانیم چه مقدار از ریاضیات واقع در آن عملاً کار خود او بوده است.

محقق است که هندسهٔ مقدماتی مثلثها و دوایر، پیش از روزگار اقلیدس شناخته شده بود. بعضی از جالبترین قسمتهای مقدمات نیز از ریاضیدانهای پیشین‌اند. نظریهٔ گنگها در کتاب V، هم چنان که «روش افناء» در کتاب XII مقدمات، منسوب به اودوکسوس[2] (حدود ۴۰۰-۳۴۷ ق.م.) است. نظریهٔ چند وجهی‌های منتظم در کتاب XIII، (حداقل جزئاً)، منسوب به تئتتوس[3] (حدود ۴۱۵-۳۶۹ ق.م.) است. اما شرکت اقلیدس در تنظیم و نشر معرفت ریاضی، باعث شد که سهم تحقیق او، هر چه که بوده، از رشد باز ایستد. مدت ۲۰۰۰ سال مقدمات اقلیدس نه تنها هستهٔ مرکزی تعلیم ریاضی بلکه قلب فرهنگ غربی بود. در واقع بیشتر ستایشهای حرارت‌آمیز از مقدمات نه از جانب ریاضیدانها که از طرف فیلسوفان، سیاستمداران، و دیگران بود.

1. Elements
2. Eudoxus
3. Theaetetus

روح واقعی لذت، اعتلا و ماورای انسان بودن، که سنگ محک برترین فضیلتهاست، به همان قطعیت شعر، در ریاضیات نیز پیدا می‌شود.

برتراندراسل ـ ترجمهٔ محمد هادی فراهی
پیک ریاضی ج ۳ ش ۴

طرح و حلّ مسائل اساسی ریاضی (۲)

به روشهای مقدماتی

مساله فرعی

چند جواب درست و مثبت معادلهٔ :

$$x+y+z=n$$

در نامساویهای $x \leqslant y+z$ ، $y \leqslant x+z$ ، $z \leqslant x+y$ صدق می‌کنند؟ در این مورد باید جوابهائی که تنها در ترتیب جملات متفاوتند، متفاوت در نظر گرفته شوند.

حل. از آنجا که $z=n-x-y$ ، جواب مسأله به مجرد این‌که x و y مشخص شوند به‌طور کامل معین می‌شود. اکنون به بررسی شرایطی که باید x و y، به خاطر این‌که x، y و $z=n-x-y$ در نامساویهای داده شده صدق کنند، برقرار نمایند می‌پردازیم.

۱. نامساوی $z \leqslant x+y$ ، $n-x-y \leqslant x+y$ را، که معادل $x+y \geqslant \frac{n}{۲}$ است، به‌دست می‌دهد.

۲. نامساوی $y \leqslant x+z$ ، $y \leqslant x+n-x-y$ را، که معادل $y \leqslant \frac{n}{۲}$ است، به‌دست می‌دهد.

۳. نامساوی $x \leqslant y+z$ ، $x \leqslant y+n-x-y$ ، یا $x \leqslant \frac{n}{۲}$ را به‌دست می‌دهد.

۴. نامساویهای $x>0$ ، $y>0$ ، $z>0$ اینک به $x>0$ ، $y>0$ ، $x+y<n$ تبدیل می‌شوند.

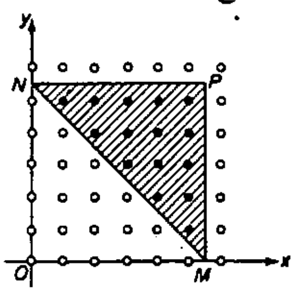
نتیجهٔ مسألهٔمان تعیین تعداد ازواج اعداد صحیح (x,y) با

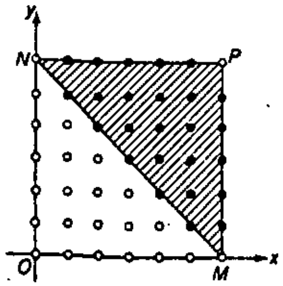
$$0<x \leqslant \frac{n}{۲}\ ,\ 0<y \leqslant \frac{n}{۲}\ ,\ \frac{n}{۲} \leqslant x+y<n$$

است. شرایط فوق را می‌توان به‌طور هندسی به‌طریق زیر تعبیر کرد. دستگاه مختصات قائمی در صفحه، چون در شکل زیر، رسم کرده، فرض می‌کنیم که (x,y) مختصات نقطه‌ای در این دستگاه باشد. سه خطی که معادلاتشان :

$$x=\frac{n}{۲}\ ،\ y=\frac{n}{۲}\ ،\ \text{و}\ x+y=\frac{n}{۲}$$

هستند مثلث سایه‌خورده را تشکیل می‌دهند، و نامساویهامان به این خواسته منجر می‌شوند که (x,y) باید داخل این مثلث یا برمرز آن، اما نه بریکی از رئوس M ، N ، Pی آن، باشد. بنابراین باید تعداد نقاط با مختصات صحیح واقع در این ناحیه را (که در شکلها با نقاط سیاه مشخص شده‌اند) معین کنیم. اکنون لازم است که مطابق با این که n زوج یا فرد باشد، دو حالت تمیز دهیم.





حالت ۱: n زوج. در این حالت $\frac{n}{۲}$ صحیح است، و وضعیت نشان داده شده در شکل الف.(با $n = ۱۲$) را داریم. بر قطعهٔ OM ، $۱ + \frac{n}{۲}$ نقطه موجودند. در نتیجه تعداد کل نقاط واقع در مربع OMPN برابر $(۱ + \frac{n}{۲})^۲$ است. $۱ + \frac{n}{۲}$ نقطه از این نقاط بر قطر مربع واقع‌اند، وبنابراین تعداد نقاط واقع در سمت راست این قطر

$$\frac{۱}{۲}\{(\frac{n}{۲}+۱)^۲-(\frac{n}{۲}+۱)\} = \frac{n(n+۲)}{۸}$$

است. دراین‌صورت تعدادنقاط داخل مثلث MNP(من‌جمله رئوس آن)

$$\frac{n}{۲}+۱+\frac{n(n+۲)}{۸}$$

است. با تفریق ۳ رأس مثلث ازآن

$$\frac{n}{۲}-۲+\frac{n(n+۲)}{۸} = \frac{(n-۲)(n+۸)}{۸}$$

رابه‌عنوان جواب به دست می‌آوریم.

حالت ۲: n فرد. در این حالت $\frac{n}{۲}$ صحیح نیست، بنابراین وضعیت واقع در شکل ب. (با $n = ۱۱$) را داریم. در این مرحله نقاط داخل مربع OMPN مربع کوچکتر S ی را تشکیل می‌دهند، و ما تعداد نقاط واقع در سمت راست قطر S را می‌خواهیم.

تعداد نقاط واقع بر OM عبارت است از:

$$۱+\frac{(n-۱)}{۲} = \frac{(n+۱)}{۲}$$

بنابراین S شامل $[\frac{(n+۱)}{۲}]^۲$ نقطه است. $\frac{(n+۱)}{۲}$ نقطه از این نقاط بر قطر مربع قرار دارند، و بنابراین

$$\frac{۱}{۲}\{(\frac{n+۱}{۲})^۲-(\frac{n+۱}{۲})\} = \frac{n^۲-۱}{۸}$$

نقطه در سمت راست این قطر واقع‌اند. (توجه داشته باشید که رئوس M، N، P، از آنجا که مختصات صحیحی ندارند مشکلی ایجاد نمی‌کنند.)

مسألهٔ اصلی

چند مثلث ناهمنهشت به محیط n ، درصورتی که طولهای اضلاعشان صحیح باشد، موجود است؟

حل. طولهای اضلاع مثلث موردنظر را با x، y، و z نمایش می‌دهیم. در این صورت باید $x + y + z = n$ را داشته باشیم. گذشته از این، x، y، z، باید در نامساویهای

$$x < y + z \,,\, y < x + z \,,\, z < x + y$$

صدق کنند، زیرا طول ضلع یک مثلث باید کمتر از مجموع طولهای دو ضلع دیگر آن باشد. برعکس، هر مقادیر x، y، z ی که در شرایط فوق صدق کنند اضلاع مثلثی به محیط n خواهند بود. به این ترتیب مسأله مشابه مسألهٔ قبل است (مسألهٔ فرعی)،اما از دو جنبه با آن تفاوت دارد. جنبهٔ اول این است که نامساویهای مطلوب شامل > در جایی که قبلاً علامت ≥ بوده، می‌باشند و جنبهٔ دوم این که جوابهای تنها متفاوت در ترتیب جملات را، اکنون باید یکسان درنظر گرفت، زیرا مثلثهای همنهشت به دست می‌دهند. در این مرحله از شرط دوم تغافل کرده، N، تعداد سه‌تایی‌های مرتب x ، y ، z با

$$x + y + z = n \,,\, x < y + z \,,\, y < x + z \,,\, z < x + y$$

را معین می‌کنیم. z ، چون در مسألهٔ ۲۹، از x و y، با استفاده از این حقیقت که $z = n - x - y$ برقرار است، مشخص می‌شود. شرایط مربوط به x و y اینک به

$$۰ < x < n/۲ \,,\, ۰ < y < n/۲ \,,\, n/۲ < x + y < n$$

منجر می‌شوند. این بدان معنی است که در شکل ۲۵، نقطهٔ (x,y) باید داخل مثلث MNP واقع باشد. بنابراین، برای یافتن N صرفاً به این نیاز داریم که از جواب مسألهٔ ۲۹، تعداد نقاط واقع بر مرز MNP را، که در آنجا به حساب آمده‌اند، کم کنیم. (به‌خاطر بیاورید که رئوس مثلث در مسألهٔ ۲۹ محاسبه نشده‌اند.) درمورد n فرد نقطه‌ای بر مرز مثلث مورد بحث موجود نیست، بنابراین $N = (n^۲ - ۱)/۸$. در مورد n زوج، هر ضلع مثلث، رئوس به کنار، شامل $n/۲ - ۱$ نقطه است. درنتیجه در این حالت،

$$N=\frac{(n+8)(n-2)}{8}-3(\frac{n}{2}-1)=(n-2)\frac{n+8-12}{8}$$

$$=\frac{(n-2)(n-4)}{8}=\frac{n^2-6n+8}{8}$$

در محاسبهٔ فوق هر مثلث مختلف‌الاضلاع Δ شش بار به حساب آمده است، زیرا اگر اضلاع Δ، p، q، r باشند، در این صورت جوابهای

۱. $x=p, y=q, z=r$

۲. $x=p, y=r, z=q$

۳. $x=q, y=p, z=r$

۴. $x=q, y=r, z=p$

۵. $x=q, y=r, z=p$

۶. $x=r, y=q, z=p$

همه متناظر با Δ می‌باشند.

هر مثلث متساوی‌الساقین سره (که دو ضلع آن طول p دارند، در حالی که ضلع سوم طول q، با $p \neq q$، را داراست) سه بار به حساب آمده، زیرا جوابهای

۱. $x=p, y=p, z=q$

۲. $x=p, y=q, z=p$

۳. $x=q, y=p, z=p$

همه متناظر با این مثلث‌اند.

سرانجام، هر مثلث متساوی‌الاضلاع (درصورت وجود) تنها یک بار به‌حساب آمده‌است. بنابراین $N=6S+3P+E$، که در آن S تعداد مثلثهای مختلف‌الاضلاع، P تعداد مثلثهای متساوی‌الساقین سره، و E تعداد مثلثهای متساوی‌الاضلاع می‌باشد. مسألهٔمان محاسبهٔ $T=S+P+E$، تعداد کل مثلثهاست. از فورمول $N=6S+3P+E$ ملاحظه می‌کنیم که $S=(N-3P-E)/6$؛ بنابراین

$$T=\frac{N-3P-E}{6}+P+E=\frac{N+3P+5E}{6}=\frac{N+3I+2E}{6}$$

که در آن $I=P+E$ تعداد کل مثلثهای متساوی‌الساقین (سره یا متساوی‌الاضلاع) است. در این صورت، از آنجا که قبلاً عبارتی برای N به دست آورده‌ایم، تنها محاسبهٔ E و I می‌ماند. اما E مساوی ۱ است اگر n مضربی از ۳ باشد و در غیر این صورت مساوی ۰ است (زیرا مثلث متساوی‌الاضلاع به محیط n، طول ضلع $n/3$ دارد). برای پیدا کردن I باید تعداد جوابهایی از معادلهٔ $2x+y=n$ را، که در شرایط $x>0$، $y>0$، $2x>y$ صادق‌اند، معین کنیم. این شرایط، با قرار دادن $y=n-2x$ به صورت

$x>0, n-2x>0, 2x>n-2x$

یا معادلاً $n/4<x<n/2$ در می‌آیند.

نامساویهای اخیر، از آنجا که n و x اعدادی صحیح‌اند، معادل

$n/4<x\leq(n-1)/2$

می‌باشند. در این صورت $[(n-1)/2]-[n/4]$ از چنین مقادیر x ی، یعنی

$$x=[n/4]+1, [n/4]+2, \ldots, [(n-1)/2]$$

موجودند. درنتیجه

$$I=\left[\frac{n-1}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]$$

اکنون می‌توانیم برای به دست آوردن فورمولی برای T، به جمع‌آوری نتایج فوق بپردازیم. مناسب‌تر است که n را مساوی $12q+r$، که در آن $q=[n/12]$ خارج قسمت حاصل از تقسیم n بر ۱۲ است، و باقیماندهٔ r در $0\leq r\leq 11$ صدق می‌کند، بنویسیم. فورمول مربوط به T به ترتیب زیر وابسته به r است.

(۱) اگر $r=0$، در این صورت

$$N=\frac{n^2-6n+8}{8}$$

$$I=\frac{n}{2}-1-\frac{n}{4}=\frac{n-4}{4}$$

$$E=1$$

$$T=\frac{N}{۶}+\frac{I}{۲}+\frac{E}{۳}=\frac{n^۲-۶n+۸}{۴۸}+\frac{n-۴}{۸}+\frac{۱}{۳}=\frac{n^۲}{۴۸}$$

(۲) اگر $r=۱$، در این صورت

$$N=\frac{n^۲-۱}{۸}$$

$$I=\frac{n-۱}{۲}-\frac{n-۱}{۴}=\frac{n-۱}{۴}$$

$$E=۰$$

$$T=\frac{n^۲-۱}{۴۸}+\frac{n-۱}{۸}=\frac{n^۲+۶n-۷}{۴۸}$$

(۳) اگر $r=۲$، در این صورت

$$N=\frac{n^۲-۶n+۸}{۸}$$

$$I=\frac{n}{۲}-۱-\frac{n-۲}{۴}=\frac{n-۲}{۴}$$

$$E=۰$$

$$T=\frac{n^۲-۶n+۸}{۴۸}+\frac{n-۲}{۸}=\frac{n^۲-۴}{۴۸}$$

(۴) اگر $r=۳$، در این صورت

$$N=\frac{n^۲-۱}{۸}$$

$$I=\frac{n-۱}{۲}-\frac{n-۳}{۴}=\frac{n+۱}{۴}$$

$$E=I$$

$$T=\frac{n^۲-۱}{۴۸}+\frac{n+۱}{۸}+\frac{۱}{۳}=\frac{n^۲+۶n+۲۱}{۴۸}$$

به همین طریق به دست می‌آوریم:

(۵) اگر $r=۴$، در این صورت $T=\frac{n^۲-۱۶}{۴۸}$

(۶) اگر $r=۵$، در این صورت $T=\frac{n^۲+۶n-۷}{۴۸}$

(۷) اگر $r=۶$، در این صورت $T=\frac{n^۲+۱۲}{۴۸}$

(۸) اگر $r=۷$، در این صورت $T=\frac{n^۲+۶n+۵}{۴۸}$

(۹) اگر $r=۸$، در این صورت $T=\frac{n^۲-۱۶}{۴۸}$

(۱۰) اگر $r=۹$، در این صورت $T=\frac{n^۲+۶n+۹}{۴۸}$

(۱۱) اگر $r=۱۰$، در این صورت $T=\frac{n^۲-۴}{۴۸}$

(۱۲) اگر $r=۱۱$، در این صورت $T=\frac{n^۲+۶n+۵}{۴۸}$

توجه داشته باشید که در جمیع این حالات جملهٔ ثابت چندجمله‌ای صورت، کمتر از نصف مخرج است. بنابراین می‌توانیم نتایج فوق را به صورت زیر مختصر کنیم:

اگر n فرد باشد $T = N(n^۲ + ۶n)/۴۸$، اگر n زوج باشد، $T = N(n^۲/۴۸)$

معرفی کتابهای ریاضی

هنر ریاضی ورزیدن (سه گفتگوی عام) سرژلانگ

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور ناشر: علوم پایه

«خواننده محترم. اگر سرژلانگ را تا قبل از برخورد با این کتاب نمی‌شناخته پس از مطالعهٔ آن می‌شناسد. او را مردی مردانه می‌یابد که علاوه بر هنرهای دیگر هنر ریاضی ورزیدن دارد، و از همه مهمتر درمی‌یابد که این هنر موجب حرمان او نشده است. درمی‌یابد که نه ریاضی که عشق می‌ورزد و نه تنها عشق به یادگرفتن که به یاد دادن. عشق به انفاق آنچه که دوست دارد، تا مصداق آیهٔ شریفهٔ ولن تنالواالبرحتی تنفقوا مماتحبون، شود» (قسمتی از مقدمهٔ مترجم)

کتاب حاوی مطالب و مباحثی است که سرژلانگ تحت سه کنفرانس در پاریس داشته، گفتگوهایی که هر خوانندهٔ حتی غیر مطلع از مطالب ریاضی را، به سوی خود جلب می‌کند و واقعاً گویای این مطلب است که ریاضیات زیباست و می‌توان آن را به هر کسی آموخت. مطالعه کتاب بخصوص برای هر دانش‌آموز، دانشجو و معلم مفید و آموزنده است.

این کتاب ترجمهٔ دقیقی از این سه گفتگوی ریاضی است. قصد سرژلانگ از این کار این بوده است که چیزی از طبیعت راستین و جمیل تفکر ریاضی را مطرح کند و چنانچه از شور و هیجان شنوندگان برمی‌آید، در این کار توفیقی جدی یافته است، سه موضوع مورد طرح (اعداد اول، معادلات دیوفانتی، و مسائل مهم هندسه و فضا) با شیوه‌ای شاد و خودمانی همراهند.

جبر پایه

تألیف محمد هاشم رستمی

ناشر: انتشارات مدرسه

جبر پایه (این مجلد برای دانش‌آموزان سالهای سوم رشتهٔ علوم تجربی و ریاضی فیزیک و داوطلبان کنکور) کتابی است کمک آموزشی که به‌صورت خودآموز تهیه گردیده است تا هر دانش‌آموزی در هر نقطه‌ای از کشور بتواند با مطالعهٔ آن درس جبر را به خوبی فراگیرد و برهمهٔ نکات و ظرایف در ارتباط با هر مطلب درسی احاطه کامل پیدا نماید.

در این کتاب پس‌از ارائه هرقسمت از جبر، مطالب تکمیلی مربوط به آن قسمت، و نمونه‌هایی از مسائل امتحان نهایی و تستهای کنکور در ارتباط با آن مطلب، آورده شده است و پس از آن نیز تمرینهایی وجود دارد، که با حل آنها، درس به‌صورت کامل فراگرفته می‌شود و در ذهن تثبیت می‌گردد.

در پایان کتاب نیز تستهایی وجود دارد که شامل تستهای جبر کنکورهای سراسری وزارت علوم و آموزش عالی (از ۱۳۵۸ تا ۱۳۷۰) و کنکورهای رشته پزشکی دانشگاه آزاداسلامی ایران (از ۱۳۶۴ تا ۱۳۷۰) نیز می‌باشد. این تستها به‌ترتیب فصلهای کتاب تنظیم شده‌است تا دانش‌آموزان پس از یادگیری دروس مربوط به هرفصل، تستهای در ارتباط با آن فصل را حل نمایند و آمادگی لازم برای موفقیت در کنکور دانشگاهها را نیز پیدانمایند.

مثلثات

تألیف: علی حسن زاده ماکویی
ناشر: منظومه

کتاب شاملِ مباحث و فصول نسبتاً جامعی است، که کلیه سرفصلهای کتابهای درسی از مقطع دوّم تا چهارم دبیرستان را می‌پوشاند. مؤلف توانسته بسیاری از مشکلات و احیاناً خلاءهای موجود در کتب درسی را مورد بحث قرار دهد و آنها را با توضیح و طرح و حل مسائل جالب برطرف نماید. در این کتاب در فصل دوّم و سوّم راجع به کمان اصلی (Arc) و توابع معکوس بحث شده است که معمولاً در کتابهای درسی و دیگر کتابهای جنب درسی به آن توجه زیادی نشده و تا حدودی برای دانش‌آموزان و معلمین مشکل‌ساز است.

همچنین مباحثِ سریهای مثلثاتی ـ اعداد مختلط ـ نسبتهای مثلثاتیِ (nx) و تابعهایِ هذلولی‌گونه، جزء قسمتهای جالب کتاب می‌باشد که به‌طور حتم برای علاقه‌مندان قابل توجه خواهد بود. همچنین درانتهای کتاب به راهنمایی حل مسائل طرح شده در داخلِ کتاب و نیز طرح تستهای متنوع و راهنمایی حل آنها برخورد می‌کنیم.

در کل کتاب، می‌تواند یک منبع جامع و راه‌گشا تصور شود که از هر لحاظ قابل استفاده برای دانش‌آموزان و دبیران محترم خواهد بود.

بحث ریاضی با دانش آموز

سرژلانگ

ترجمهٔ نعمت عبادیان
ناشر: انتشارات مدرسه

کتاب که متشکل از حدود ۸ جلسه کلاسی می‌باشد. مجموعه‌ای است از مکالمات و مباحثات داخل کلاسی توسط یک معلم واقعی ریاضیات یعنی سرژلانگ و دانش‌آموزان دبیرستانی. مطالعه این کتاب برای هر دانش‌آموز و معلم مفید و مناسب است و علاوه بر مباحثی شیرین که یادگیری آنها جالب است چگونگی پرسشِ سؤال و نیز جوابگویی و برخورد معلم به آنها القا می‌شود. مؤلف در حقیقت با دانش‌آموزان بحث می‌کند و آنها را از طریق بحث و گاهی اوقات شوخی و کنایه به حقایقی که تاکنون بدان دست نیافته بودند می‌رساند و در این راه نکات جالب و آموزندهٔ بسیاری مطرح می‌شود. کتاب علاوه بر مباحثِ مطرح شده در کلاس در پایان هر کلاس دارای تجزیه و تحلیل‌های بسیار مفیدی است و در بخش ضمیمه نیز این تجزیه و تحلیل‌ها توسط خودِ مؤلف و کارشناسان و معلمان دیگر آن کلاسها کامل می‌شود.

ادب ریاضی

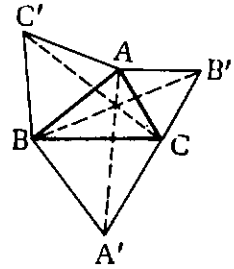
ریاضیدان دقیق و با وجدان که می‌خواهد خود را به درست بودن آنچه گفته و ثابت کرده است متقاعد سازد، در آن می‌کوشد که به شکل شهودی به آن نظر کند و یک برهان صوری برای آن بیاورد. **آیا به اطمینان می‌توانید درستی آن را مشاهده کنید؟ آیا می‌توانید صحت آن را به ثبوت برسانید؟** ریاضیدان با وجدان در این مورد همچون کدبانویی است که با شرافت و درستکاری برای خرید به بازار می‌رود. برای این که از کیفیت چیزی که می‌خواهد بخرد آگاه شود، دوست دارد که آن را ببیند و لمس کند. بینش شهودی و برهان صوری دو راه مختلف ادراک حقیقت است همان طور که احساس کردن اشیای مادی از طریق دو حس دیدن و لمس کردن است.

جورج پولیا
چگونه مسأله را حل کنیم؟
ترجمهٔ احمد آرام

مسائل مسابقه‌ای

محمد هاشم رستمی

۱ـ روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی الاضلاع می‌سازیم و رأس غیر مشترك هریك از این مثلثها را به رأس مقابل آن از مثلث ABC وصل می‌کنیم. ثابت کنید سه‌خط حاصل متقارب‌اند.



۲ـ دو صفحهٔ

$$P: x+2y-z+1=0$$

$$P': 2x-3y-2z+3=0$$

و نقطهٔ $A(1,-2,3)$ مفروض‌اند. تعیین کنید که نقطهٔ A داخل فرجه‌ای از این دو صفحه واقع است که زاویهٔ مسطحه‌اش حاده است؟ یا داخل فرجه‌ای قرار دارد که زاویهٔ مسطحه‌اش منفرجه می‌باشد؟

مسئله‌را درمورد دوصفحهٔ

$$P: ax+by+cz+d=0$$

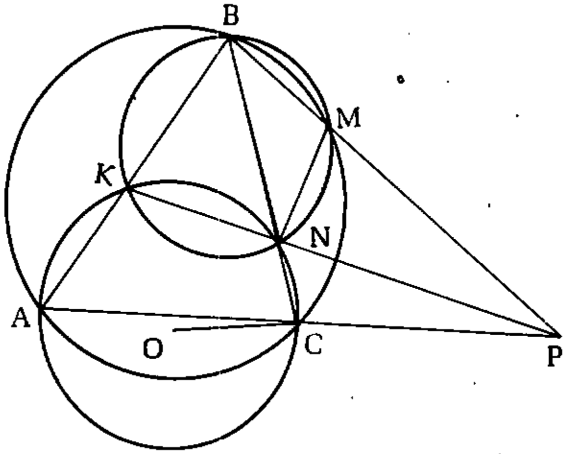
$$P': a'x+b'y+c'z+d'=0$$

و نقطهٔ $A(x_1,y_1,z_1)$ حل کنید.

مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی

دایره‌ای به مرکز O از رئوس A و C ی مثلث ABC می‌گذرد وقطعات AB و AC را بار دیگر به ترتیب درنقاط متمایز K و N قطع مـی‌کند. دوایر محیطی مثلثهای ABC و KBN دقیقاً در دونقطهٔ متمایز B و M متقاطع‌اند. ثابت‌کنید که زاویهٔ OMB زاویه‌ای‌قائمه است.

بیست وششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۵



ادب ریاضی

فون نویمان تنها شاگردی است که تا به حال مرا تهدید کرده است. او آدم بسیار سریع‌الانتقالی بود. زمانی در زوریخ برای شاگردان زبده سمیناری برپا شده بود که من در آن درس می‌دادم، و فون نویمان هم در آن شرکت می‌کرد. من قضیهٔ خاصی را بیان کردم و بعد گفتم که این قضیه تا به حال ثابت نشده و ممکن است اثباتش خیلی مشکل باشد. فون نویمان چیزی نگفت اما پنج دقیقه بعد دستش را بالا برد. وقتی به او اجازهٔ صحبت دادم پای تختهٔ سیاه آمد و اثبات قضیه را نوشت. از آن موقع به بعد من از فون نویمان می‌ترسیدم.

ژرژ پولیا

جُنگ ریاضی دانشجو، ج ٦



مسائل برای حل
(مورد استفادهٔ دانش آموزان سالهای اول تا چهارم دبیرستان)

● هندسه: محمد هاشم رستمی ● ریاضیات جدید : حمید رضا امیری
● جبر و مثلثات: احمد قندهاری و محمد رضا هاشمی

مسائل ریاضیات سال اول

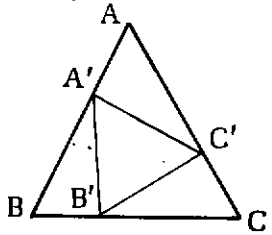
۱ــ نقاط A' و B' و C' را روی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در یك جهت چنان اختیار می کنیم که

$$AA' = BB' = CC' = \frac{1}{3} AB$$

باشد. ثابت کنید :

۱) مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

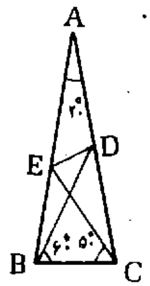
۲) اضلاع دومثلث ABC و $A'B'C'$ برهم عمودند.



۲ــ مثلث متساوی الساقین ABC به زاویهٔ رأس

$$\hat{A} = 20°$$

مفروض است. از رأس B خطی چنان رسم می کنیم که ساق AC را در نقطهٔ D قطع کند و زاویهٔ $D\hat{B}C = 60°$ باشد و از C نیز خطی چنان رسم می کنیم که ساق AB را درنقطهٔ E قطع کند و زاویهٔ $E\hat{C}B = 50°$ باشد. از D به E وصل می کنیم. اندازهٔ زاویهٔ DEC را تعیین کنید.



۳ــ ثابت کنید دریك ترکیب شرطی هرگاه تالی دارای ارزش درست باشد دراین صورت ارزش آن گزارهٔ شرطی همواره درست است و به ارزش مقدم بستگی ندارد.

۴ــ برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند A و B، ثابت کنید : اگر $A \subseteq B$ آنگاه خواهیم داشت :

$$(A - B) = \varnothing$$

۵ــ ثابت کنید برای هردومجموعهٔ دلخواه مانند A و B اگر $B \subseteq A$ و $B \subseteq A'$ آنگاه $B = M$ (M مجموعهٔ مرجع است).

۶ــ اگر

$$x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{6}}$$

مطلوب است محاسبهٔ $(x^3 - 3x)$.

۷ــ حاصل کسر

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$$

را بیابید.

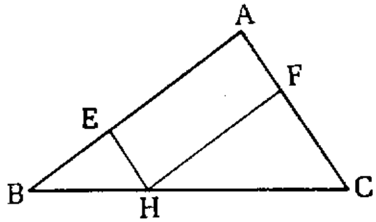
مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ــ مثلث قائم الزاویهٔ ABC مفروض است. تصاویر نقطهٔ H از وتر BC روی الاضلاع AB و AC را به ترتیب

E و F می‌نامیم. ثابت کنید

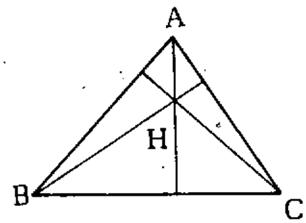
$$HB\cdot HC=EA\cdot EB+FA\cdot FC$$

فرستنده: محمدرضا ضرابی دانش‌آموز دوم ریاضی

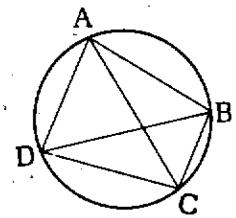


۲- اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعات مثلث ABC باشد، ثابت کنید رابطهٔ زیر همواره برقرار است:

$$BC^2+HA^2=AC^2+HB^2=AB^2+HC^2$$



۳- ثابت کنید که در هر چهار ضلعی محاطی حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطر برابر است با مجموع حاصل‌ضربهای اندازه‌های اضلاع مقابل (قضیهٔ بطلیموس).



۴- ثابت کنید هرگاه رابطهٔ R از A در B یك رابطهٔ تك عضوی باشد همواره دارای خواص تراگذری و پادتقارن می‌باشد.

۵- تحقیق کنید در یك تابع چندضابطه‌ای، یك به یك بودن همهٔ ضابطه‌ها چه شرطی برای یك به یك بودن تابع است؟ (لازم- کافی و یا لازم و کافی) چرا؟

۶- می‌دانیم در حالت کلی ضرب ماتریسها، خاصیت جابه جایی ندارد، آیا می‌توانید شرطی برای جابه جایی بودن ماتریسهای ۲ × ۲ نسبت به عمل ضرب بیابید؟

۷- از مبدأ مختصات عمود OH را بر خط

$$2x+y=5$$

رسم می‌کنیم. مطلوب است، تعیین طول نقطهٔ H.

۸- نقطهٔ A به طول ۳ — روی نیمساز ناحیهٔ دوم قرار دارد. از این نقطه خطی بر این نیمساز عمود می‌کنیم تا محور yها را در نقطهٔ B قطع کند. از نقطهٔ B خطی موازی محور xها رسم می‌کنیم تا نیمساز ربع اول را در نقطهٔ C قطع کند. مطلوب است تعیین طول نقطهٔ C و تعیین اندازهٔ مساحت ذوزنقهٔ ABCO.

۹- A و B و C را چنان تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد:

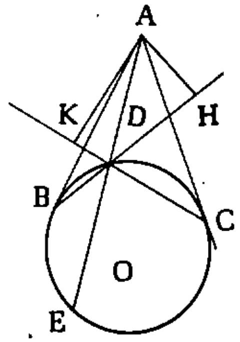
$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}=A\sin x+B\cos x+C$$

۱۰- با فرض: $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ اتحاد زیر را ثابت کنید:

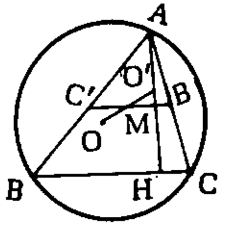
$$\left(\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\right)^{n-1}=\frac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}}+\frac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}}$$

مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱- دایرهٔ C(O,R) مفروض است. از نقطهٔ A دو مماس AB و AC وقاطع ADE را نسبت به این دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید که فاصله‌های نقطهٔ A از خطوط DB و DC متناسب با طول وترهای DB و DC می‌باشند.



۲ـ ثابت‌کنید قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث نسبت به وسط‌خطی که اوساط دو ضلع مثلث را به هم‌وصل می‌کند روی ارتفاع مرسوم برضلع سوم واقع است.



۳ـ ثابت‌کنید هرگاه بتوان در یك فضای برداری مانند V، یك بردار را برحسب ترکیب‌خطی چند بردار دیگر نوشت، در این‌صورت آن بردارها وابسته خطی‌اند.

۴ـ معین‌کنید بـا ارقام ۰و۱و۲و۳و۴و۵و۶ چند عدد ۴ رقمی می‌توان‌نوشت به قسمی که:

الف) مضرب ۵ و بزرگتراز ۴۰۰۰ باشند.

ب) زوج و با رقم ۱ شروع شوند.

۵ـ اگر باقیمانده‌تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)$ مساوی ۶ و بر $(x-2)$ مساوی ۱۱ و بر $(x+1)$ مساوی ۲ باشد مطلوب است تعیین باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)(x^2-1)$.

۶ـ دامنه و برد تابع حقیقی با ضابطهٔ

$$f(x)=[tg\,x+cotg\,x]$$

را بیابید.

۷ـ مطلوب است محاسبهٔ

$$\underset{a\to b}{\text{حد}}\ \frac{\sin a-\sin b+\sin(a+b)}{\cos a-\cos b}$$

۸ـ ثابت‌کنید:

$$\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ=\cos 7^\circ$$

$$\left(\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

۹ـ دستگاه زیر را حل‌کنید (a پارامتر است):

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin a\\ \cos x+\cos y=\cos a\end{cases}$$

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ اگر

$$\vec{v}_2=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{v}_1=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

باشد، مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $(-2\vec{v}_1 \ \text{و}\ 3\vec{v}_2)$

ب) $|(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\wedge(\vec{v}_1-\vec{v}_2)|$

ج) اندازهٔ‌جبری تصویر بردار $\vec{v}_2$ روی بردار $\vec{v}_1$.

۲ـ معادلهٔ خطی‌را بنویسید که از نقطهٔ

$$A(2\ ,\ -1\ ,\ 0)$$

می‌گذرد و دو خط

$$D:\begin{cases}x=2t-1\\ y=-t+2\\ z=4t\end{cases}$$

$$D' : \frac{x}{۳} = \frac{y+۱}{-۱} = \frac{z}{۲}$$

را قطع می‌کند.

۳ـ نقطه‌ای روی خط $D : ۳x - ۱ = y + ۲ = ۴z$ تعیین کنید که از دو نقطهٔ $A(-۱,۲,۴)$ و $B(۳,۲,۰)$ به یک فاصله باشد.

۴ـ معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ

$M(۳ , -۲ , ۲)$

می‌گذرد و فصل مشترکهایش باصفحات مختصات مثلثی‌متساوی‌الاضلاع به وجود می‌آورند.

۵ـ معادلهٔ صفحه‌ای را که قرینهٔ صفحه

$P : ۳x - y + ۲z - ۱ = ۰$

نسبت به نقطهٔ $O'(-۲,۱,۳)$ می‌باشد به دست آورید.

۶ـ ثابت کنید گزارهٔ زیرهمیشه درست است.

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$$

۷ـ ثابت کنید حلقهٔ R جابه جابی‌است اگر وفقط اگر داشته باشیم:

$$\forall a,b \in R \; ; \; (a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab$$

۸ـ ثابت کنید اشتراك دو ایده‌ال حلقهٔ R ، ایده‌الی از حلقهٔ R است.

۹ـ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \cos\sqrt{x^۲ + ۳x}$ را در نقطهٔ $x_۰ = ۱$ بررسی کنید.

۱۰ـ تابع با ضابطهٔ $y = \dfrac{x}{۲x^۲ - ۵x + m}$ مفروض است.

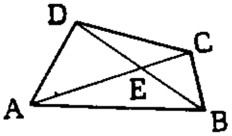
اگر x' و x'' طولهای‌نقاط اکسترمم منحنی‌تابع و $y_۱$ و $y_۲$ مقادیرعرضهای نقاط اکسترمم منحنی تابع باشد m را چنان بیابید تا داشته‌باشیم:

$$\frac{۱}{y_۱} + \frac{۱}{y_۲} = ۱۰x'x''$$

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

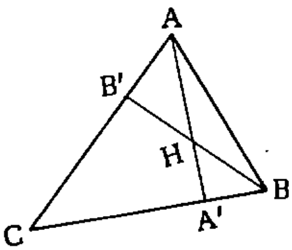
۱ـ در چهار ضلعی ABCD قطر AC عمود برضلع BC و قطر BD عمود برضلع AD است. اگر E نقطهٔ تقاطع اقطار چهارضلعی باشد ثابت‌کنید:

$$EA \cdot EC = EB \cdot ED$$



۲ـ اگر H نقطهٔ تقاطع ارتفاعهای AA' و BB' از مثلث $ABC\,(\hat{B} = \hat{A})$ باشد، ثابت‌کنیدکه‌رابطه زیر برقرار است.

$$HA^۲ - HB^۲ = HB \cdot HB' - HA \cdot HA'$$



۳ـ معادلهٔزیر را حل و بحث کنید (k و s پارامترمی باشند):

$$k^۳(x - k^۲) = s^۳(x - s^۲)$$

۴ـ معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - m^۲x + ۴ = ۰$ مفروض است.

الف) به‌ازای چه مقادیری‌از m معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

ب) به ازای چه مقادیری از m معادلـه ریشهٔ مضاعف دارد؟

ج) به‌ازای چه مقادیری‌از m یك ریشهٔ معادله برابر ۲ می‌باشد؟

۵ـ اگر داشته باشیم: $۳\cos x + ۲ = ۰$

و انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم باشد. نسبتهای مثلثاتی x را حساب کنید.

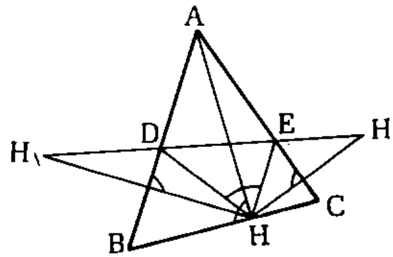
۶ـ با شرط: $0<x<\frac{\pi}{2}$

صحت تساوی زیر را تحقیق کنید:

$$\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)\times\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)=\frac{4}{\sin x}$$

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ـ ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و قرینه‌های نقطهٔ H نسبت به اضلاع AB و AC را به‌ترتیب H_1 و H_2 می‌نامیم. اگر نقاط تقاطع خط H_1H_2 با اضلاع AB و AC به ترتیب نقاط D و E باشند ثابت کنید که AH نیمساز زاویهٔ DHE است.



۲ـ اگر $|\vec{a}|=3$ و $\vec{b}=-4\vec{a}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|$

ب) $(\vec{a}+4\vec{b})\cdot(\vec{b}+4\vec{a})$

ج) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

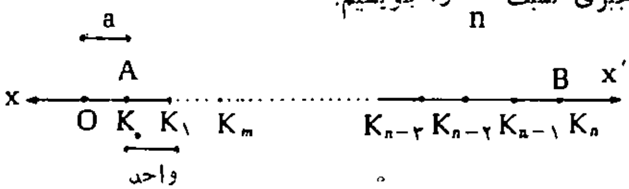
۳ـ روی محور $x'ox$ دو نقطهٔ B و A را به طولهای

$$\overline{OA}=a \quad \text{و} \quad \overline{OB}=b$$

اختیار کرده، ثابت کنید طول هریك از نقاطی که پاره‌خط AB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید. در رابطهٔ زیر m طول نقطهٔ مفروض است.

$$x_m=a+\frac{m}{n}(b-a)$$

(راهنمایی: با توجه به شکل زیر کافی است از طریق اندازهٔ جبری نسبت $\frac{m}{n}$ را بنویسیم.



۴ـ اگر:

$$(g\circ f)(x)=f(x)-x^2 \quad \text{و} \quad g(x)=x^2-x$$

دامنهٔ f(x) را تعیین کنید. سپس ثابت کنید $f(\cos\alpha)$ مربع کامل است.

۵ـ صحت روابط زیر را تحقیق کنید:

الف)

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

ب)

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$$

۶ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\cos^2x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$$

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ــ درصورتی‌که اندازهٔ فاصلهٔ دونقطهٔ

$$B(-۱\ ,\ ۲) \quad \text{و} \quad A(m\ ,\ -۲)$$

برابر ۵ و $m \in R^+$ باشد، فاصلهٔ وسط پاره خط AB را از خط D به معادلهٔ:

$$D:\ ۴x - ۳y + ۱ = ۰$$

حساب کنید. همچنین زاویهٔ بین‌خط D وخطی‌که از دونقطهٔ B و A می‌گذرد را محاسبه‌کنید.

۲ــ خطوط مماس وقائم برمنحنی به معادلهٔ:

$$x^۲y + x\sqrt{y} = y^۳ - ۱$$

را برروی محور عرضها به دست‌آورید.

۳ــ معادلهٔ مثلثاتی :

$$\sqrt{۲}(\sin x + \cos x) + m \sin x \cos x = ۱$$

مفروض است.

الف) مقدار m را چنان تعیین‌کنیدکه یکی ازجوابهای معادله $\frac{\pi}{۴}$ باشد.

ب) تعیین‌کنیدکه معادله به‌ازای‌چه مقادیری‌از m ریشهٔ حقیقی ندارد.

ج) معادله رابه ازای $m = -۲$ حل‌کنید.

۴ــ عبارت:

$$S = ۱ + \sin x + \cos x + \sin x \cos x$$

مفروض است.

الف) ثابت‌کنیدکه مقدار S مربع‌کامل است.

ب) حداکثر وحداقل S را پیداکنید.



کارگری برای رفتن به سرکارش در امتداد خط آهنی با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت دوچرخه سواری می‌کند. همه روزه به تقاطعی، در همان زمانی که قطار وارد می‌شود، می‌رسد. یک روز دیر می‌کند و قطار در ۶ کیلومتری تقاطع مزبور او را می‌گیرد. در چند دقیقه قطار به تقاطع مورد بحث می‌رسد؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

حل مسائل برهان، شمارهٔ ۳

حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ـ مثلث O_1DB متساوی‌الساقین است. زیرا:

$$\hat{B}_1=\hat{B}_2 \text{ و } DE \parallel BC \implies \hat{O}_1=\hat{B}_2 \implies$$

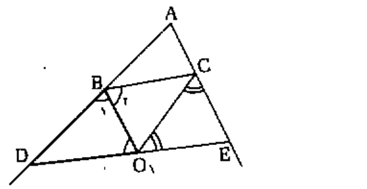
$$\hat{O}_1=\hat{B}_1 \implies DB=O_1D \quad (1)$$

به دلیل مشابه، مثلث O_1CE نیز متساوی‌الساقین‌است پس:

$$CE=O_1E \qquad (2)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

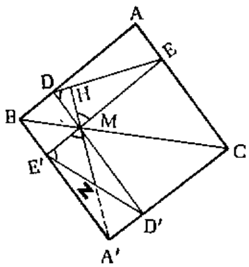
$$DB+CE=O_1D+O_1E=DE$$



۲ـ مربع $ABA'C$ را می‌سازیم و نقاط برخورد ME و MD با BA' و CA' را بـه ترتیب E' و D' می‌نـامیم. HM را امتداد می‌دهیم تا $D'E'$ رادرنقطهٔ N قطع کند. MN میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ $ME'D'$ است. زیرا ، چهار ضلعیهای $MDBE'$ و $MECD'$ مربع‌اند، ازآنجا :

$$ME=MD' \quad \text{و} \quad MD=ME'$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MDE و $MD'E'$ متساوی‌اند . در نتیجهٔ $\hat{E'}_1=\hat{D}_1$ است اما $\hat{D}_1=\hat{M}_1=\hat{M}_2$ ، پس : $\hat{E'}_1=\hat{M}_2$ است یعنی: $MN=NE'$ و به همین‌روش ثابت می‌شودکه $MN=ND'$. بنابراین MN میانهٔ نظیر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ $MD'E'$ می‌باشد. از طرفـی ، چهار ضلعی



$ME'A'D'$ مستطیلی است کـه $D'E'$ یـك قطر آن می‌باشد . بنابراین MN قسمتی‌از قطردیگر آن‌است ولذا MNکه ادامهٔ MH می‌باشد همواره ازنقطهٔ ثابت A' می‌گذرد.

۳ـ می‌دانیم هر گزارهٔ شرطی را می‌توان بـا توجه به هم‌ارزی زیربه یك گزارهٔ فصلی تبدیل کرد وبرعکس:

$$(p \implies q) \equiv (\sim p \vee q)$$

بنابراین می‌تـوان از فرضیات مسأله که البته انحرافی طـرح شده‌اند صرف‌نظرکرد وبه صورت زیرعمل کرد:

$$(r \implies \sim s) \equiv (\sim r \vee \sim s) \equiv \sim (r \wedge s)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$[(r \implies \sim s) \iff (r \wedge s)] \equiv$$

$$[\sim (r \wedge s) \iff (r \wedge s)]$$

وچون دو گزارهٔ $(r\wedge s)$ و $\sim(r\wedge s)$ همواره‌نقیض یکدیگرند و نمی‌توانند هـم‌ارز باشند ، ترکیب دو شرطی آنها همواره نادرست است.

۴ـ

$$\underline{A\Delta B}=(A-B)\cup(B-A)$$

$$\overset{\text{جابه‌جایی اجتماع}}{=} (B-A)\cup(A-B)=\underline{B\Delta A}$$

$$\overset{\text{ثابت‌شد}}{\implies} A\Delta B=B\Delta A$$

الف)

$$A\Delta M=\overbrace{(A-M)}^{\varnothing}\cup\overbrace{(M-A)}^{A'}=\varnothing\cup A'=A'$$

ب)

$$A\Delta A'=\overbrace{(A-A')}^{A}\cup\overbrace{(A'-A)}^{A'}=A\cup A'=M$$

ج)

$$A\Delta A=\overbrace{(A-A)}^{\varnothing}\cup\overbrace{(A-A)}^{\varnothing}=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$

د) درصفحهٔ ۹۳ مثال ۴ کتاب‌درسی ثابت‌شدکه:

$$\underline{(A-B)\cup(B-A)}=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$$

$$=(A\cup B)-(A'\cup B')'=(A\cup B)-(A\cap B)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(A\Delta B)\cap B'=[(A-B)\cup(B-A)]\cap B'$$

$$=[(A\cup B)-(A\cap B)]\cap B'$$

$$=[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]\cap B'$$

$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=} (A\cup B)\cap\underbrace{[(A'\cup B')\cap B']}_{\text{قانون‌جذب}}$$

$$=(A\cup B)\cap B' \overset{\text{پخش}}{=} (A\cap B')\cup(B\cap B')$$

$$=(A\cap B')\cup\varnothing$$

$$=(A\cap B')=(A-B)$$

۵ـ داریم:

$$\frac{\sqrt[5]{4}+1}{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{4}+1}\times\frac{\sqrt[5]{4}-1}{\sqrt[5]{4}-1}=\frac{\sqrt[5]{16}-1}{\sqrt[5]{64}-1}$$

$$\frac{\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{2}+1}\times\frac{\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{2}-1}=\frac{\sqrt[5]{8}-1}{\sqrt[5]{4}-1}$$

بنابراین عبارت فوق چنین می‌شود:

$$\frac{\sqrt[5]{8}+1}{\sqrt[5]{16}-1}\times\frac{\sqrt[5]{16}-1}{\sqrt[5]{64}-1}\times\frac{\sqrt[5]{8}-1}{\sqrt[5]{4}-1}$$

پس از اختصار لازم نتیجه می‌شود:

$$=\frac{(\sqrt[5]{8}-1)(\sqrt[5]{8}+1)}{(\sqrt[5]{4}-1)(\sqrt[5]{64}-1)}=\frac{\sqrt[5]{64}-1}{(\sqrt[5]{4}-1)(\sqrt[5]{64}-1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{4}-1}\times\frac{[(\sqrt[5]{4})^4+(\sqrt[5]{4})^3+(\sqrt[5]{4})^2+\sqrt[5]{4}+1]}{[(\sqrt[5]{4})^4+(\sqrt[5]{4})^3+(\sqrt[5]{4})^2+\sqrt[5]{4}+1]}$$

$$=\frac{1}{3}[(\sqrt[5]{4})^4+(\sqrt[5]{4})^3+(\sqrt[5]{4})^2+\sqrt[5]{4}+1]$$

۶- در دستگاه:

$$\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$$

اگر داشته باشیم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

دستگاه جواب ندارد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}m^2x-y=2\\ mx+2y=1\end{cases}\Rightarrow\frac{m^2}{m}=\frac{-1}{2}\Rightarrow$$

$$2m^2=-m\Rightarrow 2m^2+m=0\Rightarrow$$

$$m(2m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ 2m+1=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\boxed{m=0}\\ \boxed{m=-\frac{1}{2}}\end{cases}$$

پس به ازای $m=0$ و $m=\frac{-1}{2}$ دستگاه جواب ندارد.

$$m=1:\quad 2\begin{cases}x-y=2\\ x+2y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-2y=4\\ x+2y=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x=5\Rightarrow\boxed{x=\frac{5}{3}}$$

$$x-y=2\Rightarrow y=x-2=\frac{5}{3}-2=\frac{5-6}{3}=\frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow\boxed{y=-\frac{1}{3}}$$

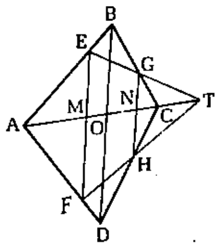
حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱- نقاط تقاطع EF و GH با قطر AC را به ترتیب M و N ونقطه‌تلاقی قطرهای چهارضلعی‌را O می‌نامیم. خطوط متقارب درنقطهٔ C روی پاره خطهای موازی GH و BD ؛ و خطوط متقارب درنقطهٔ A روی‌پاره‌خطهای موازی EF وBD ؛ قطعات متناظرمتناسب ایجاد می‌کنند یعنی داریم:

$$\frac{GN}{NH}=\frac{BO}{OD}\qquad(1)$$

و

$$\frac{EM}{MF}=\frac{BO}{OD}\qquad(2)$$



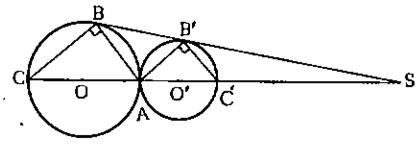
از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{GN}{NH}=\frac{EM}{MF}$$

از رابطهٔ اخیر باتوجه بداینکه $EF\|GH$ است مشخص‌می‌شود که خطوط EG و FH و MN از یك نقطه مانند T می گذرند یعنی‌نقطهٔ تقاطع EG و FH روی‌قطر AC است.

۲- خط‌المرکزین دو دایره‌را رسم می‌کنیم ونقاط‌دیگر تقاطع‌آن بادوایر O و O' رابه ترتیب C و C' می‌نامیم. از B به C واز B' به C' وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد BB' و OO' را S می‌نامیم. خطوط AB' و BC ، همچنین B'C' و AB باهم موازی‌اند. بنابراین داریم:

$$\frac{SA}{SC}=\frac{AB'}{BC}=\frac{SB'}{SB}\qquad(1)$$



ازطرفی دومثلث ABC و AB'C' متشابه‌اند پس:

$$\frac{AB'}{BC}=\frac{AC'}{AC}=\frac{2R'}{2R}=\frac{R'}{R}\qquad(2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{SA}{SC}=\frac{R'}{R}=cte$$

این رابطه‌نشان می‌دهدکه S نقطهٔ ثابتی روی‌خط‌المرکزین دو دایره است که BB' همواره از آن نقطه می گذرد.

۳- می‌دانیم هر گاه $(x,y)\in(A\times B)$ فقط‌یك‌حالت امکان‌پذیراست که $x\in A$ و $y\in B$

اما اگر $(x,y)\notin(A\times B)$ ، سه‌حالت ممکن‌است، به شکل زیر:

$$(x,y)\notin(A\times B)\Rightarrow\begin{cases}x\in A\wedge y\notin B\\ x\notin A\wedge y\in B\\ x\notin A\wedge y\notin B\end{cases}$$

باتوجه به مطلب فوق به اثبات تساوی می‌پردازیم:

$$[(x,y)\in(A\times B)'\Leftrightarrow(x,y)\notin(A\times B)$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\notin B)\vee(x\notin A\wedge y\in B)\vee(x\notin A\wedge y\notin B)$$

$$\overset{\text{تعریف متمم}}{\Longleftrightarrow}(x\in A\wedge y\in B')\vee(x\in A'\wedge y\in B)\vee(x\in A'\wedge y\in B')$$

$$\overset{\text{تعریف‌ضرب}}{\Longleftrightarrow}(x,y)\in(A\times B')\vee(x,y)\in(A'\times B)\vee(x,y)\in(A'\times B')$$

$$\overset{\text{تعریف‌اجتماع}}{\Longleftrightarrow}(x,y)\in(A\times B')\cup(A'\times B)\cup(A'\times B')]$$

$\Longrightarrow$ تساوی برقرار است

۴- با توجه‌به شکل واینکه نقطهٔ M وسط دو پاره خط AC و BD است ونیز باتوجه اینکه:

$$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{CM}\qquad(1)$$

و

$$\overrightarrow{DM}=-\overrightarrow{BM}\qquad(2)$$

خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$$

ازجمع چهار تساوی فوق و روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})+\underbrace{(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM})}_{0}+\underbrace{(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{BM})}_{0}=4\overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})=4\overrightarrow{OM}$$

۵- طبق‌فرض برای هر x و y در G داریم:

$$(xy)^2=x^2y^2$$

حال اگر x و y دوعضو دلخواه گروه G باشند داریم:

(می‌دانیم در گروهها قوانین حذف از چپ و راست برقرار است)

$$(xy)^2=x^2y^2 \Longrightarrow (xy)(xy)=(xx)(yy)$$
$$\Longrightarrow \not x[y(xy)]=\not x[x(yy)]$$
$$\overset{\text{قانون حذف}}{\Longrightarrow} [y(xy)]=[x(yy)]$$
$$\Longrightarrow (yx)\not y=(xy)\not y$$
$$\overset{\text{قانون حذف}}{\Longrightarrow} yx=xy$$

لذا ثابت شد برای هردوعضو گروه مانند x و y و با توجه به فرض مسألهٔ خواهیم داشت:

$$xy=yx$$

یعنی G یك گروه آبلی یا جابجایی است.

۶-

$$A+B+C=0 \Longrightarrow A+B=-C$$
$$\Longrightarrow (A+B)^3=-C^3$$
$$A^3+B^3+3AB(A+B)=-C^3 \Longrightarrow$$
$$A^3+B^3+3AB(-C)=-C^3$$
$$\Longrightarrow A^3+B^3+C^3=3ABC$$

معادلهٔ فوق‌را چنین می‌نویسیم:

$$(x^2+3x+2)^3+(x^2-3x+1)^3+(-2x^2-3)^3=0$$

$$\begin{cases}A=x^2+3x+2\\B=x^2-3x+1\\C=-2x^2-3\end{cases} \rightarrow A+B+C=$$

$$x^2+3x+2+x^2-3x+1-2x^2-3=0$$

بنابراین داریم: $A^3+B^3+C^3=3ABC$

$$\Longrightarrow A^3+B^3+C^3=0 \Longrightarrow 3ABC=0$$

$$\Longrightarrow ABC=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix}A=0\\B=0\\C=0\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}x^2+3x+2=0\\x^2-3x+1=0\\-2x^2-3=0\end{vmatrix} \Longrightarrow x^2+3x+2=0 \Longrightarrow$$

$$(x+1)(x+2)=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix}x+1=0\\x+2=0\end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{matrix}x=-1\\x=-2\end{matrix}}$$

و $x^2-3x+1=0$

$$\Longrightarrow \boxed{x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$$

$$-2x^2-3=0 \Longrightarrow x^2=\frac{-3}{2}$$

⟸ ریشهٔ حقیقی ندارد.

بنابراین مجموعهٔ جواب معادله چنین است:

$$R=\left\{-2,-1,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$$

۷- اگر $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ جملاتی از یك تصاعد حسابی فرض‌شوند داریم:

$$\begin{cases}\sqrt{3}-\sqrt{2}=Kd & \text{(d قدرنسبت تصاعد فرض می‌شود)}\\ \sqrt{5}-\sqrt{3}=Sd & (K, S\in Z)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{2})S=K(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \Longrightarrow$$
$$K\sqrt{5}-S\sqrt{2}=(K-S)\sqrt{3}$$

طرفین تساوی‌فوق‌را مجذور می‌کنیم و به دست می‌آید:

$$5K^2+2S^2-2KS\sqrt{10}=3(K-S)^2$$
$$\Longrightarrow \sqrt{10}=\frac{5K^2+2S^2-3(K-S)^2}{2KS}$$

تساوی اخیر غیر ممکن‌است زیرا $\sqrt{10}$ عددی است گنگ و برابر یك عدد گویا نمی‌تواند باشد. بنابراین تناقض فوق مطلب را ثابت می‌کند.

۸- با به توان ۲ رسانیدن هریك از معادلات دستگاه و جمع آنها باهم خواهیم داشت:

$$x^2=r^2\sin^2\alpha\cos^2\theta$$
$$y^2=r^2\sin^2\alpha\sin^2\theta$$
$$z^2=r^2\cos^2\alpha$$
$$\Longrightarrow x^2+y^2+z^2=$$
$$r^2[\sin^2\alpha\overbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}^{1}+\cos^2\alpha]$$
$$\Longrightarrow x^2+y^2+z^2=r^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$\Longrightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=r^2}$$ رابطهٔ مستقل از α و θ

۹- حل (۱)

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$
$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta \Longrightarrow$$
$$\frac{\sec^2\theta+2tg\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{1+2\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{\frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

حل (۲)

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\beta-\theta)}{\cos\beta\cos\theta}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos\theta-\cos\beta\sin\theta}{\cos\beta\cos\theta}+$$
$$\frac{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+$$
$$\frac{\sin\beta\cos\theta}{\cos\beta\cos\theta}-\frac{\cos\beta\sin\theta}{\cos\beta\cos\theta}+\frac{\sin\theta\cos\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}-\frac{\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}$$
$$=tg\alpha-tg\beta+tg\beta-tg\theta+tg\theta-tg\alpha=0$$

حل (۳) اگر قرار دهیم:

$$tg\frac{\theta}{2}=t$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{و} \quad \sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta-\sin\theta+1}=\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}-1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}+1}$$

$$=\frac{1-t^2+2t-(1+t^2)}{1-t^2-2t+(1+t^2)}=\frac{2t-2t^2}{2-2t}=t=tg\frac{\theta}{2}$$

حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱- از D' به C' وصل می‌کنیم داریم:

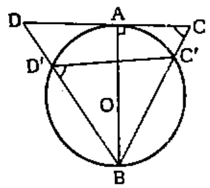
$$B\hat{D}'C'=\frac{\widehat{BC'}}{2}$$

$$D\hat{C}C'=\frac{\widehat{AD'B}-\widehat{AC'}}{2}=\frac{\widehat{AC'B}-\widehat{AC'}}{2}=\frac{\widehat{BC'}}{2}$$

و

$$\Longrightarrow B\hat{D}'C'=D\hat{C}C'$$

لذا چهارضلعی DCC'D' محاطی است.



۲- پای ارتفاعات مثلث ABC را A' و B' و C' می‌نامیم داریم:

$$S_{HBC}+S_{HAC}+S_{HAB}=S_{ABC} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(a\cdot HA'+b\cdot HB'+c\cdot HC')=S \Longrightarrow$$

$$a\cdot HA'+b\cdot HB'+c\cdot HC'=2S$$

اما :

$$HA'=h_a-a' \text{ و } HB'=h_b-b' \text{ و } HC'=h_c-c'$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$a(h_a-a')+b(h_b-b')+c(h_c-c')=2S \Longrightarrow$$

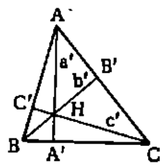
$$a\cdot h_a+b\cdot h_b+c\cdot h_c-(aa'+bb'+cc')=2S$$

$$\Longrightarrow 6S-(aa'+bb'+cc')=2S \Longrightarrow$$

$$a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c'=4S=\frac{abc}{R} \Longrightarrow$$

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{abc}=\frac{1}{R} \Longrightarrow$$

$$\frac{a'}{bc}+\frac{b'}{ac}+\frac{c'}{ab}=\frac{1}{R}$$



۳- فرض‌کنیم U یك زیرفضای، فضای برداری IR روی خودش باشد و فرض کنیم :

$$U \neq \{0\}$$

ثابت می‌کنیم $U=IR$.

(می‌دانیم اگر U زیر فضای IR باشد، اولاً $U \subset IR$ وثانیاً U نسبت به هر دوعمل جمع وضرب اسکالر که در این فضا همان جمع وضرب معمولی است، بسته می‌باشد.)

$$U\neq\{0\} \Longrightarrow \exists u\in U \Longrightarrow u\in IR$$

$$\xrightarrow{u\neq 0} u^{-1}\in IR$$

$$\xrightarrow{\text{نسبت بضرب بسته}} u^{-1}u\in U \Longrightarrow 1\in U$$

حال ثابت می‌کنیم $IR \subset U$ که در این‌صورت چون همواره $U \subset IR$ ثابت‌شده است که $U=IR$.

$$[\text{اگر: } x\in IR \Longrightarrow x\cdot 1\in U \Longrightarrow x\in U]$$

$$\Longrightarrow R\subset U$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

۴- این مسألهٔ نوعی مسألهٔ ترکیب با تبدیل است به این معنا که در وهلهٔ اول برای انتخاب ۲ رقم ازجعبه A و ۳ رقم ازجعبه B، از ترکیب استفاده کرده و پس از انتخاب و قرار گرفتن این پنج رقم در کنارهم تعداد تبدیلات آنها را باید حساب کنیم. بنابراین خواهیم داشت (تکرار ارقام انتخاب شده مجاز نیست.)

(الف) $\binom{3}{2}\times\binom{5}{3}\times 5!$

(ب) $\binom{3}{2}\times\Big[\overbrace{\binom{1}{1}}^{\text{انتخاب رقم ۷}}\times\binom{4}{2}\Big]\times 5!$

(شامل رقم ۷ است یعنی رقم ۷ را از جعبهٔ B باید حتماً انتخاب کنیم.)

(ج) $\Big[\overbrace{\binom{1}{1}}^{\text{انتخاب رقم ۲}}\times\binom{2}{1}\Big]\times\Big[\overbrace{\binom{1}{1}}^{\text{انتخاب رقم ۵}}\times\binom{4}{2}\Big]\times 3!$

$$\boxed{1}\quad\boxed{3}\quad\boxed{2}\quad\boxed{1}\ =3!$$

رقم ۲   رقم ۵

۵-

(الف) $\binom{24}{6}\times\binom{18}{6}\times\binom{12}{6}\times\binom{6}{6}$

(ب) $\binom{24}{6}\times\binom{18}{6}\times\binom{12}{6}\times\binom{6}{6}\times\frac{1}{4!}$

(در حقیقت در قسمت ب هر ۴ تیم ۶ نفره یك حالت تولید می‌کنند.)

۶- (g(x) را در (x − ۱) ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم)

$$g(x)=0 \Longrightarrow x^9+x^8+\dots+x+1=0$$

$$g(x)=\frac{x^{10}-1}{x-1}=0 \Longrightarrow$$

$$x^{10}-1=0 \Longrightarrow \boxed{x^{10}=1}$$

$$f(x)=x^{990+9}+x^{880+8}+\dots+x^{110+1}+1=$$

$$(x^{10})^{99}\cdot x^9+(x^{10})^{88}\cdot x^8+\dots+$$

$$(x^{10})^{11}\cdot x+1$$

$$\xrightarrow{x^{10}=1} R(x)=x^9+x^8+\dots+x+1=g(x)$$

$$\Longrightarrow R=0 \quad \text{باقی‌مانده‌صفر است}$$

توضیح: هرگاه باقی‌مانده برابرمقسوم علیه‌شود ازتقسیم مجدد نتیجه می‌شود: $R=0$.

۷- جملهٔ عمومی بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ چنین‌است:

$$\text{جملهٔ عمومی}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

بنابراین برای دوجمله‌ای $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^{n^2}$ داریم:

$$\Longrightarrow \binom{n^2}{k}(\sqrt[3]{x})^{n^2-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^k$$

$$=\binom{n^2}{k}x^{\frac{n^2-k}{3}}\cdot x^{\frac{-2k}{5}}=\binom{n^2}{k}x^{\frac{5n^2-11k}{15}}$$

$$\xrightarrow[\text{از } x]{\text{جملهٔ مستقل}} 5n^2-11k=0 \Longrightarrow n^2=\frac{11k}{5}$$

$$\xrightarrow{k \text{ مضرب پانزده است}} k=5s \Longrightarrow n^2=\frac{11}{5}(5s)=11s$$

$$\Longrightarrow n^2=11s \Longrightarrow n=\sqrt{11s}$$

$$\xrightarrow[\text{S مضربی از یازده ومربع یك عدداست}]{\text{چون } n \in N \text{ می‌باشد پس}} s=11m^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{n=11m} \xrightarrow[n\in N]{n<120} n\in\{11,22,33,\dots,110\}$$

بنابراین مسئله با شرط $n<120$ و $n\in N$ دارای ده جواب می‌باشد.

۸- می‌دانیم اگر $x\to 0$ خواهیم داشت:

$$tg x \approx x \quad \text{و} \quad \sin x\approx x$$

درحد فوق نیز داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\to 0\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^3+x+1}\to 0$$

بنابراین از هم‌ارزی خواهیم‌داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{tg\left(\sin\left(\frac{1}{x^3+x+1}\right)\right)}{\sin\left(tg\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\right)} \xrightarrow{\text{هم ارزی}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{tg\left(\frac{1}{x^3+x+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)} \xrightarrow{\text{هم ارزی}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^3+x+1}}{\frac{1}{x^2+x+1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+x+1}=0$$

۹- از رابطهٔ :

$$a\sin\alpha\sin\beta+b\cos\alpha\cos\beta=0$$

$tg\alpha$ را برحسب $tg\beta$ محاسبه می‌کنیم:

$$a\sin\alpha\sin\beta+b\cos\alpha\cos\beta=0 \Longrightarrow$$

$$tg\alpha\, tg\beta=\frac{-b}{a} \Longrightarrow tg\alpha=\frac{-b}{a\,tg\beta}$$

ازطرفی اگر در عبارت A به جای $\sin^2\alpha$ و $\cos^2\alpha$ برحسب $tg\alpha$ و به جای $\sin^2\beta$ و $\cos^2\beta$ برحسب $tg\beta$ مقدار قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A=\frac{1+tg^2\alpha}{a\,tg^2\alpha+b}+\frac{1+tg^2\beta}{a\,tg^2\beta+b}$$

حال اگر در این‌رابطه‌به جای $tg\alpha$ برحسب $tg\beta$ مقدار بگذاریم

خواهیم داشت:

$$A=\frac{1+\left(\frac{-b}{a\,tg\beta}\right)^2}{a\left(\frac{-b}{a\,tg\beta}\right)^2+b}+\frac{1+tg^2\beta}{a\,tg^2\beta+b}$$

$$=\frac{b^2+a^2tg^2\beta}{ab^2+a^2b\,tg^2\beta}+\frac{1+tg^2\beta}{a\,tg^2\beta+b}$$

$$\Longrightarrow A=\frac{(a+b)(a\,tg^2\beta+b)}{ap(a\,tg^2\beta+b)}=\frac{a+b}{ab}=cte$$

-۱۰

طرف اول اتحاد $=\frac{1}{\sin4\alpha}+\frac{\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=\frac{1+\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=$

$$\frac{2\cos^2 2\alpha}{2\sin2\alpha\cos2\alpha}=cotg2\alpha$$

طرف دوم اتحاد $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{tg\alpha}-tg\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-tg^2\alpha}{tg\alpha}\right)=$

$$\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}=\frac{1}{tg2\alpha}=cotg2\alpha$$

پس اتحاد برقرار است.

-۱۱

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin5x=\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}\Longrightarrow$$

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin5x$$

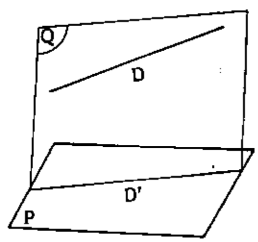
$$\Longrightarrow \sin x=\sin5x\Longrightarrow$$

$$5x=2k\pi+x\Longrightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}}$$

$$5x=2k\pi+\pi-x\Longrightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}$$

حل مسائل ریاضیات چهارم ریاضی

۱- راه اول: معادلهٔ دستهٔ صفحهٔ گذرنده برخط D را می‌نویسیم واز بین‌صفحات این دسته‌صفحه، معادلهٔ صفحه‌ای را تعیین می‌کنیم که برصفحهٔ P عموداست. فصل مشترک این صفحه (Q) باصفحهٔ P ، خط D' جواب مسئلهٔ است.



$$D:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-3}\Longrightarrow$$

$x-2y+5=0$,

$3y+z-6=0$: دوصفحهٔ مصور خط D

$$\alpha(x-2y+5)+\beta(3y+z-6)=0\Longrightarrow$$

$$\alpha x+(-2\alpha+3\beta)y+\beta z+5\alpha-6\beta=0$$

دسته صفحهٔ گذرنده برخط D.

$P: x+2y+z-1=0$

$aa'+bb'+cc'=0$ شرط عمود بودن دوصفحه

$$\Longrightarrow \alpha-4\alpha+6\beta+\beta=0\Longrightarrow \alpha=\frac{7}{3}\beta\Longrightarrow$$

$$\frac{7}{3}\beta x+\left(\frac{-14}{3}+3\right)\beta y+\beta z+\frac{35}{3}\beta-6\beta=0$$

$\Longrightarrow 7x-5y+3z+17=0$ معادلهٔ صفحهٔ Q

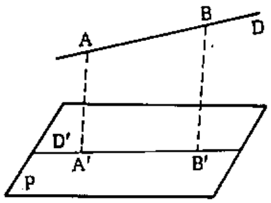
بنابراین معادلهٔ خط D' عبارت‌است از:

$$D':\begin{cases}7x-5y+3z+17=0\\x+2y+z-1=0\end{cases}$$

درصورتی‌که بخواهیم معادلهٔ کانونیک خط D' را پیداکنیم کافی است معادلهٔ دو صفحهٔ مصور D' را بیابیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$D':\ \frac{x+5}{11}=\frac{y}{4}=\frac{z-6}{-19}$$

راه دوم: دونقطهٔ A و B را روی خط D اختیار می‌کنیم و تصاویر این دونقطه روی‌صفحهٔ P را A' و B' می‌نامیم. معادلهٔ A'B' ، معادلهٔ خط D' تصویر خط D روی‌صفحهٔ P است.



$t=0\Longrightarrow A(x=-1, y=2, z=0)$

$t=1\Longrightarrow B(x=1, y=3, z=-3)$

$\vec{v}(1,2,1)$ بردار عمود برصفحهٔ P $\Longrightarrow$

$$AA'/\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$$

$$BB'/\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{1}$$

$$AA':\begin{cases}x+1=\frac{y-2}{2}=z=t\Longrightarrow\\ P:\ x+2y+z-1=0\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}x=t-1\\y=2t+2\\z=t\end{vmatrix}\Longrightarrow t-1+4t+4+t-1=0$$

$$\Longrightarrow t=-\frac{1}{3}\Longrightarrow A'\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$BB':\begin{cases}x-1=\frac{y-3}{2}=z+3=t\Longrightarrow\\ P:\ x+2y+z-1=0\end{cases}$$

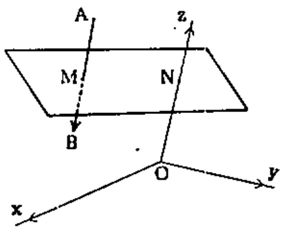
$$\begin{vmatrix}x=t+1\\y=2t+3\\z=t-3\end{vmatrix}\Longrightarrow t+1+4t+6+t-3-1=0$$

$$\Longrightarrow t=-\frac{1}{2}\Longrightarrow B'\left(\frac{1}{2},2,\frac{-7}{2}\right)$$

$$D'=A'B'/\ \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}=\frac{y-2}{2-\frac{4}{3}}=\frac{z+\frac{7}{2}}{-\frac{7}{2}+\frac{1}{3}}$$

$$\Longrightarrow D':\frac{x-\frac{1}{2}}{11}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+\frac{7}{2}}{-19}$$

۲- معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را می‌نویسیم ونقطهٔ تقاطع آن با محورzها رابه دست می‌آوریم.



M وسط AB $\begin{vmatrix}x=1\\y=1\\z=3\end{vmatrix}$ ، $\vec{AB}\begin{vmatrix}2\\-4\\-4\end{vmatrix}\Longrightarrow$

$\vec{v}\begin{vmatrix}-1=a\\2=b\\2=c\end{vmatrix}$ بردار در راستای $\vec{AB}$

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0\Longrightarrow$$

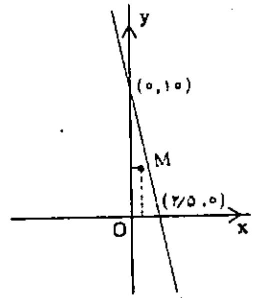
$$-1(x-1)+2(y-1)+2(z-3)=0\Longrightarrow$$

$$-x+2y+2z-7=0$$

صفحهٔ عمود منصف پاره خط AB

$$\begin{cases}-x+2y+2z-7=0\\x=0\\y=0\end{cases}\Longrightarrow N\left(0,0,\frac{7}{2}\right)$$ نقطهٔ مطلوب

۳- مرکز بیضی منطبق برمبدأ مختصات و با شرایط داده شده محور کانونی بیضی منطبق برمحور عرضها است پس معادلهٔ آن به صورت $\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱$ یا :



$$a^۲x^۲+b^۲y^۲-a^۲b^۲=۰$$

است که چون ازنقطهٔ $M(۱,۴)$ باید بگذرد داریم:

$$M(۱,۴)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ بیضی}}$$

$$a^۲+۱۶b^۲-a^۲b^۲=۰ \qquad (۱)$$

ازطرفی خط $y+۴x=۱۰$ بربیضی مماس است پس:

$$\begin{cases}a^۲x^۲+b^۲y^۲-a^۲b^۲=۰\\ y=-۴x+۱۰\end{cases}\Longrightarrow$$

$$(a^۲+۱۶b^۲)x^۲-۸۰b^۲x+b^۲(۱۰۰-a^۲)=۰$$

معادلهٔطولهای نقاط تلاقی خط و بیضی

$$\Delta'=۰ \Longrightarrow ۱۶۰۰b^۴-b^۲(a^۲+۱۶b^۲)\times$$

$$(۱۰۰-a^۲)=۰ \Longrightarrow -۱۰۰+a^۲+۱۶b^۲=۰$$

$$\Longrightarrow a^۲+۱۶b^۲=۱۰۰ \qquad (۲)$$

$$\begin{matrix}(۱)\\(۲)\end{matrix}\begin{cases}a^۲+۱۶b^۲-a^۲b^۲=۰\\ a^۲+۱۶b^۲=۱۰۰\end{cases}\Longrightarrow$$

$$۱۶b^۴-۱۰۰b^۲+۱۰۰=۰ \Longrightarrow$$

$$۴b^۴-۲۵b^۲+۲۵=۰ \Longrightarrow b^۲=۵ \text{ و } b^۲=\frac{۵}{۴}$$

$$b^۲=۵ \Longrightarrow a^۲=۲۰ \Longrightarrow \frac{y^۲}{۲۰}+\frac{x^۲}{۵}=۱$$

معادلهٔ بیضی (یك جواب)

$$b^۲=\frac{۵}{۴} \Longrightarrow a^۲=۸۰ \Longrightarrow \frac{y^۲}{۸۰}+\frac{x^۲}{\frac{۵}{۴}}=۱$$

معادلهٔ بیضی (جواب دیگر)

همان‌طوری که دیده می‌شود مسئله دوجواب دارد.

تبصره : اگر معادلهٔ بیضی را به صورت:

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

درنظربگیریم یعنی محور کانونی بیضی را منطبق بـرمحور xها فرض کنیم جوابهای $a^۲=۵$ و $b^۲=۲۰$ همچنین

$$b^۲=۸۰ \text{ و } a^۲=\frac{۵}{۴}$$

به دست می‌آید که قابل قبول نیستند.

۴-

$$(p \Leftrightarrow q)\equiv(p\Longrightarrow q)\wedge(q\Longrightarrow p)$$
$$\equiv(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)$$
$$\equiv[(\sim p\vee q)\wedge\sim q]\vee[(\sim p\vee q)\wedge p]$$
$$\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(p\wedge q)$$
$$\equiv\sim(\sim p\wedge\sim q)\Longrightarrow(p\wedge q)$$
$$\equiv(p\vee q)\Longrightarrow(p\wedge q)$$

بنابراین ثابت شد:

$$(p\Leftrightarrow q)\equiv[(p\vee q)\Longrightarrow(p\wedge q)] \qquad (۱)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sim[(p\vee q)\Longrightarrow(p\wedge q)]\equiv\sim(q \qquad q)$$

$$\equiv(\sim p\Leftrightarrow q)\overset{\text{بنابر(۱)}}{\equiv}[(\sim p\vee q)$$
$$\Longrightarrow(\sim p\wedge q)]$$

۵- فرض کنیم R حلقه‌ای یکدار و $a\in R$ یك مقسوم علیه صفر باشد. ثابت می‌کنیم a عضوی وارون‌پذیر نیست.

اثبات به برهان خلف: فرض کنیم a وارون‌پذیر باشد پس:

$$\exists\, a^{-۱}\in R \quad , \quad aa^{-۱}=۱$$

ازطرفی چون a یك مقسوم علیه صفر است پس $a\neq۰$ و $b\neq۰$ای درحلقهٔ R هست به قسمی که:

$$ab=۰\Longrightarrow a^{-۱}(ab)=a^{-۱}\cdot۰\Longrightarrow$$
$$(a^{-۱}a)b=a^{-۱}\cdot۰\Longrightarrow ۱\cdot b=a^{-۱}\cdot۰$$
$$\Longrightarrow b=۰$$

که با مخالف صفر بودن b در تناقض است لذا فرض خلف باطل وحکم برقرار است.

عکس مطلب بالا درحالت کلی برقرار نیست مثلاً درحلقهٔ $(Z,+,\cdot)$ عدد ۲ وارون‌پذیر نیست ولی مقسوم علیه صفر نیز نمی‌باشد.

۶- طبق قضیهٔ فرما می‌دانیم هرگاه p عددی اول باشد و a عددی نسبت به p اول (به‌عبارت دیگر $p\nmid a$) در این صورت

$$a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱$$

ازطرفی واضح است که هردوعدداول مانند p و q نسبت به هم اولند بنابراین باتوجه به مطالب بالا واینکه هرعدد صحیح کلیه توانهای صحیح ومثبت خودرا می‌شمارد خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}(p,q)=۱\overset{\text{قضیهٔ فرما}}{\Longrightarrow} p^{q-۱}\overset{q}{\equiv}۱\\ \text{توانهای مثبت خودرا می‌شمارد } q\Longrightarrow q^{p-۱}\overset{q}{\equiv}۰\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$p^{q-۱}+q^{p-۱}\overset{q}{\equiv}۱ \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}(p,q)=۱\overset{\text{قضیهٔ فرما}}{\Longrightarrow} q^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱\\ \text{توانهای مثبت خودرا می‌شمارد } p\Longrightarrow p^{q-۱}\overset{p}{\equiv}۰\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$p^{q-۱}+q^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱ \qquad (۲)$$

ازطرفی طبق قضیه‌ای داریم، اگر

$$(m,n)=۱ \text{ و } a\overset{n}{\equiv}b \text{ و } a\overset{m}{\equiv}b$$

دراین صورت $a\overset{mn}{\equiv}b$. لذا باتوجه به (۱) و (۲) واینکه

$$(p,q)=۱$$

خواهیم داشت:

$$p^{q-۱}+q^{p-۱}\overset{pq}{\equiv}۱$$

۷- الف)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[۲n]{x^{۲n}+۴nx^{۲n-۱}+m}+x\right)\overset{\text{(هم‌ارزی)}}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[۲n]{\left(x+\frac{۴n}{۲n}\right)^{۲n}}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(|x+۲|+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-x-۲+x)=-۲$$

ب) باتوجه به اینکه اگر $x\to۰$ داریم:

$$tg\,x^n\approx tg^n x\approx x^n \text{ و } \sin x^n\approx\sin^n x\approx x^n$$

خواهیم داشت:

$$\left(x\to\pm\infty\Longrightarrow\frac{۱}{x^۴+x^۲+۵}\to۰ \text{ و } \frac{۱}{x^۴+x^۲+۱}\to۰\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin^n\left(tg^n\left(\sin\left(\frac{۱}{x^۴+x^۲+۵}\right)^n\right)\right)}{tg^n\left(\sin^n\left(tg\left(\frac{۱}{x^۴+x^۲+۱}\right)^n\right)\right)}\overset{\text{(هم‌ارزی)}}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin^n\left(tg^n\left(\frac{۱}{x^۴+x^۲+۵}\right)^n\right)}{tg^n\left(\sin^n\left(\frac{۱}{x^۴+x^۲+۱}\right)^n\right)}$$

$$\overset{\text{(هم‌ارزی)}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin^n\left(\frac{۱}{x^۴+x^۲+۵}\right)^{n^۲}}{tg^n\left(\frac{۱}{x^۴+x^۲+۱}\right)^{n^۲}}$$

$$\overset{(\text{هم‌ارزی})}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{(x^4+x^2+5)^{n^2}}}{\frac{1}{(x^3+x^2+1)^{n^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3+x^2+1)^{n^2}}{(x^4+x^2+5)^{n^2}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+x^2+1}{x^4+x^2+5}\right)^{n^2}$$

$$\overset{(\text{هم‌ارزی})}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^4}\right)^{n^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{n^2} = 0$$

۸ـ می‌دانیم اگر تابعی در یك نقطه مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته است. بنابراین شرایط پیوستگی و مشتق‌پذیری را برای تابع برقرار می‌کنیم. یعنی:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x\to -1^+} (Ax^2+B) = \lim_{x\to -1^-} (2x^3) = 2(-1)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{A+B=-2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 & x<-1 \\ 2Ax & x>-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overset{(\text{مشتق راست})}{f'_+(-1)} = \overset{(\text{مشتق چپ})}{f'_-(-1)} \Rightarrow 2A(-1) = 6(-1)^2$$

$$\Rightarrow -2A = 6 \Rightarrow \boxed{A=-3} \Rightarrow$$

$$A+B = -3+B = -2 \Rightarrow \boxed{B=1}$$

با توجه به پارامترهای به دست آمده تابع چنین می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 & x \leqslant -1 \\ -3x^2+1 & x>-1 \end{cases}$$

حل مسائل سال دوم تجربی

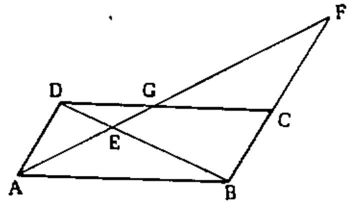
۱ـ با استفاده از قضیهٔ تالس داریم:

$$AD \parallel BF \Rightarrow \frac{EA}{EF} = \frac{ED}{EB} \quad (1)$$

$$DG \parallel AB \Rightarrow \frac{EG}{EA} = \frac{ED}{EB} \quad (2)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{EA}{EF} = \frac{EG}{EA} \Rightarrow EA^2 = EF \cdot EG$$



۲ـ مثلث OEF قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. زیرا:

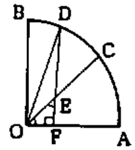
$$\hat{O}_1 = 45^\circ \quad \text{و} \quad \hat{F} = 90^\circ$$

است، پس $\hat{E} = 45^\circ$ و در نتیجه $EF = OF$ است. از O به D وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODF می‌توان نوشت:

$$OD^2 = OF^2 + DF^2$$

اما $OD = OA$ و $OF = EF$ است. پس:

$$OA^2 = EF^2 + DF^2$$



۳ـ (داریم: $x-1>0 \Rightarrow x>1$)

$$\log_2(x-1) + \log_2 x + \log_2(x+1) = 2\log_2 x - 1$$

$$\log_2 x(x-1)(x+1) = \log_2 x^2 - \log_2^2 \Rightarrow$$

$$\log_2 x(x-1)(x+1) = \log_2 \frac{x^2}{2}$$

$$x(x^2-1) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^3 - x - \frac{x^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^3 - x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین جواب مورد قبول معادلهٔ $x=\sqrt{2}$ می‌باشد.

۴ـ جملهٔ عمومی تصاعد حسابی چنین است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow$$

$$a_5 = a_1 + (5-1)d = 23 \Rightarrow$$

$$a_1 + 4d = 23 \quad (1)$$

مجموع n جملهٔ تصاعد حسابی چنین است:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + (10-1)d] = 255$$

$$\Rightarrow 5(2a_1 + 9d) = 255$$

$$2a_1 + 9d = 51 \quad (2) \xrightarrow{\text{از روابط (۱) و (۲)}}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 23 \\ 2a_1 + 9d = 51 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق داریم:

$$\overset{(\text{جملهٔ اول})}{a_1 = 3} \quad \text{و} \quad \overset{(\text{قدر نسبت})}{d = 5}$$

اینك با در دست‌داشتن جملهٔ اول تصاعد و قدر نسبت آن جملهٔ بیستم چنین است:

$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = 3 + 19 \times 5 = 98 \Rightarrow$$

جملهٔ بیستم: $\boxed{a_{20} = 98}$

۵ـ

$$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow$$

$$tg\frac{x}{4} = tg\frac{4\pi}{12} = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

حل مسائل سال سوم تجربی

۱ ـ الف : با توجه به خاصیت تقارن محوری می‌توان نوشت:

$$D\hat{A}H = 2\hat{A}_1 \quad (1)$$

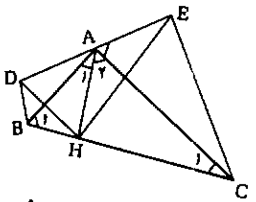
$$E\hat{A}H = 2\hat{A}_2 \quad (2)$$

ازجمع این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$D\hat{A}H + E\hat{A}H = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$$

$$= 2(\hat{A}) = 2 \times 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow D\hat{A}E = 180^\circ$$

پس نتیجه می‌شود که نقاط D و A و E روی یك خط راست واقع‌اند.



ب) در مثلث ABC ، $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ$ است . از طرفی:

$$\begin{cases} D\hat{B}H = 2\hat{B}_1 \\ E\hat{C}H = 2\hat{C}_1 \end{cases} \Rightarrow D\hat{B}H + E\hat{C}H =$$

$$=2(\hat{B}_1+\hat{C}_1)=2\times 90^\circ=180^\circ \Longrightarrow DB \parallel EC$$

لذا DBCE ذوزنقه است.

۲ـ نقاط تقاطع خط Δ با محورهای مختصات را تعیین می‌کنیم.

$$\Delta:\ 3x-2y+6=0 \Longrightarrow$$

$$A(0,3) \qquad B(-2,0)$$

پس مختصات رئوس مثلث OAB عبارت‌اند از:

$$O(0,0) \quad \text{و} \quad A(0,3) \quad \text{و} \quad B(-2,0)$$

از آنجا:

مرکز ثقل مثلث

$$G\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_O}{3}=\dfrac{0-2+0}{3}=-\dfrac{2}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_O}{3}=\dfrac{3+0+0}{3}=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow G\left(-\frac{2}{3},1\right) \Longrightarrow$$

$$OG=\sqrt{\frac{4}{9}+1}=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

اندازهٔ بردار مکان نقطهٔ G .

۳ـ ابتدا از روابط:

$$g(x)=\sqrt{x} \quad \text{و} \quad fog(x)=\frac{1}{x-1}$$

تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم وسپس دامنه و بردآن را تعیین می‌کنیم.

$$fog(x)=\frac{1}{x-1} \Longrightarrow f(g(x))=\frac{1}{x-1}$$

$$\Longrightarrow f(\sqrt{x})=\frac{1}{x-1}$$

$$\sqrt{x}=t \Longrightarrow x=t^2 \Longrightarrow f(t)=\frac{1}{t^2-1}$$

$$\xrightarrow{\text{t متغیر ظاهری است}} f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

بنابراین D_f چنین است:

$$x^2-1=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$$

$$\Longrightarrow D_f=R-\{-1\,,\,1\}$$

برای تعیین بردتابع $f(x)$ ابتدا x را برحسب y محاسبه‌ می‌کنیم وسپس yهای موردقبول را معین می‌کنیم یعنی:

$$y=f(x)=\frac{1}{x^2-1} \Longrightarrow x^2-1=\frac{1}{y}$$

$$\Longrightarrow x^2=\frac{1}{y}+1$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{y+1}{y}} \Longrightarrow \frac{y+1}{y}\geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y+1=0 \Longrightarrow y=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

y	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y+1		$-$	0	$+$		$+$	
y		$-$		$-$	0	$+$	
بردتابع		$+$		$-$	∞	$+$	

ازجدول فوق نتیجه می‌شودکه yهای مورد قبول از این قرار است:

$$f(x) \text{ برد تابع } R_f=\{y \mid y\leqslant -1\ ,\ y>0\}$$

و یا

$$R_f=(-\infty,-1]\cup(0\ ,\ +\infty)$$

۴ـ می‌دانیم‌ضریب زاویهٔ خط‌قائم چنین است:

$$m'=\frac{-1}{f'(x_0)} \Longrightarrow y'=f'(x)$$

$$=71(6x^2)(2x^3-1)^{70}\sin^3 2x^2$$

$$+3(4x)\sin^2 2x^2\cos 2x^2(2x^3-1)^{71}$$

$$+\frac{3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3+1)^4}} \Longrightarrow$$

$$m=f'(0)=0 \quad \text{:ضریب زاویهٔ خط مماس}$$

$$(x_0=0 \Longrightarrow y_0=1 \quad \text{:عرض نقطه تماس)}$$

$$y-y_0=m(x-x_0) \Longrightarrow y-1=0$$

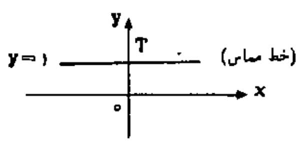
$$\Longrightarrow y=1 \quad \text{:معادلهٔ خط مماس}$$

بدیهی است خطی که در نقطهٔ تماس یعنی:

$$T\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$$

برخط مماس عموداست‌خطی‌است به معادلهٔ $x=0$ (یعنی‌معادلهٔ محورyها). بنابراین معادلهٔ‌خط‌قائم برمنحنی درنقطه‌ای به طول صفرچنین است:

$$\boxed{x=0} \quad \text{معادلهٔ خط قائم}$$



(باتوجه به شکل بدیهی است که محورyها برخط مماس عمود است.)

۵ـ می‌دانیم‌شرط‌اینکه تابع $f(x)$ درنقطه‌ای‌به‌طول x_0 حد داشته‌باشد این است که

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

بنابراین با برقراری شرط فوق m به دست‌خواهدآمد، یعنی:

$$\lim_{x\to -1^+}(mx^2-1)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3x+3}{x^3+1}\right) \Longrightarrow$$

$$m-1=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=\frac{0}{0} \quad \text{(مبهم)}$$

$$\xRightarrow{\text{رفع‌ابهام}} m-1=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3}{x^2-x+1}\right)=\frac{3}{3}=1$$

$$\Longrightarrow m-1=1 \Longrightarrow \boxed{m=2}$$

پس به‌ازای $m=2$ تابع درنقطهٔ موردنظر(به‌طول $x=-1$) دارای‌حداست. یعنی‌حد راست وحدچپ تابع دراین‌نقطه‌برابر می‌شود.

$$\Longrightarrow f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & x\geqslant -1 \\ \dfrac{3x+3}{x^3+1} & x<-1 \end{cases}$$

همانطورکه می‌دانیم‌شرایط‌پیوستگی درشرط زیر‌خلاصه می‌شوند، یعنی اگرشرط زیربرقرار باشد تابع پیوسته‌است.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad \text{:شرط پیوستگی دریک‌نقطه}$$

با برقراری شرط‌فوق برای‌تابع موردنظر داریم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to -1^+}(2x^2-1)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3x+3}{x^3+1}\right)$$

$$=f(-1)=2(-1)^2-1=2-1=1$$

$$\lim_{x\to -1^+}(2x^2-1)=1$$

و

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=1$$

بنابراین تابع درنقطهٔ موردنظر پیوسته است. زیرا شرط پیوستگی درنقطهٔفوق برقرار است.

۶ـ

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{4}+\mathrm{Arctg}\frac{1}{5}+\mathrm{Arctg}\frac{1}{8}+\mathrm{Arctg}\frac{2}{9}=\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{4}=\alpha \Longrightarrow tg\alpha=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{5}=\beta \Longrightarrow tg\beta=\frac{1}{5}$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{8}=\gamma \Longrightarrow tg\gamma=\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{2}{9}=\delta \Longrightarrow tg\delta=\frac{2}{9}$$

$$\Longrightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow tg(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=1 \Longrightarrow$$

$$tg[(\alpha+\delta)+(\beta+\gamma)]=1$$

$$\Longrightarrow \frac{tg(\alpha+\delta)+tg(\beta+\gamma)}{1-tg(\alpha+\delta)tg(\beta+\gamma)}=1$$

اما:

$$tg(\alpha+\delta)=\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{18}}=\frac{1}{2}$$

و

$$tg(\beta+\gamma)=\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{40}}=\frac{1}{3}$$

است پس داریم:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1 \Longrightarrow 1=1$$

۷–

$$\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$+\mathrm{Arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Arccotg}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

می‌دانیم که:

$$\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3} \text{ و } \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

و

$$\mathrm{Arc\,tg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Arc\,cotg}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

می‌باشد. پس حاصل عبارت فوق برابر است با:

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

نکته: به طور کلی $(|m|\leqslant 1)$

$$\mathrm{Arcsin}\,m+\mathrm{Arccos}\,m=\frac{\pi}{2}$$

و

$$\mathrm{Arctg}\,m+\mathrm{Arccotg}\,m=\frac{\pi}{2}$$

است. پس حاصل عبارت بالا $\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

حل مسائل ریاضیات چهارم تجربی

۱– می‌دانیم مرکز تقارن توابع هموگرافیک (هذلولی) محل تلاقی مجانبهای قائم و افقی است. بنابراین داریم:

مجانب افقی $\begin{cases} y=\frac{a}{c} \\ x\to\pm\infty \end{cases}$ و مجانب قائم $\begin{cases} x=\frac{-d}{c} \\ y\to\pm\infty \end{cases}$

$$\Longrightarrow \omega\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right) \text{ مرکز تقارن}$$

$$\xrightarrow{\omega(-1,3)} \left| \begin{array}{l} \frac{-d}{c}=-1 \\ \frac{a}{c}=3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} d=c & (1) \\ a=3c & (2) \end{array} \right.$$

منحنی از نقطهٔ تقاطع دو خط:

$$\left| \begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=2x-1 \end{array} \right.$$

عبور می‌کند. بنابراین نقطهٔ تلاقی خطوط فوق در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.

$$4x-3=2x-1 \Longrightarrow 2x=2 \Longrightarrow$$

$$x=1 \quad \text{و} \quad y=1$$

بنابراین نقطهٔ $M\left|\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right.$ متعلق به منحنی نمایش تابع:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

است و درنتیجه خواهیم داشت:

$$1=\frac{a(1)+b}{c(1)+d} \Longrightarrow a+b=c+d \qquad (3)$$

با جایگزینی روابط (۱) و (۲) در رابطهٔ (۳) داریم:

$$3c+b=c+c$$

$$\Longrightarrow b=2c-3c \Longrightarrow b=-c \qquad (4)$$

اینك با قراردادن روابط (۱) و (۲) و (۴) در معادلهٔ تابع موردنظر داریم:

$$y=\frac{3cx+(-c)}{cx+c}=\frac{3x-1}{x+1} \Longrightarrow$$

$$y=\frac{3x-1}{x+1} \qquad \text{(تابع مطلوب)}$$

اکنون معادلهٔ خط قائم و زاویهٔ بین منحنی فوق، در محل تلاقی با منحنی نمایش تابع $y=\frac{1}{x}$ را بـه دست می‌آوریم. برای این منظور محل تلاقی دومنحنی را به دست می‌آوریم. یعنی:

$$\begin{cases} y=\frac{3x-1}{x+1} \\ y=\frac{1}{x} \end{cases} \Longrightarrow \frac{3x-1}{x+1}=\frac{1}{x} \Longrightarrow$$

$$3x^2-2x-1=0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-1}{3} \end{array} \right.$$

$$x=1:\ y=\frac{1}{1}=1 \Longrightarrow A\left|\begin{array}{l}1\\1\end{array}\right.$$

$$x=\frac{-1}{3}:\ y=\frac{1}{\frac{-1}{3}}=-3$$

$$\Longrightarrow B\left|\begin{array}{l}-\frac{1}{3}\\-3\end{array}\right.$$

A و B نقاط تلاقی دومنحنی فوق می‌باشند. بنابراین دریکی از نقاط مثلاً نقطهٔ A معادلهٔ خط قائم و زاویـهٔ بین دومنحنی را به‌دست می‌آوریم. بدیهی است برای نقطهٔ B نیز عملیات به‌طور مشابه است.

می‌دانیم مشتق تابع به‌ازای طول نقطهٔ تماس ضریب زاویهٔ خط مماس را به دست می‌دهد. بنابراین با در دست داشتن ضریب زاویهٔ خط مماس، ضریب زاویهٔ خط قائم نیز مشخص می‌شود. یعنی:

$$f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2} \Longrightarrow$$

$$m=f'(1)=\frac{4}{(1+1)^2}=1 \Longrightarrow$$

$m=1$ ضریب زاویهٔ خط مماس

$m'=-\frac{1}{m}=-1$ ضریب زاویهٔ خط قائم

$$\Longrightarrow y-y_A=m'(x-x_A) \Longrightarrow$$

$$y-1=-(x-1)$$

$\boxed{y=-x+2}$ معادلهٔ خط قائم درنقطهٔ A

حال برای به‌ دست آوردن زاویهٔ بین دومنحنی درنقطهٔ A ابتدا باید ضریب زاویه‌های خطوط مماس درنقطهٔ A را برای دومنحنی محاسبه نمود. زیرا زاویهٔ بین دومنحنی در نقطهٔ تلاقی زاویهٔ بین خطوط مماس درآن نقطه است. ضریب زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ A برای منحنی نمایش تابع:

$$y=\frac{3x-1}{x+1}$$

برابر $m_1=1$ به دست آمد. بنابراین کافی است ضریب زاویهٔ خط مماس برمنحنی $y=\frac{1}{x}$ را محاسبه کنیم. یعنی:

$$y=g(x)=\frac{1}{x} \Longrightarrow g'(x)=\frac{-1}{x^2} \Longrightarrow$$

$$m=g'(1)=\frac{-1}{1}=-1 \Longrightarrow$$

$$m_2=-1 \qquad \text{(ضریب زاویهٔ خط مماس)}$$

دراینجا باید دست‌داشتن ضریب زاویه‌های خطوط مماس درنقطهٔ تلاقی زاویهٔ بین دومنحنی به دست خواهد آمد:

$$tg\alpha=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\frac{1-(-1)}{1+1(-1)}=\frac{2}{0}=\infty$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \boxed{\alpha=90^\circ}$$

بنابراین دومنحنی درنقطهٔ A برهم عمودند.

۲ـ طولهای اکسترمم تابع درجهٔ سوم:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

وابه x_1 و x_2 نشان می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-10}{3}\\ x_1x_2=1\end{cases} \Longrightarrow X^2+\frac{10}{3}X+1=0$$

$$3X^2+10X+3=0 \Longrightarrow X=\frac{-5\pm\sqrt{25-9}}{3}$$

$$=\frac{-5\pm4}{3} \Longrightarrow \begin{cases}x_1=-3\\ x_2=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

بنابراین طولهای اکسترمم تابع مفروض:

$$x_2=\frac{-1}{3} \text{ و } x_1=-3$$

است. از طرفی دیگر می‌دانیم ریشه‌های مشتق تابع طولهای اکسترمم رابه دست می‌دهد، درنتیجه خواهیم داشت:

$$y'=3ax^2+2bx+c$$

$$y'=0 \Longrightarrow 3ax^2+2bx+c=0 \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}x_1=-3:\ 3a(-3)^2+2b(-3)+c=0\\ x_2=-\frac{1}{3}:\ 3a(\frac{-1}{3})^2+2b(\frac{-1}{3})+c=0\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left|\begin{array}{ll}27a-6b+c=0 & (1)\\ a-2b+3c=0 & (2)\end{array}\right.$$

همچنین ثابت می‌شودکه طول نقطهٔ عطف توابع درجهٔ سوم واسطهٔ حسابی، بین‌طولهای اکسترمم است. بنابراین داریم:

$$x_p=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{-10}{3}}{2}=\frac{-5}{3} \Longrightarrow x_p=\frac{-5}{3}$$

(طول نقطهٔ عطف)

از آنجا که نقطهٔ عطف‌هر تابع متعلق به منحنی نمایش آن تابع است، نتیجه می‌شودکه مختصات نقطهٔ عطف‌در معادلهٔ تابع‌صدق می‌کند و خواهیم داشت:

$$P\left|\begin{array}{l}\frac{-5}{3}\\ \frac{250}{27}\end{array}\right. \Longrightarrow \frac{250}{27}=a(\frac{-5}{3})^3+b(\frac{-5}{3})^2+c(\frac{-5}{3})+d$$

$$-125a+75b-45c+27d=250 \qquad (3)$$

وهمچنین می‌دانیم ریشهٔ مشتق‌ثانی تابع طول نقطهٔ عطف را به دست می‌دهد. درنتیجه داریم:

$$y''=6ax+2a \Longrightarrow y''=0$$

$$\Longrightarrow 6a(\frac{-5}{3})+2b=0 \Longrightarrow -10a+2b=0$$

$$\Longrightarrow 5a-b=0 \Longrightarrow b=5a \qquad (4)$$

منحنی‌نمایش تابع، محور عرض را در $y=5$ قطع می‌کند. بنابراین نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}0\\5\end{array}\right.$ درتابع صدق می‌کند. پس داریم:

$$5=a(0)^3+b(0)^2+c(0)+d \Longrightarrow \boxed{d=5} \qquad (5)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۴) و (۵) دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}27a-6b+c=0\\ a-2b+3c=0\\ -125a+75b-45c+27d=250\\ b=5a\\ d=5\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}27a-30a+c=0\\ a-10a+3c=0\\ -125a+375a-45c+135=250\end{cases}$$

پس‌از اختصار لازم، دستگاه اخیر چنین می‌شود:

$$\begin{cases}c=3a\\ 250a-45c=115\end{cases} \Longrightarrow$$

$$250a-135a=115 \Longrightarrow \boxed{a=1}$$

$$b=5a=5\times1=5 \Longrightarrow \boxed{b=5}$$

$$c=3a=3\times1=3 \Longrightarrow \boxed{c=3}$$

بنابراین تابع مطلوب چنین است:

$$y=x^3+5x^2+3x+5$$

۳ـ می‌دانیم معادلات‌خطوط مجانبهای‌هذلولی به معادلهٔ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

چنین می‌باشند:

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$$

یا

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (1)$$

با مقایسهٔ معادلات‌خطوط مجانب‌هذلولی فوق یعنی:

$$y=\pm\sqrt{2}x$$

با رابطهٔ (۱) داریم:

$$\pm\frac{b}{a}=\pm\sqrt{2} \Longrightarrow b=a\sqrt{2} \qquad (2)$$

با توجه‌به رابطهٔ (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2a^2}=1 \qquad (3)$$

از آنجاکه هذلولی فوق محور طول را در $x=-3$ قطع می‌کند، نتیجه می‌شودکه هذلولی موردنظر از نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}-3\\0\end{array}\right.$ عبور می‌کند. بنابراین با جایگزینی نقطهٔ A در رابطهٔ (۳) داریم:

$$\frac{(-3)^2}{a^2}=1 \Longrightarrow a^2=9 \Longrightarrow \boxed{a=\pm3}$$

(نقطهٔ A یك رأس هذلولی است)

$$\Longrightarrow \boxed{b=\pm3\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

هذلولی مطلوب:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{18}=1$$

۴ـ حجم‌حادث از دوران سطح محصورچنین است:

$$v=\pi\int_0^1 y^2dx$$

ابتدا نقاط‌برخورد منحنی‌را با محور طول به دست می‌آوریم. برای این‌منظور درتابع $y=0$ راجایگزین می‌کنیم ودرنتیجه داریم:

$$y=0 \Longrightarrow x^2-\sqrt[3]{x^2}=0 \Longrightarrow$$

$$x^2=\sqrt[3]{x^2} \Longrightarrow x^6=x^2$$

$$x^6-x^2=0 \Longrightarrow x^2(x^4-1)=0 \Longrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}x^2=0 \Longrightarrow \boxed{x=0}\\ x^4-1=0 \Longrightarrow x^4=1 \Longrightarrow \boxed{x=\pm1}\end{array}\right.$$

(نقاط برخورد منحنی با محورxها)

بنا براین حجم حادث چنین نتیجه می‌شود:

$$v=\pi\int_{-1}^{1}(x^3-\sqrt[3]{x^2})^2dx$$

$$v=\pi\int_{-1}^{1}(x^6-2x^3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4})dx$$

$$v=\pi\int_{-1}^{1}(x^6-2x^{\frac{11}{3}}+x^{\frac{4}{3}})dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{7}x^7-\frac{6}{14}x^{\frac{14}{3}}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right]_{-1}^{1}$$

$$v=\pi\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{14}+\frac{3}{7}\right)-\left(\frac{-1}{7}-\frac{6}{14}-\frac{3}{7}\right)\right]$$

$$v=\pi\left[\frac{2}{7}+\frac{6}{7}\right]=\frac{8}{7}\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{v=\frac{8\pi}{7}\ \text{واحد حجم}}$$

۵ـ با توجه به شرط داده‌شده علامت

$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$ و $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$

را باید مشخص کنیم. داریم:

$$\frac{5\pi}{16}<\frac{x}{8}<\frac{3\pi}{8}\Rightarrow\frac{5\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{2}$$

$\Rightarrow \sin\frac{x}{2}<0$ و $\cos\frac{x}{2}<0$ و

$$\sin\frac{x}{2}<\cos\frac{x}{2}\Rightarrow \sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}<0$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}<0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|}{2}+\frac{\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|}{2}=$$

$$\frac{-(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})-(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})}{2}=-\sin\frac{x}{2}$$

۶ـ

حل الف): $2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos 2x$
$=\sin^2x+\cos^2x \Rightarrow$

راه اول: $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=1 \Rightarrow$

$$\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\sin 2x+tg\frac{\pi}{6}\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x=k\pi}$$

$$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{3}}$$

راه دوم: $(1+1)tg^2x-2\sqrt{3}tgx+1-1=0$

$$\Rightarrow 2tgx(tgx-\sqrt{3})=0 \Rightarrow$$

$$tgx=0 \Rightarrow \boxed{x=k\pi}$$

$$tgx=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{3}}$$

حل ب): $\sqrt{2}(\sin 2x-\cos 2x)+2\sin 2x\cos 2x=\sqrt{2}$

معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم

$$\sin 2x-\cos 2x=z \Rightarrow \sin 2x\cos 2x=\frac{1-z^2}{2}\Rightarrow$$

$$\sqrt{2}z+2(\frac{1-z^2}{2})=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$z^2-\sqrt{2}z+\sqrt{2}-1=0 \Rightarrow$$

$z=1$ و $z=\sqrt{2}-1$

$$z=1 \Rightarrow \sin 2x-\cos 2x=1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow$$

$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$z=\sqrt{2}-1 \Rightarrow \sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+Arc\sin(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \\ x=k\pi+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}Arc\sin(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \\ 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-Arc\sin(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \\ x=k\pi+\frac{5\pi}{8}-\frac{1}{2}Arc\sin(\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \end{cases}$$

حل ج): $Arc\sin(2x-1)+\frac{\pi}{3}=2(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$

$$Arc\sin(2x-1)=\frac{-5\pi}{6}$$

$$2x-1=\sin(\frac{-5\pi}{6}) \Rightarrow 2x-1=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

۷ـ

$$(m-1)tgx+m\,cotgx=2(m-3)$$

حل اولاً: شرط جواب معادلهٔ کلاسیک نوع دوم:

$$c^2-4ab\geqslant 0$$

$$a=m-1 \quad , \quad b=m \quad , \quad c=2(m-3) \Rightarrow$$

$$4(m-3)^2-4(m-1)m\geqslant 0 \Rightarrow$$

$$(m-3)^2-m(m-1)\geqslant 0 \Rightarrow$$

$$m^2-6m+9-m^2+m\geqslant 0 \Rightarrow$$

$$-5m+9\geqslant 0 \Rightarrow \boxed{m\leqslant\frac{9}{5}}$$

حل ثانیاً:

$$\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

جوابهای کلی:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$ و $x=2\pi$ جواب غیرقابل‌قبول

$$x=\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{\text{درمعادله}}(m-1)tg\frac{2\pi}{3}+m\,cotg\frac{2\pi}{3}$$

$$=2(m-3) \Rightarrow m=\frac{9\sqrt{3}-12}{2}$$

حل ثالثاً:

$$4tg2x=3 \Rightarrow tg2x=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2tgx}{1-tg^2x}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 3tg^2x+8tgx-3=0 \Rightarrow tgx=-3 \Rightarrow$$

$cotg\,x=-\frac{1}{3}$ و $tgx=\frac{1}{3} \Rightarrow cotgx=3$

$tgx=-3$ و $cotgx=-\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$(m-1)(-3)+m(-\frac{1}{3})=2m-6 \Rightarrow$$

$$m=\frac{27}{16}$$

$tgx=\frac{1}{3}$ و $cotg\,x=3 \Rightarrow$

$$(m-1)(\frac{1}{3})+m(3)=2m-6 \Longrightarrow m=-\frac{17}{4}$$

-۸

$$\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^2\frac{A}{2} \Longrightarrow$$

$$\frac{tg\frac{A}{2}}{tg\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \div \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$=\frac{p(p-a)}{bc} \div \frac{p(p-b)}{ac} \Longrightarrow$$

$$\frac{p-a}{p-b}=\frac{a(p-a)}{b(p-b)} \Longrightarrow \frac{a}{b}=1 \Longrightarrow$$

$a=b \Longrightarrow$ مثلث متساوی‌الساقین است

تبصره- با استفاده از روابط کسینوسها در مثلث، سینوس وکسینوس و از آنجا تانژانت نصف زوایای مثلث برحسب اضلاع مثلث قابل محاسبه است. به عنوان مثال داریم:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Longrightarrow$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

۹- A و B و C زوایای مثلث می‌باشند پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$$

$$\sin 2\hat{A}+\sin 2\hat{B}+\sin 2\hat{C}=0 \Longrightarrow$$

$$\sin 2[\pi-(\hat{B}+\hat{C})]+\sin 2\hat{B}+\sin 2\hat{C}=0$$

$$\sin 2(\hat{B}+\hat{C})+2\sin\frac{2\hat{B}+2\hat{C}}{2}\cos\frac{2\hat{B}-2\hat{C}}{2}=0$$

و با توجه به اتحاد:

$$\sin X=2\sin\frac{X}{2}\cos\frac{X}{2}$$

داریم:

$$2\sin\frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}\cos\frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}$$

$$+2\sin\frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}\cos\frac{2(\hat{B}-\hat{C})}{2}=0$$

$$2\sin\frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}\left[\cos\frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}+\cos\frac{2(\hat{B}-\hat{C})}{2}\right]=0$$

$$2\sin\frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}\left[2\cos\frac{2\hat{B}}{2}\cos\frac{2\hat{C}}{2}\right]=0$$

$$4\sin\frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}\cos\frac{2\hat{B}}{2}\cos\frac{2\hat{C}}{2}=0$$

هریك از علامتهای تساوی اخیر می‌توانند صفر باشند. بنابراین داریم:

$$\sin\frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}=0 \Longrightarrow \sin\frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}=\sin\pi$$

$$\Longrightarrow \frac{2(\hat{B}+\hat{C})}{2}=\pi \Longrightarrow \hat{B}+\hat{C}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \hat{A}=60^\circ$$

ویا:

$$\cos\frac{2\hat{B}}{2}=0 \Longrightarrow \cos\frac{2\hat{B}}{2}=\cos\frac{\pi}{2} \Longrightarrow$$

$$\hat{B}=\frac{\pi}{3}=60^\circ$$

ویا:

$$\cos\frac{2\hat{C}}{2}=0 \Longrightarrow \cos\frac{2\hat{C}}{2}=\cos\frac{\pi}{2} \Longrightarrow$$

$$\hat{C}=\frac{\pi}{3}=60^\circ$$

اسامی تعدادی از عزیزانی که حلّ مسائل مسابقه‌ای ومسائلی برای‌حل رادرزمان تعیین‌شده برای مافرستاده‌اند.

۱- سید عبدالله موسوی (اهواز)
۲- محمدعلی نیکسار (بندرانزلی)
۳- نوید ملکی (تهران)
۴- حسین افشارفتوحی (تهران)
۵- سیدروزبه مصطفوی‌پور (تهران)
۶- امیررضا فرزین (اصفهان)
۷- ویدا برفر (تهران)
۸- سید اسداللهی (خرم‌آباد)
۹- خلیل دولت‌یاری (نظرآباد)
۱۰- مهدی حاج‌اسماعیلی (اصفهان)
۱۱- سیامک جعفری (اهواز)
۱۲- حسین سبزرو (تهران)
۱۳- حامد شریف‌نژاد (خراسان)
۱۴- محمّد آریانی (قزوین)
۱۵- شهرام بیگلری (کرمانشاه)
۱۶- علی کاویانی (گرگان)
۱۷- فرزاد رضوی (قزوین)
۱۸- احسان رضایی (تهران)
۱۹- کیوان حاجی‌بیگ‌زاده (خوی)
۲۰- حسین نوروزی (تهران)
۲۱- ارشام برومندسعید (کرمان)

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

۱۶۰ اینچ، یا ۱۳ فوت و ۴ اینچ. فرض می‌کنیم عمق چاه در زمان حاضر x باشد؛ در این صورت عمق پایان کار ۴x است، و

$$۴x = ۷۰ + ۳(۷۰ - x)$$
$$۷x = ۷۰ + ۲۱۰ - ۳x$$
$$۷x = ۲۸۰ \ , \ x = ۴۰$$

بنابراین $۴ \times ۴۰ = ۱۶۰$ اینچ.

جواب ۲

.۲۵

$$۵۰ \text{ دقیقه} = ۲۰ \text{ دقیقه} + ۳۰ \text{ دقیقهٔ } A$$

آنها در $\frac{۳}{۵}$ فاصلهٔ A تا B تلاقی می‌کنند. بنابراین، B برای پیمودن $\frac{۲}{۵}$ فاصلهٔ نقطهٔ 'B تا نقطهٔ 'A ۳۰ دقیقه وقت‌صرف می‌کند. در این‌صورت B برای پیمایش کل فاصلهٔ مورد بحث $(۳۰ \times \frac{۵}{۲})$ ۷۵ دقیقه لازم دارد. از آنجاکه کل زمان A برابر ۵۰ دقیقه بوده، B به نقطهٔ 'A، ۲۵ دقیقه بعداز آنکه A به نقطهٔ 'B می‌رسد، وارد می‌شود.

یا، به طریق دیگر، B برای پیمودن همان فاصله‌ای که A در ۲۰ دقیقه طی می‌کند، به ۳۰ دقیقه نیاز دارد. بنابراین، B برای پیمودن فاصله‌ای که A در ۳۰ دقیقه می‌پیماید به ۴۵ دقیقه (۱/۵ برابر آن) صرف می‌کند.

جواب ۳

۵۰. ورود ۲۰ دقیقه زودتر از زمان معمولشان به خانه، به علت پیاده رفتن B است. (اگر در ایستگاه صبرکرده بود، درساعت تنظیم شده به خانه می‌رسید.) B، به ازای ۲۰ دقیقهٔ ذخیره شده، که تمام آن زمان رانندگی بوده، نیم زمان رانندگی، یا ۱۰ دقیقه، هنوز در حال پیاده حرکت کردن بوده است. (زمان «رفت» اتومبیل مساوی زمان «بازگشت» آن است) بنابراین ۵۰ دقیقه (۶۰ دقیقه منهای ۱۰ دقیقهٔ در اتومبیل) پیاده حرکت کرده است.

جواب ۴

۱۰. کارگر برای رسیدن به تقاطع ۶۰ دقیقه وقت صرف می‌کند (۶ کیلومتر فاصله دارد و سرعتش ۶ کیلومتر در ساعت است). از آنجاکه ۵۰ دقیقه دیرکرده، قطار به‌طور معمول از آن نقطه به فاصلهٔ ۱۰ دقیقه از تقاطع است.

Borhān
VOL.I. No.4
December 1992

In the name of God

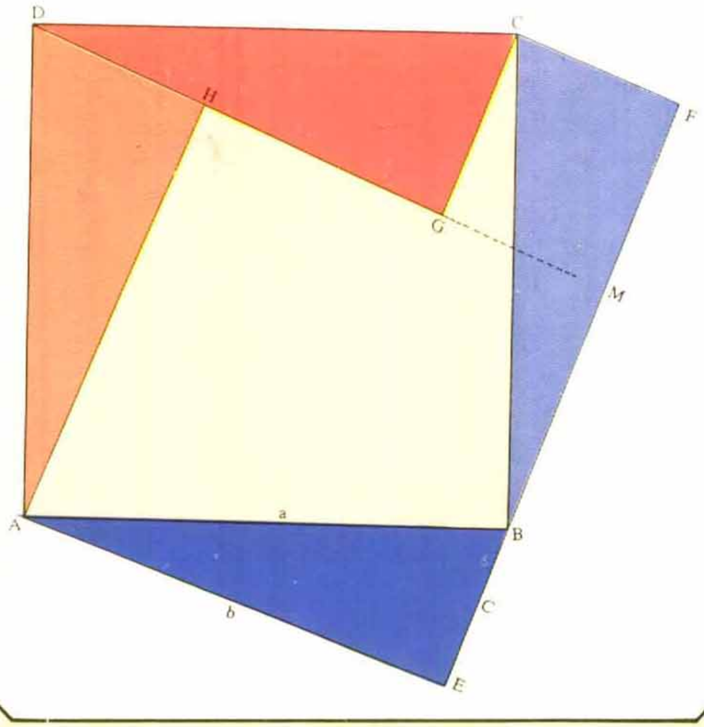
Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.
All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

Chief editor's remarks
You, too, may be successful in your mathematics lessons — Parvis Shahryari
Analytic geometry — mohammad Ābedi
A brief history of Persian mathematics journals
Important algebraic identities — Ahmad Ghandehāri
In the garden of experiments (interview with yourteachers)
Function and considering of one-to-one property in all kinds of functions — Hamid Rezā Amiri
Short articles of authentic mathematics journals
Geometric examples for discontinuous functions — Dr. Ahmad Sharafeddin
Proving invalidity and incompleteness of the nineteen rules — Gholam Reza Yassipour
Solving a fundamental problem of mathematics by elementary methods
Introduction of mathematics books
Contest problems — Mohammad Hashem Rostami
Problems
Answers of problems of No.3

نیریزی و قضیهٔ فیثاغورس
$(a^2 = b^2 + c^2)$

فضل نیریزی، اهل نیریز فارس که در ۳۱۰ ه. ق. (۹۲۲ میلادی) درگذشته است و درزمان «معتضد» خلیفهٔ عباسی می‌زیسته و یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان و اخترشناسان مسلمان ایرانی است، برای قضیهٔ فیثاغورس اثباتی دارد که در شکل می‌بینید: مربع ABCD رابا ضلع برابر وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم و خود مثلث را روی هریک از چهار ضلع مربع قرار می‌دهیم به‌نحوی که دوتا از مثلثها در درون و دوتای دیگر در بیرون مربع قرارگیرند. به‌سادگی از روی شکل دیده می‌شود که مساحت شش ضلعی AEFCGH ، از یک طرف برابر مساحت مربع ABCD و از طرف دیگر، برابر مجموع مساحتهای دو مربع AEMH و MFCG است.



انتشارات مدرسه

مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱

سال دوم، زمستان ۱۳۷۱، شماره مسلسل ۵، بهاء ۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه

● صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

● مدیر مسئول: عبدالعظیم فریدون

● سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:

● حمیدرضا امیری ● محمدهاشم رستمی

● احمد قندهاری ● سیدمحمدرضا هاشمی‌موسوی

● غلامرضا یاسی‌پور

(باتشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و محمد عابدی)

● مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی

● صفحه آرا: مهرزاد طاهری

● رسام: فرخ نیکزاد

● حروفچینی: یگانه

● تیراژ: ۵۰۰۰۰ نسخه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آن

۳ ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش آموزان)به همراه حل آن

۴ ـ طرح معماهای ریاضی

۵ ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه ولطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

● مقالات وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

● هیئت تحریریه درحکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاداست.

● مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، پلاک ۲٦۸، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش وپرورش تلفن: ۸۸۲٦۰۰۷

مطالب این شماره

● سخن سردبیر	۱
● شماهم می‌توانیددردرس ریاضی خودموفق باشید(۵) پرویز شهریاری	۲
● نکاتی درباره توابع متناوب یا توابع دوره‌ای / احمدقندهاری	۷
● آموزش ترجمه متون ریاضی / غلامرضا یاسی‌پور	۱۲
● قانون اثبات شرطی / غلامرضایاسی‌پور	۱۸
● تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۴)	۲۰
● در حاشیهٔ مجموعه‌ها / حمیدرضا امیری	۲۸
● مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۳)	۳٦
● درباغ تجربه‌ها / مصاحبه با تلاشگری پیروز	۳۸
● یادی از استاد ضیاء هشترودی / دکتر احمد شرف‌الدین	۴٦
● بررسی تقارن محوری و مرکزی در .... / علی حسن‌زاده ماکویی	۴۸
● شگفتیهای ریاضی / حسن نصیرنیا	۵۰
● بسط دوجمله‌ای «خیام» ـ «نیوتن» وتعمیم آن سیدمحمدرضا هاشمی‌موسوی	۵۳
● طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۳)	٦۴
● مقالاتی از خوانندگان	٦۷
● جواب نامه‌ها	٦۹
● معرفی کتابهای ریاضی	۷۰
● مسائل مسابقه‌ای / حمیدرضا امیری	۷۲
● حل مسائل مسابقه‌ای / سیدحسین سیدموسوی	۷۳
● مسائل برای حل	۷۴
● حل مسائل شمارهٔ ۴ برهان	۸٦

شرح روی جلد: دراین‌طرح تاحدودی سیرتکاملی ریاضیات ونیز شاخه‌های مختلف آن مشخص شده‌است.

مطالب پشت جلد: از پرویز شهریاری

سخن سردبیر

خواهران و برادران مسلمانم

تاکنون هیچ چیز را مفیدتر و ارزنده‌تر از آرامش روحی و راحتی خیال، به هنگام مطالعه و تدریس ریاضیات نیافته‌ام.

تنها در زمانی که دلم آرام بوده و روحم در آسایش، قادر به حل مسأله‌های مشکل ریاضی بوده‌ام و یقین دارم که برای شما عزیزان نیز چنین است.

«تنها مشکلی را که دنیای علم و صنعت امروز حل‌نکرده مشکل آرامش روحی است. هر روز آمار بیماریهای روانی، جنون و مصرف قرص اعصاب زیادتر می‌شود، هیچ‌چیزی به‌انسان آرامش نمی‌دهد جز یاد خدا و ایمان و انس و عشق و توکل به او ... آری، با یاد خداوند دلها آرام می‌گیرد و بهترین یاد خدا همان نماز است، کمبود امروز بشر، علم و تخصص نیست بلکه دل آرام است.*»

اما برای ما که مسلمانیم و به مسلمانیمان افتخار می‌کنیم چگونه میسر است تا به چنین آرامش روحی و راحتی خیال دست یابیم و مزهٔ شیرین مطالعه ریاضیات را بچشیم و از آن بهره ببریم؟ آری فقط با یاد خدا دلها آرام می‌گیرد و روح در آسایش و آرامش است و جان کلام در یک کلمه خلاصه، «نماز».

حضرت حق در قرآن کریم می‌فرمایند «الا بذکر الله تطمئن القلوب» (با یاد خداست که دلها آرام می‌گیرد.) و چه ذکری ارزشمندتر و مفیدتر از نماز. فواید این ذکر با ارزش و برشماری آنها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند که فعلاً از پرداختن به آنها معذوریم و از لابه‌لای آنها تنها به همین نکتهٔ مهم که دست یابی به آرامش روحی است بسنده می‌کنیم، آرامشی که می‌تواند سرمنشأ همهٔ موفقیتها و نیکیها و پیشرفتها؛ از جمله موفقیت در علم و نیز مطالعه و تحقیق باشد.

به شما خواهران و برادران مسلمانم در هرکجای این میهن اسلامی که هستید توصیه‌هایی برادرانه دارم:

- به نماز و ارتباط با خدای متعال بهای بیشتری داده و بهترین اوقات خود را که همان اول وقت نماز است برای این امر مهم اختصاص دهید.
- هرگاه خواهان آرامش روحی و نجات از اضطراب هستید به خداوند توکل کنید و درجهت نیلِ به این منظور، به نماز روی آورید که امنیتِ محض است و آرامش مطلق.
- توسط نماز می‌توانید به هر درجه‌ای از تمرکز که بخواهید، رسیده و پس‌از آن و در پناه آن به مطالعه، تحقیق و یا حل مسائل ریاضیات بپردازید، زیرا همان طور که قبلاً ذکر کردم تمرکز و راحتی خیال عامل بسیار مهمی در یادگیری و فهم مطالب ریاضی می‌باشد.

توفیق همهٔ شما عزیزان را در تمامی مراحل تحصیل و زندگی از خدای متعال خواستارم و در این زمینه (تأثیر نماز در راحتی خیال و مطالعه و فهم ریاضیات) پذیرای مطالب و نظرات شما هستم.

والسلام

---

* نقل از کتاب یکصد و چهارده نکته از نماز نوشته محسن قرائتی

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۵)

پرویز شهریاری

درباره «واژه نامهٔ ریاضی» و شرایط تنظیم آن در شمارهٔ قبل صحبت کردیم و به‌دلیل محدود بودن صفحه‌های فصل‌نامهٔ برهان ناگزیر شدیم، که آن را در نقطه‌ای ناتمام بگذاریم. هم اکنون به دنبالهٔ بحث می‌پردازیم:

۴) در جست‌وجوهای خود، تاریخ ریاضیات را فراموش نکنید، چراکه «از تاریخ باید درس گرفت»

هرکه نامُخت از گذشت روزگار
نیز ناموزد ز هیچ آموزگار

رودکی

درمورد مفهوم، موضوع، استدلال و هرقضیه‌ای بهتر است به تاریخچهٔ آن مراجعه کنید. تاریخ ریاضیات خیلی چیزها به‌ما می‌آموزد مثلاً آیا می‌دانید، چرا هرعددی راکه نتوان به صورت نسبت دو عدد درست نشان‌داد (یعنی، عددهای غیرگویا را) گنگ می‌نامند. فیثاغورس و هواداران او در سده‌های پیش‌از میلاد، معتقد به «حکومت عدد برجهان» بودند. آنها می‌گفتند که تنها به کمک عدد و شکل است که می‌توان جهان را شناخت و چون هرشکلی را هم، به یاری اندازه‌های آن و رابطه‌های بین این اندازه‌ها می‌توان بیان کرد، بنابراین، عدد، حاکم مطلق جهان است. فیلولائوس فیثاغورسی (سدهٔ چهارم پیش از میلاد) می‌گفت: «بدون عدد، هیچ چیز را نمی‌توان درک کرد یا شناخت» و نیکوماک فیثاغورسی معتقد بود که: «عدد واقعی‌ترین واقعیتهاست و، به همین مناسبت، جاویدان است». آنها معتقد بودند حتی خصلتها، رفتارها و پدیده‌های کیفی را هم می‌توان با عدد بیان کرد. مثلا: هر دو عددی مثل ۲۲۰ و ۲۸۴ را، نشانهٔ «دوستی» و «تفاهم» می‌دانستند، زیرا مجموع مقسوم علیه‌های عدد ۲۲۰ (بجز خود ۲۲۰) برابر ۲۸۴ و مجموع مقسوم علیه‌های عدد ۲۸۴ (بجز خودش) برابر ۲۲۰ می‌شود و این گونه عددها را «عددهای دوست» یا به قول ریاضی‌دانان پیشین ایرانی «عددهای متحابه» می‌نامیدند. [تاکنون بیش‌از ۱۰۰ زوج عدد متحابه شناخته‌شده است، ولی هنوز این مسأله حل نشده‌است که: آیا مجموعهٔ زوج عددهای متحابه، مجموعه‌ای متناهی است یا نامتناهی؟]

درضمن؛ هواداران فیثاغورس، نقطه را واحد مکان می‌دانستند، بنابراین، از دیدگاه آنها، پاره‌خط راست از پهلوی هم قرار گرفتن تعداد معینی نقطه (اگرچه این تعداد، خیلی زیاد باشد) به‌دست می‌آید [نخستین کسی که خط را به‌عنوان مسیر حرکت نقطه تعریف کرد «خیام نیشابوری» بود] و، بنابراین، نسبت طولهای دو پاره‌خط راست، برابر نسبت تعداد نقطه‌های سازندهٔ آنهاست، یعنی نسبت هر دوپاره‌خط راست را می‌توان با نسبت دو عدد درست نشان داد. به زبان ریاضیات امروز، نسبت هر دوپاره خط راست، عددی است گویا

ولی فیثاغورس و یایکی از هواداران او، قضیهٔ معروف فیثاغورس را (و به‌احتمال زیاد، تجربه و استقراء و نه استدلال منطقی) پیدا کردند. امروز می‌دانیم، بنابراین قضیه، طول قطر مربع به ضلع واحد، برابراست با $\sqrt{2}$؛ به عبارت بهتر؛ نسبت طول قطر به طول ضلع هر مربع، برابر $\sqrt{2}$ است. ولی یونانیها، جز عددهای درست و نسبتهای آنها را نمی‌شناختند و برای «بیان» طول قطر مربع دچار اشکال می‌شدند. پس معلوم شد، عدد، که قادر است هر پدیده‌ای را توضیح دهد، از بیان طول قطر مربع عاجز است. از طرفی فلسفهٔ فیثاغورسی

دچار شکست شده بود و می‌رفت که به‌فراموشی سپرده شود. هواداران فیثاغورس این راز را از دیگران مخفی داشتند و سوگند خوردند که، دربارهٔ آن، با کسی صحبت نکنند تا بتوانند جمع خود و «مذهب» خود را حفظ کنند. ولی پیش خود، سعی کردند با نوعی نامگذاری، فلسفهٔ ذهنی خود را توجیه کنند؛ گفتند با دو نوع پدیده سروکار داریم: پدیده‌های قابل بیان با عدد که آنها را «گویا» (یا مُنْطِق) می‌نامیم و پدیده‌هایی که با عدد «قابل بیان» نیستند، آنها را گُنگ (یا اصم) [و یا به قول خود یونانیها الوگون (ALOGON)] نام می‌دهیم. این بود تاریخچهٔ بسیار فشرده‌ای از پیدایش نامهای «عدد گویا» و «عدد گنگ». تامدتها، که عددهای گنگ را نمی‌شناختند، از مقدارهای تقریبی آنها استفاده می‌کردند. یکی از این راهها این بود که مثلاً: برای $\sqrt{۲}$، کسرهایی برابر ۲ را درنظر می‌گرفتند که مخرج آنها، عددی مجذور کامل باشد و آن قدرجلو می‌رفتند تا صورت کسر، نزدیک به یک مجذور کامل شود، مثلاً:

$$۲ = \frac{۲۸۸}{۱۴۴} \approx \frac{۲۸۹}{۱۴۴} = (\frac{۱۷}{۱۲})^۲ \Rightarrow \sqrt{۲} \approx \frac{۱۷}{۱۲} = ۱\frac{۵}{۱۲}$$

کسانی هستند که، «تاریخ ریاضیات را به دیدهٔ حقارت می‌نگرند و می‌گویند: چه فایده‌ای دارد که با راه حلهای **هدرون اسکندرانی** یا **ابوالوفای بوزجانی** آشنا شویم؟ این راه حلها در طول تاریخ سوهان خورده‌اند و ما امروز از چنان راه حلهای شسته و رُفته‌ای آگاهی داریم که لزومی ندارد به سراغ راه‌حلهای دشوار و گاه بچگانهٔ پیشینیان برویم. مگر ما می‌خواهیم متخصّص در تاریخ یا جامعه شناسی بشویم؟ کار ما ریاضیات است، باید رو به آینده داشت و گذشته را فراموش کرد. تاریخ ریاضیات را باید در کتابهای تاریخ عمومی نوشت تا، متخصصان تاریخ مثل سایر زمینه‌ها، از تاریخ ریاضیات هم آگاه باشند. همچنین جامعه‌شناسان هم ناگزیرند تاریخ ریاضیات را مطالعه کنند تا بتوانند، براساس آن، دگرگونی‌های اجتماعی و فکری بشر را بررسی کنند...»

وقتی به سراغ «تاریخ عمومی» می‌روید، حتی در مفصل‌ترین آنها که به جزء جزء زندگی انسانهای زراندوز و زورمند پرداخته‌اند، بازهم نشانی از تاریخ ریاضیات نمی‌بینید. شما می‌توانید کتابهای زیادی دربارهٔ «تاریخ سیاسی جهان» پیدا کنید، «تاریخ دگرگونیهای اقتصادی» و همراه آن، «تاریخ دگرگونیهای اجتماعی» گونه‌های مختلف و با دیدگاههای متفاوت تنظیم شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌است، ولی هنوز تاریخ دگرگونیهای اندیشهٔ بشری، یعنی تاریخ تفکر و رابطهٔ متقابل آن با سایر دگرگونیها، به‌صورتی علمی تدوین نشده‌است. بزرگانی همچون **سمیت** (دربارهٔ تاریخ ریاضیات)، **جرج سارتون** (دربارهٔ تاریخ دانش به طورکلی) و **ابوالقاسم قربانی** (دربارهٔ ریاضی دانان ایرانی)، مصالح و مواد لازم را، برای تنظیم چنین کتابی فراهم کرده‌اند، ولی هنوزکار تدوین آن آغاز نشده‌است. چه‌کسی باید به این مهم بپردازد؟ شما و نسل بالندهٔ جوانان امروز! وظیفهٔ همهٔ دانشمندان و پژوهشگران و از آن جمله ریاضی دانان است که بخصوص، درجهت تنظیم تاریخ پیشرفت دانش ریاضیات بکوشند. کتابهای درسی ما باید به گونه‌ای ترتیب یابد که دانش آموزان ما، هم از دگرگونیهای فکری و علمی در سراسر جهان و هم از روند تکاملی دانش در کشور خودمان، آگاه شوند.

تاریخ ریاضیات چه‌فایده‌ای دارد؟ تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد که ریاضیات، دانشی زنده و پویاست و، بدون این که گذشتهٔ خود را نفی کند، همیشه به سمت دقت بیشتر و کارآیی بیشتر پیش رفته‌است. تاریخ ریاضیات به ما نشان می‌دهد که، دانش ریاضی، برخلاف آن چه برخیها گمان می‌کنند، در درون خود متحجّر نشده و با قانونهای جامد ولی تغییر سروکار ندارد، یعنی ریاضیات هم، مثل هر دانش‌دیگری، قانونمند است، تکامل می‌پذیرد، گذشتهٔ خود را اصلاح می‌کند و همیشه در تلاش برای «بهتر شدن»، «دقیقتر شدن» و «نزدیکی بیشتر باواقعیتهای جهان خارج» است: ریاضیات، دانشی انسانی است، برخرد آدمی تکیه دارد و در خدمت بشر و جامعه بشری است. به همین مناسب، تاریخ ریاضیات، روحیهٔ انسان دوستی و همیاری را تقویت می‌کند و نشان می‌دهد که، تلاش اهریمنی نفاق افکنان و جنگ افروزان، تا چه حد، مانع پیشرفت انسان و رسیدن به آرمانهای متعالی او می‌باشد. تاریخ ریاضیات، ما را با شیوهٔ کار ریاضی‌دانان و انگیزه‌های علمی آنها آشنا می‌کند. **ما می‌توانیم** به یاری تاریخ ریاضیات، جای خاصی را در جهان دانش بیابیم، که از آن جایگاه به زندگی فکری بشری سروسامان ببخشیم...

از همین حالا، که روی نیمکتهای دبیرستان نشسته‌اید، مطالعهٔ خود

را در تاریخ ریاضیات بیشتر کنید و برای هر موضوعی و هر مفهومی، هر قضیه‌ای و هر مسأله‌ای، در جست‌وجوی تاریخچهٔ آن باشید و از این راه واژه نامهٔ ریاضی خود را غنی‌تر کنید. شما می‌توانید یکی از آن کسانی باشید که در آینده، «تاریخ تحولات ریاضی» را تنظیم می‌کنند. برای رسیدن به چنین هدفی، باید از همین امروز دست به کار شوید؛ و با پشتکار و پیگیریهای مستمر تحقیق خود را آغاز کنید...

۵) دانش ریاضیات همانند هر دانش‌دیگری در خدمت انسان است. آن چه در ریاضیات می‌خوانیم؛ «بازی با علامتهای و شکلها» نیست، بلکه قانونهایی است که بر طبیعت و زندگی عملی ما حکومت می‌کند. کار ریاضیات، وضع قانونهای «من‌درآوردی» نیست؛ ریاضیات قانونهای موجود و حاکم برطبیعت و جامعه را کشف می‌کند. رابطه‌ها و شکلهایی که در ریاضیات، با آنها سروکار داریم، دستگیره‌هایی هستند که به یاری آنها، می‌توان نیازهای عملی دانشهای دیگر و به‌طورکلی؛ نیازهای فکری انسان را برآورده کرد. نیوتون و لایب نیتز، تنها به‌دلیل نبوغ خود و تنها از راه «بازی ذهنی باعلامتها»، مشتق و دیفرانسیل را کشف نکردند. نیوتون ضمن بررسیهای خود در مکانیک و برای دستیابی به‌قانونی که بتوان، به کمک آن، سرعت و شتاب هر جسم متحرک، و از آن جمله جرمهای آسمانی را، مشخص کرد، به مفهوم مشتق رسید. و لایب نیتز، در درون ریاضیات، و برای حل کلی مسألهٔ مماس بر منحنی، به‌آن دست یافت [اگر بخواهید از نقطه‌ای (واقع بر منحنی یا بیرون آن)، مماسی بر منحنی رسم کنید، نمی‌توانید راه حلی کلی به کمک پرگار و خط کش ارائه دهید. برای دایره و بیضی و سهمی - و به‌طور کلی، مقطعهای مخروطی - روش رسم مماس را، به کمک پرگار و خط‌کش، از قدیم می‌شناختند، ولی از این روشها، برای رسم مماس بریک منحنی غیرمشخص، کاری ساخته نبود؛ ولی مشتق راه‌حل کلی رسم مماس برمنحنی را، با شرط معلوم بودن معادلهٔ منحنی، به ما می‌دهد: مشتق یک تابع، یعنی مقدار ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی.]

تنها نبوغ خوارزمی نبود که موجب پیدایش دانش‌جبر شد. او کتاب «جبر» را به‌این خاطر نوشت که در عمل، برای حل بسیاری از مسأله‌های موردنیاز زندگی - مثل عمل کردن به‌وصیّتها و تقسیم ارث - دشواریهایی وجود داشت و ریاضیات موجود، نمی‌توانست پاسخگوی آنها باشد خوارزمی را باید مبتکر «آلگوریتم محاسبه‌ای» و. بنابراین، پایه‌گذار «نظریهٔ انفورماتیک» دانست. خود واژهٔ «آلگوریتم»، که باترجمهٔ کتاب «حساب» خوارزمی به زبان لاتین، در ابتدا، به‌هرگونه محاسبهٔ عددی گفته می‌شد، همان شکل لاتینی شدهٔ نام «الخوارزمی» است. هنوز واژهٔ «جبر» هم، که امروز در همهٔ زبانها متداول گشته است به همان شکل خود حتی با حرف تعریف عربی «اَل» (به صورت «اَلْجَبْر»)] بیان می‌شود، که این نامگذاری یادگار «خوارزمی» برروی این شاخه از ریاضیات می‌باشد.

شما نمودار تابع باضابطهٔ $y = \frac{1}{2}ax^2$ $(a>0)$ را رسم می‌کنید. ولی بحث دربارهٔ $y = \frac{1}{2}ax^2$ و نمودار آن، که در ریاضیات، به‌صورتی انتزاعی و جدا از کاربرد آن انجام می‌گیرد، می‌تواند در عمل، بسیاری از مسأله‌های کاربردی را حل کند. اگر یکی از زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را α و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه و پهلوی این زاویه را x بگیرید، مساحت‌مثلث - که‌آن را S می‌نامیم - به‌صورت $S = \frac{1}{2}tg\alpha . x^2$ در می‌آید که، در واقع، با معلوم بودن α، همان رابطهٔ $y = \frac{1}{2}ax^2$ است ($tg\alpha = a$ ، $S = y$). در قانون سقوط آزاد یک جسم (که به‌وسیلهٔ گالیله کشف شد)، مسافتی که به‌وسیلهٔ جسم پیموده می‌شود (β) برحسب زمان (t)، بارابطهٔ $\beta = \frac{1}{2}gt^2$ بیان می‌شود ($g \approx 9/81$)؛ دراین‌هم به‌همان رابطهٔ $y = \frac{1}{2}ax^2$ ($\beta=y$، $g=a$ و $t = x$) می‌رسیم. مقدار حرارتی که ضمن عبور جریان برق، در واحد زمان تولید می‌شود، بادستور $Q = \frac{1}{2}RI^2$ به‌دست می‌آید که، درآن، I شدت جریان و R مقاومت سیم حامل برق است؛ همان رابطهٔ $y = \frac{1}{2}ax^2$ ($Q = y$ ، $R = a$ و $I = x$). انرژی جسمی را که حرکت‌می‌کند، برحسب جرم و سرعت آن، بارابطهٔ $E= \frac{1}{2}mv^2$ نشان می‌دهند؛ دوباره رابطهٔ $y= \frac{1}{2}ax^2$ ظاهر شد ($E = y$ ، $m=a$ و $v=x$) و...

می‌بینیم، بررسی تابع باضابطهٔ $y= \frac{1}{2}ax^2$، اگرچه به ظاهر عملی انتزاعی است و در آن، هیچ صحبتی ازنحوهٔ «بهتر زندگی کردن» نمی‌رود، در واقع، مشکل‌گشای بسیاری از مسأله‌های مربوط به زندگی و عمل است...

در «واژه نامهٔ ریاضی» خود، کاربردها را فراموش نکنید. جست‌وجو کنید آیا می‌توانید برای مفهوم یافرمولی که با آن سروکار

دارید، کاربردی عملی پیدا کنید؟ آیا خود این مفهوم یا فرمول، به‌طورمستقیم کاربردی عملی دارد، یاواسطه‌ای است برای رسیدن به مفهومها و فرمولهای دیگری که، از آنها می‌توان در عمل استفاده کرد. کاوش در پیدا کردن کاربردهای ریاضیات، مطالعهٔ آن را، دلپذیرتر و علاقهٔ شما را بیشتر می‌کند.

۶) سالها پیش، در تلویزیون بحثی فلسفی دربارهٔ «نظریهٔ شناخت» ترتیب داده‌بودند. بحث به «ذهنی بودن»، یا «عینی بودن» ریاضیات کشیده‌شد و تقریبا هردو طرف بحث، با کلی‌گویی و عبارات مبهم و حتی گاهی با یک ضرب‌المثل و یا یک بیت شعر، تلاش می‌کردند نظر خود را تحمیل کنند. یکی می‌گفت: «ریاضیات محصول ذهن آدمی است و هیچ ربطی به‌جهان مادی ندارد و، بنابراین نمی‌تواند به شناخت ما از جهان یاری برساند. اساس ریاضیات، بر «نقطه بنانهاده‌شده است و نقطه، یعنی «هیچ» و طبیعی است که نمی‌توان از «هیچ» به «همه‌چیز» رسید»؛ و دیگری پاسخ می‌داد؛ «ریاضیات، پایه همه دانشهای ماست. مثلا، اگر معادلهٔ درجهٔ دوم نبود، چگونه می‌توانستیم فضاپیماهای خود را، به فضا بفرستیم؟» و...

دشواری ذهنی نفر اول این بود که می‌خواست، مثل فیثاغورس و ارسطو، از مجموع نقطه‌ها و باکنار هم گذاشتن آنها، خود را به «خط» و «سطح» و «جسم» برساند و، دست کم، از بررسیهای ریاضی خیام در مورد «نسبتها» اطلاع نداشت که: پاره‌خط راست، مجموعه‌ای متناهی از نقطه‌ها نیست و با پهلوی هم چیدن آنها به‌دست نمی‌آید، بلکه پاره‌خط راست را باید نتیجهٔ دو عامل دانست: «نقطه» و «حرکت»، خط ، نه از نقطه‌های جدا ازهم، بلکه ضمن‌حرکت نقطه به‌دست می‌آید. حرکت، در ذات طبیعت است، حرکت، کیفیتی زاینده و آفریننده است، حرکت (در معنای عام خود)، عامل اصلی تغییرها و دگرگونیهای کیفی است.

اما پاسخ نفر دوم!، به‌کلی بی‌ربط و مبهم بود. چگونه معادله درجه دوم، موجب حرکت سفینه‌های فضایی می‌شود؟! چه رابطه‌ای بین این دو وجود دارد؟ آیا اگر کسی معادلهٔ درجهٔ دوم را بشناسد، به‌معنای آن‌است که از قانونهای مربوط به فرستادن سفینه‌ها به‌فضا آگاه‌است؟ این طور، سهل اندیشی و کلی‌گویی به یقین، ناشی از ناآگاهی آنها بوده است.

هرگز کلی‌گویی نکنید. دانش با شعاردادن، سازگارنیست. جمله‌های مبهم و نامفهوم ـ هرچند به ظاهر بتواند حقیقتی را بیان کند ـ چیزی را به شنونده نمی‌دهد. کسی که اهل دانش‌است، باید حرفهای خود را، مشخص و بدون هیچ ابهامی عرضه کند، مثلا جمله‌های مبهم اداری، مانند عبارت: «باید ترتیب کارها داده شود» یا «ترتیبی بدهید که...» هرگز بااصول علمی مطابقت ندارد باید معلوم کرد که، این «ترتیب» کدام است و به چه نحوی باید داده‌شود؟ وگرنه برای هر مسأله‌ای به‌ابهام می‌توان نوشت: «ترتیبی بدهید تا مسأله حل شود».

هرجا که لازم است، مثال بزنید و نمونه بیاورید. دربیان هر مطلبی سعی کنید هم برای خودتان و هم برای دیگران، قانع کننده باشد. هیچگاه با یک «ضرب‌المثل» و یا با یک «بیت شعر» سروته مطلب را هم نیاورید. در هر زمانی وبرای هر مقصودی، می‌توان ضرب‌المثلها یا شعرهای متناقضی پیداکرد. می‌توان، برای «اثبات» تعلیم‌پذیری انسان و تأثیر آموزش «دلیل» آورد که:

دوستی با مردم دانا، چو زرّین کاسه‌است
نشکند، گربشکند، باید زنو پرداختن

یا:

دوستی با مردم نادان، سفالین کاسه‌است
بشکند، گر نشکند، باید به دور انداختن

این شیوه را، ادیبان ما «تمثیل» می‌خوانند و تمثیل، یعنی مثال آوردن و درست نیست که بااین روش ریاضیات را استدلال کنیم. مثال برای روشنتر کردن موضوع آورده می‌شود. در نوشته‌های باقی‌مانده از ریاضی‌دانان و محاسبان هزاره‌های پیش، گاه به گاه، به‌جای استدلال منطقی تنها از تمثیل سود می‌جستند. ریاضی‌دانان هند باستان اغلب برای اثبات یک قضیهٔ هندسی، شکل را رسم می‌کردند و، بدون هیچ توضیحی، در کنار آن می‌نوشتند «مشاهده کن». ولی شکل، یک مُدل است که می‌تواند با نارساییهایی همراه باشد. اندک اشتباه یا بی‌دقتی در رسم شکل می‌تواند ما را به نتیجه‌ای نادرست برساند. البته رسم شکل، برای عینی کردن مطلب لازم است، ولی اگر همراه بااستدلال منطقی نباشد، چیزی را نمی‌تواند ثابت کند.

علاوه براینها، شکل و مثال، اگر هم درست انتخاب شده باشد، ممکن است حالت خاصی از مسأله یا قضیه باشد و نتواند حالتهای

دیگر را توضیح بدهد. به این مثال توجه کنید:

در دنبالهٔ عددهای

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots \qquad (1)$$

سه جملهٔ بعدی و، به طور کلی، جملهٔ عمومی را پیدا کنید.

در نظر اول می‌توان بلافاصله پاسخ را داد: سه جملهٔ بعدی عبارتنداز: ٦ ، ٧ و ٨ و جملهٔ عمومی دنبالهٔ (١) به صورت $a_n = n$ است (a_n ، یعنی جمله nام دنباله).

ولی اگر اندکی دقت کنیم، این مسأله، بی‌نهایت جواب دارد. می‌توان جملهٔ عمومی دنبالهٔ (١) رابه‌صورت:

$$a_n = \frac{1}{120}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+n$$

درنظر گرفت که، دراین صورت، سه جملهٔ بعدی چنین می‌شود:

$$a_6 = 7 \qquad a_7 = 13 \qquad a_8 = 29$$

پاسخ درست، برای جمله عمومی دنبالهٔ (١) را می‌توان به‌صورت

$$a_n = A(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+n \qquad (2)$$

نوشت که، درآن، A می‌تواند هرعددی (گویا یا گنگ) باشد و، دراین صورت، سه جملهٔ بعدی دنبالهٔ (١) چنین‌اند:

$$a_6 = 120A + 6,\ a_7 = 720A + 7,\ a_8 = 2520A + 8.$$

که به‌ازای $A = 0$ ، همان عددهای ٦ ، ٧ ، ٨ به‌دست می‌آیند. اکنون، خودتان در این باره بیندیشید: آیا برابری (٢)؛ برای جملهٔ عمومی دنبالهٔ (١) ، واقعاً کلی است؟ آیا می‌توان جمله عمومی دنباله (١) رابه‌صورت دیگری نوشت و، برای سه جمله‌بعدی، عددهایی به‌دست آورد که از برابری (٢) به‌دست نمی‌آیند؟ آیا براین نتیجه‌گیری که گمان برده‌ایم، برابری (٢)، حل مسأله را به پایان رسانده است، درست است؟

واژه نامهٔ ریاضی شما باید روشن، قابل فهم، قانع کننده، منطقی و به دور از هر ابهامی باشد. نظر یک دانشمند، یا یک شاعر و فیلسوف را می‌توان نقل کرد، ولی به یاد داشته باشید که، این نقل قول، تنها می‌تواند به‌عنوان خلاصه‌ای از نظر شما و به‌عنوان تأکیدی برآنچه ثابت کرده‌اید، باشد، نه به‌عنوان تنها استدلال شما. ضرب‌المثل، شعر، نقل قول، جمله‌های مبهم و شعارگونه، هر قدر آراسته و دلپذیر باشند، نمی‌توانند به جای استدلال منطقی بنشینند و نقش آن را به‌عهده بگیرند.

تابعد

ادب ریاضی



اززمانی‌که عضو کنگره شد شش کتاب اقلیدس را مطالعه‌کرد و تقریباً درآن مهارت‌یافت. دوره‌ای از انضباط سخت‌روحی را با نیت اصلاح استعدادهای ذهنی خود، به‌خصوص توانائیهای منطق و زبانش، آغازکرد. ازاین‌جا می‌توان شیفتگی‌اش رابه‌اقلیدس تازمانی‌که توانست هر شش‌کتاب اقلیدس رابه‌راحتی اثبات‌کند، دریافت.

آبراهام لینکلن (نوشتهٔ خودش)

اتوبیوگرافی کوتاه

نکاتی درباره توابع متناوب یا توابع دوره‌ای

احمد قندهاری

تعریف: تابع f را وقتی «متناوب» یا «دوره‌ای» گوییم که عدد مثبتی مانند T_1 وجود داشته باشد به طوری که:

$$\forall x\in D_f \Longrightarrow (x+T_1)\in D_f \wedge f(x+T_1)=f(x)$$

در این صورت کوچکترین مقدار T_1 را T می‌نامیم و T را «دوره» یا «تناوب» اساسی تابع f گوییم.

مثلاً در تابع $f(x)=\sin x$ داریم:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \Longrightarrow f(x+2k\pi)=f(x)$$

$$\Longrightarrow T_1=2k\pi \Longrightarrow T=2\pi$$

$T=2\pi$ را «دوره» یا «تناوب» اساسی تابع گوییم.

همچنین در تابع $f(x)=tg x$ داریم:

$$tg(x+k\pi)=tg x$$

$$\Longrightarrow f(x+k\pi)=f(x) \Longrightarrow$$

$$T_1=k\pi \Longrightarrow T=\pi$$

$T=\pi$ را دوره یا تناوب اساسی تابع گوییم.

۱- تناوب اساسی توابع:

$\sin^{2n}ax$ و $\cos^{2n}ax$ و $tg^{n}ax$ و $cotg^{n}ax$

$n\in N$ برابر $(\frac{\pi}{a})$ است. $a>0$

اثبات: درمورد $f(x)=\sin^{2n}ax$ ثابت می‌کنیم تناوب اساسی $(\frac{\pi}{a})$ است.

می‌دانیم:

$$\sin^{2n}(ax+k\pi)=\sin^{2n}ax$$

$$f(x+T_1)=\sin^{2n}a(x+T_1)=\sin^{2n}(ax+aT_1)$$

اگر:

$$aT_1=k\pi \Longrightarrow f(x+T_1)=\sin^{2n}(ax+k\pi)$$

$$=\sin^{2n}ax=f(x)$$

پس $K\in Z$:

$$aT_1=k\pi \Longrightarrow T_1=\frac{k\pi}{a} \Longrightarrow \boxed{T=\frac{\pi}{a}}$$

مثال: $n\in N$

$$f(x)=\sin^{2n}4x \Longrightarrow T=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{4}$$

۲- تناوب اساسی توابع $\sin^{2n-1}ax$ و $\cos^{2n-1}ax$ برابر $(\frac{2\pi}{a})$ است.

$n\in N$ و $a>0$

اثبات: در مورد $f(x)=\cos^{2n-1}ax$ ثابت می‌کنیم:

$$T=\frac{2\pi}{a}$$

می‌دانیم:

$$\cos^{2n-1}(ax+2k\pi)=\cos^{2n-1}ax$$

$$f(x+T_1)=\cos^{2n-1}a(x+T_1)=\cos^{2n-1}(ax+aT_1)$$

اگر :

$$aT_1=2k\pi \Rightarrow f(x=T_1)$$
$$=\cos^{2n-1}(ax+2k\pi)=\cos^{2n-1}ax=f(x)$$

پس

$$aT_1=2k\pi \Rightarrow T_1=\frac{2k\pi}{a} \Rightarrow \boxed{T=\frac{2\pi}{a}}$$

مثال :

$$f(x)=\sin^{7}6x \Rightarrow T=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

۳- تناوب اساسی تـابع $f(x)=nx-[nx]$ برابر $(\frac{1}{n})$ است .

اثبات:

$$f(x)=nx-[nx]$$
$$f(x+T_1)=n(x+T_1)-[n(x+T_1)]$$
$$f(x+T_1)=nx+nT_1-[nx+nT_1]$$

اگر nT_1 عدد صحیح باشد ، داریم:

$$nT_1=K\in Z \quad .$$
$$f(x+T_1)=nx+nT_1-[nx]-nT_1=$$
$$nx-[nx]=f(x) \Rightarrow nT_1=K \quad , \quad K\in Z$$
$$T_1=\frac{k}{n} \Rightarrow \boxed{T=\frac{1}{n}}$$

۴- اگر تابعی ازچند تابع تشکیل‌شده باشد، کوچکترین مضرب مشترک، تناوبهای‌اساسی‌آنها، تناوب اساسی تابع‌اصلی خواهد بود .

مثال : تناوب اساسی تابع

$$f(x)=\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{4x}{3}+tg\frac{4x}{3}$$

را بیابید .

حل :

$$T_{\sin\frac{3x}{2}}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$$

$$T_{\cos\frac{4x}{3}}=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{2}$$

$$T_{tg\frac{4x}{3}}=\frac{\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{4}$$

حال باید بین $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{4\pi}{3}$ کـوچکتریـن مضرب مشترك‌را گرفت. برای تعیین کوچکترین مضرب‌مشترك‌چند کسر، کافیست از صورتهـای کسر کوچکتریـن مضرب مشترك و از مخرجهای‌آن بزرگترین مقسوم علیه مشترك‌را گرفت.

$4\pi \quad 3\pi \quad 3\pi \Rightarrow 12\pi =$ ك م م

$3 \quad 2 \quad 4 \Rightarrow 1 =$ ب م م

$$\Rightarrow T_{f(x)}=12\pi$$

۵- یك‌تابع ممکن‌است متناوب‌باشد ولی‌تناوب اساسی نداشته باشد مانند:

$f(x)=c$ تابع ثابت

زیرا :

$$\forall x\in R : (x+T_1)\in R \wedge f(x+T_1)=f(x)=c$$

امـا برای این تـابـع کوچکتریـن مقدار مثبت T_1 وجـود ندارد .

پس‌تابع‌ثابت $f(x)=c$ متناوب‌هست ولی‌تناوب‌اساسی ندارد .

۶- اگر کمان یک تابع مثلثاتی به صورت $(ax+b)$ نباشد، تابع متناوب نیست. مثلاً توابع:

$$h(x)=tg\frac{۱}{x} \text{ و } g(x)=\cos x^{۲} \text{ و } f(x)=\sin\sqrt{x}$$

متناوب نمی‌باشد.

۷- اگر f تابعی متناوب وتناوب اساسی داشته باشدآن گاه تابع $|f|$ نیز متناوب است.
در بعضی‌ازتوابع، تناوب‌اساسی تابع $|f|$ برابرتناوب اساسی‌تابع f است ودر بعضی ازتوابع تناوب اساسی‌تابع $|f|$ نصف‌تناوب‌اساسی‌تابع f است. برای‌راحت‌ترپیداکردن‌تناوب اساسی‌تابع $|f|$ بهتراست، T تناوب اساسی تابع f را نصف کرده درتابع $|f|$ به‌صورت زیربررسی‌کنیم:

اگر درتابع $g(x)=|f|$ داشته‌باشیم:

$$\forall x\in D_g : g(x+\frac{T}{۲})=g(x)$$

نتیجه می‌گیریم: تناوب اساسی تابع $|f|$، $(\frac{T}{۲})$ است.

در غیر این صورت تناوب اساسی تابع $|f|$ همان (T) است.

مثال ۱: تناوب اساسی تابع g را بیابید:

$$g(x)=|\sin^{۲}x+\sin x|$$

$$T_{(\sin^{۲}x+\sin x)}=۲\pi$$

$$g(x+\pi)=|\sin^{۲}(x+\pi)+\sin(x+\pi)|=$$

$$|\sin^{۲}x-\sin x|\neq g(x) \Longrightarrow T_{g(x)}=۲\pi$$

مثال ۲: تناوب اساسی تابع g را بیابید:

$$g(x)=|tg x+cotg x|$$

$$T_{(tg x+cotg x)}=\pi$$

$$g(x+\frac{\pi}{۲})=\left|tg(x+\frac{\pi}{۲})+cotg(x+\frac{\pi}{۲})\right|$$

$$=|-cotg x-tg x|=|tg x+cotg x|=g(x)$$

$$\Longrightarrow T_{g(x)}=\frac{\pi}{۲}$$

۸- اگرتابعی تناوب‌اساسی داشته باشد. چنانچه به‌کمك فرمولها،شکل‌ظاهری آن‌راعوض‌کنیم و تناوب‌اساسی کوچکتری حاصل‌شود، آن تناوب اساسی‌کوچکتر، تناوب اساسی تـابع خواهد بود.

مثال: تناوب اساسی تابع به معادله:

$$f(x)=\sin^{۲}x+\cos^{۴}x$$

را بیابید.

تناوب اساسی تابع ظاهراً: $T=\pi$.

اما:

$$f(x)=\sin^{۲}x+(\cos^{۲}x)^{۲}$$

$$=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}+(\frac{۱+\cos ۲x}{۲})^{۲}$$

$$f(x)=\frac{۲-۲\cos ۲x+۱+\cos^{۲}۲x+۲\cos ۲x}{۴}$$

$$=\frac{۳+\cos^{۲}۲x}{۴}\Longrightarrow T_{\text{جدید}}=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{۲}$$

$$\Longrightarrow T_{f(x)}=\frac{\pi}{۲}$$

۹- اگر f تابعی متناوب باتناوب‌اساسی T باشد،آن‌گاه توابع $\sqrt[n]{f}$ $f>0$ ، $\sin(f)$ ، $tg(f)$ ، $cotg(f)$ ، $Arc\sin(f)$ و $Arc\cos(f)$ ، $Arctg(f)$ ، $Arccotg(f)$ ، $cosec(f)$ ، $log(f)$ $f>0$ نیز متناوب‌اند و تناوب اساسی آنها همان (T) است.

اثبات: اگر f تابعی متناوب با تناوب‌اساسی(T) باشد، ثابت می‌شود تـابع : $g(x)=\text{Arc}cotg(f(x))$ نیز متناوب است و تناوب اساسی آن همان (T) است.

داریم :

$$\forall x\in D_f : (x+T)\in D_f \wedge f(x+T)=f(x)$$

$$\Longrightarrow g(x+T)=\text{Arc}cotg(f(x+T))$$

$$=\text{Arc}cotg(f(x))=g(x)$$

توجه: در مورد تابع $\sqrt[n]{f}$ ، اگـر n زوج و $f>0$ ، ممکن‌است بخشی‌از فاصلهٔ تناوب‌اساسی‌در دامنهٔ‌تابع‌قرار گیرد مثلا در تابع $f(x)=\sqrt{\sin x}$ ، $T=2\pi$ و اگر فاصلهٔ تناوب را $[0 , 2\pi]$ اختیارکنیم فـاصلهٔ $(\pi , 2\pi)$ عضو دامنهٔ $f(x)$ نیست.

۱۰- اگر f تابعی متناوب‌با تناوب اساسی T باشد، آن گاه توابع $g(x)=\cos(f(x))$ و $g(x)=\sec(f(x))$ نیز متناوب‌است. برای‌تعیین تناوب‌اساسی تابع g ، می‌توان چنین عمل‌کرد :

اگـر $\forall_x\in D_g:g(x+\frac{T}{2})=g(x)$ نتیجه‌می گیریم تناوب‌اساسی تابع g ، $(\frac{T}{2})$ است، درغیراین‌صورت‌تناوب اساسی‌تابع g همان T خواهد شد.

مثال : تناوب‌اساسی تابع به معادلهٔ

$$g(x)=\sec(\sin x)$$

را بیابید.

داریم: $T_{(\sin x)}=2\pi$

$$g(x+\pi)=\sec(\sin(x+\pi))=\sec(-\sin x)$$

$$=\sec(\sin x)=g(x) \Longrightarrow T_{g(x)}=\pi$$

۱۱- تناوب اساسی چهارتابع زیر $\frac{\pi}{2a}$ **است:**

$$f_1(x)=\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax \qquad n\in N , n\neq 1$$

$$f_2(x)=tg^{2n}ax+cotg^{2n}ax \qquad n\in N$$

$$f_3(x)=|\sin^n ax|+|\cos^n ax| \qquad n\in N , n\neq 2$$

$$f_4(x)=|tg^n ax|+|cotg^n ax| \qquad n\in N$$

اثبات: ثابت می‌کنیم تناوب اساسی تابع

$$f_1(x)=\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax$$

$n\in N$ و $n\neq 1$ برابر $\frac{\pi}{2a}$ است.

فرض می‌کنیم تناوب تابع f برابر T_1 باشد:

$$f(x+T_1)=\sin^{2n}a(x+T_1)+\cos^{2n}a(x+T_1)$$

$$f(x+T_1)=\sin^{2n}(ax+aT_1)+\cos^{2n}(ax+aT_1)$$

اگر

$$aT_1=\frac{(2k-1)\pi}{2} \Longrightarrow f(x+T_1)=f(x)$$

زیرا :

$$\begin{cases}\sin^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=\cos^{2n}ax\\ \cos^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=\sin^{2n}ax\end{cases}$$

$$\Longrightarrow aT_1=\frac{(2k-1)\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow T_1=\frac{(2k-1)\pi}{2a} \Longrightarrow \boxed{T=\frac{\pi}{2a}}$$

مثال : تناوب اساسی تـابع $f(x)=\sin^6x+\cos^6x$ را بیابید.

حل : بنا به دستور شماره (۱۱)

$$T=\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{2}$$

راه دوم :

$$f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x \implies T=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$$

۱۲- توابعی نظیر تابع $f(x)=\sin\pi x+\cos 2x$ متناوب نیست، زیرا:

$$T_{\sin\pi x}=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

$$T_{\cos 2x}=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

چون بین دو عدد (۲) و (π) کوچکترین مضرب مشترك وجود ندارد . پس تابع متناوب نیست .

همچنین توابعی نظیر تابع ؛

$$f(x)=\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\cos\frac{x}{\sqrt{3}}$$

متناوب نمی‌باشد زیرا؛ مانند مثال‌قبل بین‌تناوبهای اساسی‌توابع $\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$ و $\cos\frac{x}{\sqrt{3}}$ کوچکترین‌مضرب‌مشترك وجود ندارد.

۱۳- تابع $f(x)=\cos|x|$ متناوب‌است و تناوب‌اساسی آن (2π) است زیرا: $\cos|x|=\cos x$

ولی‌توابع $\sin|x|$ و $tg|x|$ و $cotg|x|$ متناوب نیست. (چرا ؟)

۱۴- توابع مرکب جبری ومثلثاتی مانندتابع

$$f(x)=x^2-4x+\sin x$$

متناوب‌نیست. ولی می‌توان‌توابع مرکبی‌ساخت که‌قسمت‌جبری آن‌به فرم $nx-[nx]$ باشد ومتناوب هم باشد.

مانند: تابع $f(x)=2x-[2x]+\sin\pi x$

زیرا :

$$\begin{cases}T_{(2x-[2x])}=\frac{1}{2}\\ T_{\sin\pi x}=2\end{cases}$$

بین (۲) و ($\frac{1}{2}$) کوچکترین مضرب مشترك(۲) است

پس: $T_{f(x)}=2$.

۱۵- اگر :

$$f(x)=\frac{a\sin x+b\cos x}{a'\sin x+b'\cos x} \quad ، \quad \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

اگربه همین‌صورت تناوب‌اساسی‌را پیداکنیم $T=2\pi$ خواهد شد ولی اگر عوامل کسر را بر $\cos x\neq 0$ تقسیم کنیم آن گاه $f(x)=\frac{a\,tgx+b}{a'\,tgx+b'}$ که دراین‌صورت: $T=\pi$ خواهدشد.

پس: $T_{f(x)}=\pi$.

۱۶- اگرمعادلهٔ تابع‌به صورت حاصل ضرب سینوسها و کسینوسها باشد، بایدآن‌رابه حاصل‌جمع تبدیل کنیم‌سپس‌تناوب اساسی تابع‌را تعیین‌کنیم.

مثال .

$$f(x)=2\sin\frac{7x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}$$

$$f(x)=\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{3x}{2}\right)-\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{3x}{2}\right)$$

$$=\cos 2x-\cos 5x$$

$$T_{\cos 2x}=\pi\ ,\ T_{\cos 5x}=\frac{2\pi}{5} \implies T_{f(x)}=2\pi$$

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

Vector Algebra

P. Gusyatnikov and S. Reznichenko

غلامرضا یاسی‌پور

خوانندهٔ عزیز! همانطور که در سرمقالهٔ شمارهٔ پیش وعده داده‌بودیم از این شماره به بعد قسمتی از مجله را به ترجمهٔ متون ریاضی اختصاص می‌دهیم در آن سعی بر این داریم که اولا متنی را انتخاب کنیم که به‌کار دروس ریاضی شما بیاید و ثانیا آن‌را چنان ارائه دهیم که به‌آموزش فن ترجمه کمك کند و به این ترتیب با یك عمل به دو هدف برسیم و برای این کار هم متن اصلی را که به زبان انگلیسی است می‌آوریم و هم ترجمهٔ آن را و هم معانی فارسی اصطلاحات آن را ، بنابراین لازم است که خوانندهٔ علاقه‌مندی که مایل به آموختن فن ترجمه است ابتدا اصطلاحات مزبور را بیاموزد وسپس به ترجمه بپردازد و درآخر آن را با ترجمهٔ داده‌شده مقایسه کند و خطاهای احتمالی‌خود را بیابد ودر ضمن ازآموختن موضوع آمـده شده در متن غافل نماند و توفیق از خداوند متعال است.

Complex Numbers

Sec. 5.1. Complex Numbers and Operations on Them

اعداد مختلط

بخش ۱. اعداد مختلط و اعمال راجع به‌آنها

Consider the set C whose elements are all possible ordered pairs z of real numbers: (a, b), $a \in R$, $b \in R$. Let us introduce into this set the notion of equality of elements and define the basic arithmetic operations in the following way.

Let z_1 be an ordered pair (a_1, b_1), and z_2 an ordered pair (a_2, b_2). The ordered pairs z_1 and z_2 are said to be *equal* (written: $z_1 = z_2$) if and only if $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. In other words, $z_1 = z_2$ if and only if z_1 and z_2 represent the same ordered pair of real numbers.

مجموعهٔ C ، کـه عناصرش جمیع جفتهای ممکن اعداد حقیقی z اند ، یعنی، (a, b) و $a \in R$ و $b \in R$ ، را در نظر می گیریم. دراین مجموعه و به‌طریق زیر، مفهوم تساوی عناصر را معرفی واعمال‌حسابی اساسی (چهار عمل اصلی حساب) را تعریف می کنیم.

فرض می کنیم z_1 جفت مرتب (a_1, b_1) ، و z_2 جفت مرتب (a_2, b_2) بـاشد. جفتهای مـرتب z_1 و z_2 را مساوی می گویند (و $z_1 = z_2$ می نویسند) اگر و تنها اگر $a_1 = a_2$، $b_1 = b_2$. به عبارت‌دیگر، $z_1 = z_2$ اگر و تنها اگر z_1 و z_2 یك جفت مرتب از اعداد حقیقی‌را نمایش دهند.

The *sum* $z_1 + z_2$ of ordered pairs $z_1 = (a_1, b_1)$ and $z_2 = (a_2, b_2)$ is defined as an ordered pair $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. The *product* $z_1 z_2$ of ordered pairs z_1 and z_2 is defined as an ordered pair $(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

For example, if $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (5, -3)$, then $z_1 + z_2 = (1 + 5, 2 + (-3)) = (6, -1)$, $z_1 z_2 = (1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3), 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5) = (11, 7)$.

The *difference* $z_1 - z_2$ of ordered pairs z_1 and z_2 is defined as an ordered pair $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$. If $a_2^2 + b_2^2 >$

A set C of ordered pairs $z = (a, b)$ of real numbers $a \in R$, $b \in R$ in which the notion of equality and arithmetic operations are introduced by the above method is called the set of *complex numbers*. Any element $z = (a, b) \in C$ is termed a *complex number*.

A complex number of the form $(a, 0)$, where a is a real number, is identified with the real number a itself and is denoted by the same letter, that is, we write $(a, 0) = a \in R$. In such identification, the operations on real numbers and complex numbers corresponding to them are agreed: if $a_1 \in R$, $a_2 \in R$, then

$$(a_1, 0) \pm (a_2, 0) = (a_1 \pm a_2, 0) = a_1 \pm a_2;$$
$$(a_1, 0)\cdot(a_2, 0) = (a_1a_2 - 0\cdot 0,\ a_1\cdot 0 + 0\cdot a_2)$$
$$= (a_1a_2, 0) = a_1a_2;$$
$$a_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{(a_1, 0)}{(a_2, 0)} = \left(\frac{a_1a_2 + 0\cdot 0}{a_2^2 + 0^2},\ \frac{-a_1\cdot 0 + 0\cdot a_2}{a_2^2 + 0^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a_1}{a_2}, 0\right) = \frac{a_1}{a_2}.$$

مجموعهٔ C ازجفتهای‌مرتب $z=(a,b)$ از اعدادحقیقی $a\in R$ ، $b\in R$ کـه در آن مفهوم تساوی و اعمال حسابی، بـا استفاده‌از روش‌فوق، معرفی‌شده‌اند مجموعهٔ‌اعدادمختلط نامیده می‌شود . هرعنصر $z=(a\ ,\ b)\in C$ ، به عدد مختلط مصطلح است .

عدد مختلط به‌صورت $(a,\circ)$ ، که در آن a عددی‌حقیقی است، باخود عدد حقیقی a یکی‌است و با همین حرف نمایش داده می‌شود، یعنی، می نویسیم

$$(a,\circ)=a\in R$$

. دریکی سازی‌ای چنین، اعمال راجع بـه اعداد حقیقی واعداد مختلط متناظر با آنها سازگارند:اگر $a_1\in R$ ، $a_2\in R$، در این صورت:

$$(a_1,\circ)\pm(a_2,\circ)=(a_1\pm a_2,\circ)=a_1\pm a_2$$
$$(a_1,\circ)\cdot(a_2,\circ)=(a_1a_2-\circ.\circ,a_1.\circ+\circ.a_2)$$
$$=(a_1a_2,\circ)=a_1a_2$$
$$a_2\neq\circ \Longrightarrow \frac{(a_1,\circ)}{(a_2,\circ)}=$$
$$\left(\frac{a_1a_2+\circ.\circ}{a_2^2+\circ^2},\frac{-a_1.\circ+\circ.a_2}{a_2^2+\circ^2}\right)=\left(\frac{a_1}{a_2},\circ\right)=\frac{a_1}{a_2}$$

0, then the *quotient* $\frac{z_1}{z_2}$ of ordered pairs z_1 and z_2 is defined as the ordered pair

$$\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2},\ \frac{-a_1b_2 + b_1a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right).$$

For example, if $z_1 = (0, 5)$ and $z_2 = (1, -2)$ then $z_1 - z_2 = (0 - 1, 5 - (-2)) = (-1, 7)$;
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(0, 5)}{(1, -2)} = \frac{0\cdot 1 + 5\cdot(-2)}{1^2 + (-2)^2},\ \frac{-0\cdot(-2) + 5\cdot 1}{1^2 + (-2)^2} = (-2, 1).$$

مجموع z_1+z_2 ی جفتهای مرتب $z_1=(a_1\ ,\ b_1)$ و $z_2=(a_2,b_2)$ به صورت جفت مرتب (a_1+a_2,b_1+b_2) تعریف می‌شود . z_1z_2 حاصل‌ضرب جفتهای مرتب z_1 و z_2 به صورت‌جفت مرتب $(a_1a_2-b_1b_2\ ,\ a_1b_2+b_1a_2)$ تعریف شده است.

به عنوان مثال: اگـر $z_1=(1,2)$ ، $z_2=(5,-3)$ ، در این صورت:

$$z_1+z_2=(1+5,2+(-3))=(6,-1)$$
$$z_1z_2=(1\cdot5-2\cdot(-3)\ ,$$
$$1\cdot(-3)+2\cdot5)=(11,7)$$

z_1-z_2 ، تفاضل جفتهای مرتب z_1 و z_2 بـه صورت جفت مـرتب $(a_1-a_2\ ,\ b_1-b_2)$ تعریف می‌شود . اگـر $a_2^2+b_2^2>\circ$ این‌صورت، $\frac{z_1}{z_2}$ ، خارج قسمت جفتهای مرتب z_1 و z_2 ، به صورت‌جفت مرتب:

$$\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$$

تعریف می‌شود.

به عنوان مثال : اگر $z_1=(\circ,5)$ و $z_2=(1,-2)$ ، دراین صورت:

$$z_1-z_2=(\circ-1,5-(-2))=(-1,7)$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(\circ,5)}{(1,-2)}=$$
$$\frac{\circ.1+5.(-2)}{1^2+(-2)^2},\frac{-\circ.(-2)+5.1}{1^2+(-2)^2}=(-2,1)$$

The complex number (0, 1) is called the *imaginary unit*; it is denoted by i:

$$i = (0, 1).$$

The complex number $0 = (0, 0)$ is called *zero*.

The elements of the set C are sometimes called simply numbers (if it is clear that complex numbers are meant).

The operations of finding the sum and difference of complex numbers z_1 and z_2 are called the addition and subtraction of the numbers z_1 and z_2, respectively, and the operations of finding the product and quotient of the complex numbers z_1 and z_2 the multiplication and division of the number z_1 by the number z_2, respectively. The division of a complex number z by the complex number 0 is not defined. The product of the complex numbers z_1 and z_2 is sometimes denoted by $z_1 \cdot z_2$. For any natural number n the *power* z^n of the complex number z is determined by induction in the following way: $z^1 = z$, $z^n = z \cdot z^{n-1}$, $n \geqslant 2$.

If $z = (a, b)$ is a complex number, then the complex number $(-a, -b)$ is said to be *opposite* to the complex number z and is symbolized as $-z$. The complex number $(a, -b)$ is called the *complex conjugate* of the number z; it is denoted by $\bar{z}$. The *modulus* $|z|$ of a complex number $z = (a, b)$ is defined as a nonnegative real number $\sqrt{a^2 + b^2}$. Thus,

$$z = (a, b) \Rightarrow -z = (-a, -b), \quad \bar{z} = (a, -b),$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

عدد مختلط $(۰,۱)$ به واحد انگاری موسوم‌است؛ و با i نمایش داده می‌شود:

$$i = (۰,۱)$$

عدد مختلط $۰ = (۰,۰)$ به صفر موسوم می‌باشد.

عناصرمجموعهٔ C را گاهی (ودرصورتی که آشکار باشد که به معنی‌عدد مختلط‌اند) به‌طور ساده عدد می‌نامند.

اعمال‌یافتن مجموع و تفاضل اعداد مختلط z_1 و z_2، به ترتیب، جمع وتفریق اعداد z_1 و z_2 نامیده‌می‌شوند، و اعمال پیداکردن حاصل‌ضرب وخارج‌قسمت دوعدد مختلط z_1 و z_2، به ترتیب به ضرب و تقسیم عدد z_1 و عدد z_2 موسومند. تقسیم عدد مختلط z برعدد مختلط ۰ تعریف نشده است. حاصل‌ضرب اعداد مختلط z_1 و z_2، گاهی، با $z_1 \cdot z_2$ نمایش‌داده می‌شود. توان z^n از عدد مختلط z، به ازای‌هرعدد طبیعی n، با استفاده از استقرا و به‌طریق زیرمعین می‌شود:

$$z^۱ = z \quad , \quad z^n = z \cdot z^{n-۱} \quad , \quad n \geqslant ۲$$

اگر $z = (a,b)$ عددی مختلط باشد، دراین‌صورت عدد مختلط $(-a, -b)$ را مقابل عدد مختلط z می گویند و به صورت $-z$ علامتی می‌کنند. عدد مختلط $(a, -b)$ به مزدوج مختلط عدد z موسوم است؛ وبا $\bar{z}$ نمایش داده می‌شود. $|z|$، قدر مطلق عدد مختلط $z = (a,b)$ به‌صورت عددحقیقی نامنفی $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ تعریف‌شده است. به این ترتیب،

$$z = (a , b) \Longrightarrow -z = (-a , -b) \; ,$$
$$\bar{z} = (a , -b)$$
$$|z| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

If $z = (a, 0) = a \in R$, then $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$, that is, the modulus of a complex number identified with a real number a is equal to the absolute value of the real number a.

Example 5.1.1. Prove that if $z = -z$, then $z = 0$, if $z = \bar{z}$, then $z \in R$.

△ Let $z = (a, b)$, $z = -z$, that is, $(a, b) = (-a, -b)$. By the definition of equality of complex numbers, $a = -a$, $b = -b$, $2a = 2b = 0$. Thus, $a = b = 0$, $z = (a, b) = (0, 0) = 0$.

If $z = \bar{z}$, that is $(a, b) = (a, -b)$, then $a = a$, $b = -b$. In this case $2b = 0$, $b = 0$. This means that $z = (a, b) = (a, 0) = a \in R$. ▲

Example 5.1.2. Prove that for any real numbers c and d $(d \neq 0)$ and any complex number $z = (a, b)$ the following equalities are fulfilled:

$$cz = (ca, cb), \quad \frac{z}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) \tag{5.1}$$

(on the right-hand side of these equalities, c and d are understood as real numbers, whereas on the left-hand side as complex numbers $(c, 0)$ and $(d, 0)$).

△ $c \cdot z = (c, 0)(a, b) = (ca - 0 \cdot b, cb + 0 \cdot a) = (ca, cb)$;

$$\frac{z}{d} = \frac{(a, b)}{(d, 0)} = \left(\frac{ad + b \cdot 0}{d^2 + 0^2}, \frac{-a \cdot 0 + bd}{d^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right).$$

The formula (5.1), in particular, implies that

$$1 \cdot z = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) = z, \; (-1) \cdot z = ((-1) \cdot a,$$
$$(-1) \cdot b) = (-a, -b) = -z,$$
$$\frac{z}{1} = \left(\frac{a}{1}, \frac{b}{1}\right) = (a, b) = z,$$
$$\frac{z}{-1} = \left(\frac{a}{-1}, \frac{b}{-1}\right) = (-a, -b) = -z. \tag{5.2}$$

اگر $z=(a,\circ)=a\in R$ ، دراین صورت:

$$|z|=\sqrt{a^{۲}+\circ^{۲}}=|a|$$

یعنی، قدرمطلق عدد مختلط یکسان با عددحقیقی a ، برابر قدر مطلق عددحقیقی a است.

مثال ۱ . ۱ . ثابت کنید که اگر $z=-z$ ، در این صورت $z=\circ$ ، اگر $z=\bar{z}$ ، دراین‌صورت $z\in R$.

Δ فرض می‌کنیم $z=(a,b)$ ، $z=-z$ ، یعنی،

$$(a,b)=(-a,-b)$$

بنا به تعریف تساوی اعداد مختلط ، $a=-a$ ، $b=-b$ ، $۲a=۲b=\circ$. به این ترتیب، $a=b=\circ$ ،

$$z=(a,b)=(\circ,\circ)=\circ$$

اگر $z=\bar{z}$ ، یعنی $(a,b)=(a,-b)$ ، دراین‌صورت $a=a$ ، $b=-b$. دراین‌حالت $۲b=\circ$ ، $b=\circ$. این بدان معنی است که

$$z=(a,b)=(a,\circ)=a\in R \quad \Delta$$

مثال ۱ . ۲ . ثابت کنید که به‌ازای هرعدد حقیقی c و d ، $(d\neq\circ)$ و هرعدد مختلط $z=(a,b)$ ، تساویهای زیر برقرارند:

$$cz=(ca,cb), \qquad \frac{z}{d}=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) \qquad (۱)$$

(c و d ، در سمت‌راست این تساویها، به صورت اعداد حقیقی درنظر گرفته می‌شوند، درحالی‌که در سمت‌چپ آنها، به‌صورت اعداد مختلط $(c,\circ)$ و $(d,\circ)$ دانسته می‌شوند).

Δ

$$c\cdot z=(c,\circ)(a,b)=(ca-\circ\cdot b,\ cb+\circ\cdot a)$$

$$=(ca,cb)$$

$$\frac{z}{d}=\frac{(a,b)}{(d,\circ)}=\left(\frac{ad+b\cdot\circ}{d^{۲}+\circ^{۲}},\frac{-a\cdot\circ+bd}{d^{۲}+\circ^{۲}}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) \quad \Delta$$

فرمول (۱)، درحالت خاص، مستلزم این‌است که:

$$۱\cdot z=(۱\cdot a,۱\cdot b)=(a,b)=z \ ,$$

$$(-۱)\cdot z=((-۱)\cdot a,(-۱)\cdot b)=$$

$$(-a,-b)=-z$$

$$\frac{z}{۱}=\left(\frac{a}{۱},\frac{b}{۱}\right)=(a,b)=z$$

$$\frac{z}{-۱}=\left(\frac{a}{-۱},\frac{b}{-۱}\right)=(-a,-b)=-z \qquad (۲)$$

Example 5.1.3. Prove that for any complex numbers $z_1=(a_1, b_1)$ and $z_2=(a_2, b_2)$ the following relationships are fulfilled (here and henceforward, the operations in the parentheses are to be performed first):

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2); \qquad (5.3)$$

$$z_2\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z_2}=\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}. \qquad (5.4)$$

Δ Indeed, $z_1+(-z_2)=(a_1, b_1)+(-a_2, -b_2)=(a_1+(-a_2), b_1+(-b_2))=(a_1-a_2, b_1-b_2)=z_1-z_2$.

مثال ۱ . ۳ . ثابت کنید که به‌ازای هرعدد مختلط

$$z_{۱}=(a_{۱},b_{۱}) \ \text{و} \ z_{۲}=(a_{۲},b_{۲})$$

روابط زیر برقرارند (در اینجا و از این مرحله به بعد، باید ابتدا اعمال داخل پرانتزها انجام شوند):

$$z_{۱}-z_{۲}=z_{۱}+(-z_{۲}) \qquad (۳)$$

$$z_{۲}\neq\circ \Longrightarrow \frac{۱}{z_{۲}}=\frac{\bar{z}_{۲}}{|z_{۲}|^{۲}},\quad \frac{z_{۱}}{z_{۲}}=\frac{z_{۱}\cdot\bar{z}_{۲}}{|z_{۲}|^{۲}} \qquad (۴)$$

Δ در واقع :

$$z_{۱}+(-z_{۲})=(a_{۱},b_{۱})+(-a_{۲},-b_{۲})=$$

$$(a_{۱}+(-a_{۲})\ ,\ b_{۱}+(-b_{۲}))=$$

$$(a_{۱}-a_{۲}\ ,\ b_{۱}-b_{۲})=z_{۱}-z_{۲}$$

Example 5.1.4. Prove that for any complex number $z = (a, b)$ the following equality is fulfilled:

$$z = a + bi. \quad (5.5)$$

Conversely, if a and b are real numbers and $z = a + bi$, then $z = (a, b)$.

□ If $a \in R$, $b \in R$, then, by the formula (5.1), $bi = b \cdot (0, 1) = (b \cdot 0, b \cdot 1) = (0, b)$. Therefore $a + bi = (a, 0) + (0, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, b)$.

The notation (5.5) of a complex number $z = (a, b)$ is called the *algebraic form of the notation* of the number z. The numbers $a \in R$ and $b \in R$ in the algebraic notation (5.5) of the complex number z are given specific names. The number a is called the *real part* of the complex number z (written: $a = \operatorname{Re} z$), and the number b the *imaginary part* of the complex number z (written: $b = \operatorname{Im} z$). It is readily checked that

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2,$$
$$\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2.$$

مثال ۱ .۴. ثابت کنید که به‌ازای هرعدد مختلط

$$z=(a\ ,\ b)$$

تساوی زیر برقرار است:

$$z=a+bi \quad (۵)$$

برعکس، اگر a و b اعدادی حقیقی و $z=a+bi$ ، دراین صورت $z=(a,b)$.

اگر $a\in R$، $b\in R$ ، دراین‌صورت، بنا به‌فرمول (۱)،

$$bi=b\cdot(0,1)=(b\cdot 0,b\cdot 1)=(0,b)$$

بنابراین :

$$a+bi=(a,0)+(0,b)=(a+0,0+b)=(a,b)$$

نماد (۵) عدد مختلط $z=(a,\ b)$ به صورت جبری نماد عدد z موسوم است . به اعداد $a\in R$ و $b\in R$ واقـع در نماد جبری (۵) عدد مختلط z ، نامهای‌خاصی‌داده شده‌است. عدد a به جزء حقیقی عدد مختلط z موسوم است (و $a=\operatorname{Re} z$ نوشته می‌شود)، وعدد b جزء انگاری‌عددمختلط z نامیده(و $b=\operatorname{Im} z$ نوشته) می‌شود. به سادگی می‌توان امتحان کرد که:

$$\operatorname{Re}(z_1\pm z_2)=\operatorname{Re} z_1\pm\operatorname{Re} z_2$$
$$\operatorname{Im}(z_1\pm z_2)=\operatorname{Im} z_1\pm\operatorname{Im} z_2$$

Further,

$$\frac{1}{z_2}=\frac{(1,0)}{(a_2,b_2)}=\left(\frac{1\cdot a_2+0\cdot b_2}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{-1\cdot b_2+0\cdot a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$$
$$=\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{-b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=\left(\frac{a_2}{|z_2|^2},\ \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right).$$

By the formula (5.1),

$$\frac{\bar z_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_2,-b_2)}{|z_2|^2}=\left(\frac{a_2}{|z_2|^2},\ \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right)=\frac{1}{z_2}.$$

Finally,

$$\frac{z_1\cdot\bar z_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_1,b_1)\cdot(a_2,-b_2)}{|z_2|^2}$$
$$=\frac{(a_1a_2-b_1\cdot(b_2),\ a_1\cdot(-b_2)+b_1a_2)}{|z_2|^2}$$
$$=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{|z_2|^2},\ \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{|z_2|^2}\right)$$
$$=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=\frac{z_1}{z_2}.$$

گذشته از این:

$$\frac{1}{z_2}=\frac{(1,0)}{(a_2,b_2)}=\left(\frac{1\cdot a_2+0\cdot b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{-1\cdot b_2+0\cdot a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$$
$$=\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{-b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=\left(\frac{a_2}{|z_2|^2},\frac{-b_2}{|z_2|^2}\right)$$

بنا به فرمول (۱):

$$\frac{\bar z_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_2,-b_2)}{|z_2|^2}=\left(\frac{a_2}{|z_2|^2},\frac{-b_2}{|z_2|^2}\right)=\frac{1}{z_2}$$

سرانجام:

$$\frac{z_1\cdot\bar z_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_1,b_1)\cdot(a_2,-b_2)}{|z_2|^2}$$
$$=\frac{(a_1a_2-b_1\cdot(b_2),a_1\cdot(-b_2)+b_1a_2)}{|z_2|^2}$$
$$=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{|z_2|^2},\ \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{|z_2|^2}\right)$$
$$=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=\frac{z_1}{z_2}\ \Delta$$

If Im $z = 0$, then, as we agreed above, the number $z = a + 0 \cdot i = (a, 0)$, is a real number a. The complex numbers $z = (0, b) = 0 + bi = bi$, whose real part is equal to zero, are called *pure imaginary*. The number $0 = 0 + 0i$ is both real and pure imaginary at the same time.

In what follows the notation (5.5) will be understood only as an algebraic notation of the complex number $z = (a, b)$, that is, the numbers a and b in the notation (5.5) will be regarded only as real numbers, although it will not be stipulated.

It is obvious that if $z = (a, b) = a + bi$, then $\bar{z} = a - bi$.

Example 5.1.5. Prove that

$$i^2 = -1 \qquad (5.6)$$

$$\triangle i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

اگر $\mathrm{Im}\, z = 0$ ، درایـن صورت، همان‌گونه‌که در فوق قرار گذاشتیم، عدد:

$$z = a + 0 \cdot i = (a, 0)$$

عدد حقیقی a است. عدد مختلط $z = (0, b) = 0 + bi = bi$، که جزءحقیقیش برابرصفر است، انگاری محض نامیده‌می‌شود. عدد $0 = 0 + 0i$ در آن واحد هم حقیقی ، هم انگاری محض است .

درآنچه‌که بعداز این می‌آید، نماد (۵)، تنها به عنوان نمادجبری عدد مختلط $z = (a, b)$ دانسته می‌شود، یعنی اعداد a و bی واقع‌درنماد (۵) تنها‌به عنوان اعدادی حقیقی درنظر گرفته می‌شوند، گرچه به‌آن تصریح نخواهد شد.

واضح است‌که اگر : $z = (a, b) = a + bi$ ، در ایـن صورت $\bar{z} = a - bi$.

مثال ۵.۱. ثابت‌کنید‌که :

$$i^2 = -1 \qquad (۶)$$

$$i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0)$$

$$= (-1, 0) = -1 \quad \blacktriangle$$

ترجمهٔ بعضی لغات و اصطلاحات

Complex Numbers	اعداد مختلط
Operations	اعمال
Set	مجموعه
Element	عنصر
Ordered Pairs	جفتهای مرتب
Real Numbers	اعدادحقیقی
Equality	تساوی، برابری
Basic	اساسی
Addition	جمع
Subtraction	تفریق
Multiplication	ضرب
Division	تقسیم
Natural Number	عدد طبیعی
Power	توان
Induction	استقرا
Opposite	مقابل
Complex Conjugate	مزدوج مختلط
Modulus	قدر مطلق
Nonnegative	نامنفی
Absolute Value	قدر مطلق
To Prove	اثبات کردن
Formula	فرمول
Relation	رابطه
Notation	نماد
Algebraic Form	صورت جبری
Algebraic Notation	نماد جبری
Real Part	جزء حقیقی
Imaginary Part	جزء انگاری
Pure Imaginary	انگاری محض
Arithmetic Operations	اعمال حسابی
Equal	مساوی، برابر
Sum	مجموع
Product	حاصل‌ضرب
Difference	تفاضل
Quotient	خارج‌قسمت
Notion	مفهوم
Method	روش
Imaginary Unit	واحد انگاری یا موهومی
Zero	صفر

قانون اثبات شرطی[1]

● غلامرضا یاسی‌پور

با هراستدلال[2] گزارهٔ شرطی[3]ای متناظر است که مقدمش[4] ترکیب عطفی[5] مقدمات[6] آن استدلال و تالیش[7] نتیجهٔ[8] آن است، و استدلال درست[9] است اگر و تنها اگر شرطی متناظرش صادق[10] باشد. اگر نتیجهٔ استدلالی گزاره‌ای شرطی به صورت $A \Rightarrow C$ باشد، و ترکیب عطفی مقدمات آن را با P نمایش بدهیم، در این صورت استدلال مزبور درست است اگر و تنها اگر ترکیب شرطی

$P \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

صادق باشد، اما این صورت گزاره‌ای[11] بنا به اصل صدور[12] معادل

$(P \wedge A) \Rightarrow C$

است، به این ترتیب دو استدلال

P

$\therefore A \Rightarrow C$

و

P

A

$\therefore C$

که اولی معادل $P \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ و دومی معادل $(P \wedge A) \Rightarrow C$ است، خود معادل‌اند، و از این طریق **قانون اثبات شرطی**[13] که آن را با .C.P اختصار می‌کنیم حاصل می‌شود:

قانون .C.P : هر استدلال بانتیجهٔ شرطی را می‌توان به استدلالی معادل با آن که مقدماتش، مقدمات استدلال اصلی به اضافهٔ مقدمه جدیدی است که مقدم نتیجهٔ استدلال اصلی است و نتیجه‌اش تالی نتیجهٔ استدلال اصلی است، تبدیل کرد.

اکنون باذکر چند مثال به توضیح این قانون می‌پردازیم.

مثال ۱ . درستی استدلال زیر را اثبات کنید:

$(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$

$(D \vee E) \Rightarrow F / \therefore A \Rightarrow F$

این استدلال بنا به قانون اثبات شرطی معادل استدلال زیر است، بنابراین به‌جای اثبات آن به اثبات استدلال زیر می‌پردازیم:

۱. $(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$

۲. $(D \vee E) \Rightarrow F$

۳. $A \ / \therefore F$ (C.P.)[14]

۴. $A \vee B$ ۳ , Add.

۵. $C \wedge D$ ۴ , ۱ , M.P.

۶. $D \wedge C$ ۵ , Com

۷. D ۶ , Sim p.

۸. $D \vee E$ ۷ , Add.

۹. F ۸ , ۲ , M.P.

قانون اثبات شرطی را، همان‌طور که مثال زیرنشان می‌دهد، می‌توان بیش از یک‌بار به کار برد.

مثال ۲. درستی استدلال زیر را تحقیق کنید:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

$B \Rightarrow (C \Rightarrow D) / \therefore A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$

با دو بار استفاده کردن از .C.P استدلال زیر را به دست آورده، آن را اثبات می‌کنیم:

۱. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
۲. $B \Rightarrow (C \Rightarrow D)\ /\therefore\ A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$
۳. $A\ /\therefore\ B \Rightarrow D$ (C.P.)
۴. $B\ /\therefore\ D$ (C.P.)
۵. $B \Rightarrow C$ ۱ , ۳ , M.P.
۶. C ۴ , ۵ , M.P.
۷. $C \Rightarrow D$ ۲ , ۴ , M.P.
۸. D ۶ , ۷ , M.P.

مثال ۳. درستی استدلال زیر را تحقیق کنید:

$$(T \Rightarrow E) \wedge (A \Rightarrow L)\ /\therefore\ (T \vee A) \Rightarrow (E \vee L)$$

باتوجه به .C.P استدلال داده شده را به صورت زیر درمی‌آوریم:

۱. $(T \Rightarrow E) \wedge (A \Rightarrow L)\ /\therefore\ (T \vee A) \Rightarrow (E \vee L)$
۲. $T \vee A\ /\therefore\ E \vee L$ (C.P.)
۳. $E \vee L$ ۲ , ۱ , C.D.

مثال ۴. درستی استدلال زیر را تحقیق کنید:

$E \Rightarrow S$
$E \Rightarrow (S \Rightarrow N)$
$S \Rightarrow (N \Rightarrow F)\ /\therefore\ E \Rightarrow F$

باتوجه به .C.P داریم:

۱. $E \Rightarrow S$
۲. $E \Rightarrow (S \Rightarrow N)$
۳. $S \Rightarrow (N \Rightarrow F)$
۴. $E\ /\therefore\ F$ (C.P.)
۵. S ۱ , ۴ , M.P.
۶. $N \Rightarrow F$ ۵ , ۳ , M.P.
۷. $S \Rightarrow N$ ۴ , ۲ , M.P.
۸. $S \Rightarrow F$ ۶ , ۷ , H.S.
۹. F ۵ , ۸ , M.P.

یادداشتها:

1. The Rule of Conditional Proof
2. Argument
3. Conditional Statement
4. Antecedent
5. Conjunction
6. Premisses
7. Consequent
8. Conclusion
9. Valid
10. Tautology (ترکیبی که‌ستون آخرجدول‌ارزشش تنها T دارد.)
11. Statement Form
12. Principle of Exportation
13. Conditional Proof

۱۴. اختصار .C.P را برای این نوشته‌ایم که مشخص کنیم؛ مقدمه و نتیجهٔ جدید را بااستفاده از قانون اثبات شرطی آورده‌ایم.

مرجع:
Symbolic Logic, Irving M. Copi

تفریح اندیشهٔ ۱

با استفاده از پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ می‌توان کلاً ۱۲۰ عدد تشکیل داد. اگر این اعداد را به‌ترتیب صعودی: ۱۲۳۴۵، ۱۲۳۵۴، ۱۲۴۵۳، تا ۵۴۳۲۱ قراردهیم، کدام عدد ۷۵مین عدد واقع دراین ترتیب است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران (۴)

عشق می‌ورزم وامید که این فن شریف
چون هنرهای دگرموجب حرمان نشود
«حافظ»

بیت بالا از آنِ حافظ است اما در ابتدای اولین سرمقالهٔ سردبیر مجلهٔ آشتی با ریاضیات [۱] آمده است. سردبیر مجله نیز مانند حافظ و سلفش ظهیر از دست هنرهای خود به فریاد است [۲] و امیدوار است این هنر آخرین، این آخرین ملجا، یعنی عشق ورزیدن، دیگر او را عذاب ندهد و دیگر موجب حرمانش نشود.

مجله آشتی با ریاضیات در بهار سال ۱۳۵۶ به سردبیری استاد ارجمند پرویز شهریاری توسط دانشگاه آزاد ایران آن روز پا به عرصهٔ مطبوعات ایران گذاشته است. کودکی که امروز نوجوانی ۱۵ ساله شده، نام و نشانی پیداکرده، و همراه با آن والبته با حسن و ملاحتی [۳] که داشته جای در کتابخانه‌ها گرفته است، و تا امروز [۴] که این مقاله را می‌نویسیم به شست و هفتمین شمارهٔ خود رسیده است.

قطع مجله، رقعی است و تعداد صفحاتش ۱۱۲ صفحه. شماره‌های اول و دوم و سومش قیمت ندارند اما قیمت شمارهٔ چهارمش ۵۰ ریال است، و شمارهٔ سی و چهارم* یعنی آخرین شماره‌اش به ۵۰۰ ریال به فروش می‌رسد.

دورکن اساسی مجله پرداختن به تاریخ ریاضی و ریاضیدانها، و کاربرد ریاضیات است و این کاربرد را حتی به معمّاها و تفریحات ریاضی تسری داده و از این راه به طنز رسیده است. مثلا در ابتدای مقاله‌ای از دکتر علیرضاامیرمعز چنین آمده است:

شخصی به ملانصرالدین گفت: ملا بچه شدی بانخ‌بازی می‌کنی؟! ملاگفت: بیشتر عمرت تلف شده‌است چون قدرت تمرکز حواست را خیلی کم به کاربرده‌ای. اگر توانستی این دستورهای ساده را بخوانی و یادبگیری، آن‌وقت تمرکز حواست تازه متوسط است. اگر همه را از حفظ شدی آن‌وقت یک ریال به‌تو می‌دهم [۵].

و به این ترتیب نویسنده از طنز به بازی و از بازی به ریاضی راهی گشوده است.

مجله گرچه برای عامهٔ مردم نوشته‌شده عوامانه نیست. ظریف و لطیف است امـا از دقت و صلابت برخوردار است و در آن از سهل‌انگاری و بی‌توجهی‌های خاص مجلات عامه پسند خبری نیست. مطالبش متنوع است، چنانکه افرادی با معلومات دبیرستانی و سلیقه‌های گوناگون به راحتی می‌توانند اغلب مقالات آن را بخوانند و با اندکی سعی بدانند و از آن بالاتر لذت ببرند و بالاخره چنانکه از نام مجله نیز برمی‌آید با ریاضیات آشتی کنند. خوانندگـان مجله خود متوجه این امر بوده‌اند و به همین مناسبت هم یکی از خوانندگان آن در این مورد نامه‌ای نوشته که قسمتی از آن را در زیر می‌خوانیم:

یاد دارم که وقتی به مدرسه می‌رفتم و حساب و هندسه می‌خواندم از هرکس که درباب فایدهٔ این کـار می‌پرسیدم می‌گفت: معلوم است، هرکس باید بتواند بدهکاری و بستانکاری وسود و زیانش را حساب کند و مساحت اتاق و زمین و ملکش را اندازه بگیرد. من که نه زمین و ملکی داشتم، نه بدهکاری و بستانکاری، و نه می‌خواستم فروشنده و بازرگان شوم، هیچ ندانستم چرا باید این همه روزهایم صرف حساب سود و زیان

و بده و بستان بازرگانان مسأله‌هایم شود؟

سالها گذشت و اصول و مقدمات ریاضی را طوطی‌وار فراگرفتم و امتحانها را یکی پس‌از دیگری گذراندم. نوبت به جبر و هندسهٔ استدلالی[6] رسید و اندک اندک جنبهٔ منطقی ریاضیات چهرهٔ زیبایش را آشکار ساخت و من شیفتهٔ این زیبایی شدم ـ حسن و جمالی که در تقارن، استحکام و بی‌کرانگی آن نهفته بود.

البته زندگی کوتاه‌تر و دشوارتر از آن است که بتوان به هرآنچه دوست داشتنی است دست یافت و من همچنان‌که از موسیقی بهره‌ای نبردم، جهانگرد نشدم ... ریاضیدان هم نشدم، اما قلبم از محبت آنها مالامال ماند و یادشان را عزیز داشتم.

من که از ریاضیات جز مقدماتی نمی‌دانم، دیدم که به یاری همان مقدمات می‌توانم مقاله‌های آشتی با ریاضیات را بخوانم و از آن چیزهای فراوان تازه‌ای بیاموزم و دریافتم که خودم هم می‌توانم در این آموزش شرکت کنم.[7]

دراینجا برای آشنا کردن خوانندگان به ذکر فرازهایی از بعضی از مقالات مجلهٔ مورد بحث می‌پردازیم و در آخر نیز دو مقالهٔ کامل آن را ذکر می‌کنیم.

در مقالهٔ: **چرخ در ریاضی جدید**[8] چنین آورده‌شده که:

یک روز ملانصرالدین، جای چرخ، چیز عجیب و غریبی به گاریش بسته بود و الاغش معطل مانده بود. مردی از راه رسید و از او پرسید: «این چه بساطی است که راه انداخته‌ای؟ با این چرخ چهارگوش که گاری راه نمی‌رود؟» ملاگفت: «متریک چرخ را به

$$f(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

بدل کرده‌ام. صبر کن تا متریک زمین را هم عوض کنم آن وقت همهٔ کارها درست می‌شود.»

مسأله: شکل زمین را پیدا کنید که چرخ بگردد.

درمقالهٔ : **چراپدر و مادرها نمی‌توانند مسأله‌ها راحل‌کنند؟**[9] چنین آمده که:

در سالهای اخیر، گفتگوهای زیادی دربارهٔ روش جدید آموزش ریاضیات پیش‌آمده است، هرکسی نظر خود را دراین باره ابراز داشته است که چرا «جان» نمی‌تواند از عهدهٔ محاسبه برآید. من هم برای خودنظری دارم و می دانم که چرا «جان» نمی‌تواند محاسبه کند: اشکال را باید دراینجا جستجو کرد که پدران و مادران دیگر از عهدهٔ کمک به درسهای بچه‌هایشان برنمی‌آیند.

در روزهای خوش گذشته، وقتی که هنوز خبری از «ریاضیات جدید» نبود، بچه‌ها تکلیفهایشان را در منزل انجام می‌دادند و پدر و مادرها به آنها کمک می‌کردند، اشتباه‌های آنها را تصحیح می‌کردند و تنبیه یا تشویقشان می‌کردند. ولی حالا مسأله‌ها طوری هستند، که نه دانش‌آموزان و نه پدر و مادرها، حتی گمان حل آنها را هم نمی‌توانند داشته باشند.

و به این ترتیب مشکل اصلی تعلیم و تربیت ریاضی را مطرح کرده‌است. مشکل اصلی فقط این نیست که پدر و مادرها نمی‌دانند؛ یعنی مطابق با پیشرفت علم پیشرفت نکرده‌اند بلکه این نیز هست که بچه‌ها هم نمی‌دانند یعنی مطابق با پیشرفت علم پیش‌نرفته‌اند و به عبارت دیگر چون مسألهٔ یاددادن حل نشده مسألهٔ یادگرفتن لاینحل مانده است.

در مقالهٔ **تاریخ ریاضیات و آنچه باید برای آن بشود**[10] دربارهٔ ریاضی و تاریخ آن، از قلم **جورج سارتن**[11] چنین می‌خوانیم که:

تاریخ ریاضیات نشاط بخش است، زیرا در پیش روی ما منظره‌ای از سلسلهٔ بی‌پایان پیروزیهای فکر انسان را نمایان می‌سازد. پیروزیهایی که با شکستها خنثی نشده، یعنی بدون فرومایگی و اهانت و بدون قساوتهاست، و در عین حال به ما کمک می‌کند که بدبینی را به دور افکنیم. این پیروزیها هر قدر عظیم باشد، مورخ موقع شناس هنوز انتظار پیروزیهای بیشتر و بزرگتری را دارد. آیا کار هر ریاضیدان موفقی را خلف برجسته‌تری دنبال می‌کند؟ تاریخ نشان می‌دهد که هر نظریهٔ ظاهراکامل و جامع همیشه جز پله‌ای برای رسیدن به نظریه‌ای بهتر نبوده‌است، و نظریه‌های تازه همانهاست که وقتی یکی پس از دیگری به‌وجود می‌آیند، چنانند که گویی جایی برایشان نیست.

... عالم ریاضیات هم‌اکنون چنان وسیع و متنوع است که فکر یک شخص به تنهایی قادر به درک آن نیست. این مسألهٔ افزایش احتیاج به ارزیابیهای ریاضی، تحلیلهای تاریخی و مطالعات فلسفی را نشان می‌دهد.[12]

اما این تاریخ ریاضیات است که بدون شکست و اهانت و فرومایگی و قساوت است و تاریخ ریاضیدانها چنین نیست. در تاریخ ریاضیدانها هم شکست وجود دارد هم اهانت، و هم فرومایگی هست و هم قساوت، در مقالهٔ **بزرگان دانش ریاضی**[۱۳] راجع به سرگذشت داوید هیلبرت[۱۴] چنین می‌خوانیم که:

آخرین دههٔ زندگی هیلبرت و بسیاری از دوستان و شاگردانش بر اثر جنایتها و شکنجه‌های حکومت هیتلری قرین تیرگی اندوهباری بود. او را در ۱۹۴۱ به گناه سرفرو نیاوردن به نظام نازی دستگیر کردند و به اردوگاه کار اجباری فرستادند. در سال ۱۹۴۳ به علت پیری و بیماری وخیم ـ و اطمینان از اینکه دیگر عمرش سرآمده است ـ آزادش کردند، و او یک ماه بعد در ۱۴ فوریهٔ ۱۹۴۳ درگوتینگن[۱۵] وفات یافت.

باز در مقاله‌ای تحت عنوان فاجعهٔ اسکندریه[۱۶] در مورد **هیپاتی**[۱۷] چنین می‌خوانیم که:

در روز روشن، دریکی از خیابانهای مرکزی اسکندریه، و در جلو چشمان بسیاری از مردم این شهر قدیمی، او را وحشیانه کشتند. وقتی‌که او از کتابخانهٔ اسکندریه برمی‌گشت، انبوه جمعیت خشمگین و خرافاتی، در کمین او انتظار می‌کشیدند. او را از درشکه‌اش بیرون آوردند و به‌طرف کلیسا کشاندند. جمعیت متعصّب باچشمان خون گرفته[۱۸]، دستهای او را شکستند و بدنش را زیر ضربات سخت خردکردند. بعد لباسهایش را پاره پاره کردند و پوستش را با چاقوهای صدفی کندند، و سرآخر، جسد بی‌جان وی را، روی کومهٔ آتش سوزاندند.

آری داستان ریاضیات چنان است و ماجرای ریاضیدانها چنین. فعلاً از این مقوله می‌گذریم و شرح این هجران و این خون جگر را برای وقت دگر[۱۹] می‌گذاریم.

گفتیم که یکی از ارکان اساسی مجلهٔ آشتی با ریاضیات آشنا کردن خواننده با تاریخ ریاضیات است و در این مورد هم ریاضیات گذشته مورد نظر است هم ریاضیات معاصر، و هم به ریاضیات ایران می‌پردازد و هم به ریاضیات جهان. برای آشنا شدن با بعضی از مقاله‌های مربوط به این مقوله نگاهی مختصر به مقالهٔ **محمدبن موسی خوارزمی**[۲۰] بنیانگذار جبر می‌افکنیم:

«جبر و مقابله صنعتی‌است از صناعات حساب. این دانش وسیلهٔ نیکویی است برای به دست آوردن پاسخ صحیح، برای مسایل مشکل وصیت وارث و معاملات و فرضیات[۲۱]. از آن جهت جبر می‌گویند که کاهشها و استثناها در آن جبران می‌شود، و از آن جهت مقابله می‌گویند که مقادیر را در برابر هم قرار می‌دهد و مشابهات را حذف می‌کند.»

ابوعبدالله کاتب خوارزمی در «مفاتیح العلوم» «اواخر سدهٔ چهارم هجری»

«جبر و مقابله یکی از فروع علم حساب است ... نخستین کسی که در این فن کتاب نوشت، خوارزمی است ...»

مقدمهٔ ابن‌خلدون[۲۲] «اواخر سدهٔ هشتم»

«بزرگترین ریاضیدان عصر، و اگر همهٔ شرایط را درنظر آوریم، یکی از بزرگترین ریاضیدانان همهٔ اعصار، خوارزمی بود.»

جورج سارتن در «مقدمه بر تاریخ علم»

محمدبن‌موسی خوارزمی یکی از نخستین و بزرگترین ریاضیدانان و اخترشناسانی است که در بغداد کار می‌کرد. از زندگی او چیز زیادی نمی‌دانیم، جز اینکه در خوارزم (خیوه) در نیمهٔ دوم سدهٔ دوم هجری قمری (نیمهٔ دوم سدهٔ هشتم میلادی) به‌دنیا آمد، قسمت عمدهٔ زندگی خود را، به‌عنوان یک ریاضیدان بزرگ، در بغداد و در زمان مأمون خلیفهٔ عباسی گذراند، در بیت‌الحکمه رفت و آمد داشت و در حدود سال ۲۳۲ هجری قمری درگذشت.

نخستین اثری که خوارزمی در بغداد به‌وجود آورد، تنظیم جدول سینوسها بود.

کتاب جبر خوارزمی (کتاب المختصر فی‌حساب الجبرو المقابله)، نقشی بسیار اساسی در تاریخ ریاضیات دارد. این کتاب بعدها به زبان لاتینی ترجمه شد[۲۳] و مدتها تنها کتاب درسی ریاضی در تمام اروپای غربی بود.

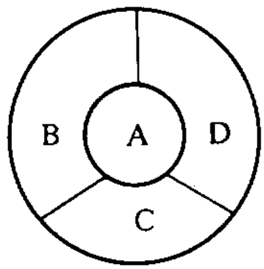
در کتاب جبر خوارزمی راه‌حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم شرح داده‌شده است.

در رابطه با تاریخ ریاضیات معاصر نگاهی کوتاه به مقالهٔ **مسألهٔ چهار رنگ**[۲۴] می‌اندازیم:

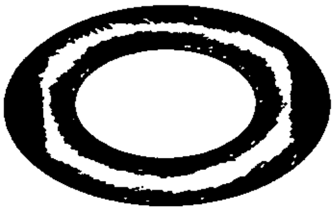
مسألهٔ چهار رنگ یکی از قدیمی‌ترین و مشهورترین مسأله‌های توپولوژی در نظریهٔ گرافهاست که از دیر باز مورد توجه ریاضیدانها بوده است. صورت ریاضی این مسأله ـ که حدود یک قرن پیش ارائه شده‌است ـ بدین شرح است: «برای رنگامیزی هر نقشهٔ مسطح (مانند نقشهٔ جهان در روی یک صفحهٔ کاغذ) حداقل چند رنگ‌نیاز داریم به قسمی که هر دو ناحیه (یا دو کشور) هم مرز[۲۵]، همرنگ نباشند.»

مسألهٔ مذکور توسط برادر فرانسیس گوتری[۲۶] دانشجوی ریاضی ادینبورو که درسال ۱۸۵۰ به آن برخورد در اختیار دومورگان[۲۷] قرار گرفت، و او مسأله را درمیان تمام ریاضیدانان انگلستان منتشر کرد.

ریاضیدانها دریافتند که به سهولت می‌توان نشان داد که برای رنگامیزی بعضی از نقشه‌ها سه رنگ کافی نیست، فی‌المثل، برای رنگامیزی نواحی A ، B ، C و D ی شکل



زیر چهار رنگ لازم است. همین‌طور ثابت شده که پنج رنگ همیشه کافی است.[۲۸] هم‌چنین ثابت کردند نقشه‌هایی که برای آنها چهار رنگ کافی نیست ـ درصورت وجود ـ باید شکل پیچیده‌ای داشته باشند. مثلا در مورد سطوحی مانند چنبره[۲۹] که مرتبط ساده نیستند (شکل زیر) ثابت کرده‌اند که هفت رنگ برای رنگ کردن هرنقشه در روی چنبره کافی است و بعضی از نقشه‌ها در روی چنبره، دقیقا، به‌هفت رنگ‌نیاز دارند.



پروفسور هیکن[۳۰] ـ استاد ریاضیات دانشگاه ایلینوی آمریکا ـ باصرف پانزده سال کار روی این مسأله، سرانجام در تابستان ۱۹۷۶ موفق شد ثابت کند که در تئوری گرافها، هر نوع گرافی را می‌توان به یکی از ۱۸۵ هزار حالت خاص تبدیل کرد. و درنتیجه اگر او می‌توانست مسأله را برای این حالت خاص حل کند، اثباتش کامل می‌شد. او برای مطالعهٔ این حالتها از کامپیوتر یاری جست، و حدود سه شبانه روز وقت کامپیوتر مرکز آی ـ بی ـ ام دانشگاه ایلینوی را گرفت و بالاخره عملا نشان داد که برای هریک از این حالتهای خاص، چهار رنگ کافی است.

به این ترتیب، مسألهٔ چهار رنگ، که یک مسألهٔ توپولوژیک است، نه تنها در مورد صفحه بلکه برای همهٔ سطوحی که با صفحه **همانديسه**[۳۱]اند نیز حل شده است. حداقل تعداد رنگی را، که برای رنگ کردن یک نقشه لازم است، اصطلاحا **عدد کروماتیک**[۳۲] آن نقشه می‌نامند.

مجله نه تنها به ماتم مرگ ریاضیدانهای گذشته می‌نشیند که در سوگ ریاضیدانهای معاصر نیز مویه سر می‌کند و موی از سر می‌کند[۳۳]، و در فوت دکتر هشترودی[۳۴] چنین می‌نویسد:

دکتر محسن هشترودی در سیزدهم شهریور ۱۳۵۵ در تهران بدرود حیات گفت. همه او را می‌شناسند و از زندگی، آثار و انسانیت او آگاهند. به همین مناسبت بهتر دیدیم که به‌جای تکرار گفته‌ها، نوشته‌ای از استاد را در اینجا چاپ کنیم تا راهی برای تجدید عهد دانش پژوهان با استاد خودباشد.

و آنگاه به چاپ مقاله‌ای چاپ نشده از استاد به نام اندیشه‌هایی دربارهٔ دانش و صنعت و هنر آینده و کاربرد ریاضیات در آنها[۳۵] می‌پردازد و ضمن آن «وسعت ذهن و اندیشهٔ این مرد بزرگ[۳۶]» را نشان می‌دهد[۳۷]

مجله جای به جای به طرح معمایی یا نکته‌یی می‌پردازد اما حتی در این کار نیز ارتباطش را باعمل از دست نمی‌دهد. در این مورد به ذکر چند مطلب می‌پردازیم:

یک معمای کهن[۳۸]

آن چیست که؛ سه سر، چهار شاخ، شش چشم، شش گوش، سه دهان، دودست و ده پا دارد و خرمی و آبادانی جهان از اوست؟

این معما دریک کتاب آموزشی پهلوی آمده است به نام ماتیکان یوشت فریان و دست کم مربوط به پانزده قرن پیش است و پاسخ معما یک جفت گاونر به خیش بسته است که مردی با آن زمین را شخم می‌زند.

* * *

- زندگی تنها به این درد می‌خورد که انسان به دو کار مشغول شود: اول ریاضیات بخواند، دوم ریاضیات را به دیگران بیاموزد.[۳۹]

پواسون

تعمیم ریاضی[۴۰]

ــ ریاضیدانان داستانی ساخته‌اند دربارهٔ منطق علمی.

ریاضیدان می‌گوید: یک فیزیکدان یقین می‌کند ٦۰ برتمامی عددها بخش‌پذیر است. متوجه می‌شود فرضیه‌اش برای عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، و ٦ درست است. چند عدد دیگر ۱۰ ، ۱۵ ، ۲۰ ، ۳۰ را که «تصادفا» انتخاب کرده‌است، تجربه می‌کند. چون ٦۰ براین اعدادهم بخش‌پذیر است، نتیجه می‌گیرد که داده‌های تجربی کافی است تافرضیه‌اش ثابت شود.

فیزیکدان می‌گوید: پس دربارهٔ مهندسان چی می‌گویید؟ یک مهندس فکر می‌کند تمام عددهای فرد عدد اول هم هستند. بعد نوبت ۹ می‌رسد که متأسفانه ۹ عدد اول نیست ولی ۱۱ و ۱۳ که بعد می‌آیند باز عددهای اولند. تصمیم می‌گیرد دوباره به سراغ ۹ برگردد. کلنجار می‌رودو عاقبت به این نتیجه می‌رسد که ۹ یک اشتباه آزمایشی است.

مهندس می‌گوید: پس پزشکان چی؟ یک پزشک برای بیماری که مسمومیت خونی دارد و هیچ امیدی به نجاتش نیست شوربا تجویز می‌کند. تصادفا بیمار شوربا می‌خورد و معالجه می‌شود. پزشک می‌نشیند یک کتاب علمی می‌نویسد و در آن اعلام می‌کند شوربا مسمومیت خونی را رفع می‌کند. بعد یک بیمار دیگر باز مسمومیت خونی دارد پیش می‌آید و پزشک ما باز شوربا تجویز می‌کند. بیمار شوربا می‌خورد و می‌میرد. آن وقت پزشک کتابش راتصحیح می‌کند و این‌طور می‌نویسد که شوربا فقط در ۵۰ درصد موارد مسمومیت خونی را برطرف می‌کند.

پزشک می‌گوید: پس خود ریاضیدان چطور وقتی از او بپرسید: چطور می‌شود یک شیر را در بیابان به دام انداخت؟ می‌گوید: «به‌دام انداخت یعنی چه؟ بنابر تعریف اصولا شیر باید پشت میله‌های قفس باشد. پس کافی است شکارچی این طرف میله‌ها باشد تا شیر در قفس بماند.»

از کتاب «همه‌جا ریاضی ....»

* * *

ــ تنها داشتن فکر خوب کافی نیست، مهم این است که آن را خوب به کار ببریم.[۴۱]

«دکارت»

ازخصوصیات دیگر مجله چربیدن مقالات توصیفی آن برمسائل آن است. مجله حل‌المسائل نیست، گرچه به حد معقول به مسأله و حل آن می‌پردازد و در این راه از آوردن هر نوع مسأله حتی مسألهٔ مسابقه‌ای نیز دریغ نمی‌کند.

همان‌گونه که قبلا هم اشاره شد مطالب مجله متنوع است و در آن

از هر چمن گلی و از هر خروار مشتی به چشم می‌خورد. نویسندگان و مترجمان مجله هم متنوع‌اند و در میان آنها نیز همه نوع آدمی به چشم می‌آیند چه مجله با علم و عقلشان یار است و به ترک و تازیشان کاری ندارد [۴۲] و تنها، به ترکتازیشان در صحنهٔ علم و ادب می‌نگرد.

سخن گفتن از جمیع مطالب مجله ولو به اختصار در حوصلهٔ کوچک مقالهٔ ما نمی‌گنجد، از طرف دیگر دلمان نمی‌آید که از این آشنایان، بیگانه‌وار بگذریم [۴۳] پس راه میانه را برمی‌گزینیم [۴۴] و در این راه برای تمتع خاطر خوانندگان از هر خرمنی، خوشه‌ای می‌آوریم. [۴۵]

سه خانه داریم و سه مرکز آب و گاز و برق. باید آب و گاز و برق این سه خانه را از این سه مرکز نیرو تأمین کنیم، ولی دستور اکید داریم که لوله‌های آب و گاز و برق را از رو یا زیر یکدیگر عبور ندهیم.

تجربه نشان می‌دهد که این کار غیرممکن است و برای اینکه متوجه عدم امکان آن شویم، وقت زیادی از ما گرفته خواهد شد و شاید دست آخر، هنوز باور نکنیم که چنین کاری عملی نیست. ولی چون این یک مسألهٔ توپولوژی است، باتوجه به روشهای توپولوژی پی می‌بریم که چنین شکلی در اثر تبدیلات توپولوژی اصولا عوض نشدنی نیست. [۴۶]

«توپولوژی هندسهٔ شیرین و اسرارآمیز [۴۷]»

هدف عمدهٔ تعلیم ریاضی توسعهٔ برخی استعدادهای ذهن است، و در میان این استعدادها شهود کم ارزشترین نیست. به‌وسیلهٔ شهود است که جهان ریاضی باجهان واقعی در تماس است، و اگر عالم ریاضیات محض بتواند بی‌شهود به نتیجه‌ای برسد همیشه لازم خواهدبود که برای پرکردن مغاکی که نماد را از واقعیت جدا می‌کند به آن توسل جوید. مرد عمل همیشه به شهود نیاز دارد، و درمقابل هر هندسه‌دان محض باید صد مرد عمل وجودداشته‌باشد.

بامنطق می‌توان ثابت کرد و با شهود می‌توان آفرید. دانستن اینکه چگونه انتقاد کنیم خوب است، اما دانستن اینکه چگونه باید خلق کرد بهتر است. می‌توانید بفهمید که ترکیبی درست است یا نیست، اما چه ناپسندیده وضعی است اگر هنر انتخاب کردن بین همهٔ ترکیبهای امکان‌پذیر را نداشته‌باشید. منطق به ما می‌گوید که در فلان یا فلان راه می‌توان مطمئن بود که به مانعی بر نمی‌خوریم، اما نمی‌گوید کدام راه به سرمنزل مقصود منتهی می‌شود. برای دانستن این مطلب لازم است بتوان از دور دید، و استعدادی که دیدن را می‌آموزد شهود است.

«هندسه، راهی به ریاضیات [۴۸]»

راستی چرا به هندسه کمتر توجه می‌کنند؟ احمد سر این موضوع حسابی مرا سؤال پیچ کرد. به او گفتم که درست است هندسه درس زیبا و جالبی است، ولی امروزه نه‌تنها فرصت پرداختن به آن کم است، بلکه چند ده سال پیش بود که ریاضیدان معروفی به نام تارسکی [۴۹] دستورالعملی جهت حل مسائل هندسه ارائه داد. این است که دیگر مطالعهٔ آن چندان جالب نیست، مگر برای تفنن.

«یادی از گذشته [۵۰]»

شکل مغنی یا رابطهٔ سینوسها در مثلث کروی

در قرن چهارم هجری چند تن از ریاضیدانان اسلامی که به تحقیقات نجومی مشغول بودند در صدد برآمدند رابطه‌ای در مثلث‌کروی [۵۱] به دست آورند که آنها را از به‌کار بردن شکل قطاع یا قضیهٔ منلائوس که به‌کار بردنش در مسائل نجومی دشوار بود، بی‌نیاز سازد، آنها قضیه‌ای کشف کردند که در آن لزوم به قاطع یا هیچ مقداری غیر از مقادیر اضلاع و زوایای خود مثلث اصلی نبود و این قضیه را شکل مغنی یا قانون الهیئة نام نهادند که امروزه به نام قضیهٔ سینوسها در مثلث‌کروی موسوم است و آن چنین است که در هر مثلث کروی ABC به‌اضلاع a ، b ، c رابطهٔ زیر بین جیب زوایای آن برقرار است [۵۲]:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

«ابتکارات علمی ابوالوفای بوزجانی در مثلثات [۵۳]»

یادداشت‌ها

۱. نام فعلی این مجله آشنائی با ریاضیات است.

۲. مرا ز دست هنرهای خویشتن فریاد
که هریکی به دگرگونه داردم ناشاد
بزرگتر زهنر در عراق عیبی نیست
زمن مپرس که‌این عیب بر تو چون افتاد
«ظهیرالدین فاریابی»

۳. حسنت‌به‌اتفاق ملاحت، جهان‌گرفت
آری به اتفاق، جهان می‌توان گرفت
«حافظ»

۴. یعنی فروردین ۱۳۷۱ ش.

۵. آشتی با ریاضیات شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۴؛ مقالهٔ : مقدمات جبربازی بانخ، از دکتر علیرضاامیرمعز

۶. شاید منظورنویسنده حساب استدلالی باشد.

۷. همان مرجع، شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۱ ، مقالهٔ : از یک نامه.

۸. همان مرجع، شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۲۴، از دکتر علیرضا امیرمعز

۹. همان مرجع، شمارهٔ ۱ ؛ صفحه ۵۵ ، از آرت بوخوالدطنزنویس آمریکایی ترجمهٔ؛ پرویز شهریاری

۱۰. همان مرجع، شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۱ ، از غلامحسین صدری افشار

۱۱. نویسندهٔ معروف کتاب تاریخ علم. جلد اول این کتاب توسط مترجم ارجمند آقای احمدآرام به زبان فارسی ترجمه شده‌است.

۱۲. عبارات مزبورطبق گفتهٔ نویسندهٔ مقاله ازمقالهٔ
The study of the history of mathematics.
جورج سارتن است.

۱۳. همان مرجع، شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۸۲ ، نام نویسنده مشخص نشده‌است.

۱۴. ریاضیدان آلمانی و یکی از بزرگترین ریاضیدانهای نیمهٔ اول قرن بیستم، واضع نظریهٔ تغییرناپذیرها یا ناورداها «invariants» و مطرح کنندهٔ ۲۳ مسألهٔ مهم و قابل بررسی قرن‌بیستم که اکثر آنها حل شده‌است. از مقالهٔ اخیرالذکر.

۱۵. شهری آلمانی که دانشگاهی معروف به‌همین نام در آن است «Göttingen»

۱۶. همان مرجع، شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۸۶ از؛ د. لوو ترجمهٔ ؛ پرویز شهریاری.

۱۷. زن ریاضیدان و فیلسوف قرن چهارم و پنجم میلادی اسکندریه از مقالهٔ اخیرالذکر.

۱۸. از حمیدی شیرازی در بت شکن بابل می‌خوانیم که:
ذوق خون مخلوق را بفشردنای
وان تبرزن پیش و پس بنهادپای
استخوانی خُرد شد رگها درید
از تبر خون ریخت از رگها جهید

۱۹. تعبیر از مولوی و از دفتر اول مثنوی اوست:
شرح این هجران و این خون جگر
این زمان بگذار تاوقت دگر

۲۰. همان مرجع، شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۴ ،نوشتهٔ پرویز شهریاری.

۲۱. به‌عبارت دیگر ریاضیاتی است نظری و عملی هردو.

۲۲. ابوزیدعبدالرحمن بن‌محمد از بزرگان حکما و مورخان (و. تونس ۷۳۲ ـ ف. ۸۰۶ یا ۸۰۸ هـ. ق.) به‌دعوت حاکم ناس به آن دیار رفت و به سعایت حاسدان به زندان افتاد. پس از رهایی به شاعری گرایید، به قسطنطنیه و غرناطه و قشتاله سفر کرد و عاقبت در قلعهٔ بنی سلامه عزلت گزید و به نوشتن تاریخ معروف خود پرداخت.

۲۳. این کتاب توسط مرحوم حسین خدیوجم به زبان فارسی ترجمه شده است.

۲۴. همان مرجع، شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۴ از محمدحسین احمدی تحت عنوان: سرانجام، یکی از مسأله‌های دشوار ریاضی حل شد.

۲۵. در این قضیه باید مقصود از «دوکشور هم مرز» مشخص شود. برای صورت دقیقتر این قضیه به کتاب هندسه‌های جدید ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور مراجعه کنید، البته در این مورد می‌توان به کل مقالهٔ مورد بحث نیز رجوع کرد.

۲۶. Francis Guthrie

۲۷. منطقی معروف انگلیسی که قضایایش در منطق ریاضی معروف است.

۲۸. در مورد این مسأله و مسائل مشابه آن به کتاب مسائل پیکارجوی ریاضی تألیف یاگلوم ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور مراجعه کنید.

۲۹. Torus

۳۰. Haycken

۳۱. Homeomorphic ، همانساریخت.

۳۲. Chromatic Number عدد فامی

۳۳. تعبیر از نظامی در لیلی و مجنون است و در مورد مادر لیلی در مرگ دختر نوجوان خود:

مادر که عروس را چنان دید
گویی که قیامت آن زمان دید

درحسرت روی و موی فرزند
برمی‌زد و روی و موی می‌کند

هر مویه که داشت خواندش از بر
هر موی که داشت کندش از سر

۳۴. استادنامدار ریاضیات دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران، هنگام پرداختن به مجلهٔ یکان سخن بیشتری از او خواهیم گفت.

۳۵. برای مقاله به شمارهٔ سوم مجله صفحهٔ ۴۵ رجوع کنید.

۳٦. عبارت داخل گیومه از مجله است.

۳۷. برخلاف بعضی‌از معاصران که براستاد می‌تازند. رجوع کنید به مقالهٔ دکترمنصوری در شمارهٔ ۴، سال ۸، مجلهٔ فیزیک، نشریهٔ گروه فیزیک.مرکز نشر دانشگاهی.

۳۸. همان مرجع، شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۰۱.

۳۹. همان مرجع، شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۴۱.

۴۰. همان مرجع، شمارهٔ ۴ صفحهٔ ٦۷.

۴۱. همان مرجع، شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۱۰۷.

۴۲. تعبیر از مولانا و از دفتر دوم مثنوی شریف اوست:

روح با علم است و با عقل است یار
روح را با ترکی و تازی چه کار

۴۳. تعبیر از بیت زیراست:

برما به خشم می‌نگرد دلربای ما
بیگانه‌وار می‌گذرد آشنای ما

۴۴. البته اگر دچار زلزلهٔ تزلزل نشویم.

۴۵. تعبیر از سعدی و در بوستان اوست:

تمتع زهر گوشه‌ای یافتم
زهر خرمنی خوشه‌ای یافتم.

۴٦. برای توضیح این مطلب به کتاب هندسه‌های جدید فوق‌الذکر رجوع کنید.

۴۷. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۸. مقاله، ترجمهٔ هرمز شهریاری است.

۴۸. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۲۵، مقاله، ترجمهٔ احمدبیرشک و علی‌اکبر عالم‌زاده است.

۴۹. «Tarski» منطقی معاصر.

۵۰. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۵۹، هوشنگ شکرانیان.

۵۱. برای اطلاع از مثلث کروی به کتاب مثلثات مستقیم‌الخط و کروی پرویز شهریاری رجوع کنید.

۵۲. برای برهان قضیه، به‌اصل مقاله مراجعه کنید.

۵۳. همان‌مرجع، سال دوم شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۷۹، جعفرآقایانی چاوشی.

ادب و ریاضی

در جوانی امیدوار بودم که به سرانجام رساندن این تحقیقات در نجوم برایم مقدور باشد، اینک، درعهد کهولت، آن امید را از دست نهاده‌ام، چه موانعی در راهم پدیدار شده‌است. ولی آنچه دربارهٔ آن می‌گویم شاید توجه محققان آینده را برانگیزد. علم نجوم زمان ما چیزی عرضه نمی‌کند که بتوان از آن معنی و واقعیّت محصّلی بیرون کشید. مُدلی که در زمانهٔ ما پیش نهاده‌اند، فقط بامحاسبات موافق است نه با موجودیت واقعی.

ابن رُشد، قرن ششم هجری،
«زندگینامهٔ علمی دانشمندان اسلامی»

در حاشیه مجموعه‌ها

● حمیدرضا امیری

مورد استفاده دانش‌آموزان سال اول

اصولاً در هرنظریه از ریاضیات پس از بیان تعریفها و اصول حاکم بر آن، قضیه‌هایی طرح و اثبات می‌شوند و پس از اثبات به‌شکل ابزارهایی قوی درمی‌آیند که برای پیشبرد، رشد و تکامل آن نظریه مورداستفاده واقع شده و به خصوص در حل مسأله‌های مربوط به آن ازتعریفها و قضیه‌های اثبات شده بهره گیری می گردد.

نظریهٔ مجموعه‌ها که زمانی یکی از بحرانهای ریاضیات به شمار می‌رفت ـ و نیز امرزوه از اصلی‌ترین و زیربنایی‌ترین شاخه‌ها ونظریه‌های ریاضیات است ـ از این قاعده مستثنی نمی‌باشد. در کتاب ریاضیات جدید سال اول پس از تعریف مجموعه[1] و تعریفهای دیگر به دو مفهوم **عضویت** و **جزئیت** (زیر مجموعه بودن) برخورد می‌کنیم که به ترتیب برای نشان دادن **عضو** یك مجموعه یا تعلق به یك مجموعه داشتن از نماد ($\in$) و برای بیان **زیر مجموعه** یك مجموعه‌ازنماد ($\subset$) استفاده شده است. ابتدا درحاشیهٔ همین دو مفهوم اندکی **تأمل** می‌کنیم وتا حدودی به بررسی آنها می‌پردازیم:

قبل از آن این مسأله را روشن کنیم، که وقتی می گوییم «مجموعه، گردایه‌ای‌است از **اشیاء دو به‌دومتمایزومشخص**» این اشیاء چه هستند واین بسیار مهم‌است، توجه کنید:

اگر بحث ما راجع به‌عددها باشد هرعدد یك شی ریاضی است، اگر بحث ما دربارهٔ نجوم‌باشد هرستاره‌یاسیاره یك شی است، اگر بحث مادرحاشیهٔ مجموعه‌ها باشد هرمجموعه‌می‌تواند یك شئ باشد و....

بنابراین اعضای یك مجموعه می‌توانند خودشان‌مجموعه باشند و به چنین مجموعه‌ای؛ **مجموعهٔ مجموعه‌ها** می گویند.

حال اگر A یك مجموعهٔ دلخواه باشد و a عضوی از مجموعه A ، می‌نویسیم $a\in A$ و این به شرطی است که شی a واقعاً به صورت‌یك عضودر A واقع باشد. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱ـ فرض کنیم

$$A=\{\underline{a},\underline{\{a,b\}}\ ,\ \underline{\{b\}}\ ,\ \underline{\{a,\{a\}\}}\}$$

واضح‌است‌که مجموعهٔ A دارای ۴ عضو است‌که زیرآنها خط کشیده شده است . گـزارهٔ $a\in A$ درست ، $\{a\}\in A$ نادرست (زیرا شی $\{a\}$ به صورت یك عضو از اعضای A در مجموعه A نیست)، گزارهٔ $\{b\}\in A$ درست ، گزاره $b\in A$ نادرست و گزارهٔ $\{a,\{a\}\}\in A$ درست می‌باشد.

مثال۲ـ اگر $A=\{\underline{a}\ ,\ \underline{\{a\}}\ ,\ \underline{\{\{a\}\}}\}$ داریم:

$$a\in A\ \ ,\ \ \{a\}\in A\ \ ,\ \ \{\{a\}\}\in A$$

اما درك‌مفهوم زیرمجموعه نیاز به دقت بیشتری دارد ما تعریف می‌کنیم «مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔB است‌اگروتنها اگر

---

[1] ـ «مجموعه ، گردایه‌ای‌است از **اشیاء دو به دو متمایز و مشخص**» (درحقیقت این‌گزاره تعبیری است برای مشخص‌کردن مجموعه، نه‌تعریف مجموعه)

هرعضو مجموعهٔ A عضوی‌از مجموعهٔ B نیز باشد» و یا بازبان ریاضی‌تعریف زیرمجموعه‌را می‌توان به‌شکل‌زیر بیان‌کرد:

$$[\,{}^{1}A\subseteq B \iff \forall x\in A \Longrightarrow x\in B\,]$$

(وقتی‌نماد $\subseteq$ را به‌جای $\subset$ به‌کار می‌بریم مجموعهٔ A می‌تواند مساوی با مجموعهٔ B نیز باشد).

مثال۳- اگرفرض‌کنیم:

$$A=\{a\,,\{b,\{a\}\}\,,\{a,b\}\,,\{b\}\}$$

در این صورت:

الف) $\{a\}\subset A$ (زیرا $a\in\{a\}$ و $a\in A$)

ب) $\{a,\{b\}\}\subset A$ (زیرا $a\in A$ ونیز $\{b\}\in A$)

ج) $\{a,b\}\not\subset A$ (زیرا $a\in A$ ولی $b\notin A$)

د) $\{\{a,b\}\,,\{b\}\}\subset A$ (زیرا $\{b\}\in A$ و نیز $\{a,b\}\in A$)

نکته: هرگاه مجموعهٔ A دلخواه و دارای n عضو باشد $(n=0,1,2,\dots,k)$ در این صورت تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ A عبارت است از 2^n.

مثال ۴ - اگرمجموعهٔ A دارای ۶۴ زیرمجموعه باشد، معین کنیدکه A چند عضو دارد؟

$$2^n=64 \Longrightarrow 2^n=2^6 \Longrightarrow n=6$$

پس مجموعهٔ A دارای ۶ عضو است.

تذکر: با توجه‌به تعریف زیر مجموعه؛ واضح است که هرمجموعه، زیرمجموعهٔ‌خودش می‌باشد ونیز درکتاب‌ریاضیات جدیداول ثابت شده‌که مجموعهٔ تهی[2] زیر مجموعهٔ هرمجموعه است بنابراین اگرخودمجموعه ومجموعهٔ‌تهی‌را زیرمجموعه‌های بدیهی بنامیم؛ هرمجموعه دارای (2^n-2) زیر مجموعهٔ غیر بدیهی است.

مثال ۵ - هرگاه تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی ۴۸ واحدکمتراز تعداد زیر مجموعه‌های یك مجموعهٔ $(k+3)$ عضوی باشد، عدد طبیعی k را معین‌کنید.

$2^{(k+1)}=$ تعداد زیرمجموعه‌های‌مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی

$2^{(k+2)}=$ تعداد زیرمجموعه‌های‌مجموعهٔ $(k+3)$ عضوی

$$\overset{\text{طبق فرض}}{\Longrightarrow} 2^{(k+1)}+48=2^{(k+2)}$$

$$\Longrightarrow 2^k\times 2+48=2^k\times 2^3$$

حال اگرفرض کنیم $x=2^k$ خواهیم‌داشت:

$$2x+48=8x \Longrightarrow 6x=48 \Longrightarrow x=8$$

$$2^k=x \Longrightarrow 2^k=8 \Longrightarrow 2^k=2^3 \Longrightarrow \boxed{k=3}$$

تعریف : مجموعهٔ توانی مجموعهٔ A رابا $P(A)$ نمایش می‌دهیم وآن مجموعه عبارت‌است از «مجموعهٔ شامل همهٔ زیر مجموعه‌های A».

مثال۶- هرگاه $A=\{2\,,3\,,4\}$ ، $P(A)$ را معین کنید.

$$P(A)=\{\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2,3,4\},\varnothing\}$$

مثال ۷ - هرگاه A یك‌مجموعه ۲عضوی‌باشد معین کنید:

$$P(P(P(A)))$$

چند عضو دارد.

تعداد اعضای $P(A)$ = تعدادزیرمجموعه‌های A $=2^2=4$

تعداد اعضای $P(P(A))$ = تعداد زیر مجموعه‌های $P(A)$ $=2^4=16$

---

۱ ـ هرگاه علاوه براینکه $A\subseteq B$ ، $B\subseteq A$ نیز باشد در این صورت تعریف می‌کنیم $A=B$.

۲ ـ هرمجموعه‌که فاقد عضوباشد تهی می‌نامیم وبه‌صورتهای $\varnothing$ یا $\{\ \}$ آن‌را نمایش می‌دهیم.

تعدادزیرمجموعه‌های$(P(P(A))$ = تعداداعضای$(P(P(P(A)))$

$=2^{16}$

حال به بحث اصلی خود یعنی استفاده از قضیه‌های اثبات شده و قانونهای به اثبات رسیده در حل مسأله‌ها و یا اثبات قانونهای دیگر باز می گردیم.

در نظریه مجموعه‌ها و بین مجموعه‌ها اعمالی چون اجتماع، اشتراك و تفاضل تعریف می کنیم که هریك از این اعمال به نوبهٔ خود دارای قضیه‌ها، خواص و ویژگیهایی می باشند که در این مقاله ابتدا به تعریف و معرفی بسیار مختصری از آن پرداخته و سپس به استفاده‌های بعضی از آنها در حل مسأله‌ها می پردازیم.

تعریف عمل اجتماع : هر گاه A و B دومجموعه دلخواه باشند اجتماع A و B را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$(A \cup B)=\{x|x\in A \vee x\in B\}$

$x\in(A\cup B) \iff x\in A \vee x\in B$

(تعریف کاربردی اجتماع)

از تعریف اجتماع واضح است که اگر عضوی در یکی از دو مجموعه باشد در اجتماع آنها نیز می‌باشد و در حالت کلی «هرمجموعه، زیرمجموعهٔ اجتماع خودش باهرمجموعهٔ دیگر است. مثلا $A\subseteq(A\cup B)$».

قضیه اصلی اجتماع . هر گاه A وB دومجموعه دلخواه باشند و $A\subseteq B$ دراین‌صورت $A\cup B=B$ وبرعکس.

نتیجه‌های حاصل از قضیهٔ اصلی اجتماع: (M مجموعهٔ مرجع و ∅ مجموعهٔ تهی فرض‌شده است.)

الف) می‌دانیم : $A\subseteq A \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} A\cup A=A$

ب) می‌دانیم : $\varnothing\subseteq A \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} A\cup\varnothing=A$

ج) می‌دانیم : $A\subseteq M \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} A\cup M=M$

و نیز در کتاب سال اول اثبات شده (به روش عضو گیری دلخواه) که $A\cup A'=M$.

تعریف عمل اشتراك : اشتراك دومجموعهٔ A و B را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$(A\cap B)=\{x|x\in A \wedge x\in B\}$

با استفاده از تعریف اشتراك واضح است که اگر عضوی در اشتراك دو مجموعه واقع شود در هریك از آن دو مجموعه نیز می باشد و در حالت کلی «اشتراك دومجموعه زیرمجموعهٔ هریك از آن دو مجموعه است، مثلا: $A\cap B\subseteq A$ یا $A\cap B\subseteq B$»

قضیهٔ اصلی اشتراك : هر گاه A وB دو مجموعهٔ دلخواه باشند و $A\subseteq B$ دراین صورت $A\cap B=A$ وبرعکس.

نتیجه‌های حاصل از قضیهٔ اصلی اشتراك:

الف) $A\subseteq A \overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} A\cap A=A$

ب) $\varnothing\subseteq A \Longrightarrow A\cap\varnothing=\varnothing$

ج) $A\subseteq M \Longrightarrow A\cap M=A$

د) چون A و 'A' ('A متمم مجموعهٔ A است) جدا ازهم می باشند پس $A\cap A'=\varnothing$.

$(1)-A'=\{x\in M|x\notin A\} \Longrightarrow$

$\underline{(A')'}=\{x\in M|x\notin A'\}=\{x\in M|x\in A\}=\underline{A}$

خواص اعمال اجتماع و اشتراك

(در کلیهٔ خواص زیر مجموعه‌های A وB وC، مجموعه‌هایی دلخواه می باشند.)

$$1)\ \begin{cases}A\cup B=B\cup A\\ A\cap B=B\cap A\end{cases}$$ خاصیت جابجایی

$$۲)\begin{cases}A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C\\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C\end{cases}$$

خاصیت شرکت‌پذیری

دراستفاده ازخاصیت شرکت‌پذیری به نکات زیرتوجه می‌کنیم:

الف) در استفاده از ایــن خاصیت ، ترتیب قرار گرفتن مجموعه‌ها حفظ‌شده وجابجایی صورت نمی‌گیرد.

ب) زمانی از شرکت‌پذیری استفاده می‌شودکـه اعمال بین ۳ مجموعه‌همگی اجتماع یا اشتراك باشد.

ج) شرکت‌پذیری برای ۳ مجموعه امکان‌پذیراست واگر تعدادمجموعه‌ها بیش‌از۳ مجموعه باشد، مثلا اگر۴ مجموعه‌باشند باید ۲ مجموعه‌را یك مجموعه فرض‌کرده وبا دومجموعهٔ دیگر شرکت‌پذیری‌رابه‌کاربیریم به مثال زیرتوجه‌کنید:

$$\overbrace{(A\cup B')}^{D}\cup(B\cup C)=[\overbrace{(A\cup B')}^{D}\cup B]\cup C$$
$$=[A\cup(B'\cup B)]\cup C$$
$$=(A\cup M)\cup C=M\cup C=M$$

$$۳)\begin{cases}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{cases}$$

خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی

دراستفاده ازخاصیت پخشی‌به نکات زیرتوجه می‌کنیم:

الف) درخاصیت‌پخشی‌همواره‌از دوعمل‌استفاده‌می‌شود، یا یك مجموعه بـا عمل اجتماع در اشتراك دو مجموعه توزیع می‌شود وَیا یك مجموعه با عمل‌اشتراك در اجتماع دو مجموعه توزیع می‌شود وما حق‌توزیع اشتراك دراشتراك یا اجتماع در اجتماع‌را نداریم. به مثال زیرتوجه‌کنید:

$$(A\cap B)\cap(A\cap B')\overset{\text{جابه‌جایی}}{=}(A\cap B)\cap(B'\cap A)$$
$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}[(A\cap B)\cap B']\cap A$$
$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}[A\cap(B\cap B')]\cap A$$
$$=(A\cap\varnothing)\cap A=\varnothing\cap A=\varnothing$$

ب) اگرتعداد مجموعه‌ها بیش‌از ۳ مجموعه باشد، مثلا: ۴ مجموعه داشته‌باشیم ابتدا دومجموعه‌را یك مجموعه در نظر گرفته ودر دومجموعهٔ دیگر توزیع می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید :

$$\overbrace{(A\cap B)}^{D}\cap(A'\cup B)=$$
$$[\overbrace{(A\cap B)}^{D}\cap A']\cup[\overbrace{(A\cap B)}^{D}\cap B]$$
$$=[(B\cap A)\cap A']\cup[A\cap(B\cap B)]$$
$$=[B\cap(A\cap A')]\cup(A\cap B)$$
$$=(B\cap\varnothing)\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=(A\cap B)$$

حال مثال‌قبل را به روشی دیگر بررسی می‌کنیم:

$$(A\cap B)\cap(A'\cup B)$$
$$\overset{\text{جابجایی}}{=}\overbrace{(A'\cup B)}^{D}\cap(A\cap B)$$
$$\overset{\text{شرکت پذیری}}{=}[\overbrace{(A'\cup B)}^{D}\cap A]\cap B$$
$$\overset{\text{پخشی}}{=}[(A'\cap A)\cup(B\cap A)]\cap B$$
$$\overset{\text{جابجایی}}{=}[\varnothing\cup(A\cap B)]\cap B=(A\cap B)\cap B$$
$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}A\cap(B\cap B)=A\cap B$$

$$۴)\begin{cases}(A\cup B)'=A'\cap B'\\ (A\cap B)'=A'\cup B'\end{cases}$$

خاصیت متمم‌گیری (قوانین دمورگان)

تذکر ۱) با توجه به قوانین دمورگان همواره می‌توان اجتماع را به اشتراک تبدیل کرد و برعکس. به‌مثالهای زیر توجه کنید:

$$۱)\ (A'\cap B')=(A\cup B)'$$

$$۲)\ [(A\cup B')\cup(A'\cap B)]'$$

$$=[\underbrace{(A\cup B')}_{D}\cup\underbrace{(A\cup B')'}_{D'}]'=M'=\varnothing$$

تذکر۲) قوانین دمورگان قابل تعمیم است.

$$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)'=(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)'$$

$$=(A_1'\cap A_2'\cap\cdots\cap A_n')=\bigcap_{i=1}^{n}A_i'$$

$$(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)'=(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)'$$

$$=(A_1'\cup A_2'\cup\cdots\cup A_n')=\bigcup_{i=1}^{n}A_i'$$

۵) قوانین جذب $\begin{cases}A\cup(A\cap B)=A\\ A\cap(A\cup B)=A\end{cases}$

اثبات) روش اول:

$$(A\cap B)\subseteq A \leftarrow \text{می‌دانیم}$$

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ اصلی اجتماع}} A\cup(A\cap B)=A$$

$$A\subseteq(A\cup B) \leftarrow \text{می‌دانیم}$$

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ اصلی اشتراک}} A\cap(A\cup B)=A$$

روش دوم:

$$\underline{A\cup(A\cap B)}=\overbrace{(A\cap M)}^{A}\cup(A\cap B)$$

$$=A\cap(M\cup B)=A\cap M=\underline{A}$$

$$\underline{A\cap(A\cup B)}=\overbrace{(A\cup\varnothing)}^{A}\cap(A\cup B)$$

$$=A\cup(\varnothing\cap B)=A\cup\varnothing=\underline{A}$$

تعریف عمل تفاضل: هرگاه A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $(A-B)$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A-B)=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$

بنابراین:

$$x\in(A-B)\iff x\in A\wedge x\notin B$$

باتوجه‌به تعریف‌تفاضل به راحتی می‌توان ثابت‌کرد که،

$$(A-B)=(A\cap B')$$

زیرا: $[x\in(A-B)\iff x\in A\wedge x\notin B$

$$\iff x\in A\wedge x\in B'\iff x\in(A\cap B')]$$

$$\iff (A-B)=(A\cap B')$$

اکنون با توجه‌به تعریفهای اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل و بیان قضیه‌ها و خواص مربوط به آنها، می‌توانیم از این قضیه‌ها و خواص به عنوان ابزارهایی در حل مسأله‌ها استفاده‌کنیم، که البته روشهای به‌کار گرفته شده در زیر منحصر به فرد نمی‌باشند.

مسأله ۱) ثابت‌کنید هرگاه $A\subseteq B$ آنگاه:

$$(A-B)=\varnothing$$

ثابت می‌کنیم که دومجموعهٔ A و B' باتوجه به فرض، مجموعه‌هایی جدا ازهم هستند.

$$(x\in A\overset{A\subseteq B}{\Longrightarrow} x\in B\Longrightarrow x\notin B')$$

$$\Longrightarrow \overbrace{A\cap B'}^{(A-B)}=\varnothing\Longrightarrow(A-B)=\varnothing$$

مسأله ۲) ثابت کنید هرگاه $(A-B)=(B-A)$ آنگاه $A=B$

$$(A-B)=(B-A) \Rightarrow (A\cap B')=(B\cap A')$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A\cap B')\cup A}_{\text{جذب}}=(B\cap A')\cup A$$

$$\Rightarrow A=A\cup B$$

$$\xRightarrow{\text{عکس قضیهٔ اصلی}} B\subseteq A \quad (۱)$$

$$(A\cap B')=(B\cap A')$$

$$\Rightarrow B\cup(A\cap B')=\underbrace{B\cup(B\cap A')}_{\text{جذب}}$$

$$\Rightarrow (A\cup B)=B \xRightarrow{\text{عکس قضیهٔ اصلی}} A\subseteq B \quad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $\underline{A=B}$

مسألهٔ ۳) ثابت کنید هرگاه $(A-B)=A$ آنگاه: $(B-A)=B$

$$(B-A)=B-\overbrace{(A-B)}^{A}$$

$$=B-(A\cap B')=B\cap(A\cap B')'$$

$$=B\cap(A'\cup B)\overset{\text{جذب}}{=}B$$

مسألهٔ ۴) ثابت کنید هرگاه $(A-B)=\varnothing$ آنگاه $A\subseteq B$ (عکس مسألهٔ ۱)

$$(A-B)=\varnothing \Rightarrow (A\cap B')=\varnothing$$

$$\Rightarrow (A\cap B')\cup B=\varnothing\cup B$$

$$\Rightarrow (A\cup B)=B \Rightarrow A\subseteq B$$

مسألهٔ ۵) ثابت کنید هرگاه $(A\cap B)=(A\cup B)$ آنگاه $A=B$.

ثابت می‌کنیم $A\cap B=A$،

$$(A\cap B)=(A\cup B) \Rightarrow$$

$$(A\cap B)\cap A=\overbrace{(A\cup B)\cap A}^{\text{جذب}}$$

$$\Rightarrow (A\cap B)=A \xRightarrow{\text{قضیهٔ اصلی اشتراک}} A\subseteq B \quad (۱)$$

ازطرفی چون طبق‌فرض $(A\cap B)=(A\cup B)$ پس:

$$(A\cup B)=A \Rightarrow B\subseteq A \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که: $\underline{A=B}$.

مسألهٔ ۶) ثابت کنید هرگاه $A\cap B=M$ آنگاه: $A=M$ و $B=M$

$$(A\cap B)=M \Rightarrow \overbrace{(A\cap B)\cup A}^{\text{جذب}}=(M\cup A)$$

$$\Rightarrow A=M$$

$$(A\cap B)=M \Rightarrow \overbrace{(A\cap B)\cup B}^{\text{جذب}}$$

$$=(M\cup B) \Rightarrow B=M$$

تمرین: ثابت کنید هرگاه $(A\cup B)=\varnothing$ آنگاه: $A=\varnothing$ و $B=\varnothing$

(اثبات به عهده خواننده)

مسألهٔ ۷) ثابت کنید هرگاه:

$$\begin{cases} A\cup B=A\cup C \\ A\cap B=A\cap C \end{cases}$$

آنگاه $B=C$.

$$\underline{B}\overset{\text{جذب}}{=}B\cap(A\cup B)$$

$$\overset{\text{طبق‌فرض}}{=} B\cap(A\cup C)\overset{\text{پخشی‌وجابجایی}}{=}(A\cap B)\cup(B\cap C)$$

$$\overset{\text{طبق‌فرض}}{=} (A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$$

$$\overset{\text{جذب}}{\overbrace{\overset{\text{طبق فرض}}{=}(A\cup C)\cap C}}=C$$

مسألهٔ ۸) ثابت کنیداشتراک ازچپ روی تفاضل توزیع پذیر است یعنی:

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

$$\text{سمت راست}=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$$

$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$

$$\overset{\text{جابجایی}}{=}(A'\cup C')\cap(A\cap B)$$

$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}[(A'\cup C')\cap A]\cap B=(C'\cap A)\cap B$$

$$\underset{\text{وشرکت‌پذیری}}{\overset{\text{جابجایی}}{=}}A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C)=\text{سمت چپ}$$

تمرین : ثابت کنید تفاضل از راست بر اشتراک توزیع پذیر است یعنی:

$$(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$$

(اثبات به عهده خواننده)

مسألهٔ ۹) ثابت کنید تفاضل از راست بر اجتماع توزیع‌پذیر است یعنی:

$$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$$

$$(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$$

$$=(A\cap C')\cup(B\cap C')=(A-C)\cup(B-C)$$

مسألهٔ ۱۰) ثابت کنید که هرگاه $A\subseteq B\subseteq C$ آنگاه:

$$(A\cup B)=(B\cap C)$$

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq B\overset{\text{قضیهٔ اصلی اجتماع}}{\Longrightarrow}(A\cup B)=B\\ B\subseteq C\overset{\text{قضیهٔ اصلی اشتراک}}{\Longrightarrow}(B\cap C)=B\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$(A\cup B)=(B\cap C)$$

مسألهٔ ۱۱) هرگاه $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ ، ثابت کنید :

$$\begin{cases}A\cup C\subseteq B\cup D\\ A\cap C\subseteq B\cap D\end{cases}$$

و سپس با استفاده از این مسأله ثابت کنید:

الف) اگر $A\subseteq X$ و $A'\subseteq X$ آنگاه $X=M$.

ب) اگر $X\subseteq A$ و $X\subseteq A'$ آنگاه $X=\varnothing$.

حل : فرض کنیم $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ ، روابط بالارا از طریق عضو گیری دلخواه ثابت می کنیم:

$$[\text{فرض کنیم } x\in(A\cup C)\overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Longrightarrow}x\in A\vee x\in C$$

$$\overset{\text{طبق فرض}}{\Longrightarrow}x\in B\vee x\in D\overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Longrightarrow}x\in(B\cup D)]$$

$$\Longrightarrow(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$$

و به همین طریق ثابت می‌شود :

$$(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$$

حال به اثبات الف و ب می‌پردازیم.

حل الف) داریم:

$$\left.\begin{cases}A\subseteq X\\ A'\subseteq X\end{cases}\right\}\Longrightarrow(A\cup A')\subseteq(X\cup X)$$

$$\Longrightarrow M\subseteq X\quad(۱)$$

و با توجه به تعریف مجموعهٔ مرجع می‌دانیم که :

$$X\subseteq M\quad(۲)$$

و با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) و تعریف تساوی بین دو مجموعه، نتیجه می گیریم که: $X=M$.

حل ب) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} X\subseteq A \\ X\subseteq A' \end{array}\right\} \Longrightarrow (X\cap X)\subseteq(A\cap A')$$

$$\Longrightarrow X\subset\varnothing \quad (۱)$$

و با توجه به اینکه همواره تهی زیر مجموعهٔ هرمجموعه است داریم:

$$\varnothing\subseteq X \quad (۲)$$

بنا براین از رابطه‌های (۱) و (۲) و تعریف تساوی بین دو مجموعه، نتیجه می‌گیریم که $X=\varnothing$.

درخاتمه متذکرمی‌شوم که دراین مقاله سعی‌شد از روش عضوگیری دلخواه، برای اثبات تساوی بین مجموعه‌ها، کمتر استفاده شود وبیشتر قوانین و قضیه‌های بیان شده، به‌کار گرفته شدند. توفیق شما را از خداوند متعال خواستارم.

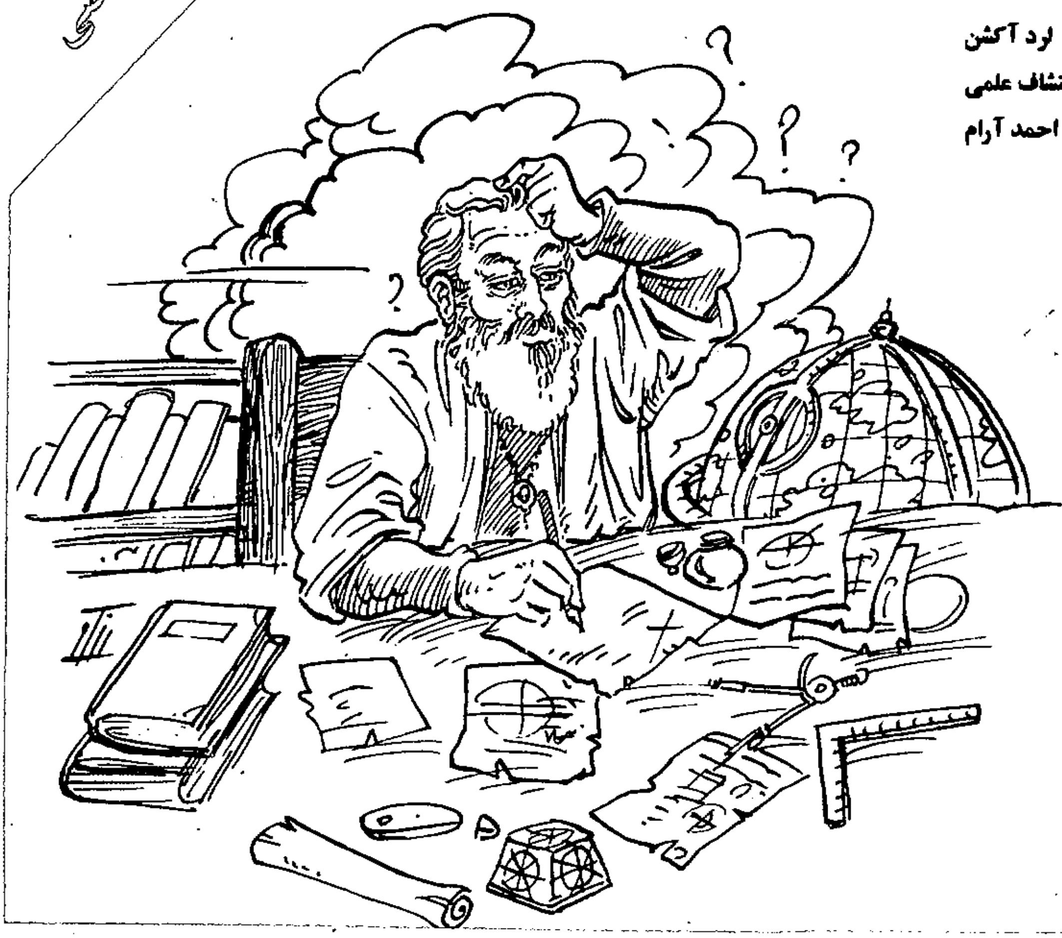
ادب ریاضی

هیچ چیز برای مردعلم ضروریتر از تاریخ آن و منطق اکتشاف نیست ... راه کشف کردن خطا، به کاربردن فرضیّه و تخیّل و روش آزمودن.

لرد آکشن

منطق اکتشاف علمی

کارل ریموند پوپر ترجمهٔ احمد آرام

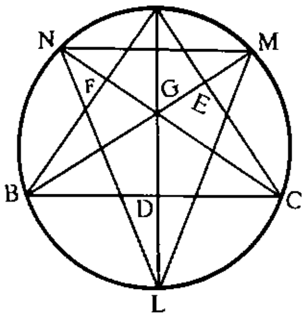


مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۳)

اشتاینر ـ لموس[1] و مثلث خودمیانه[2] پاری[3]

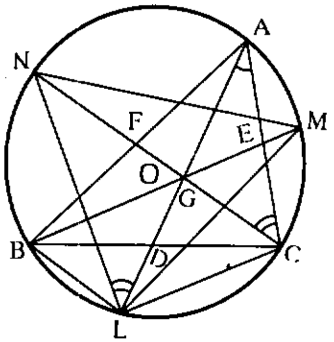
قضیهٔ مشهور اشتاینر ـ لموس براین است که اگر دونیمساز داخلی مثلثی مساوی باشند دراین صورت مثلث متساوی الساقین است. این قضیه این نکته را به زیبایی تشریح می‌کند که اثبات عکس یک قضیه می‌تواند بسیار مشکلتر از خود قضیه باشد. اثر قضیهٔ اشتاینر ـ لموس در بسیاری از مقالات قابل ملاحظه است.

با بررسی مثلث حاصل از برخوردهای ثانی میانه‌های مثلث با دایرهٔ محیطی آن، می‌توان مطلب جالب دیگری راجع به این موضوع به‌دست آورد. فرض می‌کنیم G نقطهٔ میانه‌ای[4] مثلث ABC باشد و میانه‌های مثلث اضلاع مقابل آن را در DEF و دایرهٔ محیطی آن را بار دیگر در LMN تلاقی کنند.



شکل ۱

هنگامی که ABC متساوی‌الساقین باشد LMN نیز بنا به تقارن، بارأس L متساوی‌الساقین است (شکل ۱). اما آیا عکس این مطلب درست است، یعنی، اگر LMN متساوی‌الساقین باشد ABC لزوماً متساوی‌الساقین است؟ مشاهدهٔ شکل ۱ آشکار می‌کند که عکس قضیهٔ مورد بحث راست است، اما ملاحظهٔ شکل ۲ نشان می‌دهد که عکس مزبور محققاً نادرست است. بنابراین شرایطی که مثلث نامتساوی‌الساقین ABC مثلث متساوی‌الساقین LMN ی را به‌وجود می‌آورد کدامند؟



شکل ۲

اگر اضلاع مثلث مورد بحث را abc و میانه‌های AD و BE و CF را به ترتیب d و e و f بنامیم، در این صورت

$$4d^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

$$4e^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$$

$$4f^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

و قوت G نسبت به دایرهٔ محیطی عبارت است از

$$AG.GL = BG.\ GM = CG.\ GN = g^2 \quad \text{(مثلاً)}$$

اما مثلثهای AGC و NGL متساوی‌الزوایا و مشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{NL}{AC} = \frac{GL}{GC} = \frac{AG.GL}{AG.GC}$$

باقراردادن $AG = \frac{2d}{3}$ ، $GC = \frac{2f}{3}$ و $AC = b$ داریم

$$NL = \frac{9g^2b}{4df}$$

به‌همین ترتیب از مثلثهای AGB و MGL

$$LM = \frac{9g^2c}{4de}$$

از $NL = LM$ داریم

$$\frac{9g^2b}{4df} = \frac{9g^2c}{4de}$$

بنابراین $b/f = c/e$ و $4b^2e^2 = 4c^2f^2$

درنتیجه

$$b^2(2c^2 + 2a^2 - b^2) = c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

بنابراین،

$$2a^2(b^2 - c^2) = b^4 - c^4 = (b^2 + c^2)(b^2 - c^2)$$

و $b^2 = c^2$، حالت متساوی‌الساقین، یا $2a^2 = b^2 + c^2$، حالت نامتساوی‌الساقین. هنگامی که $2a^2 = b^2 + c^2$ داریم

$$4d^2 = 3a^2,\ 4e^2 = 3c^2,\ 4f^2 = 3b^2$$

درنتیجه،

$$d = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ e = \frac{c\sqrt{3}}{2},\ f = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

و $d : e : f = a : c : b$. بنابراین میانه‌ها متناسب بااضلاع، البته در ترتیبی متفاوت‌اند.

نظر به رابطهٔ غیرمعمول فوق، مثلث مورد بحث را مثلث خودمیانه نامیده‌اند.

رابطهٔ $d = \frac{3\sqrt{a}}{2}$ مکان هندسی رأس A ی خودمیانه را با معلوم بودن قاعدهٔ BC مشخص می‌کند.

اگر مثلث متساوی‌الاضلاع αBC یی را بر قاعدهٔ BC (بانقطهٔ وسط D) بناکنیم دراین صورت مکان هندسی A دایرهٔ به مرکز D باشعاع $D\alpha$ است.

عبارت $2a^2 = b^2 + c^2$ رابطه‌ای با قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌دهد و در واقع می‌توان بی‌نهایت مثلث خودمیانه از مثلثهای فیثاغورسی خاصی به‌طریق زیر به‌دست آورد:

اگر x، y، z اضلاع مثلثی فیثاغورسی با $x>y>z$ و $\frac{x}{2} > z$ باشد، دراین صورت x، $(y + z)$، $(y - z)$ مثلثی خودمیانه است. به‌عنوان مثال، سه‌تائی فیثاغورسی ۱۳، ۱۲، ۵ سه‌تائی خودمیانه‌ای ۱۳، ۱۷، ۷ را، که کوچکترین مثلث خود میانه بااضلاع درست است، به‌دست می‌دهد.

مثلث خودمیانه دارای بعضی از خواص جالب هندسی است:

(a) نقطهٔ میانه‌ای G نقطهٔ وسط وتر میانه‌ای AL است.

(b) BGCL متوازی‌الاضلاع است.

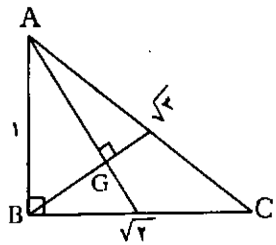
(c) مثلثهای BGL و CLG غیرمستقیماً مشابه ABC اند.

(d) خط اویلری OG برمیانهٔ AG عموداست.

(e) نقطهٔ اشتاینری[5] بر L، واقع برمیانهٔ AG، منطبق است.

(f) اگر K نقطهٔ لموینی[6] باشد، دراین صورت GK موازی BC است.

(g) اگر T نقطهٔ فرمائی[7] باشد، دراین صورت قطعات BT، AT و CT تصاعدی حسابی با $AT = \frac{BT+CT}{2}$ می‌سازند.



شکل ۳

با بازگشت به رابطهٔ فیثاغورسی، تنها یک مثلث خودمیانهٔ قائم‌الزاویه، با اضلاع √۲، √۳، ۱ موجود است (شکل ۳). درضمن مثلث مزبور تنها مثلث با دوضلع عمود و دو میانهٔ عمود برهم است.

یادداشت‌ها

1. Steiner - Lehmus
2. Automedian Triangle
3. C. F. PARRY
4. Median Point

۵ ـ چهارمین تقاطع بیضی محیطی «Circumellipse» اشتاینر (مرکز درنقطهٔ میانه‌ای) بادایرهٔ محیطی.

۶ ـ «Lemoine Point»، نیز معروف به نقطهٔ قرینهٔ میانه‌ای «Symmedian Point» یعنی مزدوج حافظ زاویه «Isogonal Conjugate» (یاقرینهٔ) نقطهٔ میانه‌ای.

۷ ـ نقطهٔ هم زاویهٔ داخلی «Internal Isogonic Point»؛ نیز نقطهٔ کمترین فاصلهٔ مجتمع از رؤس مثلث.



در باغ تجربه‌ها
(مصاحبه با تلاشگری پیروز)

در این شماره مصاحبه‌ای با یکی از دانش‌آموزان موفق ترتیب داده‌ایم که جزء نفرات اول کنکور سراسری بوده و درحال حاضر از دانشجویان موفق رشتهٔ ریاضی است که درمقطع فوق لیسانس مشغول تحصیل می‌باشد.
و لازم به تذکراست که ایشان مراحل دانشگاهی را در کمتر از زمان معمول طی کرده‌اند.
باشد که در این مصاحبه برای شما عزیزان دانش‌آموز ره‌آوردی داشته‌باشیم.

□ خواهش می‌کنم خودتان را معرفی کنید.

یعقوب فرجامی، فرزند داوود؛ متولّد سال ۱۳۴۸ شمسی، اهلِ یکی از روستاهای تبریز؛ به نام «علی‌آباد» هستم. پدرم سواد قرآنی دارد و مادرم اصلاً سواد ندارد. چهار خواهر و دو برادر دارم که برادرهایم تا دورهٔ راهنمایی بیشتر نخواندند. دوران دبستان و دبیرستان خود را در شهرستان قم گذراندم و بعد از آن وارد دانشگاه صنعتی شریف شدم.

□ خانوادهٔ شما درطول تحصیل چه تسهیلاتی برایتان فراهم کردند؟

تسهیلاتی که خانواده‌ام برایم فراهم کردند، در حدّ متوسط بود.

□ از چه زمانی به ریاضیات علاقه‌مند شدید؟

نمی‌توانم بگویم از چه موقعی به ریاضی علاقه‌مند شدم ولی می‌توانم بگویم که درسال اوّل و دوّم نظری ریاضیاتم خیلی بد بود. از کسینوس فاکتور می‌گرفتم و اصلا نمی‌دانستم «تعیین علامت» یعنی چه؟ معلّمهایم به من اعتراض می‌کردند و می‌گفتند: «پسرجان اشتباهی رشتهٔ ریاضی را انتخاب کرده‌ای.» براثر تحقیر معلّمها، چنان حالتی در من ایجاد شد که یک مرتبه تصمیم قاطعی گرفتم. یک کتاب انگلیسی را برداشتم و از روی آن معادله‌های درجهٔ دوّم را خواندم و مطالعه‌ام را هرلحظه بیشتر کردم بسیار کوشیدم تا رفته رفته درسم خوب شد.

□ به چه علومی غیراز ریاضیات علاقه دارید؟

کامپیوتر و ساختمان داده‌ها، شیمی آلی و بحث ایزومرها، بلورشناسی، مقاومت مصالح و معماری.

□ کدام یک از معلمهای شما بیشترین تأثیر را در شما داشته است؟

قادر نیستم که بگویم کدام یک از معلّمهایم بیشتر برمن تأثیر گذاشته‌است ولی هریک از آنها، یک تأثیر خاص و

بسزایی داشته‌است، مثل دبیر تاریخ که برایمان از طریقهٔ درس خواندن صحبت می‌کرد و یا دبیر ادبیّات که در مورد سطح علمی صحبت می‌کرد برای ما رهنمود خوبی بود.

□ چه خاطره‌هایی از دوران تحصیل خود به یاد دارید؟

خاطره‌هایم خیلی زیاد هستند فقط به یکی، دوتای آن اشاره می‌کنم. در سال پنجم ابتدایی، من و یک دانش‌آموزی به نام علیرضابیگدلی (که در المپیاد ریاضی سال ۶۷ قبول شد) برای مسابقات بین مدارس انتخاب شده بودیم. چون من بازیگوش بودم؛ حذفم کردند و یک دانش‌آموز دیگری به نام «رفیعی» را به‌جای من فرستادند. خیلی برایم سخت بود و آن موقع گریهٔ زیادی کردم. از دورهٔ راهنمایی هم یک خاطرهٔ خوبی دارم. مدیر مدرسهٔ ما مرحوم آقای دانش بود. یک روز روی نرده‌ها نشسته بودم و سرمی‌خوردم. وقتی رسیدم پایین دیدم آقای مدیر جلویم ایستاده‌است. متعجب به من نگاه می‌کرد گفت: «اگر از بالا می‌افتادی و می‌مردی چه کسی می‌بایست جوابگو باشد؟» چیزی نتوانستم بگویم. همان روزها یک دانش‌آموز به علت ضربهٔ مغزی جانش را از دست داده بود. آقای دانش با دستهایش مرا لمس کرد و با مهربانی اشاره کرد که بروم. من از آن به بعد دیگر این کار را انجام ندادم. از دبیرستان هم خاطره‌های خوبی دارم مخصوصا از دبیرهای فیزیک و ریاضی که خیلی با آنها صمیمی بودم و حتّی به منزلشان می‌رفتم و گاهی هم سرمسأله‌ای با آنها شرطبندی می‌کردم.

□ آیا دوستان شما تأثیری بر شما داشته‌اند؟

در جهت تأثیر مثبت؛ دوستی و ارتباط زیاد من با علیرضابیگدلی در سال چهارم دبیرستان، برایم خیلی مفید بود خصوصاً شیوه‌هایی که در حل مسائل و با دقتی که داشت برای من بسیار ستودنی بود.

در دانشگاه هم خصوصیّات اخلاقی و سطح علمی و حتی تیزهوشی افراد بر من بسیار مؤثر بوده و تأثیر خاصی داشته است.

□ به نظر شما کتابهای درسی اعم از دبیرستان و دانشگاهی باید دارای چه ویژگیهایی باشند؟

کتب درسی دانشگاه معمولاً کتابهای جالبی است اگر چه برای هر درس، تأکید می‌شود کتابی راکه انتخاب شده مرجع اصلی تحقیق قرار دهیم ولی درکنارآن دانشجو آزاد است به هرکتاب دیگری که بخواهد مراجعه کند.

کتابهای درسی دانشگاه بویژه در رشتهٔ ریاضی؛ به چند دسته تقسیم می‌شوند: یکی کتابهایی که افراد پیش کسوت آنها را نوشته‌اند، مثل «کتاب جبر» ؛ وان دروایردن . این گونه کتابها معمولا ایده‌های زیادی در خود دارند ولی خیلی از مطالب جنبی در آن گفته نشده‌است، به‌علاوه در این نوع کتابها روش توضیح چندان مناسب نمی‌باشد. یعنی در این نوع کتابها سعی نشده‌است، یک مطلب را با مثالهای زیاد و رسم شکل و تشبیه و تمثیل به خواننده تفهیم کند بلکه فقط ایده‌های اصلی راگفته و رفته است. کتابهای بعدی؛ کتابهایی هستند که در آن مطالب اصلی باشیوه‌ای زیبا و آسان بیان شده و از مثال بسیار و توضیح خوبی برای تفهیم به خواننده استفاده شده‌است. این کتابها برای یادگیری خوب هستند ولی همانند کتابهای دستهٔ اول به خواننده، ایده نمی‌دهند. اگر چه ممکن است، دید خواننده را بازتر کند.

یک دستهٔ دیگر از کتابها، آنهایی هستند که بیشتر به طور توضیحی در مورد مطلب بحث می‌کنند و مطالب خاصی را دنبال می‌نمایند که معمولاً به عنوان مرجع برای مطالعهٔ بیشتر انتخاب می‌شوند.

و دیگر کتب، دایرةالمعارفها می‌باشند که تقریباً مطالب زیادی دریک موضوع رادر خود به طور جامع دارد. و بیشتر برای رفع اشکال مورداستفاده قرار می‌گیرد.

باتوضیحی که داده شد می‌توان گفت که در دانشگاه تلاش بیشتری برای یادگیری انجام می‌شود تا در دبیرستان. مطالب دبیرستان هرکدام مقدّمه و خلاصه‌ای از یک مبحث گسترده است که حتّی در این حد هم دارای اشکال هستند. به طور کلی شیوهٔ تنظیم دروس دبیرستانی صحیح نیست. به کتاب ریاضی دبیرستان نگاهی بیفکنیم. تعریف تابع درسال دوّم و سوّم و چهارم آمده است، همچنین مبحث حدّ و مشتق و نیز قسمت رسم منحنی که چندین صفحهٔ جبر و آنالیز سال چهارم را اشغال کرده‌است. بنده هنوز تا این زمان نفهمیده‌ام، رسم منحنی با آن همه مشقّت و زحمت، به چه درد می‌خورد؟! یا بحث معادلهٔ درجهٔ سوّم، که درسال سوم روش منحنیِ آن مطرح شده‌است و سال چهارم بحث در مورد آن دارد! و فکر نمی‌کنم با روشی که درسال چهارم برای معادلهٔ درجهٔ سوّم ارائه داده شده است کسی بتواند یک ریشه از یک معادلهٔ درجه سوّم به دست آورد. در بین کتابهای دبیرستانی، فقط کتب فیزیک برای من جالب بوده‌است و آنها را بسیار پسندیده‌ام.

□ آیا وجود کتابهای جنب درسی را لازم می‌دانید؟

به نظر بنده هر دانش‌آموزی باید بااین گونه کتب آشنا باشد زیرا دید بهتری به آنها خواهد داد و دانش‌آموزان نباید از این نوع کتابها غافل بمانند حتی در درس تاریخ.

□ به‌نظر شما میزان آگاهی یک ریاضی‌دان از دیگر علوم باید تا چه اندازه‌ای باشد و آیا این آگاهی لازم است؟

نمی‌دانم این سؤال را چگونه باید جواب دهم. ریاضی‌دانهایی موفّق بوده‌اند که در بسیاری از علوم چیره دست بوده‌اند مثل: «جان فون نویمان» یا «پولیا» و ریاضی‌دانهایی هم هستند که خیلی تخصصّی کار کرده‌اند و کاری به دیگر علوم نداشته‌اند، «آرتین» چنین بود.

ولی در کلّ بهتر است به جای این که رشته‌های غیراز ریاضی را یاد بگیریم وقت بیشتری روی یک رشته بگذاریم. امروزه علم آنقدر تخصصی شده‌است که مسلط شدن به هریک از آنها عمر درازی را می‌خواهد. درحال حاضر جامع بودن در علوم به درد نمی‌خورد، تخصصی و تبحر مورد نیاز است.

□ آگاهی خود شما از دیگر علوم تا چه اندازه‌ای است؟

بنده حتی در رشتهٔ ریاضی هم به اندازهٔ کافی آگاهی ندارم ولی از آنجایی که شوق یادگیری دانش و صنعت در من وجود داشت به آموزشها و کارهای بسیاری روی نهادم از جمله منبت‌کاری، آلومینیوم کاری، تراشکاری و تعمیر لوازم خانگی، و سپس به خطاطی و زبانهای عربی و آلمانی و فرانسه. یک مدتی شیمی خواندم بعدمکانیک. ریاضی هم می‌خواندم. البته همهٔ اینها را بیشتر در تابستان انجام می‌دادم. اما در مجموع حاصل آنها برایم هیچ بود. اگر یک رشته را پی‌گیری می‌کردم و تمام وقت خودم را صرف همان می‌نمودم برای من خیلی مفیدتر بود.

□ محیط دبیرستان را برای پرورش ریاضی مناسب دیده‌اید یا محیط دانشگاه را؟

دانشگاه خیلی بهتر است چون آدم تخصصی‌تر درس می‌خواند اگر چه در دانشگاه گرفتاری آدم زیادتر است، و یک دانشجو دریک ترم به‌اندازه چهار دانش‌آموز دریک سال تحصیلی کار انجام می‌دهد ولی بازهم در اینجا پرورش علم اصولی وبهتر است.

□ آیا ضمن تحصیلات خود مجلّه‌های علمی را مطالعه می‌کردی؟

خیلی سالها قبل دانستنیها و ماشین و دانشمند و ... را می‌خواندم بعدها مجله رشد ریاضی را خواندم. درحال حاضر هم فرصت ندارم تا نگاهی به یکی از آنها بیندازم و فقط گاه گاهی مجله ماشین را می‌بینم.

□ یک دبیر ریاضی باید دارای چه خصوصیاتی باشد؟

اولاً میزان آگاهی یک دبیر از موضوع تدریس باید بسیار بالا باشد. در ثانی هر دبیر، درسی را تدریس کند که رشتهٔ اختصاصی اوست. بنده خودم بسیار دیده‌ام که مثلاً لیسانس زبان انگلیسی، تدریس فیزیک می‌کند. این طریق تدریس نمی‌تواند دانش‌آموزی را در تحصیل یاری کند اگر هم چیزی بیاموزد یا اتفاقی است یا ممکن است زمینه‌ای قبلی در دانش‌آموز وجود داشت. دبیری که از اطلاعات لازم و تبحّر کافی از مورد تدریس خود داشته باشد می‌تواند هم ایده‌های بهتری به دانش‌آموز ارائه دهد و هم در علاقه‌مند کردن دانش‌آموز به راه کسب دانش، مفید خواهد بود.

از لحاظ اخلاقی هم معمولاً دبیران صبور و با صلابت، تأثیر عاطفی بیشتری روی دانش‌آموزان خود می‌گذارند.

□ یک استاد ریاضی باید دارای چه خصوصیاتی باشد؟

یک استاد باید بتواند خوب درس بدهد و ایجادانگیزه کند. مطلبی که بنده می‌خواهم عرض کنم در مورد روابط استاد و دانشجو است؛ استاد باید دانشجویش را درک کند، باید بتواند موقعیت دانشجو را تشخیص دهد، این دانشجویان دیگر بچه نیستند که فقط کارشان درس‌خواندن باشد، این دانشجویان در ابتدای زندگیشان بامشکلات بغرنجی روبه‌روهستند، بعضی از آنها در مقابل کوچکترین مشکلات خودشان را می‌بازند و بعضی دیگر از مشکل خاصی رنج می‌برند. یک استاد باید بتواند در مواقع خاص همانند یک پدردلسوزانه رفتار کند تجربیات زندگی خودش را به دانشجویش یادبدهد. یک استاد باید دانشجویش را از سردرگمی نجات دهد، اما متأسفانه در بعضی کلاسهاروابط استاد و دانشجونزدیک و صمیمانه نیست.

□ در آینده قصد دارید، چه کاری انجام دهید؟

دلم می‌خواهد که ریاضی بخوانم در ریاضی مسلّط شوم؛ می‌خواهم فهمیدن و حل مسائل ریاضی برایم مشکل نباشد، و بالاخره تحقیقاتم را در ریاضی بیشتر کنم ولی خُب واضح است که اینها برای آدم نان نمی‌شود، باید راهی برای امرار معاش پیدا کرد، این در حال حاضر یک مشکل بزرگی است برای محققان هر رشته‌ای از دانش. این را هم به این ترتیب فکر می‌کنم که تدریس کنم و یک کار تجاری یا تولیدی هم کنار آن داشته‌باشم که خرجی‌ام در بیاید. شاید این برایتان خیلی خنده‌دار باشد ولی کار در این دنیا زیاد است خرجی آدم یک طوری در می‌آید به‌اندازه‌ای که آدم زندگی‌اش را بچرخاند، استادان ما مگر چه کاری انجام می‌دهند اکثرشان اصلاً به فکر پول و درآمد حقوق نیستند. برای آنها حل یک مسأله مشکل یا حل نشده خیلی مهمتر از داشتن یک ماشین لوکس و یا دو قطعه زمین است اگر من هم توانستم درسم را بخوانم که این طور است اگر هم توانستم به‌سطوح بالای ریاضی برسم کارهای دیگری انجام می‌دهم. به ریاضی هم در کنار آن می‌پردازم، خلاصه و بی‌پرده بگویم، برای من دارایی دنیا اگرچه هدف نیست ولی لازم است. در عین حال اگر دریک اندازه‌ای در ریاضی بتوانم موفق شوم و خودم را ارضا کنم بقیه‌اش را خدا کریم است.

به عنوان نمونهٔ حکایتی را نقل می‌کنم؛ بنده از یک معامله‌ای خبر داشتم، به یکی از اساتیدمان گفتم، استاد اگر

بتوانی یک مقدار پول در این معامله بگذاری سود بسیاری نصیب شما می‌شود، ماکه پول نداریم اگر شما دارید این کار را بکنید. او همان طور که داشت مقاله‌ای را می‌خواند با خونسردی تمام گفت: اگر بتوانم این مسأله را حل کنم برایم خیلی سودمندتر خواهدبود.

□ کدام یک از شاخه‌های ریاضی، تأثیر بیشتری بر شما داشته است؟

مباحث مختلف و متفاوتی در کتب ریاضی هست که در هر یک از آنها نکته‌های اصلی و اساسی وجود دارد که بزرگانی آن را نگاشته‌اند که هرکس هر کدام از آنها را بخواند تأثیر زیادی خواهدگرفت. فکرنمی‌کنم بتوان روی یک شاخه، انگشت گذاشت. مثلاً درجبرخطی کتاب «satake» برایم جالب بود. درهندسه انتگرالی «santalo» ؛ در هندسه دیفرانسیل کتاب «klingenberg» ، در آنالیزکتاب «رودین» و کتاب «کلموگرف وفومین»، درنظریهٔ حلقه‌هاکتاب «Mc Coy» و ...

□ دانشمندان مورد علاقهٔ شما کدام‌اند و دلیل این علاقه چیست؟

در مورد دانشمندان نمی‌توانم اظهار نظر کنم و بگویم فلان دانشمند بهترین است ولی عظمت و زیبایی کارهای تعدادی از آنها برایم خیره کننده بوده است مثلا «ریمان» با عمر کوتاهی که داشت کارهایش خیلی زیاد و اساسی و نوظهور بود یا «پوانکاره» مثلاً شاید عجیب باشد ولی از کاراتئودوری که ممکن است برایتان ناآشنا باشد خیلی خوشم می‌آید چون در هر مورد راهی راکه برای حل مسائل انتخاب می‌کرد خیلی جالب و اساسی و مستقل بود. این دسته دانشمندانی که کارهای جالب و چشمگیری دارند بسیاراند و تعدادی از آنهایی که به خاطر دارم عرض می‌کنم: « Thurston ، Novikov، Milnor ، Sigel، Artin » و بسیاری دیگر ...

□ معلم خصوصی برای دانش‌آموز مفید است یا خیر؟

بنده خودم در حال حاضر تدریس خصوصی می‌کنم. این نوع تدریس یکی دوسال است که باب شده‌است و بحث زیادی هم به میان کشیده‌است. به‌هرصورت بایستی دانست که هدف از معلم خصوصی چیست؟ آیا آمادگی بهتر و بیشتر برای درس است؟ یا برای امتحان؟ یا برای تجدیدی؟ یا برای کنکور؟ و اگر معلم خصوصی به طور مداوم برای همراهی درس دانش‌آموز است پس مدرسه برای چیست؟ به‌علاوه دانش‌آموز به امید معلم خصوصی‌اش در مدرسه درس را یادنمی‌گیرد پس وقتش تلف می‌شود. اگر برای امتحان است اعم از تجدیدی و غیر تجدیدی، کار به این صورت است که یکی دو روز قبل امتحان از معلم خصوصی می‌خواهند که به دانش‌آموز درس را یاد بدهد اگر دانش‌آموز درس را بلد باشد معلم خصوصی فقط کمکش می‌کند مطالب رابهتر یادبگیرد، مسائل بیشتری حل کند و خلاصه مسلط‌تر شود ولی اگر دانش‌آموز در تمام سال درس را نخوانده‌باشد و نمرات قبلی‌اش هم خراب و پایین است در چند روز درس یکساله را یادگرفتن غیر ممکن است اگر چه شاید با زحمت و تاحدی شانس نمرهٔ قبولی بگیرد. اگر معلم خصوصی برای کنکور است نقش آن به دو صورت تقسیم می‌شود یکی این که دانش‌آموز در درس ضعیف است در این صورت مدت زیادی لازم هست که رئوس مطالب و نکات مهم گفته شود، سپس روشهای تستی و فنون جنگ کنکور آموزش داده‌شودکه اگر معلم مسلط باشد و باتجربه و دانش‌آموز هم تلاش بکند شاید نتیجه نسبتاً خوب باشد ولی اگر دانش‌آموز درس را بلد و بسیاری از تستها راهم می‌داند. ولی روشهای تستی و کنکوری را نمی‌داند. در یک زمان‌بندی مناسب معلم خصوصی می‌تواند به او روشهای تستی را یاد بدهد تا بتواند به خوبی از عهده تشریح برآید. حال به بحث دیگری می‌پردازیم. اگر معلم خصوصی خودش به دروس چندان مسلط نباشد و یا این که روش تدریس او با

روح و روان دانش‌آموز سازگار نباشد، چنین تدریسی وقت تلف کردن است. از طرفی دیگر گاهی دیده می‌شود (این مطلب را بنده خودم دیده‌ام) که چون پسر فلانی، معلم خصوصی دارد ما هم یک معلم خصوصی برای فرزندمان بگیریم که از او عقب نیفتد! معلم خصوصی گرفتن برای این نوع آدمها خوب است چون که خیال می‌کنند کار سنجیده و درستی انجام داده‌اند! این جور معلم خصوصی گرفتنها فقط به خاطر رسیدن به یک اطمینان است، که درحقیقت بی‌معناست و معلوم است که نتیجه‌ای درست نخواهد‌داشت به‌علاوه دانش‌آموز به پشت‌گرمی این که معلم خصوصی دارد خیالش راحت است و سرکلاس و مدرسه هم درس نمی‌خواند، از طرف دیگر بعضی معلمها هم فقط به‌خاطر این که پولی در آورده باشند درس می‌دهند و هیچ به‌نفس آموزش صحیح توجه ندارند و بالطبع یادگیری دانش‌آموز را نادیده می‌گیرند. و فقط با ظاهری آراسته و ژست‌گیریهای حرفه‌ای به تدریس می‌روند. واضح است که این گونه ماکتهای متحرک، حاصل چندانی به بار نخواهند آورد. هدف از تدریس خصوصی به نظر بنده عبارت است از این که: اولاً معلمی که تدریس خصوصی می‌کند باید به درس مسلط‌تر باشد و روش تدریس را به‌نحو کامل و خوب بداند. حال چند حالت را درنظر می‌گیریم: ۱) معلم اصلی (معلم مدرسه) خوب درس نمی‌دهد یا به درس مسلط نیست، در این صورت معلم خصوصی به طور مداوم می‌تواند به دانش‌آموز کمک کند و او را تا هنگام امتحان راهنمایی کند. ۲) دانش‌آموزی که درسش خوب است و فقط می‌خواهد خودش را از لحاظ درسی تقویت کند در این صورت نیز معلم خصوصی مناسب است. معلم خصوصی باید چنین دانش‌آموزانی را به سطحی بالاتر بکشد و تکالیف بیشتری از او بخواهد. ۳) دانش‌آموزی که درسش ضعیف است و می‌خواهد برای امتحان آماده شود در این صورت وظیفهٔ معلم خصوصی (درمدت زمان بیشتری) این است که برای دانش‌آموز تمرین حل کند و از او امتحان بگیرد و به اشکالهای اساسی‌اش پی‌ببرد تا برای امتحان آماده شود. (البته تلاش دانش‌آموز در درجه اول اهمیت واقع است). ۴) دانش‌آموز برای تست و کنکور می‌خواهد درس بخواند در این صورت معلم خصوصی باتوجه به وضعیت درسی دانش‌آموز به او مطالب و نکات مهم را می‌گوید همراه با مثال و با توجه به این که در این شرایط دانش‌آموز بایستی اکثر مطالب را بلد باشد. معلم به همراه دانش‌آموز شروع به تست زدن می‌کند و نکات مهم را خاطر نشان می‌کند و از دانش‌آموز می‌خواهد که در مدتی معین به چند تست جواب دهد و حاصل کار را بررسی کرده و رفع اشکال می‌کند. (راهنماییهای کلی هم در مورد کنکور لازم است.)

□ به‌نظر شما طریقهٔ گزینش دانشجو به روشهای موجود در دانشگاهها مناسب است؟

تستهایی که در کنکور سراسری داده می‌شود به نظر بنده هیچ معیار درستی برای سنجش ندارد چون بعضی از استعداد خوبی برخوردارند ولی فن کنکور را بلد نیستند یعنی شرکت در کنکور غیراز داشتن یک سری اطلاعات کافی علمی، تبحّری لازم در آن فن نیاز است که خُب بعضیها بلدند و بعضیها از آن غافل هستند. اما جواب سؤال شما، درحال حاضر بهترین راه گزینش کنکور همین راه متداول است که با این حجم و تعداد داوطلب فکر نمی‌کنم راه دیگری بتوان در پیش‌گرفت خصوصاً درسالهای اخیر دو مرحله‌ای هم شده و معدل را تأثیر داده‌اند. قبولی در خرداد هم شرط شرکت در کنکور است. مطمئناً اگر می‌شد قسمتی از سؤالات تشریحی باشد بهتر بود ولی این امکان ندارد چون که تصحیح این اوراق توسط چند نفر مصحح برگزیده شاید بیشتر به طول بکشد. البته فکر می‌کنم گزینش دانشجو باروش کنکور فعلی روش مناسبی باشد. و نمی‌توان روش دیگری را درپیش گرفت تا بعد.

□ خوش‌بختی را درچه می‌بینید؟

خوش‌بختی یعنی این که آدم از دُرون پُر باشد و در

خودش بتواند اطمینان ایجاد کند تا به آسودگی راه یابد. هم‌چنین کسی بتواند درست بفهمد و خوب تشخیص دهد.

□ به‌نظر شما خواندن ریاضیات تا چه حد لازم است؟

خواندن ریاضیات برای چه کسی؟ یک پزشک لازم نیست زیاد ریاضی بخواند، ولی یک فیزیک‌دان باید مقدار زیادی ریاضی بداند. یک ریاضی‌دان، ریاضی می‌خواند که لذت ببرد و حدی برای آن قایل نیست، ولی به طور کلی هرکسی مقداری ریاضی باید بداند که بتواند مسائل اولیه خود را در حساب حل کند.

□ آیا ریاضیات را صرفاً به خاطر ریاضیات می‌خوانید؟ چرا؟

فکر می‌کنم بله ریاضی را فقط برای ریاضی می‌خوانم یعنی می‌خوانم که ریاضی بیشتر بدانم چون که از خواندن و فهمیدن ریاضی لذّت می‌برم.

□ آیا حاضرید (درصورت امکان) به‌جای ریاضی دروس و یا حرفه‌های دیگری را انتخاب کنید؟ چرا؟

اگر منظور شما این باشد ریاضی را کنار بگذارم و دنبال کار دیگری بروم نه، ولی دلم می‌خواهد درکنار ریاضی یک کاری داشته‌باشم که بازده مالی آن، کمکی برای ریاضی خواندن باشد، از اینها گذشته من که از ریاضی ناراحت نیستم احساس راحتی می‌کنم چرا ولش کنم، بنده نمی‌گویم که چیزهای دیگر به درد نمی‌خورد بلکه هر رشته برای خودش جایی دارد. برای بنده ریاضی بهتر از همه رشته‌هاست ولی این را هم بگویم که خواندن ریاضی تنها هدف بنده نیست چون که در هر صورت باید بتوانم کاری برای کشورم انجام دهم، خدمتی بکنم، این یک وظیفه است برای من ولی این وظیفه را چه طور انجام دهم نمی‌دانم.

□ ریاضی چه نقشی در زندگی شما دارد؟

برای زندگی شوق لازم است، یک احساس رضایت از زنده بودن می‌خواهد. ریاضیات این شور و شوق را در من **ایجادمی‌کند** و خواندن آن برایم شادی آفرین است، شاید به‌طور غیرمستقیم نقشهای دیگری نیز داشته باشد که فعلا نمی‌دانم یا این که یادم نمی‌آید.

□ آیا ریاضیات توانسته است کنجکاویها و جست‌وجوهای ذهنی شما را ارضا کند؟

کنجکاویها خیلی متفاوت هستند مثلا فلان دستگاه چطوری کار می‌کند، یک «میکرو پروسور» چطور کار می‌کند، فلان بیماری چرا عارض می‌شود، داروها چطور در بدن اثر می‌کنند که ناگفته پیداست ریاضیات این گونه کنجکاویها را نمی‌تواند ارضا کند ولی خود ریاضیات کنجکاوی زیادی دارد مثلا آیا حلقه‌ای هست که یک حلقه تقسیم نباشد و مقسوم علیه صفر هم نداشته‌باشد، مجموعه اناسی یک گروه «کلابینی» در صفحه چه شکلی دارد؟ اندازه‌پذیر است؟ متقارن است؟ بسته است؟ فشرده است؟ آیا اثبات راحتتر و جالبتر برای اثبات فلان قضیه هست؟ گروه «ایزومتری‌های» فلان فضا چیست؟ گروه همانریختی‌هایش چه؟ آیا فلان فضا را می‌توان به صورت یک فضای خارج قسمتی نوشت؟ و ... اینها و امثال اینها برای بنده دانستنش از دانستن طرز کار یک «میکروپروسسور» جالب و لذت بخش است اگر جواب آنها را بدانم و بفهمم پشت سرشان مسائل دیگری خواهند آورد جالبتر و زیباتر.

□ به نظر شما ریاضی «محض» جوابگوی چه نیازی از نیازهای انسانهاست؟

ریاضی محض شاید بعضی قسمتهایش کار بردی هم داشته‌باشد ولی به‌طور کلی فقط خود ریاضی محض منظور است و حداقل چیزی که برایم دارد این است که مطالعه و فهمیدن آن لذتی وافر به بنده می‌دهد، خلاصه این که حس زیبا پرستی دوستداران ریاضی را ریاضی «محض» ارضا می‌کند.

□ کدام یک از شاخه‌های ریاضی جذابتر است؟ چرا؟

هریک از شاخه‌های ریاضی زیبا هستند منتها بعضیها یک رشته آن را بیشتر دوست دارند. اما به‌طور کلی رشته‌های زیر از ریاضی برایم بسیار بسیار جالب بوده‌اند، نظریهٔ اعداد تحلیلی، نظریهٔ گروههای فشرده و عمل گروه هندسه انتگرالی، نظریهٔ حلقه‌ها، توپولوژی، آنالیز مختلط، هندسه ریمانی و ...

بنده، در خاتمهٔ این مصاحبه، از تمامی دست‌اندرکاران مجلهٔ ریاضی «برهان» که موجبات این گزارش را برای من فراهم کردند سپاسگزاری می‌کنم و همچنین برای دانش‌آموزان ایران اسلامی آرزوی موفقیت و پیروزی دارم.

ادب و ریاضی

ـ زبان ریاضیات دشوار ولی فناناپذیر است. من گمان نمی‌کنم هیچ یک از محققین کنونی در ادب یونانی بتواند لطایف نهفته در دیالوگهای افلاطون یا طنزهای آریستوفانس را بدان تمامی و کمال که یک ریاضیدان هرمعنی و مقصودی را در کارهای ارشمیدس می‌فهمد درک کند.

م. ه. ا. نیوسن
دکتر غلامحسین مصاحب
تئوری مقدماتی اعداد



یادی از استاد ضیاء هشترودی

● دکتر احمد شرف‌الدین

روان‌شاد دکتر «محسن هشترودی» دانشمندی برجسته بود. برادر بزرگ وی به نام «ضیاء هشترودی» که او نیز به رحمت ایزدی پیوسته است از دبیران ریاضی و دانشمندی شایسته بود. استاد «ضیاء هشترودی» به زبانهای فرانسه و عربی تسلط کامل داشت. وی ریاضی «عالی» را خود فرا گرفت و بسیار مبتکر بود. من در دبیرستان افتخار شاگردی ایشان را داشتم. روزی یکی از همکلاسیها به کمک یک رابطهٔ مثلثاتی، یک مسئلهٔ هندسه طرح نمود و حل آن را از استاد ضیاء هشترودی خواست. استاد حل زیبایی برای مسئله عرضه نمود که به ذکر آن خواهم پرداخت. شایان توجه است که مقام علمی استاد «ضیاء هشترودی» بسیار بالاتر از حل این مسأله است. حل این مسأله را از این نظر که برای دانش‌آموزان کاملا مناسب و دلپذیر است یاد می‌کنم تا یادی از آن دبیر ارجمند کرده باشم.

یاد استاد محسن هشترودی و استاد ضیاء هشترودی را گرامی بداریم.

شرح مسئلهٔ هندسه:

در بسیاری از کتابهای مثلثات رابطهٔ زیر به عنوان تمرین مطرح می‌شود:

$$(۱)\quad \mathrm{Arc}tg\,۱ = \mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۲} + \mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۳}$$

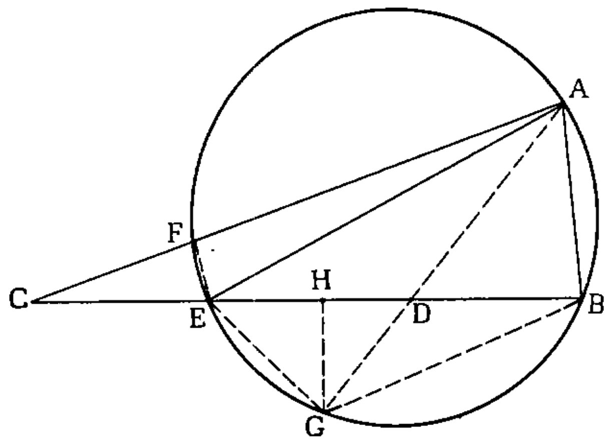
اثبات درستی رابطهٔ (۱)، به کمک رابطهٔ مثلثاتی زیر انجام می‌گیرد:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{(tg\alpha + tg\beta)}{۱ - tg\alpha\, tg\beta}$$

به کمک رابطهٔ (۱)، می‌توان مسئلهٔ هندسی زیر را طرح کرد:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $B = ۹۰°$ است طول ضلع BC سه برابر طول ضلع AB فرض شده است. دو نقطهٔ D و E ضلع BC را به سه قسمت مساوی $CE = ED = DB$ بخش می‌کنند. ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(۲)\quad \angle ADB = \angle AEB + \angle ACB$$



برهان. چون زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث AED است پس:

$$(۳)\quad \angle ADB = \angle AED + \angle EAD$$

پس برای اثبات درستی رابطهٔ (۲) کافی است ثابت کنیم که:

$$(۴) \quad \angle ACB = \angle EAD$$

از نقطهٔ E عمود EF' را برخط AC فرود می‌آوریم. دایرهٔ γ به قطر AE بردو نقطهٔ F و B می‌گذرد. محل تلاقی دایره γ و خط AD را نقطهٔ G می‌نامیم. طول ارتفاع GH از مثلث متساوی‌الساقین EGD نصف‌طول پاره‌خط ED است پس:

$$(۵) \quad GH = \frac{1}{2} HB$$

وچون:

$$(۶) \quad AB = \frac{1}{2} BC$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و GHB متشابهند. بنابراین:

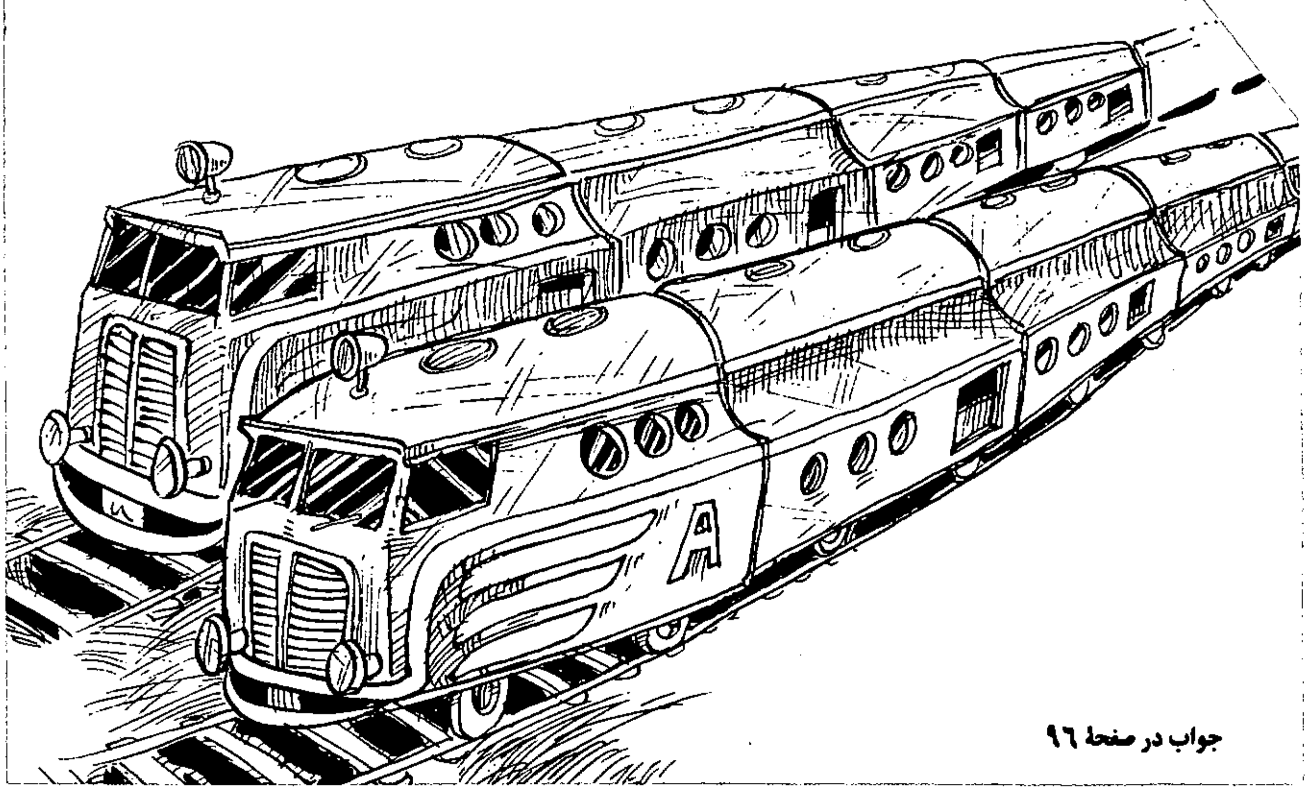
$$(۷) \quad \angle HBG = \angle ACB$$

اما دوزاویهٔ EAG و EBG مساوی‌اند (دو زاویهٔ محاطی مقابل به یک کمان) پس: $\angle EAG = \angle ACB$ ، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تفریح اهل اندیشه ۲

قطار A به‌طول ۲۰۰ متر است. قطار B، ۴۰۰ متر طول دارد. دو قطار در خطوطی موازی با سرعتهای ثابت حرکت می‌کنند. در حرکت به جهات یکسان، A در ۱۵ ثانیه از B می‌گذرد:

در حرکت به جهات عکس، در ۵ ثانیه از یکدیگر می‌گذرند: سرعت هر قطار (m/s) چیست؟



جواب در صفحه ۹۶

بررسی تقارن محوری و مرکزی

در تابعهای $\sin x$ و $\cos x$

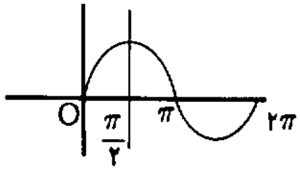
علی حسن‌زاده ماکوئی

الف : تقارن محوری: اگر در بازهٔ $[-a,a]$ و $a>0$ تابع $y=f(x)$ زوج باشد محور yها محور تقارن نمودار آن است. اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ مذکور فرد باشد، و یا، نه‌فرد باشد ونه زوج ولی با انتقال مبدأ مختصات به نقطهٔ $O'(\alpha,0)$ تابع $Y=f(X+\alpha)$ در دستگاه‌جدیدتابع زوجی‌شود خط $x=\alpha$ (محور yهای‌جدید) ، محور تقارن منحنی است.

اینك مطالب فوق را در تابعهای مثلثاتی: $\sin x$ و $\cos x$ بررسی می کنیم.

۱. تابع ، $y=\sin x$ را در نظر می‌گیریم : اگـر مبدأ مختصات رابه نقطهٔ $O'(\frac{\pi}{2},0)$ منتقل کنیم:خواهیم‌داشت:

$$y=Y+0 \text{ و } x=\alpha+X \Rightarrow Y=\cos X$$



باتوجه به زوج‌بودن تابع $y=\cos x$ ، به‌نظرمی‌رسدکه خط $x=\frac{\pi}{2}$ یکی‌از محورهای تقارن‌منحنی، $y=\sin x$ است. ولی‌باید توجه داشت‌که درتابعهای مثلثاتی متناوب مسألهٔ تقارن به سادگی‌تابعهای جبری نیست. بستگی به دامنهٔ تغییرات تابع دارد.

مثلا در تابع ، $y=\sin x$ اگر فاصلهٔ تغییرات x بـازهٔ $[0,2\pi]$ باشد، منحنی‌فاقد محورتقارن است بلکه قسمتهایی از آن‌که درفاصلهٔ $[0,\pi]$ و $[\pi,2\pi]$ قرار دارند، هریك‌جداگانه دارای محورتقارن می باشندکه به‌ترتیب عبارتنداز:

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ و } x=\frac{3\pi}{2}$$

درصورتی‌که اگر فاصلهٔ تغییرات را بازهٔ $[0,3\pi]$ یا ... و یا $[0,(2n+1)\pi]$ و $n\in N$ اختیارکنیم منحنی تابع‌در هریك‌از فاصله‌های مزبور دارای یك محور تقارن می‌باشندکه به ترتیب عبارتنداز:

$$3\frac{\pi}{2}\ ,\ \cdots\ ,\ (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

بنابراین بیان این مطلب‌که منحنی تابع، $y=\sin x$ درفاصلهٔ ، $[0\ ,\ (2n+1)\pi]$ و $n\in N$ دارای $(2n+1)$ محور تقارن است، نادرست می‌باشد.

مثال : تابع $y=\sin x$ را درنظرمی گیریم. تحقیق‌کنید اولا: منحنی‌تابع درفاصلهٔ $[0,2\pi]$ محورتقارن‌ندارد. ثانیا: در فاصلهٔ $[0,3\pi]$ خط $x=\frac{3\pi}{2}$ محورتقارن آن است.

حل . اولا اگر خط $x=\frac{\pi}{2}$ محور تقارن تـابـع باشد داریم :

و $y = \sin(\frac{\pi}{2} + X) = \cos X$

$$0 \leqslant x \leqslant 2\pi \implies \frac{-\pi}{2} \leqslant X \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

با توجه به کرانه‌های دامنه که متقارن نیستند. تابع $\cos X$ در فاصلهٔ مزبور زوج نیست. در نتیجه: منحنی فاقد محور تقارن است.

ثانیا :

$$y = \sin(\frac{3\pi}{2} + X) = -\cos X$$

$$0 \leqslant x \leqslant 3\pi \implies \frac{-3\pi}{2} \leqslant X \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

با توجه به کرانه‌های دامنه، تابع $y = -\cos X$ زوج است.

پس محور yها یعنی خط $x = \frac{3\pi}{2}$ محور تقارن منحنی است .

با توجه به مطالب فوق به آسانی می‌توان تحقیق کرد که

- منحنی تابع: $y = \sin x$ در فاصلهٔ :

$$k\pi \leqslant x \leqslant k\pi + (2n+1)\pi \ , \ k \in Z \ , \ n \in N$$

فقط دارای یك محور تقارن به معادلهٔ :

$$x = (k + n + \frac{1}{2})\pi$$

است. زیرا :

$$y = \sin[(k+n+\frac{1}{2})\pi + X] = (-1)^{k+n} \cos X$$

و $-(n+\frac{1}{2})\pi \leqslant X \leqslant (n+\frac{1}{2})\pi$

۲. با استفاده از مطالب فوق به آسانی می‌توان نتیجه گرفت، منحنی تابع $y = \cos x$ در هریك از فاصله‌های:

$$[0, 2n\pi] \ , \ n \in N \ , \ \cdots \ , \ [0, 2\pi]$$

یك محور تقارن دارد که به ترتیب عبارتنداز:

$$x = n\pi \ , \ \cdots \ , \ x = \pi$$

درحالت کلی منحنی تابع: $y = \cos x$ در فاصلهٔ

$$k\pi \leqslant x \leqslant (k+2n)\pi \ , \ k \in Z \ , \ n \in N$$

یك محور تقارن به معادلهٔ: $x = (k+n)\pi$ دارد.

ب: تقارن مرکزی. بسه ازای $n \in N$ و $k \in Z$ به آسانی می‌توان تحقیق کرد که:

۱. درفاصلهٔ $k\pi \leqslant x \leqslant k\pi + 2n\pi$ نقطهٔ:

$$\omega \left| \begin{array}{l} (k+n)\pi \\ 0 \end{array} \right.$$

مرکز تقارن منحنی $y = \sin x$ است.

۲. درفاصله $k\pi \leqslant x \leqslant k\pi + (2n+1)\pi$ نقطهٔ:

$$\omega \left| \begin{array}{l} (k+n+\frac{1}{2})\pi \\ 0 \end{array} \right.$$

مرکز تقارن منحنی $y = \cos x$ است.

۳. درمورد تقارن تابعهای: $tg x$ و $cotg x$ متذکر می‌شود که منحنی این تابعها محور تقارن ندارند و مرکز تقارن آنها به ترتیب عبارتنداز:

در فاصلهٔ $(k-\frac{1}{2})\pi < x < (k+\frac{1}{2})\pi$ نقطهٔ

$$\omega(k\pi, 0)$$

مرکز تقارن منحنی $tg x$ است.

در فاصلهٔ $k\pi < x < (k+1)\pi$ نقطهٔ

$$\omega(k\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ 0)$$

مرکز تقارن منحنی $cotg x$ است.

شگفتیهای ریاضی

اثر مایک ستیوبن*
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

Mathematical curiosities

ازیادداشتهای ارسالی ستیوبن برای مترجم

سالهاست که من الگوهای عددی جمع‌آوری می‌کنم. الگوهای زیر از جملهٔ بهترین الگوهایی است که تاکنون فراهم آورده‌ام. به این امید که از آنها لذّت ببرید.

به‌نظر شما این الگو شگفت‌انگیز نیست؟
(مربعها و مکعبها را دنباله‌ای از اعداد فرد در برگرفته است.)

$$۱^۲ = ۱$$
$$۲^۲ = ۱ + ۳$$
$$۳^۲ = ۱ + ۳ + ۵$$
$$۴^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷$$
$$۵^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹$$
$$۶^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱$$
$$۷^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳$$
$$۸^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵$$
$$۹^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷$$
$$۱۰^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹$$
$$۱۱^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۲۱$$
$$۱۲^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۲۱ + ۲۳$$
$$۱۳^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۲۱ + ۲۳ + ۲۵$$
$$۱۴^۲ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ + ۲۱ + ۲۳ + ۲۵ + ۲۷$$
$$۱۵^۲ = \underbrace{۱}_{۱^۳} + \underbrace{۳ + ۵}_{۲^۳} + \underbrace{۷ + ۹ + ۱۱}_{۳^۳} + \underbrace{۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹}_{۴^۳} + \underbrace{۲۱ + ۲۳ + ۲۵ + ۲۷ + ۲۹}_{۵^۳ \ldots} \ldots$$

خواه باور کنید، خواه باور نکنید، می‌توان توانهای مثبتِ همهٔ اعداد صحیحِ مثبت را از دنبالهٔ اعداد فرد متوالی استخراج کرد.

$$\underbrace{۱}_{۱^۵}, ۳, \underbrace{۵ + ۷ + ۹ + ۱۱}_{۲^۵}, ۱۳, ۱۵, ۱۷, \underbrace{۱۹ + \ldots + ۳۵}_{۳^۵}, ۳۷, \ldots, ۴۷, \underbrace{۴۹ + \ldots + ۷۹}_{۴^۵ \ldots}, \ldots$$

برقرار کردن تساوی میان مربعهای اعداد متوالی

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$

$$۱۰^۲ + ۱۱^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲ + ۱۴^۲$$

$$۲۱^۲ + ۲۲^۲ + ۲۳^۲ + ۲۴^۲ = ۲۵^۲ + ۲۶^۲ + ۲۷^۲$$

$$۳۶^۲ + ۳۷^۲ + ۳۸^۲ + ۳۹^۲ + ۴۰^۲ = ۴۱^۲ + ۴۲^۲ + ۴۳^۲ + ۴۴^۲$$

$$۵۵^۲ + ۵۶^۲ + ۵۷^۲ + ۵۸^۲ + ۵۹^۲ + ۶۰^۲ = ۶۱^۲ + ۶۲^۲ + ۶۳^۲ + ۶۴^۲ + ۶۵^۲$$

(والی آخر)

برقرار کردن تساوی میان اعداد صحیح متوالی

$$۱ + ۲ = ۳$$

$$۴ + ۵ + ۶ = ۷ + ۸$$

$$۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵$$

$$۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ = ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴$$

$$۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ = ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵$$

$$۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ = ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸$$

(والی آخر)

شبهِ الگویی از توانها

$$۳^۱ < ۴^۱$$

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$

$$۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ = ۶^۳$$

$$۳^۴ + ۴^۴ + ۵^۴ + ۶^۴ > ۷^۴$$

سه الگوی زیبا

$$(۱ + ۲ + ۳ + ۴)^۲ = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ \times ۹ = ۱۰^۲$$

$$۱۵۳ = ۱^۳ + ۵^۳ + ۳^۳ = ۱ + ۲ + ۳ + ... + ۱۷ = ۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵!$$

$$۶ \times ۶ \times ۶ = (۱ + ۲ + ۳)^۳ = (۱ \times ۲ \times ۳)^۳ = ۱^۳ \times ۲^۳ \times ۳^۳ = ۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ = ۶^۳$$

برخی تقارنهای تاریخی

معروفترین دانشمند جهان آلبرت اینشتین، در ۱۴ مارس (سومین ماه فرنگی) متولد شد. اما این روز همان پی (۳/۱۴) یعنی معروفترین عدد ما است.

عبارت $e^{\pi i} + ۱ = ۰$ بدان سبب منحصر به فرد است که پنج تا از مهمترین ثابتهای ریاضیات را در بَردارد. اما در اینجا نیز یک تقارن تاریخی وجود دارد. نخست، معادله رابه این صورت می‌نویسیم:

$$e^{\pi i} = -۱$$

ـ نماد e توسط «اویلر» ابداع شد و او آن را متداول کرد.

ـ نماد i توسط «اویلر» ابداع شد ولی او آن را متداول نکرد.

ـ نماد پی (pi) توسط «اویلر» ابداع نشد ولی او آن را متداول کرد.

ـ نماد ۱ـ توسط «اویلر» ابداع نشد و او آن را متداول نکرد.

حاصل ضرب نخستین هفت عدد اوّل ۵۱۰۵۱۰ می‌شود. این عدد با عدد ۵۱۰ که در تقسیمبندی موضوعی «ملویل دیویی» به ریاضیات اختصاص یافته‌است، تا اندازه‌ای تقارن دارد. طبق روش طبقه‌بندی دهدهی دیویی، نظریهٔ اعداد با عدد ۵۱۲/۸۱ مشخص می‌شود. این یک تقارن به شمار می‌رود، زیرا نظریهٔ اعداد عبارت است از بررسی روابط عجیب میان اعداد صحیح و ...

$۵۱۲ = ۲^۹$ درحالی که $۸۱ = ۹^۲$

در روش طبقه‌بندی دیویی، عدد ۵۳۳/۳۳۱ به موضوع «عدد شناسی» اختصاص یافته است. اگر معکوس این عدد را با خودِ عدد جمع کنید، خواهید داشت:

$$\begin{array}{r} ۱۳۳/۳۳۵ + \\ ۵۳۳/۳۳۱ \\ \hline ۶۶۶/۶۶۶ \end{array}$$

یک الگوی زیبای دیگر

$$۶۶۶ = \begin{cases} ۱^۶ - ۲^۶ + ۳^۶ \\ ۶+۶+۶+۶^۳+۶^۳+۶^۳ \\ ۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳+۶^۳+۵^۳+۴^۳+۳^۳+۲^۳+۱^۳ \end{cases}$$

نماهای شگفت‌انگیز

$$۳۴۳۵ = ۳^۳ + ۴^۴ + ۳^۳ + ۵^۵$$
$$۲^۵ ۹^۲ = ۲,۵۹۲$$
$$۳^۴ \times ۴۲۵ = ۳۴,۴۲۵$$
$$۹۹۸,۰۰۱ = (۹۹۸ + ۰۰۱)^۲$$

جمع بستن ارقام

$$\frac{۲۴,۰۶۲}{۳۶,۰۹۳} = \frac{۲+۴+۰+۶+۲}{۳+۶+۰+۹+۳}$$

فاکتوریلهای جالب توجه

$$۱۴۵ = ۱! + ۴! + ۵!$$
$$۴۰,۵۸۵ = ۴! + ۰! + ۵! + ۸! + ۵!$$

توانهای تغییر یابنده

$$۱^۱ + ۶^۱ + ۷^۱ + ۱۷^۱ + ۱۸^۱ + ۲۳^۱ = ۲^۱ + ۳^۱ + ۱۱^۱ + ۱۳^۱ + ۲۱^۱ + ۲۲^۱$$
$$۱^۲ + ۶^۲ + ۷^۲ + ۱۷^۲ + ۱۸^۲ + ۲۳^۲ = ۲^۲ + ۳^۲ + ۱۱^۲ + ۱۳^۲ + ۲۱^۲ + ۲۲^۲$$
$$۱^۳ + ۶^۳ + ۷^۳ + ۱۷^۳ + ۱۸^۳ + ۲۳^۳ = ۲^۳ + ۳^۳ + ۱۱^۳ + ۱۳^۳ + ۲۱^۳ + ۲۲^۳$$
$$۱^۴ + ۶^۴ + ۷^۴ + ۱۷^۴ + ۱۸^۴ + ۲۳^۴ = ۲^۴ + ۳^۴ + ۱۱^۴ + ۱۳^۴ + ۲۱^۴ + ۲۲^۴$$
$$۱^۵ + ۶^۵ + ۷^۵ + ۱۷^۵ + ۱۸^۵ + ۲۳^۵ = ۲^۵ + ۳^۵ + ۱۱^۵ + ۱۳^۵ + ۲۱^۵ + ۲۲^۵$$

(به این عبارتهای عجیب، چند درجه‌ایها می‌گویند. فهرستی از این عبارتها را می‌توان در کتاب زیر دید:
Madachy, J.S. Mathematics on Vacation, Scribners, 1966.)

---

* مایک ستیوبن (Mike stueben) دبیر برجستهٔ ریاضیات و معماپرداز سرشناس، سالها عهده‌دار تهیه و تنظیم ستونِ سرگرمیهای علمی مجلهٔ معروف «دیسکاوره بوده‌است. در طی هفت سال گذشته ترجمهٔ بسیاری از نوشته‌های او تحت عنوان «استدلالهای معمایی» در مجلات علمی کشورما درج و سپس درقالب دو جلد کتاب (از سوی انتشارات مدرسه) تجدید چاپ شده‌است. (م.)

بسط دو جمله‌ای «خیام» ـ «نیوتن» و تعمیم آن

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

در جبر، هر عبارت بـه صورت کلی $(a+b)^n$ را دو جمله‌ای «نیوتن» وچند جمله‌ای هم‌ارز با آن‌را بسط دوجمله‌ای «نیوتن» می‌گویند. به عنوان مثال؛ دو جمله‌ای نیوتن به ازای $n=0$ و $n=1$ و $n=2$ و $n=3$ و... به‌شکل زیراست‌که طرف‌دوم آن بسط دوجمله‌ای است. یعنی داریم:

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

. . . .

. . . .

اگرضریبهای این چند جمله‌ایها را به ترتیب زیر بنویسیم:

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

. . . .

شکلی شبیه مثلث حاصل می‌شودکه مجموع هر دو عدد هرسطر یکی‌از ضریبهای سطربعد را می‌دهد و روی دو ساق مثلث عدد ثابت ۱ قراردارد. دراین‌صورت به‌کمك مثلث‌فوق‌اعداد واقع درسطر بعد به دست می‌آید ودرنتیجه ضرایب‌بسط دوجمله‌ای‌را برای‌هرعددطبیعی n می‌توان‌نوشت. مثلاسطرپنجم‌عبارت‌است‌از:

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

این اعدادضریبهای‌بسط دوجمله‌ای $(a+b)^4$ بوده و داریم:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

با در نظرگرفتن ضریبها ونظم خاصی‌که بین جمله‌های بسط موجوداست‌نتیجه می‌شودکه بسط دوجمله‌ای‌نیوتن‌دارای ویژگیهایی است‌که باکمك آنها نیز می‌توان به ازای هرعدد طبیعی n، عبارت $(a+b)^n$ رابه صورت‌یك‌چندجمله‌ای‌تبدیل کرده وضرایب جمله‌ها را حساب‌کرد.

این ویژگیها عبارتند از:

۱ـ این‌بسط‌دارای $(n+1)$ جملهٔ‌متمایزاست وبرحسب a و b چند جمله‌ای درجهٔ n متقارن وهمگن است.

۲ـ ضریب هرجمله‌در بسط برابراست با حاصل ضرب ضریب جملهٔ قبل در توان حرف a درآن جمله، تقسیم برتعداد جمله‌هایی‌که تاآن جمله نوشته شده است.

۳ـ وقتی‌برحسب توان‌نزولی a نوشته شود با جملهٔ a^n شروع وبه جملهٔ b^n ختم می‌شود.

۴ـ درهرجمله در مقایسه با جملهٔ‌قبل یك‌واحد ازتوان a کسر ویك واحدبه توان b اضافه می‌شود.

۵ـ جمله‌هایی‌که از دوطرف به یك‌فاصله‌باشندضریبهایی متساوی دارند.

۶ـ مجموع‌توان a وتوان b در هـرجمله برابر مقدار ثابت n است.

۷ـ مجموع ضریبهای‌بسط برابراست‌با: 2^n.

۸ـ هرگاه ضریب‌جملهٔ pام باضریب‌جملهٔ rام‌بسط‌برابر

باشد، آنگاه داریم: $p+r=n+2$.

۹ـ جملهٔ kام بسط از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$(n! = n\times(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1,\ 0!=1)$$

(نماد ضریب جمله kام $\binom{n}{k}$ و یا C_n^k است).

$C_n^k a^{n-k+1}b^{k-1}$ و یا $\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^{k-1} =$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}a^{n-k+1}b^{k-1}$$

با توجه به ویژگیهای فوق بسط دوجمله‌ای نیوتن‌را برای هرعدد طبیعی n می‌توان نوشت، به عنوان مثال، برای $n=5$ داریم:

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

و درحالت کلی داریم:

$$(a+b)^n = a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+b^n$$

هر گاه در دستور فوق b را به $-b$ تبدیل کنیم ضریبهای جمله‌های بالا یك درمیان مثبت ومنفی می‌شوند یعنی:

$$(a-b)^n = a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+(-1)^n b^n$$

بدیهی است با اختیار کردن $a=b=1$ مجموع ضریبهای بسط دوجمله‌ای به دست خواهد آمد. درنتیجه مجموع ضریبها در بسط $(a-b)^n$ برابرصفر است و داریم:

$$1-n+\frac{n(n-1)}{2!}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots+(-1)^n=0$$

مثال ۱: در بسط دو جمله‌ای $(3x+2y)^{n^2}$ مقدار n را چنان تعیین کنید که مجموع ضریبهای بسط برابر ۶۲۵ شود.

حل: برای به دست آوردن مجموع ضریبهای بسط، $x=y=1$ اختیار می‌کنیم ودر نتیجه داریم:

$$(3+2)^{n^2}=625$$

$$5^{n^2}=5^4 \Longrightarrow n^2=4 \Longrightarrow n=\pm 2$$

مثال ۲: در بسط دو جمله‌ای $(k^3x^2+3)^7$ مقدار k را چنان تعیین کنید که مجموع ضریبهای بسط برابر ۱۲۸ باشد.

حل: برای به‌دست آوردن مجموع ضریبهای بسط، $x=1$ اختیار می‌کنیم و در نتیجه داریم:

$$(k^3+3)^7=128$$

$$(k^3+3)^7=2^7 \Longrightarrow k^3+3=2$$

$$\Longrightarrow k^3=-1 \Longrightarrow k=-1$$

مثال ۳: مجموع ضریبهای عددی بسط:

$$(3x^2y-y^3z-zt)^{100}$$

را حساب کنید.

حل: با اختیار کردن $x=y=z=t=1$، داریم:

مجموع ضرایب $=(3-1-1)^{100}=1^{100}=1$

مثال ۴: مجموع جبری ضرایب عددی را درچند جمله‌ای که از بسط عبارت زیر به دست می‌آید، پیدا کنید:

$$(x^7-3x^5+x^3y^2-x^{15}y^3z^7+z)^{21}+(x^5-y^3z^2+xyz)^{15}+(x+y)^5-12$$

حل: با اختیار کردن، $x=y=z=1$ داریم:

مجموع ضرایب $(-1)^{21}+(1)^{15}+(2)^5-12=20$

مثال ۵: به ازای چه مقادیری از n مجموع ضریبهای بسط $(\sqrt[5]{x^3}+\frac{1}{\sqrt{x^2}})^n$ از مجموع ضریبهای بسط $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y})^{2n}$، ۹۹۲ واحد کمتراست.

حل : با اختیار کردن، $x = y = 1$ ، باید داشته باشیم:

$$2^{2n} = 2^n + 992 \Longrightarrow$$

$$(2^n)^2 - (2^n) - 992 = 0 \Longrightarrow$$

$$(2^n - 32)(2^n + 31) = 0 \Longrightarrow 2^n = 32$$

$$(2^n + 31 \neq 0) \Longrightarrow 2^n = 2^5 \Longrightarrow n = 5$$

مثال ۶ : اگردر بسط، $(x+y)^n$ ضریب جملهٔ نوزدهم باضریب جملهٔ هفتم برابر باشد، n را حساب کنید.

حل : باتوجه به فرمول، $p+r=n+2$ داریم:

$$19+7=n+2 \Longrightarrow n=24$$

مثال ۷ : جملـهٔ ششم در بسط $(2x^3+y^2)^7$ را تعیین کنید .

حل : با استفاده از فرمول ،

$$C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

ضریب جملهٔ kام. وهمچنین جملهٔ عمومی بسط $(a+b)^n$ یعنی: $C_n^k a^{n-k+1} b^{k-1}$ داریم:

$$a = 2x^3$$

$$\begin{cases} n=7 \\ k=6 \end{cases} \Longrightarrow \text{جملهٔ ششم} = C_7^6 (2x^3)^2 (y^2)^5$$

$$b = y^2$$

$$\text{جملهٔ ششم} = \frac{7!}{5!\,2!} 4x^6y^{10} = 84x^6y^{10}$$

مثال ۸ : اگر در بسط دوجمله‌ای، $\left(\sqrt[4]{x^3}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^n$ جملهٔ شانزدهم مستقل از x باشد، n را حساب کنید.

حل : $\text{جملهٔ شانزدهم} = C_n^{16} a^{n-15} b^{15}$

$$= C_n^{16}(\sqrt[4]{x^3})^{n-15}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^{15}$$

$$= C_n^{16} x^{\frac{3(n-15)}{4}} \times x^{-\frac{4\times 15}{5}} = C_n^{16} x^{\frac{3(n-15)}{4}-12}$$

$$= C_n^{16} x^{\frac{3n-45-48}{4}} = C_n^{16} x^{\frac{3n-93}{4}}$$

چون جملهٔ شانزدهم مستقل از x است پس باید فاقد x باشد و این وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$\frac{3n-93}{4} = 0 \Longrightarrow 3n-93=0$$

$$\Longrightarrow n = \frac{93}{3} \Longrightarrow n=31$$

مثال ۹ : جملهٔ مستقل از x را در بسط دوجمله‌ای

$$\left(\sqrt[7]{x^5}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{29}$$

به دست آورید.

حل :

$$(k+1)\text{ام جمله} = C_n^{k+1} a^{n-k} b^k$$

$$= C_n^{k+1}(\sqrt[7]{x^5})^{29-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k$$

$$= C_n^{k+1} x^{\frac{5(29-k)}{7}} \times x^{\frac{-2k}{3}}$$

$$= C_n^{k+1} x^{\frac{15(29-k)-14k}{21}} \xrightarrow{\text{چون فاقد x است}}$$

$$\frac{15(29-k)-14k}{21} = 0 \Longrightarrow k=15$$

بنابراین جملهٔ $(k+1=16)$ام مستقل از x است. یعنی جملهٔ شانزدهم فاقد x است (با توجه به تقارن هرجمله نسبت به جملهٔ وسط بسط، آیا مسئله جواب دیگری دارد؟ در صورت وجود آن‌را بیابید) .

مثال ۱۰ : ضریب x^{-27} را در بسط $(x^5-\frac{1}{x^7})^9$ پیدا کنید.

حل : جملهٔ عمومی بسط چنین است:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}(-b)^k \quad \text{(جملهٔ } (k+1)\text{ام } (a-b)^n)$$

$$\Rightarrow T_{k+1}=(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \Rightarrow$$

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{9}{k}(x^5)^{9-k}(\frac{1}{x^7})^k$$

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{9}{k}(x^{45-5k})(x^{-7k})$$

$$=(-1)^k\binom{9}{k}x^{45-12k} \Rightarrow 45-12k=-27$$

$$12k=45+27 \Rightarrow 12k=72$$

$$\Rightarrow k=\frac{72}{12}=6 \Rightarrow k=6$$

$$T_7=(-1)^6\binom{9}{6}x^{-27}=\frac{9!}{6!\,3!}x^{-27}$$

$$=\frac{7\times 8\times 9}{2\times 3}x^{-27}=84x^{-27}$$

بنابراین ضریب جملهٔ هفتم برابر ۸۴ است که ضریب x^{-27} می‌باشد.

مثال ۱۱ : مطلوب است جمله‌های گویا در بسط دو جمله‌ای: $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5$.

حل : با استفاده از جملهٔ عمومی خواهیم داشت:

$$T_{k+1}=C_5^k(\sqrt[3]{3})^{5-k}(\sqrt{2})^k \quad \text{(جملهٔ } (k+1)\text{ام)}$$

$$T_{k+1}=C_5^k\, 3^{\frac{5-k}{3}}\times 2^{\frac{k}{2}}$$

اگر T_{k+1} گویا باشد باید اعداد $\frac{k}{2}$ ، $\frac{5-k}{3}$ صحیح باشند و با توجه به اینکه $k\leqslant 6$ ، بنابراین اولا باید k اعداد زوج کوچکتر یا مساوی ۶ باشد و ثانیا $\frac{5-k}{3}$ باید عدد صحیح باشد.

بنابراین تنها $k=2$ درشرایط فوق صدق می‌کند. یعنی تنها جملهٔ گویا در بسط، جملهٔ سوم یعنی

$$C_5^2(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^2=60$$

است.

مثال ۱۲ : در بسط عبارت $(1+x)^n$ بزرگترین ضریب را پیدا کنید.

حل : ضریب جملهٔ عمومی بسط $(1+x)^n$ برابر C_n^k بوده و بنابراین باید تعیین کنیم به ازای چه مقادیری از k ضریب C_n^k حداکثر خواهد بود. می‌دانیم:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times k}$$

$$=C_n^{k-1}\,\frac{n-k+1}{k}$$

اگر k مقدارهای ۱و۲و۳ و ... را اختیار کند فاکتور

$$[\frac{n+1}{k}-1]$$

در عبارت : $C_n^k=C_n^{k-1}\frac{n-k+1}{k}$ تنزل می‌یابد و در نتیجه اگر $\frac{n+1}{k}-1>1$ باشد، مقدار C_n^k مرتبا افزایش خواهد یافت. یعنی:

$$\frac{n+1}{k}-1>1 \Rightarrow \frac{n+1}{k}>2$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}>k$$

با توجه به نامساوی فوق اکنون باید بزرگترین مقدار k را انتخاب کرد. بنابراین اگر n زوج یا فرد باشد داریم:

الف) اگر $n=2m$ باشد:

$$\frac{n+1}{2}=\frac{2m+1}{2}=m+\frac{1}{2}>k$$

لذا اگر k مقادیر، $k=0,1,2,\dots,m$ را اختیار کند عبارت $\frac{n+1}{2}$ بزرگتراز m بوده واز آنجا، $k=m=\frac{n}{2}$ خواهد بود. پس بزرگترین تعداد ترکیبها $C_n^{\frac{n}{2}}$ خواهدبود. به‌عبارت دیگر جملهٔ وسط بزرگترین جمله است، با شرط $n=2m$.

ب) اگر $n=2m+1$ باشد:

$$\frac{n+1}{2}=\frac{2m+2}{2}=m+1>k$$

لذا اگر k مقادیر، $k=0,1,2,\dots,m$ را اختیار کند، عبارت $\frac{n+1}{2}$ بزرگتراز m خواهد بود ودر نتیجه داریم:

$$k=m=\frac{n-1}{2}$$

در حالتی‌که $k=m+1$ باشد فـاکنون : $\frac{n+1}{k}-1$ برابر یك است زیرا داریم:

$$\frac{n+1}{k}-1=\frac{2m+2}{m+1}-1=1$$

و بنابراین نتیجه می‌شود :

$$C_n^{m+1}=C_n^m \Rightarrow C_n^{\frac{n+1}{2}}=C_n^{\frac{n-1}{2}}$$

* بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت که بزرگترین ضریب دربسط عبارت $(1+x)^n$ هنگامی که n عدد زوج باشد $C_n^{\frac{n}{2}}$ و اگر n عدد فرد باشد $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ یا $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ خواهدبود.

مثال ۱۳ : به‌ازای چه مقادیری از $n\in N$ و $n<100$ بسط دو جمله‌ای $\left(\sqrt[5]{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^{n^2}$ دارای جمله‌های مستقل از x می‌باشد.

حل :

$$\text{جملهٔ }(k+1)\text{ام}=\binom{n^2}{k}a^{n^2-k}\cdot b^k=\binom{n^2}{k}(\sqrt[3]{x})^{n^2-k}\times\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^k=\binom{n^2}{k}x^{\frac{n^2-k}{3}}\cdot x^{\frac{-2k}{5}}$$

$$\text{جملهٔ }(k+1)\text{ام}=\binom{n^2}{k}x^{\frac{5n^2-11k}{15}}$$

$$\xRightarrow{\text{(جملهٔ مستقل از x)}} 5n^2-11k=0 \Rightarrow$$

$$n^2=\frac{11}{5}k \xRightarrow{\text{k ضریبی از ۵}} k=5s$$

$$\Rightarrow n^2=\frac{11}{5}\times 5s=11s \Rightarrow n=\sqrt{11s}$$

$$\xRightarrow[\text{s مضربی از یازده ومربع نیز می‌باشد}]{\text{چون } n\in IN \text{ می‌باشد پس}} s=11m^2$$

$$\Rightarrow n=11m \Rightarrow (n<100)$$

$$11m<100 \Rightarrow m<9\frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow m\in\{1,2,3,\dots,9\}$$

$$\Rightarrow n\in\{11,22,\dots,99\}$$

(با توجه به تقارن در بسط وجابه‌جایی دو جمله، مسأله دارای جوابهای دیگری می‌تواند باشد؟)

مثال ۱۴ : مطلوب است محاسبهٔ x بـرای اینکه جملهٔ چهارم بسط:

$$\left[\sqrt[12]{10x}+(\sqrt{10x})^{\frac{1}{\log x+2}}\right]^6$$

مساوی ۲۰۰ باشد.

حل : جملهٔ‌چهارم چنین است:

جملهٔ چهارم $= C_6^3(\sqrt{10x})^{\frac{3}{\log x+2}}(\sqrt[12]{10x})^3=200$

$$\Longrightarrow 20(10x)^{\frac{3}{2\log x+4}}(10x)^{\frac{1}{4}}=200 \Longrightarrow$$

$$(10x)^{\frac{6+\log x+2}{4(\log x+2)}}=10$$

$$(10x)^{\frac{8+\log x}{4(\log x+2)}}=10 \xrightarrow{\text{از طرفین تساوی لگاریتم می‌گیریم}}$$

$$\left[\frac{8+\log x}{4(\log x+2)}\right]\log 10x=1$$

$$(8+\log x)(\log x+1)=4(\log x+2)$$

$$\Longrightarrow 8\log x+8+\log^2 x+\log x=4\log x+8$$

$$\log^2 x+5\log x=0 \Longrightarrow \log x(\log x+5)=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\log x=0 \rightarrow x_1=1\\ \log x+5=0 \rightarrow x_2=10^{-5}\end{cases}$$

بنابراین به ازای $x=1$ یا $x=10^{-5}$ جملهٔ چهارم بسط فوق مساوی ۲۰۰ می‌شود.

مثال ۱۵ : به ازای چه مقدار از n ، ضرایب جمله‌های دوم و سوم و چهارم در بسط عبارت:

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y})^{\frac{1+2+\dots+n}{1+n}}$$

تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند.

حل : با توجه به فرض مسأله باید ضرایب جمله‌های دوم وسوم وچهارم تشکیل تصاعدحسابی بدهند یعنی جملهٔ سوم باید واسطهٔ حسابی جمله‌های دوم وچهارم باشد. ابتدا دوجمله‌ای فوق را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم. یعنی :

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y})^{\frac{n(n+1)}{2(n+1)}}=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y})^{\frac{n}{2}}$$

اینك باید مقدارهای :

$$C^3_{\frac{n}{2}}\ ,\ C^2_{\frac{n}{2}}\ ,\ C^1_{\frac{n}{2}}$$

یعنی به ترتیب:

$$\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}{6}\ ,\ \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\ ,\ \frac{n}{2}$$

تشکیل تصاعدحسابی بدهند. بنابراین داریم:

$$\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}=\frac{\frac{n}{2}+\frac{1}{6}\left[\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\right]}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{n}{2}+\frac{1}{6}\left[\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^3-9\left(\frac{n}{2}\right)^2+14\left(\frac{n}{2}\right)=0$$

$$\frac{n}{2}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2-9\left(\frac{n}{2}\right)+14\right]=0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{n}{2}=0\\ \frac{n}{2}=7\\ \frac{n}{2}=2\end{cases} \overset{n>4}{\Longrightarrow} \begin{cases}n=0\\ n=14\\ n=4\end{cases}$$

بنابراین یك مقدار موردقبول برای n به دست می‌آید که‌عبارت است از: $n=14$.

مثال ۱۷ : می‌دانیم e پایهٔ لگاریتم طبیعی‌است و مقدار آن چنین است:

$$e=2/71828\ldots$$

و به شکل بسته به صورت حدی :

$$e=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

نمایش می‌دهند.

از تعریف فوق ثابت کنید:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

حل : ابتدا دو جمله‌ای $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ را بسط می‌دهیم و سپس از هریك ازجملات حد می‌گیریم یعنی:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\right]$$

$$e=\lim_{n\to\infty}(1)+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3\right]+\cdots$$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}\right]+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}\right]+\cdots$$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=2/71828\ldots$$

مثال ۱۸ : مقدار $\frac{1}{\sqrt{32}}$ را تاچهار رقم اعشار محاسبه کنید.

حل :

$$\frac{1}{\sqrt{32}}=(32)^{-\frac{1}{2}}=(6^2-4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{4}{6^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{2}{6}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3^4}+\cdots\right)$$

$$=0/17677$$

از بسط دوجمله‌ای اخیر داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{32}}=0/17677$$

مثال ۱۹ : نشان دهید ریشهٔ nام هرعدد حقیقی یعنی $\sqrt[n]{a}$ را می‌توان به مجموع بی‌نهایت عدد گویا نمایش داد. به عبارت دیگر هرعدد گنگ (اصم) مجموع بی‌نهایت عدد گویا می‌باشد.

برهان : برای اثبات ، کافی است $\sqrt[n]{a}$ را به سری بسط دهیم. برای این منظور درحالت کلی a^m را بسط می‌دهیم و از آنجا با اختیار $m=\frac{1}{n}$ حکم ثابت می‌شود. برای بسط a^m به سری به ترتیب زیرعمل می‌کنیم:

$$a^m=\frac{1}{a^{-m}}=(1-1+\frac{1}{a})^{-m}$$

$$=\left(1-(\frac{a-1}{a})\right)^{-m}$$

$$=1+m(\frac{a-1}{a})+\frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2+\cdots$$

بنابراین داریم:

$$a^m = 1 + m\left(\frac{a-1}{a}\right) + \frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \cdots$$

$$m = \frac{1}{n} : \sqrt[n]{a} = 1 + \left(\frac{a-1}{na}\right) + \frac{n+1}{2!}\left(\frac{a-1}{na}\right)^2 + \frac{(n+1)(2n+1)}{3!}\left(\frac{a-1}{na}\right)^3 + \cdots \qquad (1)$$

مثال ۲۰ : مقدار $\sqrt[3]{5}$ را با تقریب دلخواه به توسط سری حساب کنید.

حل : با توجه به بسط $\sqrt[n]{a}$ به سری می‌توان $\sqrt[3]{5}$ را با تقریب دلخواه حساب کرد.

با توجه به تساوی (۱) داریم :

$$\sqrt[3]{5} = 1 + \left(\frac{4}{15}\right) + \frac{4}{2!}\left(\frac{4}{15}\right)^2 + \frac{4 \times 7}{3!}\left(\frac{4}{15}\right)^3 + \cdots \simeq 1/7099\ldots$$

مثال ۲۱ : عبارت $s_n = x^n + y^n$ را برحسب s و p بیان کنید.

حل :

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases} \Rightarrow X^2 - sX + p = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \\ y = \dfrac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2} \end{cases} \quad (\Delta = s^2 - 4p)$$

اینك برای بیان s_n برحسب s و p کافی است مقادیر x و y را جایگزین کنیم. یعنی:

$$s_n = \left(\frac{s+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n + \left(\frac{s-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n$$

$$\xrightarrow{\text{پس از اختصار لازم}} s_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left[s^n + \frac{n(n-1)}{2!}s^{n-2}\Delta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}s^{n-4}\Delta^2 + \cdots\right]$$

رابطهٔ فوق بیان s_n را برحسب s و p نشان می‌دهد.

تعمیم دستور بسط دوجمله‌ای

ایدهٔ بسط دو جمله‌ای یعنی بسط $(x+y)^n$ الهام‌آور تعمیم آن یعنی بسط چند جمله‌ای $(x+y+z+\ldots)^n$ است. برای به دست آوردن ضریبهای بسط چند جمله‌ای فوق ابتدا لازم است روش تعیین ضریبهای بسط دوجمله‌ای را به‌وسیلهٔ ترکیب ارائه‌دهیم وسپس روش ارائه داده‌شده را تعمیم‌دهیم و از آنجا ضریبهای بسط چندجمله‌ای را به دست آوریم. در اینجا با یك مثال روش تعیین ضریبهای بسط دوجمله‌ای را با روش ترکیب نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، بسط زیررا درنظر می گیریم:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

همان طور که مشاهده می‌شود سمت راست تساوی فوق دارای شش جملهٔ x^5 ، $5x^4y$ ، $10x^3y^2$ ، $10x^2y^3$ ، $5xy^4$ و y^5 است. آنچه دراینجا موردنظر است این است که ضریبهای این جمله‌ها را یعنی ، ۱،۵،۱۰،۱۰،۵،۱ ، را به وسیلهٔ نظریهٔ ترکیبها بیان کنیم. اینك نتایج ضرب چند دو جمله‌ای را بررسی می کنیم. مثلا برای ضرب (A+B) در (C+D) داریم:

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

در مجموع اخیر هر کدام از جمله‌ها، حاصل ضرب دو نماد است، که یکی از اولین پرانتز و دیگری از پرانتز دوم حاصل ضرب اصلی گرفته شده است. مشاهده می‌شود که برای انتخاب یك نماد از دوجمله‌ای اول و یك نماد از دو جمله‌ای دوم دقیقا $2 \times 2 = 4$ راه مختلف وجود دارد . اکنون حاصل ضرب سه دوجمله‌ای زیررا بررسی می کنیم:

$$(A+B)(C+D)(E+F)=ACE+ADE+BCE+BDE+ACF+ADF+BCF+BDF$$

به‌طور مشابه توجه می‌کنیم که این‌عبارت نیز شامل‌هشت جمله است،که هریك، حاصل‌ضرب سه‌نمادی است که به ترتیب از سه دو جمله‌ای انتخـاب شده‌انـد . مجدداً می‌بینیم که بـه $2\times2\times2=8$ طریق می‌توان سه نماد را،که هرکدام ازیك دوجمله‌ای‌هستند، انتخاب کرد. نتایج مشابهی برای حاصل‌ضرب توسیع‌یافتهٔ چهار یا پنج یا n ، چند جمله‌ای وجود دارد. حال حاصل‌ضرب :

$$(A+B)(C+D)(E+F)(g+h)(R+S)$$

را درنظرمی گیریم. بسط عبارت فوق از مجموع

$$2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$$

جمله تشکیل یافته است. به عنوان نمونه‌ای از جمله‌ها می‌توان جملهٔ ACRhE را درنظر گرفت که به‌طور کلی هرجملهٔ بسط، حاصل‌ضرب پنج‌نماد است که هرنماد از یکی‌از پنج‌دوجمله‌ای اصلی انتخاب‌شده است. حال دراینجا باتوجه‌به مطالب‌های‌اخیر، $(x+y)^5$ را به‌صورت حاصل‌ضرب زیردر نظر می گیریم.

یعنی :

$$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

و بدیهی است برای انتخاب پنج نماد ، هر کدام فقط از یـك پرانتز، ۳۲ راه موجود است، اما ۳۲ جملهٔ حاصل‌همگی ازهم متمایز نیستند. به عنوان مثال، اگرعبارت x^2y^3 را به ترتیب از ضرب xها و yهای بخصوصی‌نتیجه‌بگیریم ومثلا داشته‌باشیم:

$$xyyyx=x^2y^3$$

واضح‌است‌که عبارتهای : xxyyy ، xyxyy ، yyxyx، وغیره نیز بازهم x^2y^3 را نتیجه می‌دهند. به‌بیان دیگر عبارت x^2y^3 دربسط $(x+y)^5$ ، دقیقا به تعداد راههایی‌است‌که دو x وسه y را بتوان باترتیبهای مختلف‌نوشت ودرنتیجه باتوجه به نظریـهٔ ترکیبها داریم: $C(5,3)=C(5,2)$. یعنی تعداد راههای نوشتن دو x وسه y دریك‌ردیف (به‌طورکلی با فرض، $r+s=n$ داریم:

$$(C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{s!(n-s)!}=C(n,s)$$

چنین است:

$$C(5\,,\,2)=C(5\,,\,3)=\frac{5!}{2!\,3!}=\frac{5!}{3!\,2!}=10$$

تحلیل فوق، عدد ۱۰ راکه ضریب x^2y^3 دربسط دو جمله‌ای $(x+y)^5$ است را نشان می‌دهـد . با روشی مشابـه می‌توان ضریبهای‌دیگررا به دست آورد، بنابراین خواهیم داشت:

$$(x+y)^5=C(5,0)x^5+C(5,1)x^4y+C(5,2)x^3y^2+C(5,3)x^2y^3+C(5,4)xy^4+C(5,5)y^5$$

در اینجا بـا تعمیم ایـن الگو، برای بسط دو جمله‌ای $(x+y)^n$ که درآن n عددصحیح مثبت‌دلخواهی‌است‌خواهیم داشت :

$$(x+y)^n=C(n,0)x^n+C(n,1)x^{n-1}y+\cdots+C(n,n)y^n$$

لازم به توضیح‌است‌که اغلب‌نماد $\binom{n}{k}$ را مخصوصا در بسط دو جمله‌ای، به‌جای $C(n,k)$ و یا C_n^k به‌کار می‌برند، که درنتیجه بسط دوجمله‌ای به‌صورت زیرنوشته می‌شود:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{k}x^{n-k}y^k+\cdots+\binom{n}{n}y^n$$

بنابراین بسط دوجمله‌ای با روش ترکیب به شکل زیر حاصل می‌شود :

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3+\cdots+y^n$$

اینك دراینجا باروشی مشابه و با استفاده از ترکیب، ضریبهای بسط چندجملـه‌ای $(x+y+z+\dots)^n$ را می‌تـوان نتیجه گرفت. به عنوان مثال، بسط $(x+y+z)^9$ دارای جمله‌ای به صورت $x^3y^4z^2$ است زیرا مجموع توانهای آنها برابر

$$۳+۴+۲=۹$$

است. این جملهٔ بخصوص در بسط زیر:

$$(x+y+z)^9=\underbrace{(x+y+z)(x+y+z)\dots(x+y+z)}_{\text{۹ مرتبه}}$$

به همان تعدادی ظاهر می‌شود که می‌توان x را از سه عامل از نه عامل، و y را ازچهار عامل از شش عامل باقیمانده و z را از دو عامل باقیمانده انتخاب کرد. نظیر استدلالی که در حالت بسط دو جمله‌ای ارائه شد در اینجا نیز می‌توان عبارت $x^3y^4z^2$ را به حالتهای گوناگونی مانند:

zxyzxyyxy ، xyzxyzxyy ، yxxzyzyyx

وغیره نوشت وازاین مدل نتیجه زیر رابه‌دست آورد، یعنی ضریب جملهٔ $x^3y^4z^2$ در بسط سه‌جمله‌ای چنین است:

$$C(۹,۳)\times C(۶,۴)\times C(۲,۲)$$

که برابر است با:

$$\text{ضریب جملهٔ } x^3y^4z^2=\frac{۹!}{۶!۳!}\times\frac{۶!}{۲!۴!}\times\frac{۲!}{۰!۲!}$$

$$=\frac{۹!}{۳!\,۴!\,۲!}$$

به‌طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که ضریب جملهٔ $x^ay^bz^c$ در بسط $(x+y+z)^n$ با فرض این‌که n عدد صحیح مثبت و مخالف صفر و برابر $a+b+c$ باشد مساوی است با:

$$\text{ضریب } x^ay^bz^c=\frac{n!}{a!\,b!\,c!}$$

$(a+b+c=n$ با فرض$)$

بنابراین دراینجا دیگرمی‌توان نتیجه گرفت که به ازای هرعدد صحیح مثبت n ، بسط چند جمله‌ای $(x+y+z+t+\dots)^n$ برابربا مجموع تمام جمله‌هایی به صورت زیر است:

$$\frac{n!}{a!\,b!\,c!\,d!\dots}x^ay^bz^ct^d\dots$$

که در آن d،c،b،a ، ... روی تمام جوابهای معادلهٔ

$$a+b+c+d+\dots=n$$

از مجموعهٔ اعدادصحیح نامنفی تغییرمی‌کنند. بدیهی است که با اختیار کردن $c=d=\dots=۰$ داریم:

$$\frac{n!}{a!\,b!}x^ay^b$$

با شرط $a+b=n$ و یا به عبارت دیگر

$$\frac{n!}{a!(n-a)!}x^ay^{n-a}$$

که همان جملهٔ عمومی بسط دوجمله‌ای است.

مثال ۲۲ : در بسـط $(x+y+z+t)^{19}$ ضرایـب جمله‌هایی به صورت $x^5y^6z^7t^2$ و $x^{12}y^7$ و $x^4y^2z^3t^{10}$ و $x^4y^{10}z^9t^{-4}$ را بنویسید.

حل : بسط فوق دارای جمله‌هایی به شکل

$$\frac{۱۹!}{a!\,b!\,c!\,d!}x^ay^bz^ct^d$$

است با شرط $a+b+c+d=۱۹$ و d،c،b،a نامنفی.

بسط فوق جملهٔ $x^5y^6z^7t^2$ را شامل نمی‌شود زیرادارایم:

$$۵+۶+۷+۲=۲۰$$

همچنین شامل جملهٔ $x^4y^{10}z^9t^{-4}$ نیز نمی‌شود زیـرا توان t منفی است.

اما دوجملهٔ دیگر دربسط‌فوق موجودمی‌باشند وضریبهای آنان چنین است:

$$x^{12}y^{7} \text{ ضریب} = \frac{19!}{12!\,7!\,0!\,0!} = \frac{19!}{12!\,7!}$$

$$(12+7+0+0=19)$$

$$x^{4}y^{2}z^{3}t^{10} \text{ ضریب} = \frac{19!}{4!\,2!\,3!\,10!}$$

$$(4+2+3+10=19)$$

مثال ۲۳ : ضریب $xy^2z^3t^4u^5v^6w^7$ در بسط

$$(x+y+z+t+u+v+w)^{28}$$

چیست؟

حل :

$$xy^2z^3t^4u^5v^6w^7 \text{ ضریب} = \frac{28!}{1!\,2!\,3!\,4!\,5!\,6!\,7!}$$

$$(1+2+3+4+5+6+7=28)$$

مثال ۲۴ : مجموع ضرایب بسط

$$(x+y+z+t+w)^{100}$$

چند رقمی است ($\log 2 = 0/301$).

حل: با اختیار کردن $x=y=z=t=w=1$ داریم: $(1+1+1+1+1)^{100}$ و در نتیجه مجموع ضرایب بسط فوق برابر 5^{100} می‌شود که برای تعیین تعداد ارقام آن از لگاریتم استفاده می‌کنیم.

یعنی:

$$\log 5^{100} = 100\log 5 = 100\log\frac{10}{2}$$

$$= 100(\log 10 - \log 2) = 100(1-0/301)$$

$$= 100(0/699) = 69/9 \implies$$

$$\text{تعداد ارقام} = \text{مفسر} + 1 = 69+1 = 70$$

پس ۷۰ رقمی است.

مثال ۲۵ : مجموع تمام عددهایی به صورت

$$\frac{15!}{a!\,b!\,c!\,d!}$$

که در آن a و b و c و d روی تمام عددهای صحیح نامنفی تغییر می‌کنند و در شرط $a+b+c+d=15$ صدق می‌کنند را بنویسید.

حل : مجموع اعداد برابر است با 4^{15} زیرا اعداد دقیقا ضریبهای بسط $(x+y+z+t)^{15}$ می‌باشند.

مثال ۲۶ : به‌ازای چه مقدارهایی از n، جملهٔ $x^5y^2z^n$ می‌تواند یک جمله از بسط $(x+y+z)^{n^2-15n+70}$ باشد.

حل : شرط این که جمله‌ای از بسط فوق باشد این است که داشته باشیم:

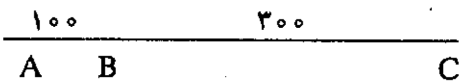
$$5+2+n = n^2-15n+70$$

$$n^2-16n+63=0 \implies (n-7)(n-9)=0$$

$$\implies n=7 \text{ یا } n=9$$

تفریح اندیشه ۳

A به فاصلهٔ ۱۰۰ متر از B و B به فاصلهٔ ۳۰۰ متر از C است. آنها با سرعتهای ثابت به سمت راست حرکت می‌کنند. در ۶ دقیقه A، B را می‌گیرد، و در ۶ دقیقهٔ بعد A، C را می‌گیرد. درچند دقیقه B، C را گرفته است؟



جواب در صفحهٔ ۹۶

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی (۳)

به روشهای مقدماتی

ازکتاب : مسائل پیکارجوی ریاضی

مسألهٔ چهار دروغگو. می‌دانیم که هر یك از چهار شخص A، B، C، وD، تنها در یکی از سه مورد راست می‌گویند. فرض می‌کنیم که A جمله‌ای بگوید، و بعد D بیان کند که C می‌گوید که B می‌گوید که A راست می‌گوید. احتمال این که A واقعاً راست بگوید چیست؟

تبصره. مسألهٔ فوق‌را می‌توان به‌طریق زیر نیز تنظیم کرد. تکه کاغذی بـه A می‌دهیم و او با بعلاوه یا منها علامتی بر آن می‌گذارد؛ می‌دانیم که احتمال بعلاوه نوشتن A، ۱/۳ است. بعد از این کار، A کاغذ را به B رد می‌کند، و او ممکن است قبل از رد کردن آن به C یا علامتی بر آن نگذارد یا علامت قبلی را تغییر دهد. سپس C تکه کاغذ مزبور را، شاید پس از تغییر دادن علامت آن، به D رد می‌کند؛ سرانجام D آن‌را، شاید پس از تغییر دادن علامت آن، به داوری امین می‌دهد. داور بر کاغذ علامت بعلاوه را ملاحظه می‌کند. می‌دانیم که B، C، وD هریك علامت مزبور را با احتمال ۲/۳ تغییر می‌دهند. در این صورت، احتمال این که در ابتدا A علامت بعلاوه را نوشته باشد چیست؟

حل. مسأله‌را طبق تنظیم داده شده در تبصره حل می‌کنیم. اما، فرض می‌کنیم که A به‌جای در دست داشتن یك تکه کاغذ سفید، تکه‌ای با علامت بعلاوه داشته باشد. در این صورت او می‌تواند یا آن‌را دست‌نخورده باقی بگذارد یا علامت آن را به منها تغییر دهد، و می‌دانیم که احتمال این که آن‌را دست‌نخورده باقی بگذارد ۱/۳ است.

آزمایش مورد بحث عبارت از رد کردن کاغذ از A به B به C به D و ملاحظهٔ نتیجهٔ نهایی است. فرض می‌کنیم X این پیش‌آمد باشد که A علامت بعلاوه مزبور را باقی بگذارد و Y این پیش‌آمد باشد که نتیجهٔ نهایی علامت بعلاوه باشد. در این صورت باید $\Pr\{X|Y\}$، احتمال شرطی X با معلوم بودن Y، را پیدا کنیم. این مقدار برابر $\Pr\{X\cap Y\}/\Pr\{Y\}$ است. برای محاسبهٔ $\Pr\{Y\}$ ملاحظه می‌کنیم که برای این که علامت نهایی بعلاوه باشد باید به دفعاتی به تعداد زوج تغییر کرده باشد (زیرا به صورت بعلاوه آغاز شده است). بنابراین یا ۰، یا ۲، یا ۴ مرتبه تغییر کرده است. احتمال این که ۰ مرتبه تغییر کرده باشد $(۱/۳)^۴ = ۱/۸۱$، و احتمال این که چهار بار تغییر کرده باشد $(۲/۳)^۴ = ۱۶/۸۱$ است. برای محاسبهٔ احتمال این که دو بار تغییر کرده باشد، توجه می‌کنیم که $\binom{۴}{۲} = ۶$ طریق انتخاب دو شخصی که آن را تغییر داده‌اند موجوداند. به ازاء هر انتخاب این اشخاص، احتمال این که آنها علامت را تغییر دهند و دو نفر دیگر آن‌را دست‌نخورده باقی بگذارند.

$$(۲/۳)^۲(۱/۳)^۲ = ۴/۸۱$$

است. به‌این ترتیب احتمال دقیقاً دو تغییر

$$۶ \cdot ۴/۸۱ = ۲۴/۸۱$$

است. بنابراین

$$\Pr\{Y\} = ۱/۸۱ + ۲۴/۸۱ + ۱۶/۸۱ = ۴۱/۸۱$$

برای این که پیش‌آمد $X \cap Y$ رخ‌دهد باید تغییراتی به تعداد

زوج بوده باشند، اما A هیچ یك از این تغییرات را انجام نمی‌دهد. بنابراین یا ۰ یا ۲ تغییر بوده است. احتمال ۰ تغییر مانند قبل $(۱/۳)^۴ = ۱/۸۱$ است، اما در این مرحله احتمال دو تغییر تنها

$$\binom{۳}{۲}(۲/۳)^۲(۱/۳)^۲ = ۱۲/۸۱$$

است، زیرا اشخاصی که تغییرات مزبور را انجام می‌دهند می‌توانند تنها به $\binom{۳}{۲} = ۳$ طریق انتخاب شوند. بنابراین

$$\Pr\{X \cap Y\} = ۱/۸۱ + ۱۲/۸۱ = ۱۳/۸۱$$

و بنابراین

$$\Pr\{X|Y\} = (۱۳/۸۱)/(۴۱/۸۱) = ۱۳/۱۴$$

تبصره. مسألهٔ فوق را می‌توان به طریق زیر تعمیم داد. فرض می‌کنیم n شخص $A_۱$ ، … ، A_n مفروض باشند. تکه کاغذی با علامت بعلاوه به $A_۱$ داده می‌شود و او آن را به $A_۲$ و او آن را به $A_۳$ وغیره رد می‌کند؛ سرانجام A_n آن را به داور رد می‌کند. در مرحله j ام، A_j اختیار تغییر علامت را پیش از رد کردن آن دارد؛ فرض می‌کنیم که هر A_j این اختیار را با احتمال p، با $۰ < p < ۱$، به کار می‌برد.

اکنون فرض می‌کنیم که داور علامت بعلاوه‌ای را در پایان این جریان ملاحظه می‌کند. احتمال این که $A_۱$ علامت مزبور را بی تغییر باقی گذاشته باشد چیست؟ (تنظیم این مسأله را به صورت مسألهٔ n دروغگو به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.)

به خاطر سهولت در علامت‌نویسی، $q = ۱ - p$ قرار می‌دهیم؛ به این ترتیب q احتمال این است که A_j علامت مربوطه را تغییر ندهد.

فرض می‌کنیم X پیش آمد این که $A_۱$ علامت مورد بحث را تغییر ندهد باشد، و Y پیش آمد این که علامت نهایی بعلاوه باشد. در این صورت باید

$$\Pr\{X|Y\} = \Pr\{X \cap Y\}/\Pr\{Y\}$$

را حساب کنیم.

برای پیدا کردن $\Pr\{Y\}$، توجه داشته باشید که به خاطر این که علامت نهایی بعلاوه باشد، باید به دفعاتی به تعداد زوج، $2k$، با $۰ \leqslant 2k \leqslant n$، تغییر علامت داده باشد. احتمال این را، که علامت مورد بحث دقیقاً $2k$ مرتبه عوض شده باشد، محاسبه می‌کنیم. $\binom{n}{2k}$ طریق انتخاب اشخاصی که تغییرات مزبور را انجام می‌دهند موجوداند. فرض می‌کنیم این افراد انتخاب شده باشند؛ برای تصریح کار فرض می‌کنیم که افراد مزبور

$$A_۱ ، \ldots ، A_{2k}$$

باشند. احتمال این که تمام آنها علامت مربوطه را تغییر دهند، اما اشخاص باقی‌مانده، یعنی، A_{2k+1} ، … ، A_n آن را دست نخورده باقی بگذارند،

$$\overbrace{p \cdot p \cdots p}^{2k}\ \overbrace{q \cdot q \cdots q}^{n-2k} = p^{2k}q^{n-2k}$$

است. استدلالی مشابه درمورد هر گروه $2k$ نفره‌ای که تغییرات مزبور را انجام دهند به کار می‌رود، بنابراین احتمال موردنظر عبارت است از

$$\binom{n}{2k}p^{2k}q^{n-2k}$$

بنابراین

$$\Pr\{Y\} = \binom{n}{0}q^n + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \binom{n}{4}p^4q^{n-4} + \cdots$$

که در آن سری مورد بحث به مجرد این که $2k$ بزرگتر از n بشود به پایان می‌رسد. برای محاسبهٔ مقدار فوق به صورت بسته، قضیهٔ دوجمله‌ای را درمورد $(q+p)^n$ و $(q-p)^n$ به کار می‌بریم. در این صورت حاصل می‌شود

$$(q+p)^n=\binom{n}{0}q^n+\binom{n}{1}q^{n-1}p+\binom{n}{2}q^{n-2}p^2$$

$$+\binom{n}{3}q^{n-3}p^3+\cdots+\binom{n}{n}p^n$$

$$(q-p)^n=\binom{n}{0}q^n-\binom{n}{1}q^{n-1}p$$

$$+\binom{n}{2}q^{n-2}p^2-\binom{n}{3}q^{n-3}p^3+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}p^n$$

با جمع این دو تساوی و سپس تقسیم بر ۲ ی آن، ملاحظه‌می‌کنیم که

$$\frac{(q+p)^n+(q-p)^n}{2}=\binom{n}{0}q^n+\binom{n}{2}q^{n-2}p^2$$

$$+\binom{n}{4}q^{n-4}p^4+\cdots=\Pr\{Y\}$$

این رابطه، از آن‌جا که $q+p=1$ ، می‌تواند برای به دست دادن

$$\Pr\{Y\}=[1+(1-2p)^n]/2$$

ساده شود.

بعد باید $\Pr\{X\cap Y\}$ را به دست آوریم. برای رخ‌دادن $X\cap Y$ باید تعداد زوجی از اشخاص علامت مذکور را تغییر دهند، اما A_1 نباید یکی از آنها باشد. بنابراین اگر دقیقاً $2k$ نفر علامت مذکور را تغییر دهند، می‌توانند تنها به $\binom{n-1}{2k}$ طریق انتخاب شوند.

هنگامی که $2k$ نفر موردبحث انتخاب‌شدند، احتمال این که علامت مزبور را تغییر دهند درحالی که $n-2k$ نفر دیگر آن را دست نخورده باقی بگذارند همچنان $p^{2k}q^{n-2k}$ است. بنابراین

$$\Pr\{X\cap Y\}=\binom{n-1}{0}q^n+\binom{n-1}{2}p^2q^{n-2}$$

$$+\binom{n-1}{4}p^4q^{n-4}+\cdots$$

$$=q\left\{\binom{n-1}{0}q^{n-1}+\binom{n-1}{2}p^2q^{n-3}\right.$$

$$\left.+\binom{n-1}{4}p^4q^{n-5}+\cdots\right\}$$

عبارت داخل آکولاد را می‌توان مانند فوق محاسبه‌کرد، و به دست آورد:

$$\Pr\{X\cap Y\}=q\frac{1+(1-2p)^{n-1}}{2}$$

سرانجام

$$\Pr\{X|Y\}=\frac{\Pr\{X\cap Y\}}{\Pr\{Y\}}$$

$$=(1-p)\frac{1+(1-2p)^{n-1}}{1+(1-2p)^n}$$

استدلال به کاررفته در این راه‌حل را می‌توان در تعداد بسیاری‌ازمسائل نظریهٔ احتمال، به‌خصوص در نظریهٔ سلسله‌های مارکوف* به‌کاربرد.

---

* Markov Chains

مورد زیر را ملاحظه کنید:

J. G. Kemeny and J. L. Snell, Finite Markov Chains, Princeton, 1960

تفریح اندیشهٔ ۴

ضرب ۴ در ۲۱۷۸ پاسخی می‌دهد که مقلوب ۲۱۷۸ است؛

۴ × ۲۱۷۸ = ۸۷۱۲

عددی چهار رقمی بیابید که چون در ۹ ضرب شود همین مورد را به دست دهد.

جواب در صفحهٔ ۹۶

مقالاتی از خوانندگان

مسعود ساروی
(مجتمع دانشگاهی علوم دریایی نوشهر)

(۱) تحلیل دیگری در بارهٔ قانون پخشی در ضرب بردارها

بیشتر مؤلفان کتابهای درسی ضرب برداری را با فرمول حاصل از مختصات قائم تعریف می‌کنند. بنابراین اتحادهای برداری نظیر قانون پخشی، یعنی:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

را می‌توان با استفاده از عملیات جبری به صورت معمولی نتیجه‌گیری نمود. اما عیب چنین محاسبه‌ای از مفهوم هندسی آن ناشی می‌شود که برای آسودگی عملیات جبری، نادیده گرفته می‌شوند.

در بعضی از کتابها هم این ضرب به صورت هندسی تعریف شده است و قانون پخشی با توجه به این دیدگاه نتیجه گیری می‌شود. به عنوان مثال، کتاب «حساب دیفرانسیل با هندسهٔ تحلیلی»، (تألیف، جورج. ب ــ توماس) را می‌توان نام برد.

بحث زیر با استفاده از تحلیل علم فشار و موازنهٔ سیالات ساکن (هیدرواستاتیك) برای قانون پخشی در کتاب «تحلیل برداری» (تألیف، گیبس و ویلسون) اقتباس شده است.

یك پنج وجهی با کناره‌های:

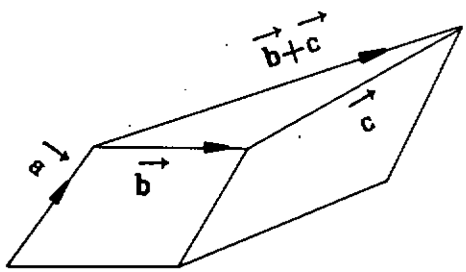
$$\vec{b}+\vec{c}\ ,\ \vec{c}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{a}$$

به‌صورتی که در شکل نشان داده شده است، را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این جسم به وسیلهٔ مایعی (بی‌وزن) با فشار تنظیم شده، پر شده باشد، در هریك از وجوه، مایع یك نیرویی اعمال می‌کند که عمود برهر سطح از همان وجه وجهت آن به صورت عمودی خارج از آن وجه می‌باشد. برای راحتی کار فرض می‌کنیم ثابت تناسب برابر واحد باشد. بنابراین نیروها درهرپنج وجه جسم به ترتیب برابراندابا:

$$\vec{b}\times\vec{a}\ ,\ \vec{a}\times\vec{c}\ ,\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})-\tfrac{1}{2}\vec{b}\times(\vec{b}+\vec{c})\ ,$$

$$\tfrac{1}{2}\vec{b}\times(\vec{b}+\vec{c})$$

قانون پخشی به راحتی با توجه به این موضوع که برآیند این نیروها باید صفر باشد، به دست می‌آید.



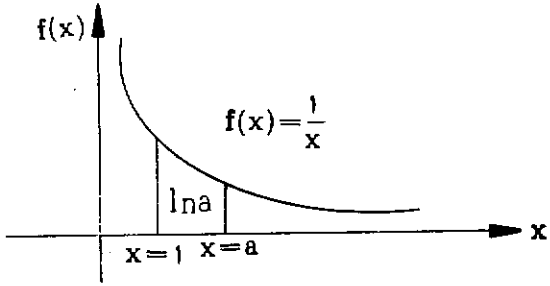
(۲) روش دیگری برای اثبات رابطهٔ:

$$\ln a+\ln b=\ln ab$$

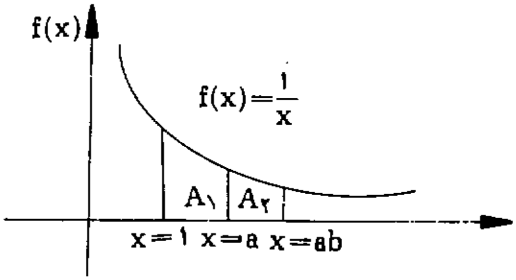
می‌دانیم:

$$\int_{1}^{a}\frac{dx}{x}=\ln a$$

که با استفاده از نمودار $f(x)=\frac{1}{x}$ حاصل $\ln a$ مقدار مساحت زیرمنحنی محدود به خطوط $x=a$ ، $x=1$ و $y=0$ است.



ناحیه‌های A_1 و A_2 از نمودار زیر را در نظر می گیریم:



بدیهی است که:

$$A_1=\int_1^a dx/x=\ln a \qquad (1)$$

و

$$A_1+A_2=\int_1^{ab} dx/x=\ln ab \qquad (2)$$

با تعویض متغیر $x=at$ داریم:

$$A_2=\int_a^{ab} dx/x=\int_1^b dt/t=\ln b \qquad (3)$$

که با جاگذاری (۱) و (۳) در (۲) می گیریم:

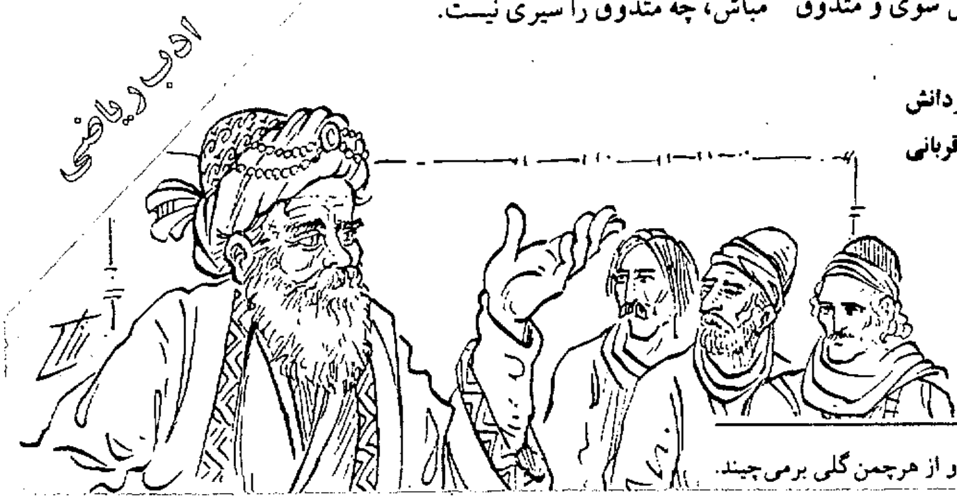
$$\ln a+\ln b=\ln ab$$

به طریقی مشابه می‌شود نشان داد که:

$$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$$

بکوش تا در صناعت خویش کامل شوی و متذوّق* مباش، چه متذوّق را سیری نیست.

از تعلیمات علی‌ابن احمدنسوی به شاگردانش
نسوی نامه ترجمهٔ ابوالقاسم قربانی



* کسی که در علمی متخصص نیست و از هرچمن گلی برمی‌چیند.

جواب نامه‌ها

■ **آقای علی ناجی دانش‌آموز سال سوم ریاضی دبیرستان البرز**

ضمن عرض سلام و تشکر ازنامهٔ محبت‌آمیز شما و آرزوی موفقیت برای شما مخصوصاً در زمینه‌های المپیاد ریاضی و فیزیک، باید به‌عرض برسانیم که برای شکوفایی خلاقیت و ابتکار خود می‌توانید از کتاب‌هایی نظیر کتب زیر استفاده کنید:

۱ـ بازآموزی هندسه ۲ـ مسائل المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف
۳ـ تئوری اعداد ۴ـ ریاضیات چیست ۵ـ متمم جبروآنالیزو ....

■ **آقای علی عمیدی دانش‌آموز سال سوم ریاضی دبیرستان آزادگان گرمسار**

ضمن عرض سلام وتشکراز زحمات بی‌دریغ شماوامید همکاری هرچه بیشتر و روزافزون با مجلهٔ خودتان، باید به‌عرض برسانیم که مقالهٔ شما به‌دست ما رسید و پس از بحث و تبادل نظر امیدواریم امکان درج آن در شماره‌های آیندهٔ مجله بوجود آید. همچنین در انتظار مقالات بعدی شما هستیم.

■ **آقای سیامک جعفری مهندسی شیمی دانشکدهٔ نفت**

ضمن عرض سلام و تشکر از مقالهٔ شما در رابطه با اثبات برداری و مثلثاتی قضایای سوا و منلائوس، باید به‌عرض برسانیم که مقالهٔ شما پس از بحث‌وبررسی لازم در شماره‌های آینده متناسب با محتوای مجله به‌نام خودتان به‌چاپ خواهد رسید و درآخر از نظرات و پیشنهادات شما سپاسگزاریم و امید است تا حدامکان به آنها ترتیب اثر دهیم. با همکاری هرچه بیشتر و مقالات و نظرات بعدی خودتان ما را یاری کنید.

■ **آقای حسین سبزرو دانش‌آموز سال چهارم ریاضی منطقهٔ ۱۶ تهران**

از مسائل ارسالی شما متشکریم و سعی می‌شود در شماره‌های آینده از مسائل و مقالات شما در جای مناسب استفاده شود. به‌امید همکاری مجدد شما و مقالات و مسائل بعدی شما هستیم.

■ **آقای سیامک جعفری**

ضمن عرض سلام و تشکر از مقالهٔ ارسالی شما، باید به‌عرض برسانیم که در برنامهٔ درسی دبیرستانهای ایران در روابط برداری و نمایش بردار از علامت $\rightarrow$ استفاده شده است، مثلاً بردار $\overrightarrow{AB}$ یا $\vec{V}$ بنابراین استفاده از مقالهٔ شما برای مقطع دبیرستان ایجاد دوگانگی برای دانش‌آموزان می‌نماید، منتظر مقالات دیگری از شما در ارتباط با ریاضیات دبیرستانی هستیم.

■ **آقای جعفریه**

ضمن تشکر از مقاله شما باید به‌عرض برسانیم که مقاله‌ای بسیار کلی و عمومی درمورد آلگوریتم ضرب اعداد m رقمی در n رقمی و محاسبهٔ آنان به‌طور مستقیم درصورت‌امکان در شماره‌های‌بعدی مجله خواهدآمد.

■ **آقای افشین تاجیان دانش‌آموز سال چهارم ریاضی**

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما به‌عرض می‌رسانیم که سعی کنید حتی‌الامکان مقالات را در سطح دانش‌آموزان دبیرستان ارائه دهید تا قابل استفادهٔ آنان باشد تا امکان درج آن در مجله بوجود آید.

■ **آقای عباس روح‌الامینی دانش‌آموز دبیرستان نمونه شهید مصطفی خمینی**

با تشکر از شما برای ارسال مسائل برای حل، درصورت امکان از مسائل شما در جای مناسب استفاده خواهدشد. سعی کنید که صورت مسائل کوتاه و جواب آنان نیز طولانی نباشد.

■ **آقای فرشید شکوهی لیسانسیهٔ ریاضی کاربردی**

ضمن عرض سلام وتقدیرازنامهٔ‌شمادررابطه‌با محاسبهٔ $\lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x^n}$ نکاتی را متذکر می‌شویم.

در محاسبهٔ حد فوق شما نتیجه‌گیری زیر را ارائه داده‌اید:

$$-1 \leqslant \sin\frac{1}{x^n} \leqslant 1 \Rightarrow -x^n \leqslant x^n \sin\frac{1}{x^n} \leqslant x^n \quad (1)$$

که در حالت عمومی درست نیست. و فقط درحالت $x \to 0^+$ و n زوج درست‌می‌باشد. زیرااگر $x \to 0^-$ و n عددی فردباشد نتیجه‌چنین‌خواهدشد:

$$-1 \leqslant \sin\frac{1}{x^n} \leqslant 1 \Rightarrow x^n \leqslant x^n \sin\frac{1}{x^n} \leqslant -x^n \quad (2)$$

که از روابط (۱) و (۲) و با توجه به قضیهٔ فشار داریم:

$$\lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x^n} = 0$$

■ **خانم ویدا برفر (دبیر ریاضی)**

ضمن عرض سلام و تشکر از مقاله و مسائل ارسالی شما، به‌عرض می‌رسانیم که پس از بحث و تبادل نظر امیدواریم که امکان درج مقالهٔ شما در شماره‌های آیندهٔ مجله بوجود آید. ضمناً مسائل را در سطح مطلوب‌تری ارائه دهید.

معرفی کتابهای ریاضی

دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی

برای دانش‌آموزان دبیرستان و داوطلبان کنکور.

مؤلفان: محمد هاشم رستمی ـ محمد علی واعظیان

ناشر : نشر گزاره.

ریاضیات محض و به خصوص هندسه در تقویت قوهٔ تفکر و شکوفایی استعدادها نقش مهمی به عهده دارند.

پروفسور جورج پولیا George Polya (۱۹۸۵ ـ ۱۸۸۷) ریاضی‌دان برجسته قرن حاضر و استاد مسلّم روش تدریس ریاضی می‌گوید: «اگر تعلیم و تربیت عمومی، درصدد ارزانی داشتن اندیشهٔ نظام منطقی به دانش‌آموزان و دانشجویان است، باید در آن، مقام خاصی برای استدلالهای هندسی درنظر گرفته شود. حتی استدلالهای ساده ممکن است از دیدگاه هوش افزایی سودمند واقع شود.»

کتاب دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی باتوجه به نیاز فوق تألیف گردیده است تا بتواند پاسخگوی نیازهای دانش‌آموزان دبیرستان در یادگیری هرچه بهتر درس هندسه، و درضمن تقویت قوهٔ تفکر و استدلال آنان و ایجاد پیشرفتشان در دیگر دروس نیز باشد.

در این کتاب مطالب هندسه چهار سال دبیرستان همراه با مطالب تکمیلی در چهار بخش آمده است. حدود ۳۰۰ تست و مثال برای راهنمایی حل شده است و ۷۶۹ تست نیز برای حل وجود دارد. این تستها شامل تستهای هندسهٔ کنکورهای سراسری وزارت علوم و آموزش عالی در رشته علوم‌تجربی (از ۱۳۵۸ تا ۱۳۷۰) و کنکورهای رشتهٔ پزشکی دانشگاه آزاد اسلامی ایران (از ۱۳۶۴ تا ۱۳۷۰) نیز می‌باشد.

تستها براساس بخشهای چهارگانه کتاب و فصلهای هربخش تنظیم شده‌است تا هر دانش‌آموزی پس از یادگیری درس مربوط به هر فصل، تستهای در ارتباط با آن درس را حل نماید.

مسائل و تستهای ارائه شده در این کتاب در بسیاری از موارد به مراتب بیش از یک مسئله معمولی هندسه ذهن را به تلاش و تفکر وامی‌دارد. مثلاً دربخشی از این کتاب تستهایی وجود دارد که باید امکان حل مسئله، با داشتن دو فرض، مورد بررسی قرارگیرد، و یکی از حالتهای پنجگانه‌ای که می‌توند جواب مسئله باشد، مشخص گردد.

این کتاب علاوه بر تأمین نیازهای دانش‌آموزان رشتهٔ علوم تجربی در زمینهٔ هندسه، برای دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی فیزیک نیز مفید است.

مسائل پیکار جوی ریاضی، ای. ام. یاگلوم،

جلد اول: آنالیز ترکیبی و نظریهٔ احتمال

جلد دوم: مسائلی از شاخه‌های گوناگون ریاضیات

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، نشر علوم پایه

یاگلوم نویسندهٔ نامدار روسی فردی ناشناخته در جامعهٔ ریاضی ما نیست. پیش از این کتابهای گزیده‌ای از مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی و تبدیلهای هندسی او به فارسی ترجمه شده‌اند و اکنون با این دو کتاب دو اثر مهم دیگر از این ریاضیدان نامی به فارسی زبانان معرفی می‌شود.

جلد اول کتاب درمورد **آنالیز ترکیبی و نظریهٔ احتمال** است و صد مسأله دارد. مسائل در هشت فصل به ترتیب زیر تنظیم شده‌اند:

مسائل مقدماتی، نمایش اعداد صحیح به صورت مجموعها و حاصل ضربها، مسائل ترکیبی مربوط به صفحهٔ شطرنج، مسائل هندسی شامل آنالیز ترکیبی، مسائل مربوط به ضرایب دوجمله‌ای، مسائل مربوط به محاسبات احتمالات، آزمایشهایی با بی‌نهایت نتیجهٔ ممکن، آزمایشهایی با پیوستاری از نتایج ممکن.

جلد دوم در مورد مسائلی ازشاخه‌های گوناگون ریاضیات است و هفتاد و چهار مسأله دارد. فصول این مجلد عبارتند از:

نقاط و خطوط، شبکه‌های نقاط واقع درصفحه، توپولوژی، خاصیتی از معکوسات اعداد صحیح، چند ضلعیهای محدب، بعضی از خواص دنباله‌های اعداد صحیح، توزیع اشیا، شمارش غیراعشاری، چندجمله‌ایهای باکمترین انحراف از صفر (چند جمله‌ایهای چبیشف)، چهار فورمول برای π، محاسبهٔ سطوح نواحی محصور با منحنیها،بعضی از حدود قابل توجه، نظریهٔ اعداد اول.

حل کامل مسائل و راهنماییها و پاسخها نیز در پایان هردو جلد آمده است.

کتاب شامل مسائل متعارف، مشکل، مشکلتر و مشکلترین است. سه مورد اخیر به‌ترتیب با یک، دو، یا سه ستاره مشخص شده‌اند. این مسائل غالباً دستاوردهای ارزشمند ریاضیدانهای برجسته‌اند. کتاب را می‌توان نه تنها به صورت کتاب مسأله، بلکه به عنوان مجموعه‌ای از قضایای ریاضی درنظر گرفت.

تبدیلهای هندسی، ای. ام. یاگلوم

جلد اول ، ترجمهٔ اسدالله کارشناس، عمید رسولیان.
جلد دوم، ترجمهٔ محمد باقری،
جلد سوم، ترجمهٔ محمد هادی شفیعیها،
ناشر: مرکز نشر دانشگاهی

نویسندهٔ کتاب یاگلوم مؤلف نامدار روسی است. جلد اول آن یک مقدمه و دو فصل دارد. مقدمه به **هندسه چیست؟** پرداخته و فصل اول به **تغییر مکانها** و فصل دوم به **تقارن** اشتغال یافته، حل مسائل فصل اول و دوم نیز در پایان کتاب آمده است.

مؤلف خود در مقدمهٔ کتاب بر این است که:

کتاب به هندسهٔ مقدماتی اختصاص دارد، و وظیفهٔ آن، آشنا ساختن خواننده با یک رشته قضایایی که برای وی جدیدند نیست، چراکه بیشتر قضایای هندسهٔ مقدماتی، که فراتر از محدودهٔ درسهای دبیرستانیند، صرفاً مطالب نادری هستند که مورد استعمال خاصی ندارند و بیرون از مسیر پیشرفت ریاضی قرار دارند. در حالی که هندسهٔ مقدماتی، علاوه بر قضایای واقعی، شامل دو اندیشهٔ کلی مهم است که پایهٔ تمامی پیشرفتهای بعدی هندسه‌اند، و اهمیت آنها از این محدودهٔ کلی فراتر می‌رود. از یک سو در ذهن خود روش قیاسی و پایهٔ اصل موضوعی هندسه را داریم و از سوی دیگر تبدیلات هندسی و مبنای نظریهٔ گروهی هندسه را. این اندیشه‌ها بسیار بارور بوده‌اند؛ تکامل هر یک به هندسهٔ نااقلیدسی منجر شده است، وظیفهٔ اصلی این کتاب شرح اندیشهٔ دوم، یعنی فکر مبنای نظریهٔ گروهی هندسه است.

جلد دوم نیز شامل یک مقدمه و دو فصل است. مقدمه به این که **هندسه چیست؟** پرداخته است و فصلها به ترتیب درمورد **رده‌بندی تبدیلهای تشابهی** و **کاربردهای دیگر طولپاییها** و **تشابه‌ها** سخن گفته‌اند. _

در مقدمهٔ کتاب پس از این که به این مطلب اشاره شده که، مفهوم فاصلهٔ بین نقاط که طبق تعریف ما از هندسه باید نقشی اساسی داشته باشد، عملاً به‌طور مستقیم در قضیه‌ها ظاهر نمی‌شود، تعریف ف. کلاین، نخستین فردی که تعریف دقیقی برای هندسه داده، آورده شده است: هندسه علمی است که به مطالعهٔ خواصی از شکلهای هندسی می‌پردازد که بر اثر تبدیلهای تشابهی تغییر نمی‌کنند. تبدیلهای تشابهی را می‌توان به عنوان تبدیلهایی تعریف کرد که نسبت فواصل بین زوجهای نقاط را تغییر نمی‌دهند.

جلد سوم کتاب که مفصلتر از دو جلد دیگر است یک مقدمه و یک فصل و یک پیوست دارد. مقدمه به بررسی نهایی **هندسه چیست؟** پرداخته و فصل اول تبدیلهای آفین و تصویری را مورد بررسی قرار داده و پیوست از هندسهٔ نااقلیدسی لباچفسکی - بویوئی یا هندسهٔ هذلولوی سخن به میان آورده. حل مسائل کتاب نیز در پایان آن آمده است.

مسائل مسابقه‌ای

• حمیدرضا امیری

۱ـ بدون بسط و با استفاده از خواص دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$$

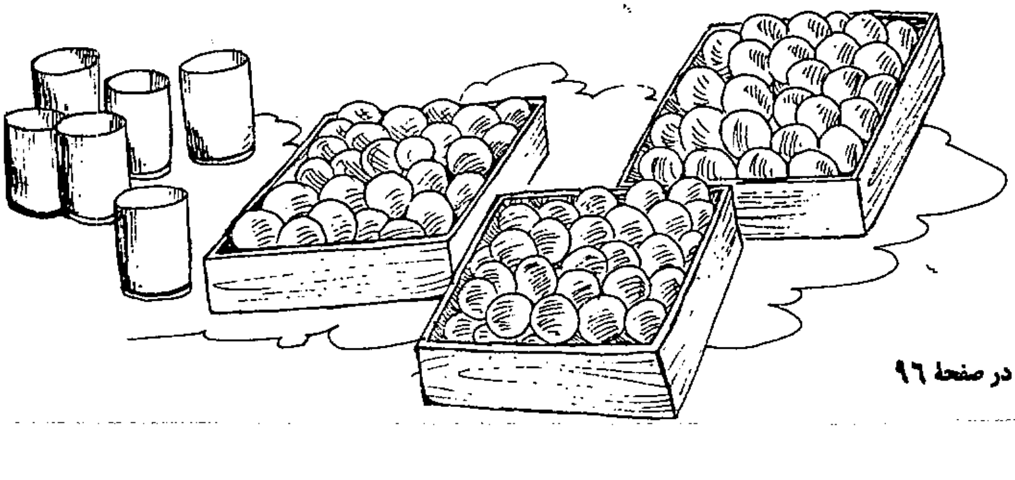
۲ـ تابعی با چند ضابطه چنان تعریف کنید که نمودار حاصل از آن کلمهٔ «برهان» را در ناحیهٔ اول مشخص کند. (دو نقطهٔ موجود دراین کلمه می‌توانند توخالی یا توپر باشند.)

مسئله‌ای از المپیادهای ریاضی

عدد($5^{1985} - 1$)را به حاصل‌ضرب سه عدد صحیح، که هریک از آنها از 5^{100} بزرگتر باشند، تجزیه کنید.

تفریح اندیشهٔ ۵

سه جعبه را با تعداد یکسانی مهره پرکرده‌ایم. به هریک از شش قوطی خالی یک دوازدهم مهره‌های واقع در هرجعبه را انتقال داده‌ایم. در این صورت هرجعبه دوازده مهره بیش‌از هرقوطی دارد. هرجعبه در آغاز چند مهره داشته است؟



جواب در صفحهٔ ۹۶

حل مسائل مسابقه‌ای

سید حسین سید موسوی

بعد از طرح این مسئله بـه عنوان مسئله مسابقه‌ای ، راه حل‌های بسیاری ازطرف‌خوانندگان به دفتر مجله رسید که در این میان یکی‌از زیباترین راه‌حل‌ها که متعلق‌به آقای سید رضا موسوی دانشجوی‌کارشناسی‌ارشد ریاضی محض دانشکده‌علوم دانشگاه‌فردوسی مشهد است در زیر آورده شده است.

حل ۱- اگر $[a,b,c,d,e]$ شامل‌پنج عددطبیعی‌متوالی باشدلااقل‌دوعدد فرد متوالی دراین مجموعه وجوددارد، فرض کنیم آنها a و b باشند، حداکثر یکی‌از آنها بر ۳ بخش‌پذیر است ، زیرا اگر $3|a$ و $3|b$ در این صورت $3|a-b$ ، در نتیجه $3|+2$ یا $3|-2$ که‌این تناقض‌است، بنابراین‌می‌توان فرض‌کرد $3\nmid a$ وچون a فرداست، $2\nmid a$ ، ادعا می‌کنیم همین a نسبت‌به چهارعدد دیگراین مجموعه‌اول است. برای این‌کار فرض‌کنید x عضو دلخواه از این مجموعه‌باشدکه متمایزاز a است، فرض می‌کنیم $t=(a,x)$ ، واضح است t حداکثر ۴ است‌بنابراین $t=1$ یا $t=2$ یا $t=3$ یا $t=4$ است. چون a فرد است پس $t=2$ و $t=4$ قابل‌قبول نیست، $t=3$ نیز جواب‌نیست‌به دلیل‌اینکه $3\nmid a$ ، بنابراین $t=1$ پس a نسبت به چهار عدد دیگر اول است. □

حل ۲- ابتدا به بیان‌لم‌های زیر می‌پردازیم. اثبات این لم‌ها برعهدهٔ خواننده است.

لم ۱- مجموع و تفاضل دو ماتریس بالا مثلثی هم‌مرتبه ، ماتریسی‌بالا مثلثی است.

لم ۲- حاصل‌ضرب دوماتریس‌بالا مثلثی‌هم مرتبه ماتریسی بالا مثلثی است.

نتیجه: اگر A ماتریسی‌بالا مثلثی‌باشد، به ازای هرعدد صحیح‌نامنفی n ، A^n بالا مثلثی‌است.

لم ۳- هرماتریس مربع در معادلهٔ سرشت‌نمایی‌خودصدق می‌کند، یعنی، در صورتی‌که معادله سرشت نمایی یك ماتریس $n\times n$ مانند A به شکل

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0$$

باشد، آنگاه

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=\bar{0}$$

اکنون، نشان می‌دهیم، وارون‌یك ماتریس‌بالا مثلثی وارون‌پذیر ماتریسی‌بالا مثلثی‌است. برای‌این‌کار،فرض‌کنید A یك‌ماتریس بالا مثلثی‌باشدکه معادلهٔ سرشت‌نمایی آن‌به صورت

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_0=0$$

است بنابر لم ۳ ، داریم

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=\bar{0}$$

چون A وارون‌پذیراست، پس $a_0\neq 0$ ، درنتیجه:

$$A(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1I)=-a_0I$$

پس

$$A\left(-\frac{1}{a_0}A^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I\right)=I$$

در نتیجه

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_0}A^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I$$

از سوی دیگر بنابر لم ۲، A^{n-1} ، A^{n-2} ، ...، A و I بالا‌مثلثی‌اند وبنابر لم ۱ ،

$$-\frac{1}{a_0}A^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I$$

یعنی A^{-1} بالا مثلثی است.

مسائل و تست برای حل

(مورد استفادهٔ دانش آموزان سالهای اول تا چهارم دبیرستان)

● هندسه: محمد هاشم رستمی ● ریاضیات جدید : حمید رضا امیری

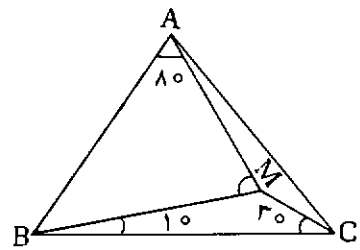
● جبر و مثلثات: احمد قندهاری و محمد رضا هاشمی

مسائل ریاضیات سال اول

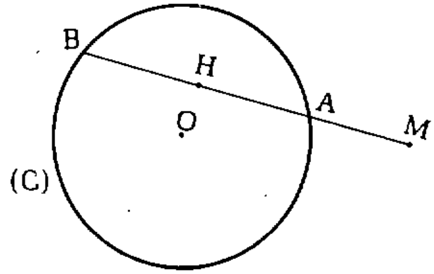
۱ـ مثلث متساوی الساقین ABC ($AB=AC$) با زاویهٔ رأس $B\hat{A}C=80^\circ$ مفروض است . نقطهٔ M را درون این مثلث چنان در نظر می گیریم که :

$$M\hat{B}C=10^\circ \quad \text{و} \quad M\hat{C}B=30^\circ$$

باشد. اندازهٔ زاویهٔ AMB را تعیین کنید.



۲ـ دایرهٔ (C) به مرکز O و نقطهٔ M مفروض‌اند . از نقطهٔ M خطی رسم می کنیم که دایرهٔ (C) را در دو نقطهٔ A و B قطع کند . مکان هندسی نقطهٔ H وسط وتر AB را وقتی قاطع MAB ، حول نقطهٔ M دوران می کند ؛ تعیین کنید . (بحث کنید.)



۳ـ اگر ارزش گزارهٔ :

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \sim s)$$

نادرست و ارزش گزارهٔ $(\sim r \wedge p)$ درست باشد، ارزش گزارهٔ

$$(r \vee p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$$

را تعیین کنید.

۴ـ ثابت کنید $A' \cup B = M$ اگر و فقط اگر

$$A \cap B' = \varnothing$$

(معصومه مشهدی فراهانی، سال اول)

۵ـ اگر :

$$A = 8^3 \times 6^2 (x^3 - y^3)(x+y)^2$$

$$B = 6^3 \times 4^2 (x^3 + y^3)(x-y)^2$$

کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین مقسوم علیه‌مشترک A و B را بیابید.

۶ـ کسر $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ را گویا کنید.

تستهای سال اول

۱ـ پاره‌خط AB به‌طول ۸ سانتیمتر در یک‌صفحه‌مفروض است. چندنقطه در این‌صفحه وجود دارد که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر واقع باشند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ــ مجموع اضلاع و اقطار یك n ضلعی محدب برابر ۳۶ است. مجموع زوایای داخلی این n ضلعی چند قائمه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۳ــ تفاضل فاصله‌های هر نقطه واقع بر امتداد قاعدهٔ یك مثلث متساوی‌الساقین از دوساق آن مثلث همواره برابراست با اندازهٔ:

۱) ارتفاع وارد برقاعده ۲) ساق مثلث

۳) قاعدهٔ مثلث ۴) ارتفاع‌وارد برساق

۴ــ گزارهٔ $[(q\wedge p)\vee(\sim q\vee p)]$ هم‌ارز کدام گزاره است ؟

۱) $\sim p\vee q$ ۲) $\sim q\vee p$

۳) $p\wedge\sim q$ ۴) $\sim p\wedge q$

۵ــ عکس‌نقیض گزارهٔ شرطی «اول بودن عدد p شرط کافی‌است برای طبیعی‌بودن آن» کدام‌است؟

۱) طبیعی نبودن عدد p شرط کافی است برای اول نبودن آن.

۲) اول‌نبودن‌عدد p شرط‌لازم‌است برای‌طبیعی‌بودن آن.

۳) اول‌نبودن عدد p شرط‌لازم‌است برای‌طبیعی‌نبودن آن .

۴) موارد ۱) و ۳) صحیح است.

۶ــ هرگاه داشته‌باشیم :

$$(A\cup B')=M \text{ و } (A\cap B')=\varnothing$$

در این صورت:

۱) $B'=A$ ۲) $A'=B$

۳) $A=B$ ۴) $A\neq B$

۷ــ حاصل‌عبارت $\sqrt[21]{\dfrac{a}{\sqrt[22]{a}}}$ با شرط $a>0$ برابرکدام است :

۱) $\sqrt[21]{a^{22}}$ ۲) $\sqrt[21]{a}$

۳) $\sqrt[22]{a^{21}}$ ۴) $\sqrt[22]{a}$

۸ــ به ازای‌کدام مقدار m ریشهٔ معادله :

$$m^2(x-1)=mx-1$$

برابر صفر است:

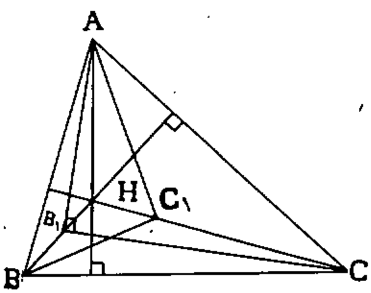
۱) $m=0$ ۲) $m=1$

۳) $m=2$ ۴) $m=-1$

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ــ مثلث ABC با زوایای حاده مفروض است. نقطهٔ تقاطع ارتفاعهای این مثلث را H می‌نامیم. روی پاره خطهای راست HB و HC نقطه‌های B_1 و C_1 راچنان‌انتخاب‌می‌کنیم که $A\hat{B}_1C=A\hat{C}_1B=90°$ باشد . ثابت‌کنید :

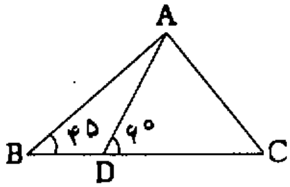
$$AB_1=AC_1$$



۲ـ مثلث ABC مفروض است. نقطه D را روی ضلع BC چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{DB}{DC}=\frac{1}{2}$ باشد. در صورتی که

$$A\hat{B}C=45^\circ \quad \text{و} \quad A\hat{D}C=60^\circ$$

باشند، اندازهٔ زاویهٔ ACB را تعیین کنید.



۳ـ هرگاه R_1 و R_2 دو رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A باشند ثابت کنید $(R_1\cap R_2)$ نیز یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است. آیا $(R_1\cup R_2)$ در حالت کلی می‌تواند یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد؟ چرا؟

۴ـ رابطهٔ R روی IN به صورت زیر تعریف می‌شود، آیا این رابطه، یک رابطهٔ هم‌ارزی است؟ (تحقیق کنید.)

$$\forall a,b\in N\,;\ aRb \iff a+b-ab\leqslant 1$$

۵ـ ثابت کنید که تابع با ضابطهٔ $f:Z\to N$ یک به یک و پوششی است.

$$f(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ -2x+1 & x\leqslant 0\end{cases}$$

۶ـ نقاط $A\begin{vmatrix}2\alpha-4\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}0\\4\alpha-2\end{vmatrix}$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروضند. اگر فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطه C وسط AB برابر $\sqrt{2}$ باشد مقدار α را بیابید.

۷ـ معادله $x^2-3x+1=0$ مفروض است، اگر x' و x'' ریشه‌های این معادله باشد. معادله درجه‌دوم جدیدی بسازید که ریشه‌های آن $x'+x''^2$ و $x''+x'^2$ باشد.

۸ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$$

(بهرام فرجی چهارم)

۹ـ بین دو رابطهٔ زیر θ را حذف کنید و نشان دهید که

$$x^2+y^2=1$$

$$\begin{cases}2x=y\,tg\theta+\sin\theta\\ 2y=x\,cotg\theta+\cos\theta\end{cases}$$

(داود خجسته دانشجو)

تستهای سال دوم ریاضی

۱ـ از نقطهٔ D واقع برضلع BC از مثلث ABC خطی موازی با میانه AA' رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتدادآنها را به ترتیب در نقاط E وF قطع کند. نسبت $\frac{AE}{AF}$ همواره برابر کدام نسبت است؟

۱) $\frac{AC}{AB}$ ۲) $\frac{AC}{BC}$

۳) $\frac{AB}{BC}$ ۴) $\frac{AB}{AC}$

۲ـ محیط مثلثی برابر ۴۰ سانتیمتر و اندازهٔ پاره‌خطهای ایجادشده به وسیلهٔ نیمساز زاویهٔ B روی ضلع Cت برابر ۴ سانتیمتر و ۶ سانتیمتراست. دراین‌صورت اندازه‌ضلع a کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۳ـ اقطار یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه برهم عمودند. در صورتی که h ارتفاع و a و b قاعده‌های این ذوزنقه باشند، کدام رابطه همواره درست‌است؟

۱) $a^2=b\cdot h$ ۲) $b^2=a\cdot h$

۳) $h^2=a\cdot b$ ۴) $4h^2=a\cdot b$

۴- مجموعهٔ $[A\times(B\cup C)]-(A\times C')$ با کدام مجموعه برابر است:

۱) $A\times B$ ۲) $A\times C$

۳) $B\times C$ ۴) $A\times(B-C)$

۵- هرگاه R یك رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد و [a] نشان‌دهندهٔ کلاس هم‌ارزی a باشد و داشته‌باشیم:

$$\forall\, b\in A\ ;\ b\in[a]$$

دراین صورت:

۱) R رابطهٔ ترتیب نیزهست ۲) $R=\varnothing$

۳) $R=A\times A$ ۴) هیچ کدام

۶- کدامیك از توابع زیر یك به یك است (توابع حقیقی هستند)؟

۱) $f(x)=|x|$ ۲) $f(x)=x^2+1$

۳) $f(x)=x^4+1$ ۴) $f(x)=x^3|x|$

۷- کدامیك ازتوابع زیر (از IR^2 به IR^2) نه یك به یك و نه پوششی است ؟

۱) $f(x,y)=(x-y\ ,\ y-x)$

۲) $f(x,y)=(x+1\ ,\ y-2)$

۳) $f(x,y)=(x-y, 3x-4y)$

۴) $f(x,y)=(2x-1, 4y-5)$

۸- معادله درجه دومی با ضرایب گویا که یك ریشهٔ آن $2-\sqrt{5}$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2-4x+1=0$

۲) $x^2+4x+1=0$

۳) $x^2-4x-1=0$

۴) $x^2+4x-1=0$

۹ - اگر :

$$\begin{cases}2x+\frac{3}{2}y+4z=1/75\\ 3x+2y+5z=1/25\end{cases}$$

آنگاه ?$x+y+z=$:

۱) (۲) ۲) (۲/۱۵)

۳) (۲/۲۵) ۴) (۲/۴۵)

۱۰- از تساوی :

$$\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^{2n-1}+3\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)^{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$$

مقدار $\cos x$ برابراست با:

۱) $-\frac{3}{5}$ یا ۱ ۲) ۱- یا ۱

۳) فقط $\frac{-3}{5}$ ۴) فقط ۱

مسائل ریاضیات سوم ریاضی

۱- مثلث ABC مفروض است. نقاط A_1وB_1وC_1 را به ترتیب روی ارتفاعات AA' و BB' و CC' از این مثلث چنان اختیار می کنیم که :

$$A_1A'=\frac{1}{3}AA'$$

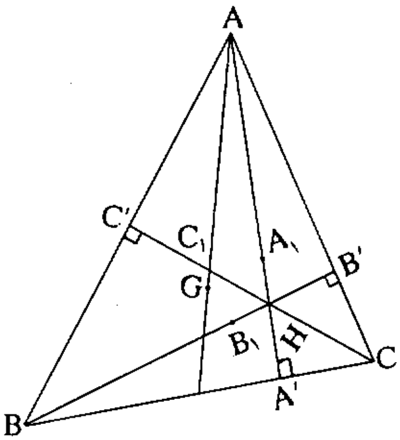
$$C_1C'=\frac{1}{3}CC'\ \text{ و }\ B_1B'=\frac{1}{3}BB'$$

باشد. ثابت کنید که :

اولاً- نقاط A_1 و B_1 و C_1 و نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC و نقطهٔ G محل برخورد سه‌میانه این مثلث

روی یك دایره واقع‌اند.

ثانیاً ــ ثابت کنید که مثلث $A_1B_1C_1$ با مثلث ABC متشابه است.



۲ــ ثابت کنید که در هر چهار ضلعی، مجموع مربعات اندازه‌های دوضلع روبرو، منهای مجموع مربعات اندازه‌های دوضلع دیگر، برابراست با، دوبرابر حاصلضرب اندازهٔ یك قطر در تصویر قطردیگر برروی همان قطر.

۳ــ درفضای برداری چندجمله‌ایهای از درجهٔ کوچکتر یا مساوی با ۲، همراه‌با ضرایب حقیقی ثابت کنید بردارهای ۵ و $x+1$ و x^2+x+1 و x^3+x^2+x+1 مستقل‌خطی‌اند.

۴ــ درفضای برداری V، هرگاه دربین بردارهای:

$V_1 , V_2 , \dots ; V_n$

یکی‌از بردارها مضرب ناصفری از بردار دیگری‌باشد، ثابت کنید این n بردار وابستهٔ خطی‌اند.

۵ــ هرگاه V یك فضای برداری روی IR باشد و u برداری ثابت‌در V، دراین صورت ثابت کنید:

$S=\{ ru / r \in IR \}$

یك زیرفضای V است.

۶ــ نمودار $|x-1|-|y-2|=2$ را رسم کنید.

۷ــ مطلوب است محاسبهٔ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx}{\sin 2x+\sin 4x+\dots+\sin 2nx}$$

۸ــ عبارت زیر را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید:

$S=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos x}$

۹ــ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=tg\,x+cotg\,x$

تستهای سوم ریاضی

۱ــ دورترین و نزدیکترین فاصلهٔ یك نقطه واقع‌در داخل یك دایره از آن دایره برابر ۸ و ۲ است. اندازهٔ وتر به طول مینیممی که از این نقطه در دایره رسم می‌شود کدام است؟

۱) ۲　۲) ۴　۳) ۸　۴) ۱۶

۲ــ اندازه‌های سه‌ضلع‌مثلثی ۵ و۱۲ و۱۳ است. اندازهٔ کوچکترین میانهٔ مثلث کدام است؟

۱) ۳/۵　۲) ۴/۵　۳) ۵/۵　۴) ۶/۵

۳ــ نتیجه‌ترکیب سه‌تقارن مرکزی کدام تبدیل‌است؟

۱) انتقال　۲) تقارن مرکزی

۳) تقارن محوری　۴) تجانس

۴ــ سطح کل یك چهار وجهی منتظم $9\sqrt{3}$ است. اندازهٔ حجم این‌چهار وجهی کدام است؟

۱) $9\sqrt{2}$　۲) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{9\sqrt{2}}{6}$　۴) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

۵- کدامیک از مجموعه‌های زیر، زیرفضای IR^3 نمی‌باشد؟

۱) $\{(x,y,z) \mid x=y=z\}$

۲) $\{(x,y,z) \mid x+y<z\}$

۳) $\{(x,y,z) \mid x-۲y=۳z\}$

۴) $\{(x,y,z) \mid ۲x-y+۱=z+۱\}$

۶- کدام مجموعه از بردارها، وابسته خطی هستند (در فضای برداری IR^2)؟

۱) $\{(۲,۱)(۱,۰)(۲,۱)\}$

۲) $\{(۲,۱)(۱,۲)\}$

۳) $\{(۱,۰),(۰,۱)\}$

۴) $\{(۱,۱),(۰,۱)\}$

۷- هرگاه بردارهای $(a,۵)$ و $(۶,b)$ مستقل خطی باشند در این صورت:

۱) $ab=۳۰$ ۲) $a=mb$

۳) $b=ma$ ۴) $ab\neq۳۰$

۸- کدام گزینه درست است؟

۱) هر زیرمجموعه از یك مجموعه بردارهای وابستهٔ خطی، وابستهٔ خطی است.

۲) هر مجموعه که شامل چند بردار مستقل خطی باشد، مستقل خطی است.

۳) هرگاه در یك مجموعه از بردارهای فضای برداری، برداری مضربی از بردار دیگر باشد آن مجموعه بردار وابستهٔ خطی‌اند.

۴) هر بردار ناصفر، وابستهٔ خطی است.

۹- سادهٔ شدهٔ عبارت بولی:

$$a+[(b'+a')\cdot a']+a$$

کدام است؟

۱) a ۲) ۱ ۳) a' ۴) b'

۱۰- عدد $(۱/۰۰۲)^5$ به کدامیك از اعداد زیر نزدیکتر است:

۱) $(۱/۰۱)$ ۲) $(۱/۰۲)$

۳) $(۱/۰۳)$ ۴) $(۱/۰۴)$

۱۱- برد تابع:

$$y=\sin\frac{\pi}{۲}x+\sqrt{-\sin^2\pi x}$$

کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$

۳) $\{-۱,۱\}$ ۴) $\{-۱,۰,۱\}$

۱۲- جوابهای معادله:

$$۶\cos^2x+۶\sin x\cos x-۳=۰$$

کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}$

۳) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$

۱۳- بیشترین مقدار عبارت $|۶\cos x-۳\cos^2x|$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۴- اگر $۳\sin x\cos x=۱+\sin^2x$ فرض شود مقدار tgx کدام است؟

۱) ۲ یا ۱ ۲) ۱- یا ۲-

۳) $\frac{۱}{۲}$ یا ۱ ۴) ۱- یا $-\frac{۱}{۲}$

مسائل سال چهارم ریاضی

۱ـ بردار $\vec{v}_1$ موازی با بردار $\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ را چنان بیابید که $|\vec{v}_1|=12$ باشد.

۲ـ بردارهای $\vec{v}_1=\vec{i}+2\vec{k}$ و $\vec{v}_2=3\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}_3=3\vec{i}+\vec{j}$ مفروض‌اند. تصویر بردار $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ روی بردار $\vec{v}_3$ را تعیین کنید.

۳ـ ثابت کنید:

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| \leqslant |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$$

۴ـ نشان دهید که صفحهٔ:

$$P:\ 2x+y-2z+3=0$$

پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $A(1,0,2)$ و $B(-1,2,2)$ را قطع می‌کند.

۵ـ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $M(+2,1,3)$ می‌گذرد و برمحورxها عموداست و آن‌را قطع می‌کند.

۶ـ ثابت کنید که تفاضل مربعات فاصله‌های مرکز یك بیضی‌از یك‌خط مماس بر بیضی وخطی که ازیك‌کانون به‌موازات خط مماس‌رسم می‌شود مقداری‌است ثابت‌برابر b^2.

۷ـ درستی استنتاج زیررا بررسی‌کنید (باذکرقوانین):

$$(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r \qquad \wedge$$
$$(r\wedge u) \Longrightarrow t \qquad \wedge$$
$$\sim p$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\therefore\ \sim u \vee t$$

۸ـ ثابت کنید گزارهٔ:

$$\exists x\,;[p(x)\wedge q(x)] \Longrightarrow [\exists x\,;p(x)\wedge \exists x;q(x)]$$

درست است.

۹ـ هرگاه $(R,+,\times)$ یك ساختمان جبری بوده و در همهٔ‌شرایط یك‌حلقهٔ یکدار صدق‌کند بجز جابجایی بودن نسبت به $+$، ثابت کنید که جابجایی بودن جمع‌را نیز می‌توان از اصول دیگر نتیجه‌گرفت.

۱۰ـ با استفاده از تعریف‌حد ثابت‌کنید:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+4x)=+\infty$$

۱۱ـ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sin\sqrt{x}$ را در نقطهٔ $x_0=2$ بررسی‌کنید.

تستهای چهارم ریاضی

۱ـ نقاط $A(4\,,\frac{-\pi}{6})$ و $B(6\,,\frac{5\pi}{6})$ مفروض‌اند. مختصات‌نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $(5\,,\frac{-\pi}{6})$ ۲) $(5\,,\frac{5\pi}{6})$

۳) $(1\,,\frac{-\pi}{6})$ ۴) $(1\,,\frac{5\pi}{6})$

۲ـ اگر:

$$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

باشد، تصاویر بردار یکه روی‌بردار $\vec{a}\wedge\vec{b}$ کدام است؟

۱) $(\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\frac{2\sqrt{2}}{5}\,,\frac{-3\sqrt{2}}{10})$

۲) $(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\frac{\sqrt{2}}{5}\,,\frac{-\sqrt{2}}{10})$

۳) $(\sqrt{2}\,,\frac{2\sqrt{2}}{5}\,,\frac{-3\sqrt{2}}{10})$

۴) $(\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\frac{\sqrt{2}}{5}\,,\frac{\sqrt{2}}{10})$

۳– درصورتی‌که $x+6y+12z=13$ باشد، کمترین مقدار عبارت $x^2+4y^2+9z^2$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۱۳ ۳) $\frac{13}{2}$ ۴) $\frac{13}{4}$

۴ – اگر خط :

$$D:\ \frac{x-1}{a+1}=\frac{y}{3b-2}=\frac{z}{2}$$

برصفحهٔ $P:\ 2x+y-z+4=0$ عمود باشد $a+3b$ چقدر است؟

۱) $+4$ ۲) -4

۳) $+5$ ۴) -5

۵– اگر $(ABCD)$ یك تقسیم توافقی، نقطهٔ O وسط پاره خط AB و نقطهٔ O' وسط پاره خط CD باشد اندازهٔ (AB^2+CD^2) برابراست با:

۱) OO'^2 ۲) $2OO'^2$

۳) $3OO'^2$ ۴) $4OO'^2$

۶– کدامیك از گزاره‌های زیر نادرست است:

۱) $\forall x\in Q\ \exists y\in Q\ ;\ x+y=0$

۲) $\exists x\in Q\ \forall y\in Q\ ;\ x+y=0$

۳) $\exists x\in N\ \forall y\in R\ ;\ xy=y$

۴) $\exists x\in N\ \forall y\in N\ ،\ x+y=y$

۷– در بحث مقابل به جای ؟ کدام گزاره را قرار دهیم تا بحث معتبر گردد؟

$$p\Rightarrow(\sim q\Rightarrow r)\ \wedge$$

$$\sim r$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$\therefore\ ?$$

۱) $(p\vee q)$ ۲) $(p\vee\sim q)$

۳) $(p\Rightarrow q)$ ۴) $(p\wedge\sim q)$

۸– کدام گزینه نادرست است؟

۱) هرمیدان، حوزهٔ صحیح است.

۲) هرایده‌آل زیرحلقه است.

۳) درحلقهٔ یکدار وجابجایی R اگر a مقسوم‌علیه‌صفر باشد وارون‌پذیر نیست.

۴) اگر a مقسوم علیه صفر نباشد آنگاه وارون‌پذیر است.

۹– هرگاه I ایده‌آل حلقهٔ Q (اعداد گویا) و $6\in I$ در این صورت :

۱) $I=Q^+$ ۲) $I=Z$

۳) $I=Z^+$ ۴) $I=Q$

۱۰– هرگاه n و p دو عدد صحیح و مثبت باشند برای آن‌که n^p فردباشد، شرط فرد بودن n

۱) لازم و کافی است.

۲) کافی است ولی لازم‌نیست.

۳) نه‌لازم و نه‌کافی است.

۴) لازم است ولی کافی نیست.

۱۱– کدامیك از مجموعهای زیرهمواره‌بر ۴ بخش‌پذیر است؟

۱) مجموع دو عدد فرد متوالی

۲) مجموع دو عدد زوج

۳) مجموع دو عدد زوج متوالی

۴) مجموع دو عدد فرد

۱۲– تابع به معادلهٔ $f(x)=||x|-1|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست .

۱) یك‌نقطه ۲) دو نقطه

۳) سه‌نقطه ۴) صفر نقطه

۱۳- در نقطهٔ A واقع بر منحنی تابع به معادلهٔ

$$f(x)=x^3+x$$

مماسی برمنحنی رسم کردیم؛ نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A روی منحنی تابع معکوس است. اگر خطوط مماس در نقاط A و A' موازی باشند مختصات نقطهٔ A کدام است؟

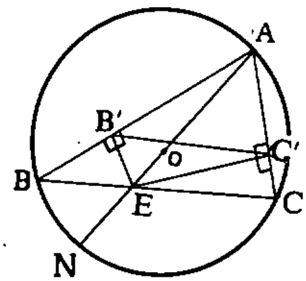
۱) $A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ ۲) $A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$

۳) $A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ ۴) $A\left|\begin{matrix}2\\10\end{matrix}\right.$

مسائل دوم تجربی

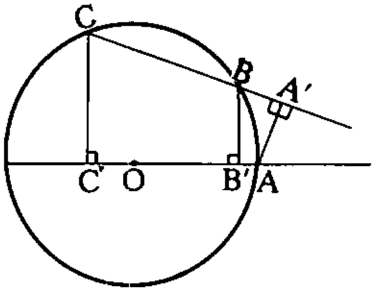
۱- قطر AN از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع آن با ضلع BC را E می‌نامیم. از نقطهٔ E عمودهای EB' و EC' را به‌ترتیب بر اضلاع AB و AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

$$B'C' \parallel BC$$



۲- سه نقطهٔ A و B و C روی یك دایره مفروض‌اند. تصویر نقطهٔ A روی خط BC را نقطهٔ A' و تصاویر نقاط B و C روی قطری از دایره را که از نقطهٔ A می‌گذرد به ترتیب B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید:

$$AA'^2=AB'\cdot AC'$$



۳- چند جمله‌ایهای زیر را به حاصلضرب عاملها تجزیه کنید:

الف) $8ax-bx+8ay-by$

ب) $a^4+a^2-a^3-a$

ج) $4a^4+b^4$

د) a^2+a-10

(معصومه فراهانی دبیرستان فرزانگان)

۴- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{8}{3}\\[2mm]\dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{8}{5}\\[2mm]\dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

(معصومه فراهانی دبیرستان فرزانگان)

۵- اگر نسبت دو ریشهٔ معادلهٔ:

$$px^2+qx+r=0 \quad \text{و} \quad ax^2+bx+c=0$$

برابر k باشد، ثابت کنید:

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{q^2}{pr}$$

(علی عمیدی دوم ریاضی)

۶ـ درصورتی که داشته باشیم :

$$\sin x=\frac{m^2-1}{m^2+1}$$

اولاً ـ $\cos x$ را برحسب m محاسبه کنید .

ثانیاً ـ به ازای $m=-2$ مقدار $tg x+cotg x$ را محاسبه کنید.

تستهای دوم تجربی

۱ـ در ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ ABCD ، $\hat{A}=90^\circ$ و $AB=13$ و $CD=10$ و ساق $BC=5$ است . اندازهٔ مساحت این ذوزنقه چقدر است ؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۶ ۳) ۳۶ ۴) ۴۶

۲ـ در مثلثی به اضلاع $a=2\sqrt{3}$ و $b=4$ و $c=2$ کدام گزاره درست است؟

۱) $\hat{B}=2\hat{C}$ ۲) $\hat{A}=90^\circ$

۳) $\hat{A}<90^\circ$ ۴) $\hat{A}>90^\circ$

۳ـ در مثلثی قائم‌الزاویه، تصویر میانهٔ وارد بر وتر روی وتر، $2\sqrt{3}$ و یك زاویهٔ حادهٔ مثلث 15° است . اندازهٔ وتر مثلث کدام است ؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$

۳) ۶ ۴) ۸

۴ـ اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ :

$$mx^2+x-1=0$$

باشند و داشته باشیم :

$$x'^2x''+x'x''^2=4$$

مقدار m برابر است با:

۱) $\pm\frac{1}{4}$ ۲) ± 2

۳) $\pm\frac{1}{2}$ ۴) ± 4

۵ـ مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ :

$$(x^{16}-1)(x^8-1)\leqslant 0$$

کدام است ؟

۱) $\{-1,1\}$ ۲) $[-1,1]$

۳) $\{-1\}$ ۴) $\{1\}$

۶ـ مجموعه جوابهای مشترك دونامعادلهٔ:

$$-3x^2-4x<1 \quad \text{و} \quad -x^2+3x<0$$

درفاصلهٔ]۳ و ۱ـ[برابراست با:

۱) $]-1,0[$ ۲) $]\frac{-1}{3},0[$

۳) $]0,3[$ ۴) $]-1,\frac{-1}{3}[$

مسائل سوم تجربی

۱ـ دونقطهٔ A وB در دوطرف خط d واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d پیداکنید که تفاضل فاصله‌های آن ازنقاط A و B بیشترین مقدار ممکن باشد.

۲ـ اگر $|\vec{a}|=2$ و $|\vec{b}|=3$ و $(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$ باشد، اندازهٔ بردارهای زیررا به دست‌آورید:

الف) $3\vec{a}-\vec{b}$ ب) $\vec{a}+2\vec{b}$

۳ـ ثابت کنید اگر صفحه‌ای دو وجه مقابل از یك متوازی‌السطوح را قطع کند، چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است.

۴ـ معادلهٔ زیرمفروض است:

$$a(\sin x+\cos x)=(\cos x-\sin x)^{2}$$

مقدار a را چنان تعیین کنید که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$tg(x+\frac{\pi}{4})=\cos x-\sin x$$

(بهرام فرجی چهارم)

۵ـ عبارت زیر را با فرض این‌که انتهای x در ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی باشد به‌حاصلضرب عاملها تبدیل کنید:

$$\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}-2\sin\frac{x}{2}$$

۶ـ نقاط A وB وM به ترتیب به طولهای ۱و۲ـ وK روی محور $x'ox$ مفروض‌اند.

الف) K را چنان تعیین کنید که M وسط‌پاره‌خط AB باشد.

ب) به ازای چه مقداری از K داریم:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{1}{K}$$

ج) آیا نقطه‌ای مانند N به طول $2K$ را می‌توان یافت که داشته باشیم:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}+\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}=0$$

۷ـ نقاط $A(0,-1)$ و $B(-1,0)$ و $C(1,1)$ مفروض‌اند.

الف) مثلث را مشخص کنید.

ب) معادلات ارتفاع ومیانه ونیمساز نظیر یك رأس از مثلث را بنویسید.

ج) مساحت مثلث را محاسبه کنید.

تستهای سوم تجربی

۱ـ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب به‌طولهای ۸و۴و۶ بامحوری، به‌ترتیب‌زوایای ۶۰° و ۶۰°ـ و ۱۲۰° می‌سازند. اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی این بردارها روی‌این محور کدام است؟

۱) $+3$ ۲) -3

۳) $+6$ ۴) $+18$

۲ـ ازیك نقطه چندصفحه موازی دوخط متنافر می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) یك ۳) دو ۴) بیشمار

۳ـ حجم منشور مایل مثلث‌القاعده‌ای که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $a=4$ سانتیمتر و یال منشور برابر ضلع قاعده است و با صفحهٔ قاعدهٔ زاویهٔ ۶۰° می‌سازد کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۳

۴ـ فاصلهٔ نقطهٔ $M\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$ از خط $y=f(x)$ با فرض $f(2x-3)=x-1$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۳) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

۵ـ دامنهٔ‌تابع $f(x)$ بافرض $f(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ برابر است با:

۱) $IR-\{0\}$ ۲) $[0,+\infty[$

۲) $]-\infty,0[$ ۴) $]0,+\infty[$

مسائل ریاضیات چهارم تجربی

۱ــ فاصلهٔ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع درجهٔ سوم با ضابطهٔ:

$$y=x^3-6x^2$$

را از خط قائم بر منحنی فوق درنقطه‌ای به طول ۱ ــ را حساب کنید.

۲ــ مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ:

$$f(x)=\sin^3(x^4-1)^2+\cos^3(x^2-1)\sin(x-1)$$

را به ازای طول مرکز تقارن تابع ضمنی با ضابطهٔ:

$$2xy-2y-x+3=0$$

را به دست آورید.

۳ــ معادلهٔ زیر مفروض است:

$$m(\sin x+\cos x)=1+\sin x\cos x$$

الف) ثابت کنید معادله به‌ازای هر $m\in]-1,1[$ جواب ندارد.

ب) معادله را به ازای $m=\pm 1$ حل کنید.

تستهای چهارم تجربی

۱ــ فاصلهٔ مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ:

$$f(x)=2x^3-6x^2$$

از مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $g(x)=\frac{6x-2}{3x-3}$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲ــ اگر داشته باشیم:

$$2f(x^3)+3f(-x^3)=x$$

مقدار $f'(-1)$ برابراست با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۳ــ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant -1\\ ax+1 & x<-1\end{cases}$ درنقطه‌ای به طول $x_0=-1$ پیوسته باشد مقدار عبارت $\frac{f'(-2)+f'(2)}{f(-2)+f(2)}$ برابر است با:

۱) ۲/۴ ۲) ۲/۸

۳) ۴/۴ ۴) ۴/۸

۴ــ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ:

$$y=\frac{1}{x-1}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$$

برابراست:

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}-\{-1\}$

۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $\{-1\}$

۵ــ درصورتی‌که مرکزدایره‌ای روی نیمساز ربع دوم وچهارم قرار داشته‌باشد و از مبدأ مختصات نیز بگذرد معادلهٔ آن چنین است:

۱) $(x-\alpha)^2+(y+\alpha)^2=\alpha\sqrt{2}$

۲) $(x+\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2$

۳) $(x-\alpha)^2+(y+\alpha)^2=2\alpha^2$

۴) $(x+\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\sqrt{\alpha}$

حل مسائل برهان، شمارهٔ ۴

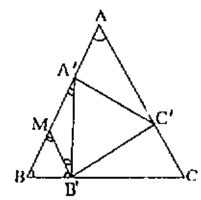
حل مسائل ریاضیات سال اول

۱- ۱) سه مثلث $AA'C'$ و $BA'B'$ و $CB'C'$ به حالت تساوی دوضلع و زاویهٔ بین باهم برابرند، زیرا:

$$AA'=BB'=CC'=\frac{1}{3}AB \Rightarrow$$

$$AC'=BA'=CB'=\frac{2}{3}AB$$

$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60°$$



پس، $A'B'=A'C'=B'C'$ ، یعنی مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

۲) میانهٔ $B'M$ از مثلث $BA'B'$ را رسم می‌کنیم. مثلث $BB'M$ متساوی الاضلاع و مثلث $MB'A'$ متساوی‌الساقین است.

$$MB=BB'=\frac{1}{2}AB \text{ و } \hat{B}=60° \Rightarrow$$

$$BB'=MB'=MB \Rightarrow \hat{B}'_1=60°$$

$$MB'=MA'=\frac{1}{2}AB$$

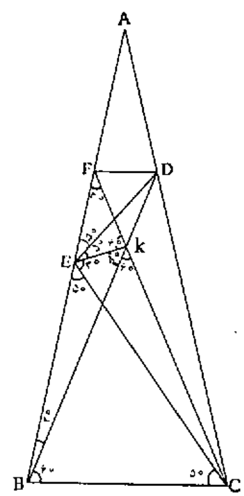
و $B\hat{M}B'=60° \Rightarrow \hat{B}'_2=30° \Rightarrow$

$$A'\hat{B}'B=A'\hat{B}'M+M\hat{B}'B=30°+60°=90°$$

یعنی $A'B'$ عمود بر BC است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که، $A'C'\perp AB$ و $B'C'\perp AC$ می‌باشد. پس اضلاع دومثلث ABC و $A'B'C'$ برهم عمودند.

۲- از نقطهٔ D خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا ساق AB را درنقطهٔ F قطع کند. از F به C وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع FC با DB را K می‌نامیم واز E به K نیز وصل می‌کنیم. زاویهٔ $B\hat{F}C=40°$ و مثلثهای KBC و KFD متساوی‌الاضلاع‌اند. پس $BK=BC$ و $DF=DK$ است. مثلث BCE نیز متساوی‌الساقین است زیرا:

$$B\hat{E}C=B\hat{C}E=50°$$



پس $BE=BC$ است. درنتیجه $BK=BE$ یعنی‌مثلث BEK نیز متساوی‌الساقین می‌باشد و چون زاویهٔ رأس آن ۲۰° است پس $B\hat{E}K=E\hat{K}B=80°$ است و از آنجا $K\hat{E}C=30°$ و $E\hat{E}K=100°$. از طرفی $E\hat{F}K=E\hat{K}F=40°$ است، پس‌مثلث EFK نیز متساوی‌الساقین و $EF=EK$ است.

بنابراین دو مثلث EFD و EKD به حالت‌برابری سه ضلع متساوی‌اند. درنتیجه DE، نیمساز زاویهٔ $F\hat{E}K$ می‌باشد یعنی $D\hat{E}K=50°$ است. پس:

$$D\hat{E}C=50°+30°=80°$$

خواهد بود.

۳- روش اول: فرض‌کنیم $p\Rightarrow q$ یك‌ترکیب شرطی و $q\equiv T$، دراین‌صورت‌اگر $p\equiv T$ ،گزاره‌شرطی $p\Rightarrow q$ دارای مقدم و تالی درست‌بوده و دارای ارزش درست است و اگر $p\equiv F$ ، گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است. پس درهرحالت دارای‌ارزش درست است.

روش دوم: باتوجه‌به این‌که $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim p\vee q)$، اگر $q\equiv T$ ارزش گزارهٔ فصلی $(\sim p\vee q)$ همواره درست است.

۴- با توجه به این‌که $(A-B)=(A\cap B')$ ثابت می‌کنیم اگر $A\subseteq B$ آنگاه، $(A\cap B')=\varnothing$. برای این‌کار کافی‌است ثابت‌کنیم دومجموعهٔ A و B' مجموعه‌هایی جدا از هم هستند. بنابراین عضوی‌دلخواه از A مانند x در نظر گرفته وثابت می‌کنیم این عضودلخواه در B' نیست:

$$(x\in A \xRightarrow{A\subseteq B} x\in B \xRightarrow{\text{طبق تعریف متمم}} x\notin B')$$

$$\Rightarrow A\cap B'=\varnothing$$

۵- درحالت کلی و برای هرچهار مجموعهٔ دلخواه مانند A وB وC وD داریم:

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq B\\ C\subseteq D\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}(A\cap C)\subseteq(B\cap D)\\ (A\cup C)\subseteq(B\cup D)\end{cases}$$

(اثبات مطلب فوق به‌روش عضو گیری دلخواه‌بوده و آسان‌است)

حال با توجه به مسألهٔفوق خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq B\\ A'\subseteq B\end{array}\right\} \Rightarrow (A\cup A')\subseteq(B\cup B)$$

$$\Rightarrow M\subseteq B \qquad (۱)$$

ونیز واضح است‌که $B\subseteq M$ (۲) وباتوجه به رابطه‌های (۱) و(۲) وتعریف‌تساوی‌بین دومجموعه‌نتیجه می گیریم که: $B=M$ است.

۶- داریم:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

به‌توان ۳ می‌رسانیم:

$$a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}},\quad b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}}_{b}$$

$$x=a+b$$

$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$x^3=5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}+3\sqrt[3]{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}(x)$$

$$x^3=10+3\sqrt[3]{25-24}\,x$$

$$x^3=10+3x \Rightarrow x^3-3x=10$$

۷- حاصل‌کسر عددی است مثبت‌آن را مساوی x فرض می‌کنیم، آن‌رابه توان (۲) می‌رسانیم پس از ساده‌کردن جذر می گیریم.

به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$$

$$x^2=\frac{\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2+2\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}}{\sqrt{5}+1}$$

$$x^2=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{5-4}}{\sqrt{5}+1}=\frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1}=2$$

$$x^2=2 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{2}}$$

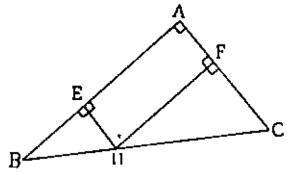
حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱- چهار ضلعی AEHF مستطیل است.

بنابراین: (۱) $AE=HF$ و $AF=EH$ است. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ HBE و HFC می‌توان نوشت:

$$HB^2=AF^2+BE^2 \text{ یا } HB^2=HE^2+BE^2$$

$$HC^2=AE^2+CF^2 \text{ یا } HC^2=HF^2+CF^2 \qquad (۲)$$



از طرفی درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90°$) داریم:

$$BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow (BH+HC)^2$$

$$=(AE+EB)^2+(AF+FC)^2 \Rightarrow$$

$$BH^2+HC^2+2HB\cdot HC$$

$$=AE^2+EB^2+2AE\cdot EB+AF^2+FC^2+2AF\cdot FC \qquad (۳)$$

باتوجه به روابط (۱)و(۲) از رابطهٔ(۳) نتیجه‌می‌شود:

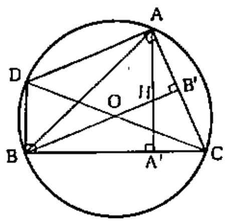
$$2HB\cdot HC=2AE\cdot EB+2AF\cdot FC$$

$$\Rightarrow HB\cdot HC=EA\cdot EB+FA\cdot FC$$

۲- اگرقطر CD از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم کنیم و از D بــه A و B وصل‌نماییم، چهار ضلعی AHBD متوازی‌الاضلاع است زیرا:

$$A\hat{A'}B=D\hat{B}C=90° \text{ و } B\hat{B'}A=D\hat{A}C=90°$$

پس $AH=BD$ است. اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC ($D\hat{B}C=90°$) می‌توان نوشت:



$$BC^2+BD^2=CD^2=4R^2 \Rightarrow$$

$$BC^2+AH^2=4R^2$$

وبه همین‌ترتیب ثابت می‌شود که:

$$BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$$

$$=AB^2+CH^2=4R^2$$

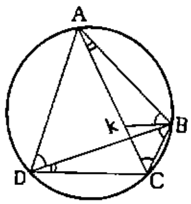
۳- قضیهٔ بطلمیوس - چهار ضلعی محاطی ABCD را درنظرمی گیریم واز رأس B زاویهٔ ABK را مساوی بازاویهٔ CBD جدا می‌کنیم. داریم:

$$A\hat{B}K\sim D\hat{B}C \Rightarrow \frac{AB}{KA}=\frac{BD}{CD}$$

$$\Rightarrow AB\cdot CD=AK\cdot BD \qquad (۱)$$

$$A\hat{B}D\sim B\hat{C}K \Rightarrow \frac{BC}{KC}=\frac{BD}{AD}$$

$$\Rightarrow AD\cdot BC=KC\cdot BD \qquad (۲)$$



ازجمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AK\cdot BD+KC\cdot BD$$

$$=(AK+KC)\cdot BD=AC\cdot BD$$

$$\Rightarrow \boxed{AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD}$$

۴- هر گاه R یك‌رابطه روی A باشد و داشته باشیم:

$$R=\{(a,b)\}$$

دراین‌صورت باتوجه‌به تعریفهای خواص، پادتقارن وتعدی‌که هردوتعریف ازگزاره‌هایی‌شرطی با مقدم عطفی‌تشکیل شده‌اند، وبا توجه‌به این‌که؛ اگرمقدم یك‌ترکیب شرطی نادرست باشد آن‌گزارهٔ شرطی دارای ارزش درست‌است، هردوتعریف بنابر انتفای مقدم درست‌بوده وخواص برقرارند.

$$[\underbrace{(aRb\wedge bRa)}_{F} \Rightarrow a=b]\equiv T$$

$$[\underbrace{(aRb\wedge bRc)}_{F} \Rightarrow aRc]\equiv T$$

۵- می‌دانیم «اگر تابعی چندضابطه‌ای یک‌به‌یک باشد آن گاه در تمام ضابطه‌هایش یک‌به‌یک است». پس تا اینجا یک‌به‌یک بودن همهٔ ضابطه‌ها شرط لازم برای یک‌به‌یک بودن آن است. اما این شرط کافی نیست، زیرا مثلاً تابع:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

در هر ضابطه یک‌به‌یک است اما در کل یک‌به‌یک نیست:

$$(f(-2)=f(2)=2)$$

پس نیاز به شرط دیگری نیز می‌باشد که آن جدا از هم بودن بردهای ضابطه‌ها می‌باشد!

۶- اگر دو ماتریس ۲×۲ دلخواه درنظر بگیریم و در یکدیگر از چپ و راست ضرب کنیم و نتیجه‌ها را مساوی هم قرار دهیم؛ شرط جابه‌جایی بودن دو ماتریس به صورت زیر درمی‌آید.

«درصورتی که درایه‌های روی قطر اصلی و فرعی هردو ماتریس به طور مجزا باهم برابر باشند جابه‌جاپذیر خواهند بود. وهمچنین اگر درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های روی قطر فرعی هریک قرینه هم باشند جابه‌جاپذیر می‌باشند.»

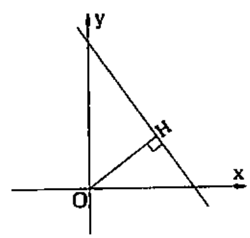
$$\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&d\\d&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\d&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&d\\-d&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\-d&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$$

۷- فاصله OH را پیدا می‌کنیم:

$$OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt5}=\sqrt5$$

حال نقطه $H\left|\begin{matrix}x\\5-2x\end{matrix}\right.$ را روی خط درنظر می‌گیریم.



$$OH=\sqrt{x_H^2+y_H^2}=\sqrt5 \Longrightarrow x_H^2+y_H^2=5$$

$$\Longrightarrow x^2+(5-2x)^2=5 \Longrightarrow$$

$$5x^2-20x+20=0 \Longrightarrow x^2-4x+4=0$$

$$\Longrightarrow (x-2)^2=0 \Longrightarrow \boxed{x_H=2}$$

۸- $A\left|\begin{matrix}-3\\3\end{matrix}\right.$ زیرا روی $y=-x$ است. زیرا موازی $y=x$ است.

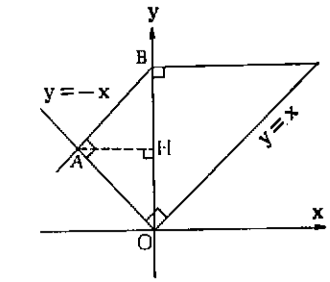
$$m_{AB}=1$$

AB معادله $y-y_A=m(x-x_A)$

$$y-3=1(x+3)$$

$$\boxed{y=x+6}$$

$$x=0 \Longrightarrow \boxed{y_B=6}$$



۹- سمت‌چپ تساوی‌را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x+\cos x)^2-1}=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{2\sin x\cos x}$$

پس از اختصار لازم داریم:
(با فرض $\sin x\cos x\neq 0$)

$$=\frac12\sin x+\frac12\cos x+\frac12\equiv A\sin x+B\cos x+C$$

از مقایسهٔ طرفین نتیجه می‌شود:

$$\Longrightarrow A=B=C=\frac12$$

۱۰- اگر طرفین فرض را در $(a+b)$ ضرب کنیم داریم:

$$\frac{a+b}{a}\sin^4x+\frac{a+b}{b}\cos^4x=1 \Longrightarrow$$

$$\sin^4x+\frac{b}{a}\sin^4x+\frac{a}{b}\cos^4x+\cos^4x=1$$

$$\sin^4x+\frac{b}{a}\sin^4x+\frac{a}{b}\cos^4x+\cos^4x=$$

$$(\sin^2x+\cos^2x)^2=\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x$$

$$\Longrightarrow \frac{b}{a}\sin^4x+\frac{a}{b}\cos^4x-2\sin^2x\cos^2x=0$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2x-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2x\right)^2=0 \xrightarrow{(ab>0\ \text{بافرض})}$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2x=\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2x \Longrightarrow$$

$$\sin^2x=\frac{a}{a+b} \quad \text{و} \quad \cos^2x=\frac{b}{a+b}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\sin^{2n}x=\dfrac{a^n}{(a+b)^n}\\[2mm] \cos^{2n}x=\dfrac{b^n}{(a+b)^n}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\dfrac{\sin^{2n}x}{a^{n-1}}=\dfrac{a}{(a+b)^n}\\[2mm] \dfrac{\cos^{2n}x}{b^{n-1}}=\dfrac{b}{(a+b)^n}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin^{2n}x}{a^{n-1}}+\frac{\cos^{2n}x}{b^{n-1}}=\frac{a}{(a+b)^n}+\frac{b}{(a+b)^n}$$

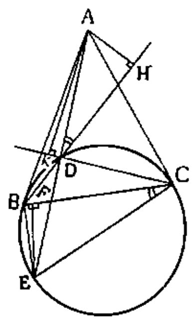
$$=\frac{(a+b)}{(a+b)^n}=\frac{1}{(a+b)^{n-1}}=\left(\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}\right)^{n-1}$$

حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱- از E به B و C وصل می‌کنیم واز E عمود EF را بر BC فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADK و EBF متشابه‌اند، زیرا:

$$\hat{F}=\hat{K}=90^\circ \quad \text{و} \quad A\hat{D}K=E\hat{D}C=E\hat{B}C$$

$$=\frac{\widehat{EC}}{2} \Longrightarrow \frac{AK}{EF}=\frac{AD}{EB} \qquad (۱)$$



همچنین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADH و EFC متشابه‌اند:

$$(A\hat{D}H=B\hat{C}E \quad \text{و} \quad \hat{H}=\hat{F}=90^\circ)$$

پس:

$$\frac{AH}{EF}=\frac{AD}{EC} \qquad (۲)$$

از تقسیم روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{AK}{AH}=\frac{EC}{EB} \qquad (۳)$$

از طرفی داریم:

$$\overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{AEC} \Rightarrow \frac{EC}{DC}=\frac{AE}{AC} \quad (۴)$$

$$\overset{\Delta}{ADB} \sim \overset{\Delta}{ABE} \Rightarrow \frac{EB}{DB}=\frac{AE}{AB=AC} \quad (۵)$$

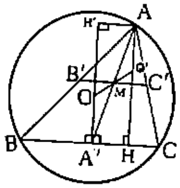
از روابط (۴) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{EC}{DC}=\frac{EB}{DB} \Rightarrow \frac{EC}{EB}=\frac{DC}{DB} \quad (۶)$$

از مقایسهٔ روابط (۳) و (۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AK}{AH}=\frac{DC}{DB}$$

۲ـ پاره‌خط $B'C'$ که وسطهای ضلعهای AB و AC از مثلث ABC را به هم وصل می‌کند با ضلع BC موازی و مساوی نصف BC است.



میانه AA' از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. این میانه ازنقطهٔ M وسط پاره‌خط $B'C'$ می‌گذرد. (خطوط متقارب AC و AB و AA' روی دو خط متوازی BC و $B'C'$ قطعه‌های متناظر متناسب ایجاد می‌کنند) و دراین نقطه نصف می‌شود یعنی نقطهٔ M وسط AA' نیزهست. از A' به O وصل می‌کنیم می‌دانیم که $A'O$ عمود منصف ضلع BC است. از A عمود AH' رابرخط OA' فرود می‌آوریم. چهارضلعی $AHA'H'$ مستطیلی است که AA' یک قطر آن و نقطهٔ M وسط ایـن قطر مرکز تقارن آن است. پس قرینهٔ نقطهٔ O (مرکز دایرهٔ محیطی مثلث) نسبت به نقطهٔ M (وسط پاره‌خط واصل بین دوضلع مثلث) روی ارتفاع AH (ارتفاع مرسوم برضلع سوم) واقع است.

۳ـ فرض کنیم V یک فضای برداری و بردارهای:

$u_1 , u_2 , \cdots , u_n$

n بردار دراین فضا باشند به قسمی که مثلا بتوان بردار u_i را برحسب ترکیب خطی $n-۱$ بردار دیگر نوشت:

$$u_i=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_{n-1}u_n \Rightarrow$$

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+(-1)u_i+\cdots+\alpha_{n-1}u_n=\vec{0}$$

دراین‌حال ما به یک ترکیب‌خطی از این n بردار دست یافتیم که به طورحتم یک ضریب مخالف‌صفر درآن یافت می‌شود و حاصل این ترکیب خطی مساوی بابردار صفراست و بنابراین طبق‌تعریف وابستگی‌خطی، این بردارها وابسته خطی‌اند.

۴ـ (مسأله درحالتی که تکرار ارقام مجاز نیست بررسی می‌شود.)

الف) مضارب ۵ و بزرگتر از ۴۰۰۰ را که با ارقام فوق می‌توان ساخت به دوقسمت تقسیم می‌کنیم:

(الف) آنهایی که رقم یکانشان صفر است.

(ب) آنهایی که رقم یکانشان ۵ است (رقم هزارگان باید یا ۴ یا ۵ یا ۶ باشد):

۴ یا ۵ یا ۶ ... رقم یکان صفر

$\boxed{۳}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۱}$

$=۳\times۵\times۴\times۱=۶۰$

۴ یا ۶ ... رقم یکان پنج

$\boxed{۲}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۱}$

$=۲\times۵\times۴\times۱=۴۰$

۱۰۰ = ۴۰ + ۶۰ = مضارب پنج و بزرگتر از ۴۰۰۰

ب) دراین‌قسمت نیز اعداد زوج را بـه دو دسته تقسیم می‌کنیم.

دستهٔ اول اعداد زوج بارقم یکان‌صفر.

دستهٔ دوم اعداد زوج بارقم یکان ۲ یا ۴ یا ۶.

رقم ۱ ... رقم یکان‌صفر

$\boxed{۱}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۱}$

$=۵\times۴=۲۰$

رقم ۱ ... رقم یکان غیرصفر

$\boxed{۱}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}$

$=۵\times۴\times۳=۶۰$

۸۰ = ۶۰ + ۲۰ = اعداد زوج که بارقم ۱ شروع می‌شوند

۵ـ داریم:

$$f(۱)=۶ \;,\; f(۲)=۱۱ \;,\; f(-۱)=۲$$

$$f(x)=(x^۲-۱)(x-۲)Q(x)+ax^۲+bx+c$$

$$x=۱ \Rightarrow f(۱)=a+b+c=۶$$

$$x=۲ \Rightarrow f(۲)=۴a+۲b+c=۱۱$$

$$x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=a-b+c=۲$$

$$\begin{cases}a+b+c=۶\\ -a+b-c=-۲\end{cases} \Rightarrow \boxed{b=۲}$$

$$b=۲ \Rightarrow \begin{cases}a+b+c=۶\\ ۴a+۲b+c=۱۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+c=۴\\ ۴a+c=۷\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}a=۱\\ c=۳\end{matrix}}$$

$\Rightarrow$ باقیمانده $=x^۲+۲x+۳$

۶ـ

$$tgx+cotgx=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}=\frac{۲}{\sin ۲x}$$

$$\sin ۲x=۰ \Rightarrow ۲x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow D_f=R-\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{۲}\right\}$$

می‌دانیم اگر: $a>۰$، آنگاه $a+\frac{۱}{a}\geqslant ۲$

و اگر: $a<۰$، آنگاه $a+\frac{۱}{a}\leqslant -۲$

اگر انتهای کمان x در ربع اول یا سوم باشد $\Rightarrow$

$tgx>۰ \Rightarrow tgx+cotgx\geqslant ۲$

اگر انتهای کمان x در ربع دوم یا چهارم باشد $\Rightarrow$

$tgx<۰ \Rightarrow tgx+cotgx\leqslant -۲$

اگر $tgx>۰ \Rightarrow [tgx+cotgx]=۲,۳,۴,\ldots$

اگر $tgx<۰ \Rightarrow [tgx+cotgx]$

$=-۲,-۳,-۴,\ldots$

$\Rightarrow$ برد تابع $=Z-\{-۱,۰,۱\}$

۷ـ اگر $a\to b \Rightarrow$ حد کسر $=\frac{۰}{۰}$

$$\frac{\sin a-\sin b+\sin(a-b)}{\cos a-\cos b}=$$

$$\frac{۲\cos\frac{a+b}{۲}\sin\frac{a-b}{۲}+۲\sin\frac{a-b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}}{-۲\sin\frac{a+b}{۲}\sin\frac{a-b}{۲}}$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to b}\frac{۲\sin\frac{a-b}{۲}\left(\cos\frac{a+b}{۲}+\cos\frac{a-b}{۲}\right)}{-۲\sin\frac{a-b}{۲}\cdot\sin\frac{a+b}{۲}}$$

$$=\frac{\cos b+۱}{-\sin b}=\frac{۲\cos^۲\frac{b}{۲}}{-۲\sin\frac{b}{۲}\cos\frac{b}{۲}}=\boxed{-cotg\frac{b}{۲}}$$

۸ـ باتوجه به رابطهٔ:

$$\sin ۱۸° = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$$

داریم:

$$\cos ۳۶° = ۱ - ۲\sin^{۲} ۱۸° = ۱ - ۲\left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}\right)^{۲} = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sin ۴۷° + \sin ۶۱° - \sin ۱۱° - \sin ۲۵° =$$
$$(\sin ۴۷° + \sin ۶۱°) - (\sin ۱۱° + \sin ۲۵°) =$$
$$۲\sin ۵۴° \cos ۷° - ۲\sin ۱۸° \cos ۷° =$$
$$۲\cos ۷°(\sin ۵۴° - \sin ۱۸°) = ۴\cos ۷° \sin ۱۸° \cos ۳۶° =$$
$$۴\cos ۷° \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴} \cdot \frac{\sqrt{۵}+۱}{۴} = \cos ۷°$$

۹ـ ابتدا طرفین هریک‌از معادله‌های دستگاه را مجذور ساخته وسپس یک‌بار باهم‌جمع وبار دیگردر هم‌ضرب می‌کنیم که دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sin^{۲}x + \sin^{۲}y + ۲\sin x \sin y = \sin^{۲}a \\ \cos^{۲}x + \cos^{۲}y + ۲\cos x \cos y = \cos^{۲}a \end{cases}$$

جمع دو رابطه: $۱ + ۲(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = ۰$

ضرب دو رابطه: $\sin ۲x + \sin ۲y + ۲\sin(x+y) = \sin ۲a$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = \cos \frac{۲\pi}{۳} \Longrightarrow \\ x - y = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \quad (۱) \\ ۲\sin(x+y)[۱+\cos(x-y)] = \sin ۲a \\ \Longrightarrow ۲\sin(x+y)(۱-\frac{۱}{۲}) = \sin ۲a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \\ \sin(x+y) = \sin ۲a \Longrightarrow \\ \left| \begin{array}{l} x+y = ۲k\pi + ۲a \\ x+y = ۲k\pi + \pi - ۲a \end{array} \right. \quad (۲) \end{cases}$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) دستگاههای سادهٔ دومجهولی به دست خواهدآمدکه یکی‌از دستگاهها چنین است:

$$\begin{cases} x+y = ۲k\pi + ۲a \\ x-y = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} + a \\ y = a + \frac{\pi}{۳} \end{array} \right. \quad \text{(یک دسته جواب)}$$

دسته‌جوابهای دیگررا به طور مشابه به دست‌آورید.

حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ الف) زاویهٔ $(\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲})$ را محاسبه می‌کنیم. زاویه $(-۲\overrightarrow{v_۱}, ۳\overrightarrow{v_۲})$ مکمل زاویهٔ $(\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲})$ است.

$$\overrightarrow{v_۱}(۲,۳,-۱) , \overrightarrow{v_۲}(۱,-۲,۱) \Longrightarrow$$
$$\overrightarrow{v_۱} \cdot \overrightarrow{v_۲} = X_۱X_۲ + Y_۱Y_۲ + Z_۱Z_۲ =$$
$$۲ - ۶ - ۱ = -۵ ,$$
$$|\overrightarrow{v_۱}| = \sqrt{۴+۹+۱} = \sqrt{۱۴}$$
$$|\overrightarrow{v_۲}| = \sqrt{۱+۴+۱} = \sqrt{۶}$$
$$\cos(\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲}) = \frac{\overrightarrow{v_۱} \cdot \overrightarrow{v_۲}}{|\overrightarrow{v_۱}| \cdot |\overrightarrow{v_۲}|} =$$
$$\frac{-۵}{\sqrt{۱۴} \cdot \sqrt{۶}} = \frac{-۵}{۲\sqrt{۲۱}} \Longrightarrow$$
$$(\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲}) = \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{-۵}{۲\sqrt{۲۱}}\right) = \alpha$$
$$\Longrightarrow (-۲\overrightarrow{v_۱}, ۳\overrightarrow{v_۲}) = \pi - \alpha$$
$$\Longrightarrow (-۲\overrightarrow{v_۱}, ۳\overrightarrow{v_۲}) = \pi - \mathrm{Arc}\cos\left(\frac{-۵}{۲\sqrt{۲۱}}\right)$$

نکته: به طور کلی برای دو بردار $\overrightarrow{v_۱}$ و $\overrightarrow{v_۲}$ و دو عدد جبری مخالف‌صفر a و b داریم:

$$(a<۰ , a<۰) \text{ یا } (a>۰ , b>۰) \Longrightarrow$$
$$(a\overrightarrow{v_۱}, b\overrightarrow{v_۲}) = (b\overrightarrow{v_۱}, a\overrightarrow{v_۲}) = (\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲})$$
$$(a>۰ , b<۰) \text{ یا } (a<۰ , b>۰) \Longrightarrow$$
$$(a\overrightarrow{v_۱}, b\overrightarrow{v_۲}) = (b\overrightarrow{v_۱}, a\overrightarrow{v_۲}) = \pi - (\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲})$$

یعنی اگر a و b متحدالعلامه باشند: $(a\overrightarrow{v_۱}, b\overrightarrow{v_۲})$ یا $(b\overrightarrow{v_۱}, a\overrightarrow{v_۲})$ با $(\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲})$ برابر است.
ودرصورتی‌که a و b مختلف‌العلامه باشند:

$(b\overrightarrow{v_۱}, a\overrightarrow{v_۲})$ یـا $(a\overrightarrow{v_۱}, b\overrightarrow{v_۲})$

مکمل $(\overrightarrow{v_۱}, \overrightarrow{v_۲})$ می‌باشد.

ب) راه اول:

$$\overrightarrow{v_۱} + \overrightarrow{v_۲} \left| \begin{array}{l} ۲+۱=۳ \\ ۳-۲=۱ \\ -۱+۱=۰ \end{array} \right. \quad \text{و} \quad \overrightarrow{v_۱} - \overrightarrow{v_۲} \left| \begin{array}{l} ۲-۱=۱ \\ ۳+۲=۵ \\ -۱-۱=-۲ \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow (\overrightarrow{v_۱}+\overrightarrow{v_۲}) \wedge (\overrightarrow{v_۱}-\overrightarrow{v_۲}) \left| \begin{array}{l} -۲ \\ ۶ \\ ۱۴ \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$|(\overrightarrow{v_۱}+\overrightarrow{v_۲}) \wedge (\overrightarrow{v_۱}-\overrightarrow{v_۲})| = \sqrt{۴+۳۶+۱۹۶}$$
$$= \sqrt{۲۳۶} = ۲\sqrt{۵۹}$$

راه دوم: باتوجه به توزیع‌پذیری ضرب‌برونی نسبت به جمع‌بردارها می‌توان‌نوشت:

$$(\overrightarrow{v_۱}+\overrightarrow{v_۲}) \wedge (\overrightarrow{v_۱}-\overrightarrow{v_۲}) =$$
$$\overrightarrow{v_۱} \wedge \overrightarrow{v_۱} - (\overrightarrow{v_۱} \wedge \overrightarrow{v_۲}) + (\overrightarrow{v_۲} \wedge \overrightarrow{v_۱}) - (\overrightarrow{v_۲} \wedge \overrightarrow{v_۲})$$

اما:

$$-(\overrightarrow{v_۱} \wedge \overrightarrow{v_۲}) = (\overrightarrow{v_۲} \wedge \overrightarrow{v_۱})$$
$$\overrightarrow{v_۲} \wedge \overrightarrow{v_۲} = ۰ \text{ و } \overrightarrow{v_۱} \wedge \overrightarrow{v_۱} = ۰$$

پس داریم:

$$|(\overrightarrow{v_۱}+\overrightarrow{v_۲}) \wedge (\overrightarrow{v_۱}-\overrightarrow{v_۲})| =$$
$$|۲(\overrightarrow{v_۲} \wedge \overrightarrow{v_۱})| = ۲|\overrightarrow{v_۲} \wedge \overrightarrow{v_۱}|$$

اما:

$$\overrightarrow{v_۱}(۲,۳,-۱) , \overrightarrow{v_۲}(۱,-۲,۱) \Longrightarrow$$
$$\overrightarrow{v_۲} \wedge \overrightarrow{v_۱}(-۱,۳,۷) \Longrightarrow$$
$$|\overrightarrow{v_۲} \wedge \overrightarrow{v_۱}| = \sqrt{۱+۹+۴۹} = \sqrt{۵۹}$$

در نتیجه:

$$|(\overrightarrow{v_۱}+\overrightarrow{v_۲}) \wedge (\overrightarrow{v_۱}-\overrightarrow{v_۲})| =$$
$$۲|\overrightarrow{v_۲} \wedge \overrightarrow{v_۱}| = ۲\sqrt{۵۹}$$

ج) با توجه به رابطهٔ:

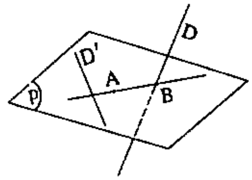
$$\overrightarrow{v_۱} \cdot \overrightarrow{v_۲} = |\overrightarrow{v_۱}| \times \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{v_۱}}^{\overrightarrow{v_۲}}$$

می‌توان نوشت.

$$\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{v_۱}}^{\overrightarrow{v_۲}} = \frac{\overrightarrow{v_۱} \cdot \overrightarrow{v_۲}}{|\overrightarrow{v_۱}|} = \frac{-۵}{\sqrt{۱۴}} = \frac{-۵\sqrt{۱۴}}{۱۴}$$

۲ـ معادلهٔ صفحه‌ای‌راکه برخط D' (یا D) و نقطهٔ A می‌گذرد می‌نویسیم (صفحهٔ P) و نقطهٔ برخورد این صفحه بـا

خط D (یاخط D′) را به دست می‌آوریم (درصورت وجود). اگر این نقطهٔ تقاطع را B بنامیم، معادلهٔ خط AB جواب مسأله است.



$$D': \frac{x}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2} \Rightarrow$$

$$x+3y+3=0 \quad \text{و} \quad 2x-3z=0$$

دو صفحهٔ مصور خط D′

$$\alpha(x+3y+3)+\beta(2x-3z)=0$$

دسته صفحهٔ گذرنده برخط D′

$$A(2,-1,0) \xrightarrow{\text{درمعادلهٔ دسته صفحه}} \alpha(2-3+3)+\beta(4)=0$$

$$\Rightarrow 2\alpha+4\beta=0 \Rightarrow \alpha=-2\beta \Rightarrow$$

$$-2\beta(x+3y+3)+\beta(2x-3z)=0 \Rightarrow$$

$$-2x-6y-6+2x-3z=0 \Rightarrow$$

$$-6y-3z-6=0 \Rightarrow 2y+z+2=0$$

معادلهٔ صفحهٔ P

$$\begin{cases} P: 2y+z+2=0 \\ D: \begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=4t \end{cases} \Rightarrow -2t+4+4t+2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t=-3 \Rightarrow B(-7,5,-12)$$

$$A(2,-1,0) \text{ و } B(-7,5,-12) \Rightarrow$$

$$AB/ \frac{x-2}{-7-2}=\frac{y+1}{5+1}=\frac{z-0}{-12-0} \Rightarrow$$

$$AB/ \frac{x-2}{-9}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{-12}$$

۳ـ می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله می‌باشند صفحهٔ عمود منصف پاره‌خط AB است. بنابراین معادلهٔ صفحهٔ عمود منصف پاره خط AB را می‌نویسیم و نقطهٔ تقاطع این صفحه با خط D را به دست می‌آوریم، (درصورت وجود زیرا اگر صفحهٔ عمود منصف پاره خط AB موازی خط D باشد مسأله جواب ندارد.)

$$A(-1,2,4) \text{ و } B(3,2,0) \Rightarrow$$

$$\text{وسط پاره خط } AB \; M(1,2,2) \text{ و } \overrightarrow{AB}(4,0,-4) \Rightarrow$$

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

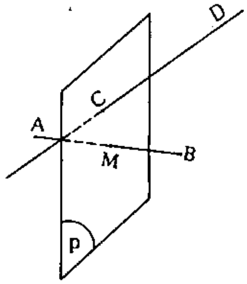
$$\Rightarrow 4(x-1)+0(y-2)-4(z-2)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x-z+1=0}$$

معادلهٔ صفحهٔ عمود منصف پاره‌خط AB

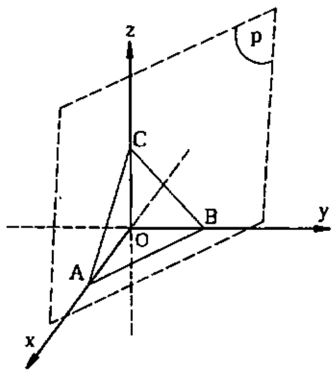
$$\begin{cases} x-z+1=0 \\ 3x-1=y+2=4z \end{cases} \Rightarrow$$

نقطهٔ موردنظر $C(-5,-18,-4)$



۴ـ اگر از برخورد یک صفحه با محورهای مختصات دستگاه مختصات قائم در فضا، مثلثی متساوی‌الاضلاع به وجود آید، قدرمطلق طول از مبدأ و عرض ازمبدأ و ارتفاع از مبدأ آن صفحه با هم برابر می‌باشند، یعنی:

$$|p|=|q|=|r|$$



زیرا مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین OAB و OBC و OAC که وترهای متساوی‌دارند، باهم برابرند. لذا:

$$OA=OB=OC$$

یعنی:

$$|p|=|q|=|r|$$

حال اگر مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل دراین مسأله، در همان ناحیه‌ای از دستگاه مختصات، محورهای مختصات را قطع کند که نقطهٔ $M(3,-2,2)$ واقع است، وطول از مبدأ این صفحه را p بنامیم داریم:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{-p}+\frac{z}{p}=1$$

$$M(3,-2,2) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ صفحه}} \frac{3}{p}+\frac{-2}{-p}+\frac{2}{p}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{7}{p}=1 \Rightarrow p=7 \Rightarrow \frac{x}{7}+\frac{y}{-7}+\frac{z}{7}=1$$

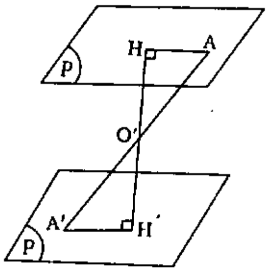
$$\Rightarrow x-y+z-7=0$$ معادلهٔ صفحهٔ مطلوب

آیا مسأله جواب یا جوابهای دیگری‌نیز دارد؟ پاسخ خود را به نشانی مجلهٔ برهان ارسال دارید. کاملترین پاسخ و نام فرستندهٔ آن، در مجله درج خواهد شد.

۵ـ صفحهٔ مطلوب، صفحه‌ای‌است موازی‌صفحهٔ P ، لذا بردار نرمال‌آن را همان‌بردار نرمال‌صفحهٔ P یعنی‌بردار:

$$\vec{v}(3, -1, 2)$$

می‌توان درنظر گرفت. بنابراین کافی‌است مختصات یک نقطه از صفحهٔ P′ را به دست آوریم.



اگر A نقطه‌ای از صفحهٔ P و A′ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ O′ باشد داریم:

$$A(0,-1,0) \text{ ، } A\in P$$

$$\begin{cases} x_{O'}=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2} \\ y_{O'}=\dfrac{y_A+y_{A'}}{2} \\ z_{O'}=\dfrac{z_A+z_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2=\dfrac{0+x_{A'}}{2} \\ 1=\dfrac{-1+y_{A'}}{2} \\ 3=\dfrac{0+z_{A'}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=-4 \\ y_{A'}=3 \\ z_{A'}=6 \end{cases} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$P': a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \Rightarrow$$

$$3(x+4)-(y-3)+2(z-6)=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{3x-y+2z+3=0}$$ معادلهٔ صفحهٔ P

راه دوم: اگر صفحهٔ جواب مسأله را P′ بنامیم، چون $P' \parallel P$ است پس $P': 3x-y+2z+d=0$ است. حال باید d را چنان تعیین کنیم که نقطهٔ O′ از دوصفحهٔ P و P′ به یک فاصله باشد. دراین‌صورت:

$$\frac{3(-2)-(1)+2(3)-1}{\sqrt{9+1+4}}=-\frac{3(-2)-(1)+2(3)+d}{\sqrt{9+1+4}} \Rightarrow -2=-d+1$$

$$\Rightarrow d=3 \Rightarrow P':\ \boxed{3x-y+2z+3=0}$$

۶−

$$[(p \Rightarrow r)\wedge(q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p\vee q) \Rightarrow r]$$

$$\overset{\text{عکس نقیض}}{\equiv} [(\sim r \Rightarrow \sim p)\wedge(\sim r \Rightarrow \sim q)]$$

$$\Rightarrow [\sim r \Rightarrow (\sim p\wedge\sim q)]$$

$$\equiv(\overbrace{[\sim r \Rightarrow (\sim p\wedge\sim q)]}^{Q} \Rightarrow \overbrace{[\sim r \Rightarrow (\sim p\wedge\sim q)]}^{Q})\equiv T$$

دراثبات مسألهٔ فوق از عکس خاصیت پخشی شرطی در عطفی استفاده‌شده است.

۷− هرگاه R یک‌حلقهٔ جابجایی باشد داریم:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2 \overset{ab=ba}{=} a^2+2ab+b^2$$

حال اگر برای‌هر $a,b\in R$ داشته‌باشیم:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

دراین‌صورت ثابت می‌کنیم حلقهٔ R جابه‌جایی است.

$$\forall a,b\in R\ ،\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$$

$$\Rightarrow a^2+ab+ba+b^2=a^2+ab+ab+b^2$$

$$\xrightarrow{\text{قانون حذف در گروه } (R,+)} ab=ba$$

پس حلقهٔ R جابجایی است.

۸− فرض‌کنیم: I_1 و I_2 هردوایده‌آل حلقهٔ R باشند، ثابت می‌کنیم: $(I_1\cap I_2)$ نیز ایده‌آل‌حلقهٔ R است.

الف):

فرض‌کنیم $x,y\in(I_1\cap I_2) \xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} x,y\in I_1$ ، $x,y\in I_2$

$$\xrightarrow{\text{تعریف ایده‌آل}} x-y\in I_1\ (I_1 \text{ ایده‌آل})\ ،\ x-y\in I_2\ (I_2 \text{ ایده‌آل})$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (x-y)\in(I_1\cap I_2)$$

ب):

فرض‌کنیم $r\in R$ و $x\in(I_1\cap I_2) \xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} x\in I_1 \wedge x\in I_2$

$$\xrightarrow{I_1 \text{ و } I_2 \text{ ایده‌آل}} rx\in I_1 \wedge rx\in I_2$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} rx \in (I_1\cap I_2)$$

و به همین قیاس‌ثابت می‌شود، xr نیزمتعلق به $(I_1\cap I_2)$ است بنابراین طبق تعریف ایده‌آل $(I_1\cap I_2)$ یک ایده‌آل حلقهٔ R است.

۹−

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos\sqrt{x^2+3x}-\cos 2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}}{x-1}$$

اگر $x\to 1 \Rightarrow \begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\to 0\\ \frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{2}\to 2\end{cases}$

$$\Rightarrow \sin\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\sim\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2} \quad (x\to 1)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2\sin 2\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{2}\right)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(-\sin 2)\times\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(-\sin 2)\times\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x^2+3x}+2}{\sqrt{x^2+3x}+2}$$

$$=\lim_{x\to 1}(-\sin 2)\times\frac{x^2+3x-4}{(x-1)(2+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(-\sin 2)\times\frac{(x-1)(x+4)}{4(x-1)}$$

$$=(-\sin 2)\times\frac{5}{4}=-\frac{5}{4}\sin 2 \Rightarrow$$

تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است.

۱۰−

$$y'=\frac{-2x^2+0x+m}{v^2}$$

$$y'=0 \Rightarrow -2x^2+0x+m=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x'\cdot x''=\frac{c}{a}=-\frac{m}{2}}$$

$$y=\frac{x}{2x^2-5x+m} \Rightarrow$$

$$2yx^2-5yx+my=x$$

$$2yx^2-(5y+1)x+my=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(5y+1)^2-8my^2=0$$

$$(25-8m)y^2+10y+1=0$$

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{y_2+y_1}{y_1y_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}=-10$$

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=10x'x'' \Rightarrow$$

$$-10=10\left(-\frac{m}{2}\right) \Rightarrow \boxed{m=2}$$

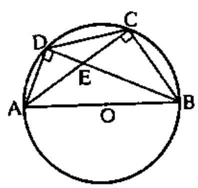
حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱− راه اول: دایره‌ای بـه قطر AB از نقاط C و D می‌گذرد، زیرا:

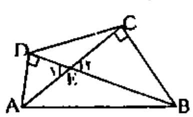
$$A\hat{C}B=A\hat{D}B=90^\circ$$

است. پس چهار ضلعی ABCD محاطی است. بنابراین بنابه روابط طولی در دایره داریم:

$$EA\cdot EC=EB\cdot ED$$



راه دوم: دومثلث‌قائم‌الزاویه EAD و EBC متشابه‌اند

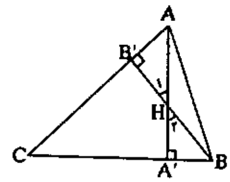


زیرا:

$$\hat{E}_1=\hat{E}_2\ ,\ \hat{D}=\hat{C}=90^\circ \Rightarrow \frac{EA}{EB}=\frac{ED}{EC} \Rightarrow$$

$$EA\cdot EC=EB\cdot ED$$

۲ـ اگر مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین و H نقطهٔ برخورد ارتفاعات AA' و BB' باشد، $HA=HB$ است. پس $HA^2-HB^2=0$ می‌باشد.



از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HAB' و $HA'B$ متشابه‌اند، زیرا:

$$\hat{A}'=\hat{B}'=90^\circ \quad \text{و} \quad \hat{H}_1=\hat{H}_2$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{HA}{HB}=\frac{HB'}{HA'}$$

و از آنجا:

$$HA\cdot HA'=HB\cdot HB'$$

یا

$$HA\cdot HA'-HB\cdot HB'=0$$

در نتیجه:

$$HA^2-HB^2=HB\cdot HB'-HA\cdot HA'$$

نکته: اگر H نقطهٔ تقاطع ارتفاعات AA' و BB' و CC' از مثلث ABC باشد همواره داریم:

$$HA\cdot HA'=HB\cdot HB'=HC\cdot HC'$$

۳ـ

$$k^3(x-k^2)=s^3(x-s^2)$$

$$k^3x-k^5=s^3x-s^5 \Rightarrow (k^3-s^3)x=k^5-s^5$$

$$x=\frac{k^5-s^5}{k^3-s^3}=$$

$$\frac{(k-s)(k^4+k^3s+k^2s^2+ks^3+s^4)}{(k-s)(k^2+ks+s^2)}$$

با فرض $k-s\neq 0$ و یا $k\neq s$ داریم:

$$x=\frac{k^4+k^3s+k^2s^2+ks^3+s^4}{k^2+ks+s^2}$$

بنابراین معادله درحالت $s=k$ مبهم است و به ازای هرمقدار حقیقی k و s باشرط $s\neq k$ دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

۴ـ ابتدا مبین معادله‌را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-m^2x+4=0 \Rightarrow \Delta=m^4-16$$

الف) باشرط $\Delta>0$ معادله‌دارای‌دو ریشهٔ حقیقی‌است‌یعنی:

$$\Delta=m^4-16>0$$

$$m^4-16>0 \Rightarrow (m^2-4)(m^2+4)>0$$

$$m^2-4=0 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$$

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
m^2-4		+	0	−	0	+	
Δ		+		−		+	

بنابراین اگر $m>2$ و یا $m<-2$ معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

ب) شرط ریشهٔ مضاعف:

$$\Delta=m^4-16=0 \Rightarrow m^4=16$$

(بنابراین به‌ازای $m=2$ و یا $m=-2$ معادله ریشه مضاعف دارد)

$$\Rightarrow m=\pm 2$$

ج) با جایگزین کردن $x=2$ درمعادله‌مقدار m محاسبه می‌شود، یعنی:

$$x=2:\ 2^2-2m^2+4=0 \Rightarrow 2m^2=8$$

$$\Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$$

۵ـ از معادلهٔ $3\cos x+2=0$ مقدار $\cos x$ را حساب کرده و سپس از رابطهٔ:

$$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

مقدار سینوس را حساب می‌کنیم:

$$3\cos x+2=0 \Rightarrow 3\cos x=-2 \Rightarrow$$

$$\cos x=\frac{-2}{3}\left(\pi<x<\frac{3\pi}{2}\right)$$

با توجه به حدود x که در ربع سوم‌است داریم:

$$\sin x=-\sqrt{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^2}$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

و

$$tg x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{-\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$cotg x=\frac{1}{tg x}=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۶ـ ابتدا هریک‌از پرانتزها را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=$$

$$\sqrt{\frac{(1+\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}-\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}=$$

$$\sqrt{\frac{(1+\cos x)^2}{\sin^2 x}}-\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}}$$

با توجه به شرط $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$=\frac{|1+\cos x|}{|\sin x|}-\frac{|1-\cos x|}{|\sin x|}=\frac{1+\cos x-1+\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{2\cos x}{\sin x}=2\,cotg x$$

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+\sin^2 x+2\sin x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2(1+\cos x)}{\cos x(1+\sin x)}$$

و ازضرب حاصل دو پرانتز داریم:

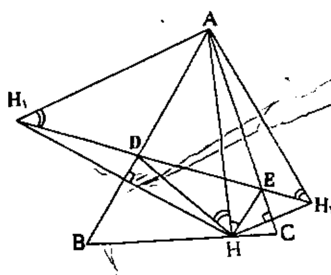
$$=\frac{2}{\cos x} \Rightarrow (2\,cotg x)\left(\frac{2}{\cos x}\right)=\frac{4}{\sin x}$$

حل‌مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ـ از رأس A به نقاط H_1 و H_2 وصل می‌کنیم. دو مثلث AH_1D و AHD باهم برابرند زیرا:

$$AH=AH_1,\ DH=DH_1,\ AD=AD$$

پس: (۱) $\hat{A}H_1D=\hat{A}HD$.



همچنین دو مثلث AEH و AEH_2 باهم برابرند زیرا:

$$AH=AH_2 \text{ و } EH=EH_2 \text{ و } AE=AE$$

پس (۲) $A\hat{H}_2E=A\hat{H}E$

اما مثلث AH_1H_2 متساوی‌الساقین می‌باشد، چون:

$$AH_1=AH_2=AH$$

است. بنابراین:

$$A\hat{H}_1D=A\hat{H}_2E \qquad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$A\hat{H}D=A\hat{H}E$$

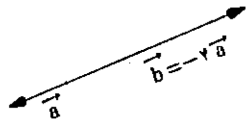
یعنی AH نیمساز زاویهٔ DHE است.

-۲

$$|\vec{a}|=3,\ \vec{b}=-4\vec{a} \Rightarrow |\vec{b}|=12,$$
$$(\vec{a},\vec{b})=180^\circ$$

الف) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-4\vec{a}|=|-3\vec{a}|=9$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+4\vec{a}|=|5\vec{a}|=15$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|=9\times 15=135$$



ب) $(\vec{a}+4\vec{b})\cdot(\vec{b}+4\vec{a})=$

$$(\vec{a}+4\vec{b})\cdot(-4\vec{a}+4\vec{a})=0$$
$$(\vec{a}+4\vec{b})\cdot(\vec{0})=0$$

ج) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=$

$$3\times 12\times\cos 180^\circ=-36$$

۳ـ با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{AK_m}}{\overline{AB}}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{x_m-x_A}{x_B-x_A}=\frac{m}{n}$$
$$\Rightarrow \frac{x_m-a}{b-a}=\frac{m}{n}$$
$$x_m-a=\frac{m}{n}(b-a) \Rightarrow x_m=a+\frac{m}{n}(b-a)$$

-۴

$(gof)(x)=f(x)-x^2$ و $g(x)=x^2-x$

$g(f(x))=f(x)-x^2$ و $g(f(x))=f^2(x)-f(x)$

از تساوی رابطه‌های اخیر داریم:

$$f^2(x)-f(x)=f(x)-x^2$$
$$f^2(x)-2f(x)+x^2=0 \Rightarrow$$
$$f(x)=1\pm\sqrt{1-x^2}$$
$$1-x^2\geqslant 0 \Rightarrow x^2\leqslant 1 \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$$

بنابراین داریم:

$$D_f=[-1\ ,\ 1]$$
$$f(\cos\alpha)=1\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=1\pm\sqrt{\sin^2\alpha}=1\pm\sin\alpha$$
$$=1\pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow f(\cos\alpha)=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

۵ـ الف) به ترتیب داریم:

$$\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$
$$\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{4\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{4\pi}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$

بنابراین داریم:

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

ب) داریم:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=$$
$$\frac{\cos 10^\circ-tg 60^\circ\sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=$$
$$\frac{2(\cos 10^\circ\cos 60^\circ-\sin 10^\circ\sin 60^\circ)}{\sin 20^\circ\cos 60^\circ}=$$
$$\frac{4\cos(60^\circ+10^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{4\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=4$$

-۶

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}$$
$$+\frac{1+\cos 8x}{2}=2$$

که پس از ساده کردن واختصار لازم داریم:

$$(\cos 8x+\cos 6x)+(\cos 4x+\cos 2x)=0$$
$$2\cos 7x\cos x+2\cos 3x\cos x=0$$
$$2\cos x(\cos 7x+\cos 3x)=0 \Rightarrow$$
$$4\cos x\cos 2x\cos 5x=0$$

وبنابراین جوابهای کلی معادله چنین نتیجه می‌شود:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{1}{2}k_1\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{1}{5}k_2\pi+\frac{\pi}{10}$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

-۱

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{(-1-m)^2+(2+2)^2}=5$$
$$(m+1)^2+4^2=5^2 \Rightarrow (m+1)^2=9 \Rightarrow$$

$m=-1\pm 3$ و $m\in R^+ \Rightarrow \boxed{m=2}$

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{m-1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-2+2}{2}=0 \Rightarrow$$

$M\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$ (مختصات وسط پاره‌خط AB)

$$d=\frac{|4(\frac{1}{2})-3(0)+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{d=\frac{3}{5}}$$
$$m_D=\frac{4}{3}$$
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2+2}{-1-2}=\frac{-4}{3}$$
$$tg\alpha=\left|\frac{m_D-m_{AB}}{1+m_Dm_{AB}}\right|=\left|\frac{\frac{4}{3}-(-\frac{4}{3})}{1+(\frac{4}{3})(\frac{-4}{3})}\right|$$
$$=\left|\frac{\frac{8}{3}}{\frac{-7}{9}}\right|=\frac{24}{7} \Rightarrow \boxed{\alpha=Arctg\left(\frac{24}{7}\right)}$$

۲ـ چون خطوط مماس وقائم بر روی محور عرضها تلاقی می‌کنند، بنابراین طول نقطهٔ تماس $x=0$ است. در نتیجه مختصات نقطهٔ تلاقی خطوط مماس وقائم چنین خواهد بود:

$$M\left|\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right.$$

(با جایگزین کردن $x=0$ درمعادلهٔ منحنی عرض نقطهٔ تماس به دست می‌آید، یعنی: $y=1$).

اینك ضریب زاویهٔ خط مماس را با استفاده از مختصات نقطهٔ تماس و مشتق ضمنی به دست می‌آوریم. یعنی:

$$y'=\frac{-f'_x}{f'_y}$$
$$y'=-\frac{2xy+\sqrt[3]{y}}{x^2+\frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}-3y^2}$$
$$(f(x,y)=x^2y+x\sqrt[3]{y}-y^3+1)$$
$$m=y'\binom{x=0}{y=1}=\frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{m=\frac{-1}{3}}$$

دراینجا معادله‌های خطوط مماس وقائم را می‌توان نوشت:

$$y-y_M=m(x-x_M) \Rightarrow y-1=\frac{-1}{3}(x-0)$$

معادلهٔ خط مماس $\boxed{y=\frac{-1}{2}x+1}$

$$m'=\frac{-1}{m}=2 \Longrightarrow y-y_N=m'(x-x_N)$$

$$y-1=2(x-0) \Longrightarrow \boxed{y=2x+1}$$

معادلهٔ خط قائم

۳- الف) با جایگزین کردن $x=\frac{\pi}{4}$ درمعادلهٔ مفروض m محاسبه خواهدشد، یعنی:

$$\sqrt{2}\,(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4})+m\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=1$$

$$\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})+m(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=1$$

$$2+\frac{m}{2}=1 \Longrightarrow \boxed{m=-2}$$

ب) با روشی بسیار ساده، معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم را درحالت کلی حل می‌کنیم.

حالت کلی معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم:

$$a(\sin x\pm\cos x)+b\sin x\cos x=c$$

$$a(\sin x\pm\cos x)=c-b\sin x\cos x$$

پس‌از به‌توان ۲ رساندن‌طرفین داریم:

$$a^2(1\pm\sin 2x)=(c-\frac{b}{2}\sin 2x)^2$$

$$a^2\pm a^2\sin 2x=c^2-bc\sin 2x+\frac{b^2}{4}\sin^2 2x$$

$$\frac{b^2}{4}\sin^2 2x-(bc\pm a^2)\sin 2x+(c^2-a^2)=0$$

$$\sin 2x=\frac{(bc\pm a^2)\pm a\sqrt{a^2\pm 2bc+b^2}}{\frac{b^2}{2}}$$

$$\Delta=a^2\pm 2bc+b^2$$
$$\Delta_1=a^2+2bc+b^2$$
$$\Delta_2=a^2-2bc+b^2$$

پس‌از بررسی وتحقیق داریم:

$$\sin 2x=\frac{(bc+a^2)-a\sqrt{\Delta_1}}{\frac{b^2}{2}}$$

$$\sin 2x=\frac{(bc-a^2)+a\sqrt{\Delta_2}}{\frac{b^2}{2}}\quad(b\neq 0)$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\Delta_1=a^2+2bc+b^2=(\sqrt{2})^2+2m+m^2\geqslant 0$$

$$\Delta_1=2+2m+m^2\geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\Delta_1=(m+1)^2+1\geqslant 0$$

Δ_1 همواره مثبت است، و درنتیجه معادله همواره دارای ریشهٔ حقیقی است.

ج) در رابطهٔ:

$$\sin 2x=\frac{(bc+a^2)-\sqrt{\Delta_1}}{\frac{b^2}{2}}$$

مقادیر a و b و c را جایگزین می‌کنیم. و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sin 2x=\frac{(-2+2)-\sqrt{2}\sqrt{2+2(-2)+4}}{\frac{4}{2}}$$

$$=\frac{-2}{2}=-1=\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$\sin 2x=\sin\frac{3\pi}{2} \Longrightarrow 2x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{3\pi}{4}}$$

$$2x=2k\pi+\pi-\frac{3\pi}{2} \Longrightarrow 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{4}}$$ (جوابهای معادله)

۴- الف) داریم:

$$S=(1+\sin x)(1+\cos x)$$

$$S=(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})(1+2\cos^2\frac{x}{2}-1)$$

$$=(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})(2\cos^2\frac{x}{2})$$

$$S=2(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=2[\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})+\cos\frac{x}{2}]^2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=4\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=[2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\cos\frac{x}{2}]^2$$ (مربع کامل)

ب) داریم:

$$S=[2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\cos\frac{x}{2}]^2$$

ابتدا مقدار داخل کروشه را به صورت مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$S=[\cos(\frac{\pi}{4}-x)+\cos\frac{\pi}{4}]^2$$

$$=[\cos(\frac{\pi}{4}-x)+\frac{\sqrt{2}}{2}]^2$$

حداکثر S وقتی است که $\cos(\frac{\pi}{4}-x)$ حداکثر باشد یعنی:

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=1 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

ودر این صورت خواهیم داشت:

$$\boxed{S_{max}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$$

حداقل S وقتی است که $\cos(\frac{\pi}{4}-x)$ حداقل باشد. یعنی:

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=-1 \Longrightarrow x=\frac{5\pi}{4}$$

و در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\boxed{S_{min}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}$$

اسامی تعدادی از عزیزانی که حل مسائل مسابقه‌ای و مسائلی برای حل را در زمان تعیین‌شده برای ما فرستاده‌اند.

۱- انسیه‌بخشایی‌پور (تهران)
۲- مینا ذوالقدر (تهران)
۳- شهرام بیگلری (کرمانشاه)
۴- محمدصالح نائیان (مشهد)
۵- محمدرضا جعفری (تهران)
۶- محمدعلی میرزاآقاتبار (آمل)
۷- بامداد فلاحتی (تهران)
۸- رضا معنوی (گرگان)
۹- عطاالله صادقی (تهران)
۱۰- سیدمحسن احمدی (شیراز)
۱۱- حسین حیدری دلوئی (گناباد)

جوابهای تفریح اندیشه

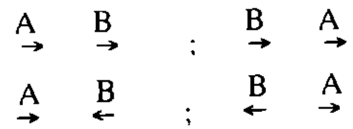
جواب ۱

۴۱ ۳۲۵ . با هریک از ارقام ۱، ۲، ۳ ی مزبور ۲۴ عدد حاصل می‌شود که (۲۴ × ۳) = ۷۲ عدد اول ترتیب فوق را می‌دهند. عدد ۷۵ امین باید سومین عدد آغاز شونده با ۴ باشد:

۴۱ ۲۳۵ , ۴۱ ۲۵۳ , ۴۱ ۳۲۵

جواب ۲

A: ۸۰ m/s ؛ B: ۴۰ m/s . قطار A در ۱۵ ثانیه ۶۰۰ متر از قطار B جلو می‌زند. بنابراین، A ، ۴۰ m/s تندتر از B حرکت می‌کند. A و B فاصلهٔ مرکب ۶۰۰ متر را در ۵ ثانیه طی می‌کنند. سرعتهای مرکبشان $\frac{۶۰۰}{۵}$ = ۱۲۰ m/s است. بنابراین A با ۸۰m/s و B با ۴۰ m/s حرکت می‌کند.



جواب ۳

۱۸۰. زیرا ۱۲ دقیقه طول می‌کشد تا A ، C را بگیرد (یعنی ۴۰۰ متر را بپیماید)، و در ۶ دقیقه‌ای که طول می‌کشد که B را بگیرد در نیمه راه (یعنی ۲۰۰ متری) است. بنابراین، B صدمتر به طرف C را در ۶ دقیقه طی کرده است. به این ترتیب ۶×۳ ، یا ۱۸ ، دقیقه طول می‌کشد تا B مسافت ۳۰۰ متر را طی کند.

جواب ۴

۱۰۸۹. اگر حاصل ضرب یک عدد چهار رقمی در ۹، یک عدد چهاررقمی باشد، رقم هزارگان آن باید ۱ باشد. رقم صدگان عدد مزبور باید ۰ باشد، زیرا چیزی به مرتبهٔ هزارگان اضافه نمی‌کند، و تنها مقدار یک رقمی x ی که به ازای آن ۸ + ۹x برابر مضربی از ۱۰ است x = ۸ است.

۱ ۰ ۸ ۹	۱ ۰ x ۹	۱ □ □ ۹
۹	۹	۹
۹ ۸ ۰ ۱	۹ x ۰ ۱	۹ ۱

جواب ۵

چهل و هشت. به هرقوطی ۱/۴ = ۱/۱۲ × ۳ یک جعبهٔ پراز مهره می‌رسد. هر جعبه ۱/۲ = ۱/۱۲ × ۶ یک جعبهٔ پر را از دست می‌دهد. هر جعبه ۱/۴ = ۱/۴ − ۱/۲ یک جعبهٔ پر بیش از هر قوطی دارد. بنابراین دوازده مهره یک چهارم یک جعبهٔ پر را ارائه می‌دهد.

In the name of God

Borhān

VOL.2. No.1
Serial numbers; 5
Februery 1993

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

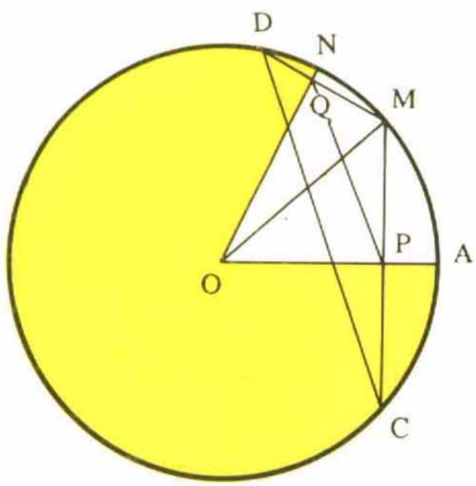
All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e-Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

Title	Author
Chief editor's remarks	
You, too, may be successful in your mathematics lessons	Parvis Shahryari
Some points about alternating functions	Ahmad Ghandehari
Instruction of translation of mathematics articles	Gholam Reza Yassipour
The Rule of Conditional Proof	" " "
A brief history of persian mathematics journals	
Some Points about sets	Hamid Reza Amiri
Short articles of authentic mathematics journals	
Interview with a victorious Struggler	
Binomial expansion	Mohammad Reza Hashemi
Wonders of mathematics	Hasan Nasirnia
Consideration of axial symmetry and central symmetry	Hasanzade Mākuī
In commemoration of professor Zia Hashtroodi	Dr. Ahmad Sharafeddin
Solving a fundamental problem of mathematics by elementary methods	
Readers' articles	
Introduction of mathematics books	
Contest problems	Hamid Reza Amiri
Problems	Amiri, Rostami, Ghandehari, Hashemi
Solutions of Contest problems	Seyyed Hosain Seyyed Moosavi
Solutions and hints of problems	

اثبات ابوالوفا بوزجانی از رابطهٔ بسط سینوس مجموع



درشکل فرض می‌کنیم $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ و $\overset{\frown}{MN} = \beta$. اگر عمودهای MP و MQ را به ترتیب بر OA و ON فرود آوریم و امتداد دهیم تا دایره را در C و D قطع کنند، داریم: $\overset{\frown}{CD} = 2(\alpha + \beta)$، یعنی $\sin(\alpha + \beta) = \frac{|CD|}{2}$ (سینوس هرکمان برابر است با طول نصف وتر دو برابر آن کمان)؛ در ضمن $|PM| = \sin\alpha$، $|OP| = \cos\alpha$، $|MQ| = \sin\beta$ و $|OQ| = \cos\beta$. چون پاره‌خط راست PQ، وسط دو ضلع مثلث MCD را به‌هم وصل کرده‌است، بنابراین $|PQ| = \frac{|CD|}{2}$، یعنی $|PQ| = \sin(\alpha+\beta)$. قضیهٔ بطلمیوس درچهار ضلعی OPMQ می‌گوید:

$$|OM| . |PQ| = |PM| . |OQ| + |OP| . |MQ|$$

که اگر شعاع دایره را برابر واحد بگیریم و، در رابطهٔ بطلمیوس، به جای پاره‌خط‌های راست، مقدار آنها را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$$

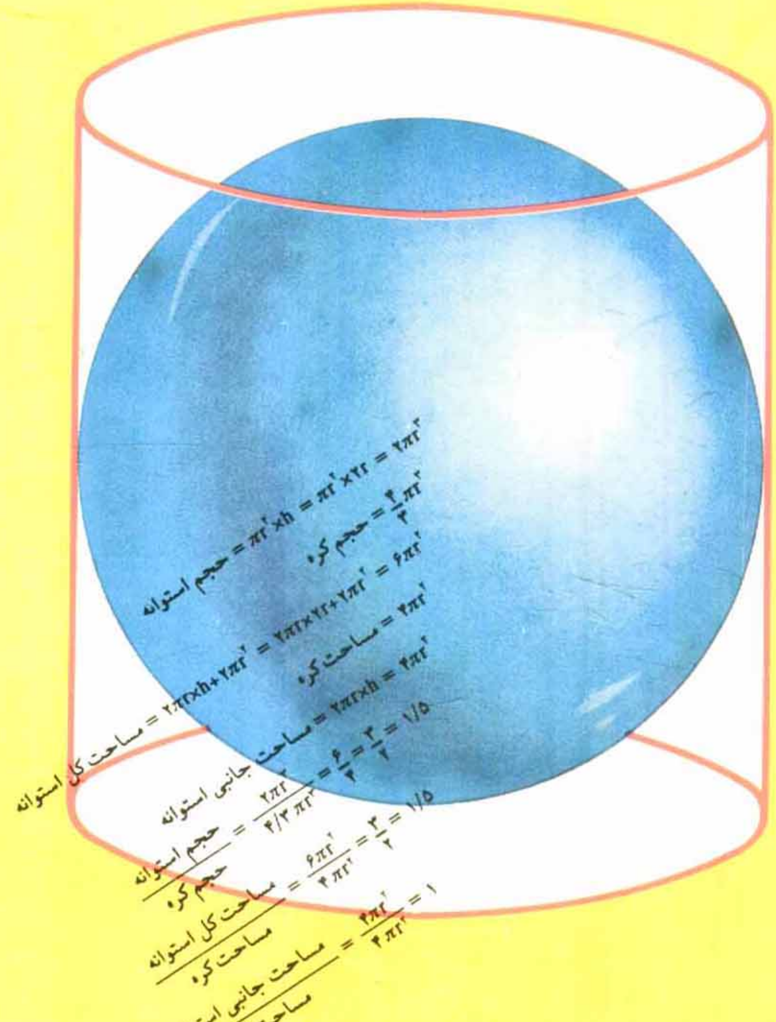
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۶

سال دوّم، بهار ۱۳۷۲، شمارهٔ دوّم، بهاء ۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:
• حمیدرضا امیری • محمدهاشم رستمی • احمد قندهاری
• سیدمحمدرضا هاشمی موسوی • غلامرضا یاسی‌پور

(باتشکراز همکاری ارزندهٔ آقایان پرویزشهریاری ، محمدعابدی ومهدی قمصری)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا: مهرزاد طاهری
• رسام: فرخ نیکزاد • حروفچینی: یگانه • تیراژ: ۵۰۰۰۰ نسخه

طرح روی جلد نمایانگر استوانه معروف به استوانه ارشمیدس است (شعاع کره = شعاع استوانه) این طرح از طرف آقای حسین سبزرو دانش‌آموز سال چهارم پیشنهاد گردیده است.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

• حرف اوّل ۱
• شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید/ *پرویز شهریاری* ۲
• دیفرانسیل و انتگرال/ *احمد قندهاری* ۷
• آموزش ترجمه متون ریاضی(۲)/ *حمیدرضا امیری* ۱۶
• برهان خلف/ *غلامرضا یاسی‌پور* ۲۰
• تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۵) ۲۳
• توابع پوشا و بررسی خاصیت پوشایی در انواع توابع/ *حمیدرضا امیری* ۲۶
• مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبرجهان(۴)/ *نغمهٔ شریک زاده* ۳۴
• مسائل برای دانش‌آموزان/ *دکتر احمد شرف‌الدین* ۳۸
• تابع معکوس تابعهای مثلثاتی/ *علی حسن‌زاده ماکویی* ۴۲
• نقدی بر کتاب/ سیدحسین سیدموسوی ۴۵
• تعیین دامنه و برد توابع/ *سیدمحمدرضا هاشمی* ۴۸
• طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۴) ۵۶
• جواب نامه‌ها ۶۰
• تناقضها در ریاضیات و علوم/ *حسن نصیرنیا* ۶۲
• مسائل مسابقه‌ای ۶۳
• حل مسائل مسابقه‌ای برهان (۴)/ *محمدهاشم رستمی* ۶۴
• مسائل و تست برای حل ۶۶
• حل مسائل برهان (شمارهٔ ۵) ۸۰
• معرفی کتاب ۹۵

☐ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه بهرام چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷، ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، فاکس ۸۸۲۰۵۹۹

حرف اول

انسان موجودی هدف‌دار است و آن هدف، تعالی و تکامل بی‌پایان انسان و بازگشت به خدا و بروز خصلتهای نیک و انرژیها و استعدادهای نهانی انسان و به‌کار افتادن این همه در راه نیکی و نیکسازی خود و جهان و انسانهاست. از جانبی دیگر، فراموش کردن هدف و جهت در زیر فشار گرفتاریهای مادی امری واضح و طبیعی است از طرفی امکان مرور کردن همهٔ تعهدهایی که در این راه آدمی به عهده گرفته در هر روز تقریباً ناممکن و محال است. به‌علاوه، زمان کافی برای بررسی تمام خواسته‌ها و ایده‌آلهای این مکتب ـ مکتب زندگی‌ساز و سعادت‌بخش اسلام ـ در شبانه روز هیچ‌گاه وجود ندارد و چنین فرصتی هرگز به‌دست نمی‌آید. نماز چکیده و خلاصهٔ اصول این مکتب را در خود دارد و باگفتنی‌ها و حرکتهای حساب شده و منظمی که درآن هست نمودار اسلام است.

نماز یک زنگ بیداری و یک هشدار در ساعات مختلف شبانه‌روز است. به انسان برنامه می‌دهد و از او تعهد می‌خواهد، به روز و شبش معنا می‌دهد و از گذشت لحظه‌ها حساب می‌کشد. در آن هنگام که انسان مشغول و بی‌خبر از طی زمان و انقضای عمر است او را می‌خواند و به او می‌فهماند که روزی گذشت و روزی دیگر آغاز شد. باید فعالیت کنی. مسئولیت بزرگتری برعهده بگیری وکار مهمتری انجام دهی. به دلیل آنکه بخشی‌از عمر، از فرصت عمل، به سرآمد پس باید بیشتر تلاش کرد و پیشتر رفت زیرا هدف بزرگ است، مگر تا فرصت ازکف نرفته به آن دست یافت.

آری نماز بهار دلهاست و بهارجان است و همانگونه که بهار زمین را زنده می‌کند نماز جان را. همواره جان در تلاطم و پرواز به سوی هدف است و روحیهٔ «طلب» ، «امید» ، «آرامش» و «اطمینان» که بالهای نیرومند این پروازند، نتیجهٔ یاد خدا و نماز می‌باشد. عزیزان مطلب راجع به فلسفهٔ نماز بسیار وسیع و فواید آن به بی‌نهایت میل می‌کند و همچون دایره‌ای می‌ماند که در مرکز آن قرار داشته‌باشیم و بخواهیم از هرطرف به محیط آن برسیم.

حرف راکوتاه می‌کنم و به‌ذکر چند نکته راجع به مطالب مجله می‌پردازم:

۱ ـ اگر از معلمین خود خاطرات یا خاطره‌ای دارید برای ما ذکر کرده و به‌همراه نام معلم و اینکه آیا درقید حیات می‌باشند یا خیر بفرستید.

۲ ـ اگر به‌نکات تستی جالب و یا تستهایِ خوب برخورد کردید و یا خودتان طرح کرده‌اید برای ما بفرستید.

در ضمن چون تاریخ چاپ این شماره مجلّه احتمالاً مصادف با هفتهٔ معلم می‌باشد این ایام را به‌تمامی معلمین خوب و دلسوز میهن اسلامیمان تبریک عرض می‌نماییم و توفیق روز افزون برای همگی شما عزیزان خواستاریم.

سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۶)

• پرویز شهریاری

دراین‌جا و به‌مناسبت نامه‌ای که یک خوانندهٔ دانش آموز فرستاده است؛ ناچاریم دربارهٔ آنچه تا این‌جا گفته‌ایم، اندکی توضیح بدهیم. این دانش‌آموز، در نامهٔ مفصل خود، ازجمله می‌پرسد: «اگر قرار باشد، ضمن مطالعهٔ درسهای ریاضی، یا ضمن گوش دادن درس معلم و یا بعد از آن که مسأله‌ای را حل یا قضیه‌ای را ثابت کردیم، همچنان در «شک» باقی بمانیم و فرض را بر این بگیریم که ممکن است همه اینها نادرست باشند، آیا اعتماد خود را نسبت به ریاضیات (و به‌طورکلی دانش) از دست نمی‌دهیم و دچار نوعی سرگردانی فکری نمی‌شویم؟» من، برای دوری از درازی مطلب و روشنتر شدن آن، پرسش این دوست دانش‌آموز را بازسازی کرده‌ام و، با نقل به‌معنی، در این‌جا آورده‌ام.

اول، جمله‌ای پرمضمون را، از عین‌القضات همدانی، به‌نقل از یکی از نامه‌های او، می‌آوریم:

«... چندین هزار جنازه که به گورستان برند، یکی از اینان به شک نرسیده بود؛ و از چندین هزار به شک رسیده، یکی را گرفتاری طلب نبود؛ و چندین هزار را دردِ طلب بگیرد و یکی به‌راه راست نیافتد...»

و این بویژه هشداری است برای همهٔ آنها که می‌خواهند، در کار علمی خود «به‌راه راست بیفتند»، «شک» آغاز کار است، نه پایان آن. «شک» هدف نیست، بلکه وسیله‌ای است برای نزدیکتر شدن به «حقیقت» و اگر درست و بجا و اندیشیده نباشد، به‌قول دوست دانش‌آموز ما، موجب «بی‌اعتمادی» و درنتیجه «سرگردانی فکری» می‌شود.

معمولاً، وقتی کسی می‌خواهد، نظر خود را به‌طرف بقبولاند و استدلال و داوری خود را قاطع و بدون بحث نشان دهد، از ضرب‌المثل «مثل دو دوتا، چهارتاست» استفاده می‌کند. دراین ضرب‌المثل، قضاوتی نهفته است که، بنابرآن، هر حکم ریاضی، ثابت، بی‌تغییر و غیرقابلِ اعتراض است. ولی باید بگوییم که این ضرب‌المثل، در ریاضیات، کمتراز هرجای دیگری صدق‌می‌کند. دراین مورد، می‌توان مثالهای بسیار و ساده و عامیانه‌ای آورد. می‌گوییم $۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$. ولی اگر شما، یکی از کفشهای خود را از وسط و در جهت درازی آن بُرید و به دو نیمهٔ برابر تقسیم کنید، این دو نیمهٔ کفش، با یک کفش کامل، برابر نیست؛ یعنی نمی‌توانند کار یک کفش را انجام دهند. اگر قطعهٔ الماسی را نصف کنید، ارزش این نیمه روی‌هم، برابر با ارزش قطعهٔ اصلی نیست... می‌گوییم $۱۰ + ۱۰ = ۲۰$، ولی اگر ۱۰ لیتر آب را با ۱۰ لیتر الکل، مخلوط کنیم، روی هم ۱۹ لیتر «آب و الکل» به‌دست می‌آید (تداخل مولکولهای آب و الکل، حجم مجموع را اندکی کاهش می‌دهد). همین مثالهای ساده به ما نشان می‌دهد: ریاضیات، ابزاری برای دفع دشواریهای زندگی (و از آن‌جمله صنعت و دانشهای دیگر) است، ریاضیات، چیزی مجرد و جدا از زندگی نیست که تنها زائیدهٔ ذهن آدمی باشد. بنابراین، در هر مورد خاصی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، باید با تجربه و واقعیت تطبیق کند... و اگر درجایی، در ریاضیات به پاسخی نادرست رسیدیم، باید ریاضیات را عوض کرد نه زندگی را.

ریاضیات از مشاهده و تجربه (هم تجربهٔ بیرونی و هم تجربهٔ درونی و ذهنی) بیرون آمده است و، بتدریج، همچون درختی که

به‌طرف بالا و به دوروبر خود قد می‌کشد و می‌گسترد، بااستفاده از قراردادها، قضیه‌ها و استنتاجها، رشد کرده و تکامل یافته است. ولی تکامل ریاضیات، درمقایسه با رشد درخت، دو خصلت اساسی دارد:

اول این‌که، این تکامل، به پایان خود نرسیده و هرگز هم، به نقطهٔ پایان خود نمی‌رسد. ریاضیات، زنده و پویاست و نمی‌تواند در «قالبی محدود» محبوس بماند. «نفی» گذشتهٔ ریاضیات، به‌معنای نفی بی‌دقتیهای آن است و نه نفی کامل گذشته. با تکامل ریاضیات و با دقیقتر شدن آن، به قانونها و «آلگوریتمهای» عامتری می‌رسیم که شُمول بیشتری دارند و کارآمدتر از قانونها و آلگوریتمهای قبلی‌اند.

برای این‌که به شُمول دستورهای ریاضی پی‌ببریم که چگونه، یک رابطهٔ ریاضی یا یک بررسی خالص ریاضی، می‌تواند پدیده‌ها و روندهای مختلفی را شرح دهد و در زمینه‌های گوناگونی از دانشهای طبیعی کاربرد پیدا کند، مثال ساده‌ای را از کتاب «محتوی، روش و اهمیت ریاضیات» می‌آوریم که، گرچه به ریاضیات مقدماتی و دبیرستانی مربوط می‌شود، می‌تواند معرف تواناییهای ریاضیات در توضیح قانونهای موجود در طبیعت باشد:

> «... در سدهٔ شانزدهم، بررسی حرکت، در مرکز توجه دانشهای طبیعی قرارداشت. نیازهای زندگی و پیشرفت دانشهای طبیعی، این دانشها را در آستانهٔ بررسی گونه‌های مختلف تغییر، و بررسی بستگی بین کمیتهای متغیر قرار داد. مفهومهای متغیر و تابع، به‌عنوان بازتابی از ویژگیهای عمومی کمیتهای متغیر و رابطهٔ بین آنها، در ریاضیات به‌وجود آمد. و این، به‌معنای پیشرفت ریاضیات و به‌معنای انتقال به دوره‌ای تازه، یعنی دورهٔ کمیتهای متغیر بود. قانون حرکت جسم، روی مسیر مفروض، و مثلاً روی خط راست، از روی مسافتی که در طول زمان می‌پیماید، معین می‌شود. مثلاً گالیله (۱۵۶۴ - ۱۶۴۲)، قانون سقوط جسم را کشف و ثابت کرد، مسافتی که جسم در حال سقوط می‌پیماید، با مجذور زمان متناسب است. این قانون، با دستور زیرنشان داده می‌شود:
>
> $$S = \frac{۱}{۲} gt^۲ \qquad (۱)$$
>
> که در آن، مقدار g به‌تقریب برابر ۹/۸۱ (متر بر مجذور ثانیه) است... مفهوم ریاضی متغیر و تابع، چیزی جز تعمیم انتزاعی مقدارهای متغیر مشخص (مثل زمان، مسافت، سرعت، زاویهٔ دوران و غیره) و رابطه‌های مشخص بین آنها (مثل رابطه‌ای که بین مسافت پیموده شده با زمان وجود دارد) نیست. همان‌طورکه «عدد حقیقی» شکل انتزاعی اندازهٔ کمیت است، همان‌طور هم، «متغیر» شکل انتزاعی کمیتی است که تغییر می‌کند. کمیتی که می‌تواند مقدارهای مختلفی را بپذیرد. کمیت متغیر ریاضی، عبارت است از «چیزی»، یا بهتر بگوییم «چیز دلخواهی»، که می‌تواند مقدارهای عددی مختلف را قبول کند. بنابراین، متغیر ریاضی، یک مفهوم عام است و زیر عنوان آن، می‌توان هم‌زمان، هم مسافت و هم هر کمیت دیگری را فهمید. به‌همین ترتیب، تابع، عبارت است از شکل انتزاعی بستگی یک کمیت با کمیت دیگر. وقتی می‌گوییم «y تابعی است از x»، در ریاضیات تنها به این معنی است که، برای هر مقدار x، مقدار متناظر معینی برای y وجود دارد... مثلاً، بنابر قانون سقوط جسم، مسافتی که جسم درحال سقوط، در زمان معینی طی می‌کند، به‌کمک دستور (۱) به‌دست می‌آید: مسافت، تابعی از زمان. انرژی یک جسم متحرک، برحسب جرم و سرعت آن، با دستور زیر بیان می‌شود:
>
> $$E = \frac{۱}{۲} mv^۲ \qquad (۲)$$
>
> برای یک جسم مفروض، انرژی آن (E)، تابعی است از سرعت آن (v)... مقدار حرارتی که، ضمن عبور جریان برق، در واحد زمان ایجاد می‌شود، با دستور
>
> $$Q = \frac{۱}{۲} RI^۲ \qquad (۳)$$
>
> به‌دست می‌آید؛ که در آن، I نمایندهٔ شدت جریان و R نمایندهٔ مقاومت سیمی است که جریان برق از آن می‌گذرد. برای مقاومت مفروض، هر شدت جریان I، متناظر است با

مقدار معینی از حرارت Q که در واحد زمان به‌دست می‌آید: Q تابعی است از I. مساحت S از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های حادهٔ آن برابر α و ضلع مجاور به این زاویه و زاویهٔ قائمهٔ مثلث برابر x باشد، با دستور

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha \cdot x^2 \qquad (۴)$$

بیان می‌شود. اگر زاویهٔ α معلوم باشد، مساحت مثلث تابعی است از ضلع x آن. همهٔ دستورهای از (۱) تا (۴) را می‌توان به‌صورت یک رابطهٔ عام نوشت:

$$y = \frac{1}{2} ax^2 \qquad (۵)$$

که به‌معنای انتقال از کمیتهای متغیر مشخص t و s، v و E، I و Q، X و S، به متغیرهای کلی و عام x و y است: انتقال از رابطه‌های مشخص (۱)، (۲)، (۳)، (۴)، به‌صورت کلی آنها، یعنی رابطهٔ (۵). اگر مکانیک و الکتریسیته، با دستورهای مشخص (۱)، (۲)، (۳) سروکار دارند (که به کمیتهای مشخصی مربوط می‌شوند)، دانش ریاضی با دستور کلی و عام (۵) (که به هیچ کمیت مشخصی مربوط نیست) سروکار دارد...»

دوم این‌که، نتیجه‌گیریهای ریاضی، ریشه در تجربهٔ آدمی دارند و، سرآخر هم، باید با تجربهٔ آدمی سازگار درآیند. به‌همین مناسبت است که انتزاعیترین و مجردترین نظریه‌های ریاضی، سرانجام کاربرد عملی پیدا می‌کنند. شناسایی و رده‌بندی چندوجهیهای منتظم و نیمه‌منتظم، متقارن و نیمه‌متقارن، مورد استفادهٔ دانش بلورشناسی قرار می‌گیرد و گونه‌های مختلف بلورها، به‌کمک نظریهٔ ریاضی چندوجهیها شناخته می‌شود. هندسهٔ نااقلیدسی راه محاسبهٔ دقیقتر را، برای پرواز سفینه‌های فضایی باز می‌کند؛ فضای بی‌نهایت‌بُعدی، کاربرد خود را درنظریهٔ کوانتومها به‌دست می‌آورد؛ از عددهای موهومی، برای مسأله‌های حقیقی استفاده می‌شود و غیره و غیره. پیش آمده است که یک نظریهٔ ریاضی، سالها و حتی سده‌های متوالی، بی‌مصرف مانده است، ولی پیشرفت صنعت و پیچیده‌تر شدن زندگی، موجب شده است تا این «نظریهٔ فراموش شده» به میدان آید وکاربرد خود را پیدا کند. کوتاه شده‌ای از یک بخش کتاب «مهمترینها در ریاضیات» نوشتهٔ «فلدبلوم» را، که بسیار خواندنی است، در این‌جا می‌آوریم:

«... نزدیک به صد سال پیش از **آپولونیوس** و در سال ۳۵۰ پیش از میلاد، مقطعهای مخروطی به‌وسیلهٔ **مناخوسموس** کشف شد، ولی... به‌فراموشی سپرده شد. **آپولونیوس** این آثار را زنده کرد و کارهای **مناخوسموس** را ادامه داد، آثار **آپولونیوس** را کسی نمی‌خواند... و تنها عدهٔ کمی از دانشمندان از وجود این آثار آگاه بودند... در سدهٔ شانزدهم، با پیشرفت اخترشناسی و مکانیک، این نظریهٔ فراموش شده دوباره زنده شد... به‌نحوی که بسیاری از دانشها بدون وجود این نظریه، نمی‌توانستند پیشرفت کنند ... و **یوهان‌کپلر** و **ایساک‌نیوتون**، برای روشن کردن ویژگیهای مدارهای سیاره‌ها، به‌آموزش **آپولونیوس** دربارهٔ مقطعهای مخروطی روآوردند... اندکی بعد، در سدهٔ هفدهم، **پیرفرما** و **رنه‌دکارت**، براساس مقطعهای مخروطی، نظریهٔ قاره‌ای به‌نام «هندسهٔ تحلیلی» را در ریاضیات به‌وجود آوردند... نظریهٔ مقطعهای مخروطی قریب دوهزار سال در بوتهٔ فراموشی بود و... ناگهان، این دانش فراموش شده زنده شد و، به‌کمک آن، شاخه‌های تازه‌ای در دانش انسانی پدید آمد...

سیمون دنی پواسون، ریاضی‌دان فرانسوی، در سال ۱۸۲۴، در نظریهٔ ریاضی مغناطیس، معادله‌های مربوط به‌وضع عقربه‌های قطب‌نما در کشتی را پیدا کرد. قبل از پواسون، کسی، تأثیر برهم‌زنندهٔ فلزی که درچوب‌بست کشتی و دیگر تجهیزات آن به‌کار رفته است، به حساب نمی‌آورد؛ ولی پواسون برای نخستین‌بار، این شرایط را هم، در معادله‌های خود، درنظر گرفت... این‌کار خالص نظری، در نظر کشتی‌سازان و دریانوردان به‌عنوان کاری غیرلازم ولی فایده جلوه کرد و... به‌این ترتیب، این کشف، به‌عنوان کاری ذهنی، که فایدهٔ عملی ندارد، کنار گذاشته شد. ولی دریانوردان، خیلی زود به دشواریهایی برخوردند که، برای

رفع آنها، ناچار شدند به معادله‌های پواسون رو آورند. در سال ۱۸۶۲، در طول یک ماه، تمام کشتیهایی که از انگلیس حرکت کرده بودند، غرق شدند، در ساحل ایرلند، دو کشتی بزرگ مسافربری، یکی پس از دیگری غرق شد. رهبری نیروی دریایی انگلیس دچار وحشت و پریشانی شد... گروه‌های صلاحیت‌دار، برای بررسی علت نابودی کشتیها تشکیل شد. معلوم شد، علت اصلی، مربوط به نارسایی و اشتباه قطب‌نماهاست... درآن زمان، کشتیها را از چوب می‌ساختند و فلز کمی در آنها به‌کار می‌رفت. اثر این مقدار فلز در قطب‌نما ناچیز بود و می‌شد از آن صرف‌نظر کرد. ولی بتدریج، فلز کشتیها را زیاد و زیادتر می‌کردند. در میانه‌های سالهای چهل سدهٔ نوزدهم، به‌طور گسترده‌ای، کشتی‌سازی فلزی پیشرفت کرد و دیگر، صرف‌نظر کردن از آنها در مورد قطب‌نماهای جهت‌یاب، درست نبود. ولی کشتیها هنوز با همان مدیریت کهنه اداره می‌شد... این‌جا بود که معادله‌های پواسون می‌توانست مورد استفاده قرارگیرد. این معادله‌ها به‌اندازه‌ای لازم بود که، بدون آنها، کشتی‌رانی جدید معنایی نداشت ... ریاضی‌دانها، با تغییرهایی که در این معادله‌ها دادند، آنها را ساده‌تر کردند و، به‌کمک آنها، راه عملی را، برای مدیریت جدید کشتیها، در تعیین انحراف قطب‌نما پیدا کردند... مدیریتی که در زمان ما هم از آن استفاده می‌کنند...

در میانه‌های سدهٔ نوزدهم، کتاب ژرژبول ریاضی‌دان ایرلندی، دربارهٔ منطق ریاضی، منتشر شد. در آن زمان، دربارهٔ این اثر می‌گفتند: «این، نوعی بازی با علامتها و دشمن هرگونه تفکر است»، «این تألیف، هیچ‌گونه ارزش عملی ندارد». و، بنابراین، نوشتهٔ بول، در آن موقع، مورد تأیید کسی قرار نگرفت. ولی سالها بعد، این اثری که «دشمن هرگونه تفکر بود» و «هیچ‌گونه ارزش عملی نداشت»، در کار ساختمان ماشینهای محاسبه و کامپیوترها، کاربرد پیدا کرد...

در واقع، حتی یک نظریهٔ ریاضی نمی‌توان پیدا کرد که، وقتی در مسیر طبیعی پیشرفت دانش قرار می‌گیرد، موضعی در مقابل واقعیتها داشته باشد... ریاضیات، سالها از صنعت جلوتر است و بشر می‌تواند، به کمک ریاضیات، مسأله‌های بسیار پیچیده‌ای از صنعت را حل کند... در سال ۱۸۵۷، برای نخستین‌بار، بین اروپا و امریکا، از زیر دریا سیم‌کشی کردند. وقتی کار به‌پایان خود نزدیک می‌شد، کابل در جایی در عمق دریا آسیب دید. همهٔ تلاشها برای ترمیم خرابی، با ناکامی روبه‌رو شد. کابل کار نمی‌کرد. نشانه‌های مؤرس را نمی‌پذیرفت... به‌نظر می‌رسید، زحمت فوق‌العادهٔ مهندسان و متخصصان و کارگران، از بین رفته‌است... از همهٔ امکانهایی که در آن زمان، یعنی نیمهٔ سدهٔ نوزدهم، وجود داشت، استفاده کردند، ولی نتوانستند کابل را به‌کار بیندازند... برای حل مشکل، به **ویلیام تومسون**، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان انگلیسی مراجعه کردند. تومسون همهٔ نظریه‌های ریاضی سودمند را به‌یادآورد و روی یکی از نظریه‌ها، که به‌وسیلهٔ فوریه ریاضی‌دان فرانسوی، شصت‌سال قبل، دربارهٔ نظریهٔ ریاضی هدایت گرما تنظیم شده بود، توقف کرد. تومسون، درضمن، متوجه یکی از کارهای ژژگرین، ریاضی‌دان انگلیسی شد که ۳۵ سال پیش‌از آن انجام داده بود و سرانجام، ویلیام تومسون در سال ۱۸۵۸ موفق شد، به کمک معادله‌های فوریه وگرین مسأله را حل کند... کابل به‌راه افتاد و نشانه‌های مؤرس، روشن و با صدای کافی، منتقل شد...»

اگر «شک» نبود، ریاضیات، در همان مرحله‌های نخستین خود منجمد می‌شد. و البته، نه‌تنها ریاضیات، که معرفت و فرهنگ آدمی رشد نمی‌کرد و در همان شرایط ابتدایی خود باقی می‌ماند.

اگر به‌نظریهٔ ارسطو، دربارهٔ سقوط آزاد جسم شک نمی‌کردند و کسانی پیدا نمی‌شدند که جرأت کنند و بگویند «ممکن است، معلم اول و استاد بزرگ، اشتباه کرده باشد»، قانونهای سقوط آزاد جسم کشف نمی‌شد. جریان این است که ارسطو، با تکیه بر «عقل سلیم» و «معرفت شهودی» می‌گفت، اگر دو جسم را از یک بلندی رها کنیم، آن که سنگینتر است، زودتر به زمین می‌رسد. آزمایش نشان می‌داد که گلولهٔ فلزی و گلولهٔ چوبی، ضمن سقوط آزاد، در یک زمان به‌زمین می‌رسند. ولی هواداران ارسطو، با مشاهده و تجربه اعتقاد نداشتند و حتی تا سدهٔ هفدهم و زمان گالیله حاضر نبودند تن به آزمایش بدهند

و همچنان بر نظریهٔ ارسطو پای می‌فشردند. گالیله در نوشتهٔ خود به‌نام «گفت و شنود»، به کسی که هوادار نظریهٔ ارسطو است، می‌گوید: «... اگر این باور شما درست باشد، باید بتوانید آن را آزمایش کنید، یعنی اگر دو وزنهٔ هم‌جنس را، یکی به‌وزن صد پوند و دیگری به وزن یک پوند، در یک لحظه، از نقطه‌ای به ارتفاع ۱۰۰ اَرَش رها کنید، وقتی وزنهٔ سنگینتر به زمین می‌رسد، باید وزنهٔ یک پوندی، تنها یک اَرَش را پیموده باشد»، زیرا بنا به‌نظریهٔ ارسطو، سرعت سقوط آزاد جسم، باید به نسبت وزن آنها باشد. گالیله حتی بارها، آزمایش خود را در برابر دیگران انجام داد و برای این‌منظور از برج «پیزا» بالا رفت و وزنه‌هایی با وزنه‌های مختلف از بالای برج رها کرد، ولی جزم‌اندیشان هوادار ارسطو، با تکیه بر «استدلال عقلی» و نفی آزمایش، حقیقت را نمی‌پذیرفتند.

از زمانی‌که در سده‌های میانه، «علم ارسطویی» را به‌عنوان «کلام آخر» قبول کرده‌بودند، کسی حاضر نبود در مورد آموزشهای ارسطو، ولو این‌که نادرستی آنها روشن باشد، «شک» کند و به‌قول ابن‌خلدون، مورخ و منتقد بزرگ:

«... استنباطی که بعضی عقاید انحرافی نسبت به‌علم داشتند، آن را از صفحهٔ اذهان خارج ساخت و، به‌جای آن، اعتقاد به موهومات نشست....»

ولی گالیه، همچون دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی، به مشاهده و تجربه اعتقاد داشت، چراکه به‌قول دکارت:

«... به‌نظرم می‌رسید که می‌توانستم، در استدلالهای کسانی که با عمل سروکار دارند، با حقیقت بیشتری روبه‌رو شوم، زیرا اگر اینها دچار اشتباه شوند، خیلی زودتر از دانشمندانی که، در اطاقهای دربسته، به استدلال مشغول‌اند، کیفر اشتباه خود را می‌بینند....»

و گالیله، ضمن به‌سخره گرفتن مخالفان مشاهده و آزمایش می‌گوید:

«... بعضی از فیلسوفانی که مقدمات فیزیک را درس می‌دهند، مبنی کار خود رابرآنچه قبلاً گفته شده است... می‌گذارند و نظر خود را، نه از آنچه کاملاً شناخته شده است، بلکه خیلی ساده، از ناشناخته‌ها و ناشنیده‌ها نتیجه می‌گیرند... (به‌این‌ترتیب) ما از چنان روشی استفاده می‌کنیم که، هر اثبات لازم را، از چیزی که اثبات شده است، نتیجه بگیرد. ولی من، اگر ممکن باشد هرگز پایهٔ استدلال خود را، بر چیزی که خود نیاز به اثبات دارد، نمی‌گذارم، اگرچه آن را حقیقت بپنداریم....»

حتی در تاریخ ریاضیات هم، می‌توان به‌نمونه‌های گمراه‌کننده‌ای از «استدلال» برخورد کرد که به‌خاطر طولانی نشدن مطلب، آن را به شمارهٔ بعدی برهان وامی‌گذاریم.

تابعد

ادب ریاضی

برای ما امکان ندارد که علامت ∞ را در دستگاه اعداد حقیقی جای دهیم و درعین‌حال قواعد اساسی حساب را نیز محفوظ بداریم. لیکن باید دانست که مفهوم بی‌نهایت تمام ریاضیات را احاطه کرده است، زیرا معمولاً موجودات ریاضی را به‌عنوان موجودات فردی و متمایز مورد مطالعه قرار نمی‌دهند، بلکه آنها را همچون اعضای طبقات و مجموعه‌هایی درنظر می‌گیرند که شامل بی‌نهایت شیء از همین نوع می‌باشند، همچون مجموعهٔ تمام اعداد صحیح یا مجموعهٔ اعداد حقیقی، یا تمام مثلثهایی که در صفحه قرار دارند.

ریاضیات چیست؟
ترجمه: حسن صفاری

دیفرانسیل و انتگرال

(قسمت اول)

(مورد استفاده دانش‌آموزان سال چهارم)

از : احمد قندهاری

۱ـ دیفرانسیل[1]

اگر تابع f بـه معادلهٔ $y=f(x)$ در فـاصلهٔ $(a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر باشد و $x\in(a,b)$. چنانچه به x نموی مـانند Δx نسبت دهیم بـه طوری‌که $x+\Delta x\in(a,b)$ خواهیم داشت:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

و

$$\begin{cases}\text{حد}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\\ \Delta x\to 0\end{cases}$$

مثال. تابع به معادلهٔ $y=f(x)=x^{2}+x$ را در نظر می گیریم :

اگر بـه x نموی مانند (۰/۱) نسبت دهیم ، مقادیـر $f'(x)$ و $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را در نقطه‌ای به طول (۳) بیابید.

$$f'(x)=2x+1 \implies f'(3)=7$$

$$\Delta y=f(3+\Delta x)-f(3)$$

$$=(3+0/1)^{2}+(3+0/1)-(9+3)=0/71$$

$$\begin{cases}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0/71}{0/1}=7/1\\ f'(3)=7\end{cases} \implies f'(x)\neq\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$$

1ـ Differential

به طوری‌که ملاحظه می‌شود $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ و $f'(x)$ اختلاف کمی باهم دارند.

چنانچه $\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)\right|$ را برابر α فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=\alpha \implies$$

$$\Delta y-f'(x).\Delta x=\alpha\Delta x(\Delta x\neq 0)$$

$$\implies \Delta y=f'(x).\Delta x+\alpha\Delta x$$

چون α و Δx بی‌نهایت کوچك‌اند[2] وحاصل‌ضرب آنها کوچکتر از هریك از آنها خواهد شد، پس می توان نوشت:

$$\Delta y\simeq f'(x).\Delta x$$

تعریف دیفرانسیل تابع

بنابه تعریف ، مقدار $f'(x).\Delta x$ را دیفرانسیل تـابع گویند و آن‌را با نماد dy نشان می‌دهند.

۲ـ بی‌نهایت کوچکها. اگر x_0 یك عددحقیقی باشد چنانچه $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ آنگاه تابع به معادلهٔ $f(x)$ را یك بی‌نهایت کوچك می‌گوییم. بی‌نهایت کوچك را یك مقدار متغیر دارای حدصفر تعریف می‌کنیم.

$$dy = f'(x).\Delta x$$
$$\Longrightarrow \Delta y \simeq dy$$
$$\Delta y \simeq f'(x).\Delta x$$

توجه کنید که: Δy نمو تابع است و dy دیفرانسیل تابع است.

در مثال قبل $\Delta y = ۰/۷۱$ و

$$dy = f'(x).\Delta x$$
$$dy = (۲x+۱).\Delta x \Longrightarrow dy = (۷)(۰/۱) = ۰/۷$$

به طوری کــه ملاحظه می‌کنید dy و Δy اختلاف کمی باهم دارند، دراین مثال اختلاف آنها (۰/۰۱) است.

نتیجه. می‌توان گفت اگر در یك تابع به معادلهٔ

$$y = f(x)$$

متغیر x به اندازهٔ (Δx) تغییر کند، مقدار تابع تقریباً به اندازهٔ $f'(x).\Delta x$ تغییر می‌کند.

مثال . در تابع به معادلهٔ $y = f(x) = x^۳ + ۲x$ ، در نقطهٔ $x = ۲$ ؛ چنانچه Δx به اندازهٔ (۰/۰۱) تغییر کند، Δy و dy را محاسبه کنید.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(۲+۰/۰۱) - f(۲)$$
$$= (۲/۰۱)^۳ + ۲(۲/۰۱) - (۸+۴) \Longrightarrow$$
$$\Delta y = ۰/۱۴۰۶$$
$$dy = f'(x).\Delta x = (۳x^۲+۲).\Delta x$$
$$= (۱۴)(۰/۰۱) = ۰/۱۴$$

دراین‌مثال، اختلاف Δyوdy، مقدارناچیز(۰/۰۰۰۶) نسبت به ۲ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\boxed{\Delta y \simeq dy}$$

مثال . اگر ازطرفین تابع $y = f(x) = x$، دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت:

$$dy = f'(x).\Delta x = ۱ \times \Delta x = \Delta x$$

ازطرفی $dy = dx$ پس: ازمقایسهٔدونتیجه‌خواهیم‌داشت:

$$\Delta x = dx$$

بنابراین می‌توان گفت اگر x متغیر مستقل باشد:

$$\Delta x = dx$$

پس: فرمول دیفرانسیل‌چنین خواهدبود:

$$\boxed{dy = f'(x).dx}$$

و

$$\boxed{\Delta y \simeq f'(x).dx}$$

مسأله: درکره‌ای به شعاع ۵۰cm ، دراثر گرما، شعاع کره‌به اندازه ۰/۰۱ زیاد شده‌است. به‌کمك دیفرانسیل تغییر سطح کره و تغییرحجم کره‌را بیابید.

الف) محاسبهٔ تغییر سطح کره:

$$S_{کره} = ۴\pi R^۲ \Longrightarrow S' = ۸\pi R$$
$$\Delta S \simeq dS = S' \times dR$$
$$= ۸\pi R \times dR = ۸\pi(۵۰) \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۴\pi$$

ب) محاسبهٔ تغییرحجم کره:

$$V_{کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Longrightarrow V' = ۴\pi R^۲$$
$$\Delta V \simeq dV = S' \times dR = ۴\pi R^۲ dR$$
$$= ۴\pi(۲۵۰۰) \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۱۰۰\pi$$

مسأله: مکعبی به یال ۱۰cm را حرارت داده‌ایـم، در نتیجه ۳۰cc تغییر حجم داده است. تغییرطول یال را به‌کمك دیفرانسیل بیابید.

$x =$ طول یال مکعب

$$V = x^۳ \Longrightarrow V' = ۳x^۲$$
$$dV = V'.dx \Longrightarrow dV = ۳x^۲dx \Longrightarrow$$
$$۳۰ = ۳(۱۰۰).dx \Longrightarrow dx = \frac{۱}{۱۰}cm$$

اگر $y=f(x)$ معادلهٔ تابع باشد:

چنانچه متغیر (x) باشد، تابع $f(x)$ است.

چنانچه متغیر $(x+\Delta x)$ باشد، تابع $f(x+\Delta x)$ است.

$$\Longrightarrow \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

داشتیم:

$$\Delta y\simeq f'(x)\cdot\Delta x$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)\simeq f'(x)\cdot\Delta x$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x}$$

این رابطه مقدار تقریبی وضع جدید تابع پس از این که x به اندازهٔ Δx تغییر کرده است را نشان می‌دهد.

مسأله: مقدار تقریبی $\sqrt[۵]{۳۳}$ را بیابید.

فرض می‌کنیم $f(x)=\sqrt[۵]{x}$، آنگاه:

$$f'(x)=\frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^{۴}}}$$

حال اگر $x=۳۲=۲^{۵}$ و $\Delta x=۱$ درنظر بگیریم:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[۵]{x+\Delta x}\simeq\sqrt[۵]{x}+\frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^{۴}}}\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[۵]{۳۲+۱}\simeq\sqrt[۵]{۲^{۵}}+\frac{۱}{۵\sqrt[۵]{۲^{۲۰}}}\times ۱$$

$$=۲+\frac{۱}{۸۰}=۲/۰۱۲۵$$

مقدار واقعی $\sqrt[۵]{۳۳}$ تا چهار رقم بعداز ممیز برابر است با:
۲/۰۱۲۴

مسأله: مقدار تقریبی $tg۷۴^{\circ}$ را بیابید.

فرض می‌کنیم $f(x)=tgx$، آنگاه:

$$f'(x)=۱+tg^{۲}x$$

حال اگر $x=۷۵^{\circ}=\frac{۵\pi}{۱۲}$

$$\Delta x=-۱^{\circ}=-\frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان}$$

می‌توان نوشت:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$tg(x+\Delta x)\simeq tgx+(۱+tg^{۲}x)\cdot\Delta x$$

$$tg(۷۵^{\circ}-۱^{\circ})\simeq tg\frac{۵\pi}{۱۲}+(۱+tg^{۲}\frac{۵\pi}{۱۲})\times(-\frac{\pi}{۱۸۰})$$

$$tg۷۴^{\circ}\simeq ۲+\sqrt{۳}+(۱+(۲+\sqrt{۳})^{۲})(-\frac{\pi}{۱۸۰})$$

$$tg۷۴^{\circ}\simeq ۲+\sqrt{۳}-(۸+۴\sqrt{۳})(\frac{\pi}{۱۸۰})=۳/۴۷۱$$

مقدار واقعی $tg۷۴^{\circ}$ تا چهار رقم بعداز ممیز برابر است با:
۳/۴۸۷۴

مسأله: مقدار تقریبی $Arctg۱/۰۲$ را بیابید.

فرض می‌کنیم: $f(x)=Arctgx$، آنگاه:

$$f'(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$$

حال اگر: $x=۱$ و $\Delta x=\frac{۲}{۱۰۰}$، داریم:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$Arctg(x+\Delta x)\simeq Arctgx+\frac{۱}{۱+x^{۲}}\times\Delta x$$

$$Arctg(۱+\frac{۲}{۱۰۰})\simeq Arctg۱+\frac{۱}{۱+۱}(\frac{۲}{۱۰۰})$$

$$Arctg۱/۰۲\simeq\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۱۰۰}$$

مسأله: مقدار تقریبی $\sqrt[n]{a^n+b}$ را بیابید، $n>1$ و $n\in N$، $a>0$ فرض می‌کنیم: $f(x)=\sqrt[n]{x}$، آنگاه:

$$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

اگر $x=a^n$ و $\Delta x=b$ باشد، خواهیم داشت:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[n]{x+\Delta x}\simeq\sqrt[n]{x}+\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[n]{a^n+b}\simeq\sqrt[n]{a^n}+\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n(n-1)}}}\,b$$

$$\sqrt[n]{a^n+b}\simeq a+\frac{b}{na^{n-1}}$$

دستورهای دیفرانسیل توابع:

$$dy=y'\cdot dx$$

$$du=u'\cdot dx$$

$$dv=v'\cdot dx$$

مثال. دیفرانسیل توابع زیر را بیابید:

۱) $y=\text{Arctg}\,x\sqrt{1-x^2}$

$$dy=y'\cdot dx=\frac{(x\sqrt{1-x^2})'}{1+(x\sqrt{1-x^2})^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}dx$$

$$dy=\frac{\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}dx$$

$$=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2-x^4)}dx$$

۲) $y=\text{Arc}\cos(tg^4x)$

$$dy=y'.dx=\frac{-(tg^4x)'}{\sqrt{1-tg^8x}}dx$$

$$=-\frac{4tg^3x(1+tg^2x)dx}{\sqrt{1-tg^8x}}$$

تمرینها : دیفرانسیل هریک از توابع زیر را بیابید:

۱) $y=\sqrt{1-x^2}\sin x\sqrt{4-x^2}$

۲) $y=\sqrt[3]{(\text{Arctg}\sqrt[3]{x^2})^2}$

۳) $y=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}tg\frac{1}{x}$

۴) $y=tg\,x\,\text{Arctg}\sqrt[3]{x^2}$

۵) $y=(\text{Arc}\,tg\,x^2)^2\cos x\sqrt{4-x^2}$

تمرینها : ۱) به‌کمك دیفرانسیل تغییر تابع به معادلهٔ:

$$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$

را در $x=2$ وقتی $\Delta x=0/1$ بیابید.

۲) مقدار تقریبی $\sqrt[7]{129}$ ، $\sin 27^\circ$ ، $cotg 33^\circ$ ، $\text{Arctg}\,1/02$ را بیابید.

۲ـ انتگرال[1] و تابع اولیه

انتگرال گرفتن به دو معنی است.

معنی اول: پیداکردن تابعی است که مشتق آن در دست است.

1– Integration

معنی دوم : محاسبهٔ سطح محصور بین منحنیها و محاسبهٔ حجم اجسام وطول قوسها و...

حال به معنی اول برمی گردیم.

فرض کنیم ، $F(x)$ تابعی درفاصلهٔ (I) تعریف شده و مشتق‌پذیر باشد، ومشتق آن‌را $f(x)$ فرض می‌کنیم. به طوری که:

$$\forall x \in I \ : \ F'(x) = f(x)$$

دراین‌صورت بنابه تعریف، $F(x)$ را یکی‌از توابع‌اولیهٔ‌تابع $f(x)$ می‌گوییم.

مثال : اگر $f(x) = 2x$ ، آنگاه $F(x) = x^2$ و

$$F_1(x) = x^2 + 1$$

$$F_2(x) = x^2 - 5$$

$$F_3(x) = x^2 + \sqrt{2}$$

بنابراین جواب کلی تابع اولیه تابع $y = f(x)$ بصورت $F(x)+c$ است.

فرض‌کنید: $dy = f(x)dx$ ، اگر تابعی مانند: $F(x)$ داشته باشیم ، به طوری که $dF(x) = f(x) \cdot dx$ ، در این صورت $F(x)$ را یک انتگرال $f(x)$ نسبت به x می‌نامیم.

ضمناً می‌توان‌نوشت:

$$d(F(x)+c) = dF(x) + dc = dF(x) + 0$$

پس: $F(x)+c$ ، نیز انتگرال $f(x) \cdot dx$ است.

نماد $\int$ را نماد انتگرال گوییم، بنابراین:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

« $f(x)dx$ را معادلهٔ دیفرانسیلی گویند»

خلاصه: اگر $F(x)+c$ تابعی‌باشد در فاصلهٔ (I) معین و مشتق‌پذیر و دیفرانسیل آن $f(x)dx$ باشد، داریم:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

حال تابع

$$F(x) + c = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$$

$m \neq -1$ و $m \in R$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم:

$$dF(x) = f(x)dx$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$dF(x) = f(x)dx = x^m dx$$

$$\Longrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c \Longrightarrow$$

فرمول انتگرال $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$
$m \in R \ , \ m \neq -1$

مثال :

$$1) \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$2) \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + c$$

$$3) \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$4) \int x^{-\frac{5}{7}} dx = \frac{x^{\frac{2}{7}}}{\frac{2}{7}} + c$$

مثال :

۵) $\int 2x^7dx = 2\int x^7dx = 2\times\frac{x^8}{8}+c$

$=\frac{x^8}{4}+c$

۶) $\int 2\sqrt[5]{x^2}dx = 2\int x^{\frac{2}{5}}dx = 2\times\frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}+c$

$=\frac{10}{7}x^{\frac{7}{5}}+c=\frac{10}{7}x\sqrt[5]{x^2}+c$

۷) $\int\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{x}} = 2\sqrt{2}\int x^{-\frac{1}{5}}dx$

$=2\sqrt{2}\times\frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+c$

$=\frac{5\sqrt{2}}{2}x^{\frac{4}{5}}+c=\frac{5\sqrt{2}}{2}\sqrt[5]{x^4}+c$

۸) $\int(2x^3+5x^2+6x+2)dx=$

$2\int x^3dx+5\int x^2dx+6\int xdx+2\int dx$

$=2\times\frac{x^4}{4}+5\times\frac{x^3}{3}+6\times\frac{x^2}{2}+2x+c$

$=\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3+3x^2+2x+c$

تابع $F(x)+c=\frac{u^{m+1}}{m+1}+c$ را درنظر می گیریم.

$m\in R$ و $m\neq-1$ فرض می کنیم:

$dF(x)+c=f(x)dx$

بنابراین خواهیم داشت:

$$dF(x)=f(x)dx=\frac{(m+1)u'u^m}{m+1}dx$$

$$\Longrightarrow dF(x)=f(x)dx=u^mdu \Longrightarrow$$

$\int u^mdu=\frac{u^{m+1}}{m+1}+c$
$m\in R$, $m\neq-1$
فرمول کلی انتگرال

مثال :

۱) $\int u^4du=\frac{u^5}{5}+c$

۲) $\int u^{10}du=\frac{u^{11}}{11}+c$

۳) $\int u^{-8}du=\frac{u^{-7}}{-7}+c$

۴) $\int u\sqrt{u}du=\int u^{\frac{3}{2}}du=\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c$

$=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+c$

۵) $\int\frac{4du}{\sqrt[5]{u}}=4\int u^{-\frac{1}{5}}du=4\times\frac{u^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+c$

$=5u^{\frac{4}{5}}+c$

۶) $\int\frac{u^2-5u}{u^6}du=\int\frac{u^2}{u^6}du-5\int\frac{u}{u^6}du$

$=\int u^{-4}du-5\int u^{-5}du$

$=\frac{u^{-3}}{-3}-5\frac{u^{-4}}{-4}+c=\frac{-1}{3u^3}+\frac{5}{4u^4}+c$

انواع انتگرال‌گیری:

نوع اول:

از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a^{m+1}} + c$$

$$m \in R \;,\; m \neq -1$$

مثال:

$$1)\quad \int (1-x)^{10} dx = \frac{(1-x)^{11}}{-1(11)} + c$$

مثال:

$$2)\quad \int \sqrt[5]{(1-2x)^2}\, dx = \int (1-2x)^{\frac{2}{5}} dx = \frac{(1-2x)^{\frac{9}{5}}}{-2 \times \frac{9}{5}} + c$$

تمرینها:

$$\int (2x-3)^{100} dx = ? \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[11]{4x-3}} = ?$$

$$\int \frac{2\sqrt{3}}{(x-3)^{10}} dx = ?$$

نوع دوم:

انتگرالهایی است شامل دو عامل به نامهای عامل اصلی و عامل مشتق.

عامل اصلی: از هر درجه و هر جا باشد (منظور از هر جا باشد این است که درصورت کسر یا در مخرج کسر یا داخل رادیکال باشد).

عامل مشتق: مشتق عامل اصلی است و درصورت کسر است (البته اگر مسأله کسری باشد).

حل: عامل اصلی را u فرض کرده از این فرض دیفرانسیل می‌گیریم و در مسأله قرار می‌دهیم.

توجه: این نوع حل را روش تغییر متغیر گویند.

مسأله:

$$I = \int \frac{(3x^2-2)dx}{(x^3-2x)^{10}}$$

$$\begin{cases} x^3 - 2x = & \text{عامل اصلی} \\ 3x^2 - 2 = & \text{عامل مشتق} \end{cases}$$

در مسأله قرار می‌دهیم:

$$u = x^3 - 2x \implies du = (3x^2-2)dx$$

$$I = \int \frac{du}{u^{10}} = u^{-10} du = \frac{u^{-9}}{-9} + c$$

$$= \frac{-1}{9u^9} + c = \frac{-1}{9(x^3-2x)^9} + c$$

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$1)\ \int \frac{(x^3-1)dx}{(x^4-4x)^7} \qquad 2)\ \int \frac{(8x-8)dx}{\sqrt[5]{x^2-2x}}$$

$$3)\ \int x^{n-1} \sqrt[11]{x^n+4}\, dx$$

$$4)\ \int (\sqrt{x}-\sqrt{3})^{100} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

نوع سوم:

انتگرالهایی است شامل دو عامل به نامهای عامل اصلی و عامل اضافی.

عامل اصلی به صورت $(ax+b)$ است.

عامل اضافی از هر درجه ولی در صورت کسر است (البته اگر مسأله کسری باشد).

حل: عامل‌اصلی را u فرض می‌کنیم، از این فرض هم، دیفرانسیل می‌گیریم وهم عامل‌اضافی را حساب می‌کنیم و در مسأله قرار می‌دهیم.

مسأله:

$$I=\int \frac{x^2dx}{(x-2)^{10}}$$

$$\begin{cases} x-2 & \text{عامل اصلی:} \\ x^2 & \text{عامل اضافی:} \end{cases}$$

$$u=x-2 \begin{cases} \nearrow du=dx \\ \searrow x=u+2 \end{cases} \Longrightarrow x^2=u^2+4u+4$$

در مسأله قرار می‌دهیم:

$$I=\int \frac{(u^2+4u+4)du}{u^{10}}$$

$$=\int u^{-8}du+4\int u^{-9}du+4\int u^{-10}du$$

$$=\frac{u^{-7}}{-7}+4\times\frac{u^{-8}}{-8}+4\times\frac{u^{-9}}{-9}+c$$

$$=\frac{-1}{7u^7}-\frac{1}{2u^8}-\frac{4}{9u^9}+c$$

$$=\frac{-1}{7(x-2)^7}-\frac{1}{2(x-2)^8}-\frac{4}{9(x-2)^9}+c$$

تمرین: مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int (x-2)^{1000}(x^2+4)\,dx \qquad \int \frac{x^2dx}{(x+1)^{20}}$$

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x-2)^6} \qquad \int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[5]{x-1}}$$

نوع چهارم:

انتگرالهایی‌است ترکیبی از نوع‌دوم و سوم، یعنی‌مسألهٔ انتگرال شامل سه‌عامل است به‌نامهای: اصلی، مشتق و اضافی

عامل‌اصلی از هردرجه وهر جا باشد.

عامل مشتق درصورت است.

عامل‌اضافی از هردرجه‌ولی در صورت‌کسر است.

حل: مانند انتگرال نوع سوم حل می‌کنیم.

مسأله:

$$I=\int \frac{4x^{11}dx}{(x^4-2)^{12}}=\int \frac{x^8(4x^3)dx}{(x^4-2)^{12}}$$

$$\begin{cases} x^4-2 & \text{عامل اصلی:} \\ 4x^3 & \text{عامل مشتق:} \\ x^8 & \text{عامل اضافی:} \end{cases}$$

$$u=x^4-2 \Longrightarrow \begin{cases} \nearrow dx=4x^3dx \\ \searrow x^4=u+2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^8=u^2+4u+4$$

$$I=\int \frac{(u^2+4u+4)du}{u^{12}}$$

$$=\int u^{-10}du+4\int u^{-11}du+4\int u^{-11}du$$

$$=\frac{u^{-9}}{-9}+4\times\frac{u^{-10}}{-10}+4\times\frac{u^{-11}}{-11}+c$$

$$=\frac{-1}{9u^9}-\frac{2}{5u^{10}}-\frac{4}{11u^{11}}+c$$

$$=\frac{-1}{9(x^4-2)^9}-\frac{2}{5(x^4-2)^{10}}-\frac{4}{11(x^4-2)^{11}}+c$$

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{x^{19}dx}{\sqrt[11]{x^5-1}} \qquad \int \frac{2x^7dx}{(x^2-1)^{14}}$$

نوع پنجم:

محاسبهٔ $n\in R\ ,\ n\neq -1$

$$I=\int \frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+2}}dx$$

$$u=\frac{ax+b}{a'x+b'} \Rightarrow du=\frac{ab'-a'b}{(a'x+b')^2}dx$$

در عبارت زیر قرار می‌دهیم:

$$I=\frac{1}{ab'-a'b}\int\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^n \times\frac{ab'-a'b}{(a'x+b')^2}dx$$

$$I=\frac{1}{ab'-a'b}\int u^n du=\frac{1}{ab'-a'b}\times\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$$

$$=\frac{1}{(ab'-a'b)(n+1)}\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{n+1}+c$$

$$\Rightarrow \int\frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+2}}dx=\frac{1}{(n+1)(ab'-a'b)}\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{n+1}+c$$

دانش‌آموزان گرامی در سال چهارم باید انتگرال فوق را با اثبات حل کنند ولی در تستها می‌توانند از این فرمول استفاده کنند.

مثال:

$$\int\frac{(2x-1)^{10}}{(2x+1)^{12}}dx=\frac{1}{(2+2)(11)}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{11}+c$$

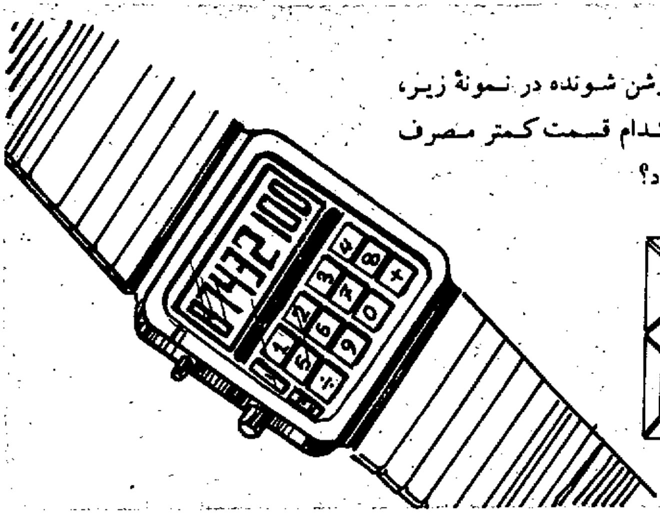
$$=\frac{1}{44}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{11}+c$$

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر با اثبات کامل:

$$\int\sqrt[5]{\frac{x+2}{x-2}}\times\frac{dx}{(x+2)^2} \qquad \int\frac{dx}{(x+1)^2}\sqrt[7]{\frac{x-1}{x+1}}$$

تفریح اوقات ...

ساعتهای رقمی، ارقام را، با قسمتهای روشن شونده در نمونهٔ زیر، نشان می‌دهند. در مورد ارقام ۰ تا ۹ کدام قسمت کمتر مصرف می‌شود؟ کدام قسمت بیشتر به کار می‌رود؟





جواب در صفحهٔ ۹۶

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی (۲)

Methods of Algebra

J. E. Hebborn - C. Plumpton

ترجمه: حمیدرضا امیری

1 Algebraic functions

۱ ـ توابع جبری[۱]

1.1 Functions, composite functions and inverse functions

۱.۱ ـ توابع، توابع مرکب و توابع معکوس

A *function* is a mapping which associates with each element of one set A a unique element of another set B. The set A is called the *domain* of the function and the set B is called the *codomain* of the function. Not every element of the codomain need have a corresponding element in the domain, but every element of the domain must correspond to some element in the codomain.

The actual elements of the set B which are images of the elements of the domain are called the *range* (or range set) of the function.

We will only be concerned with functions which map a real variable x to a real variable y:

$$f: x \mapsto y = f(x).$$

تابع نگاشتی است که هر عضوِ مجموعه‌ای مانند A را به عضوِ منحصر به فردی از مجموعهٔ دیگری چون B مربوط می‌سازد. مجموعهٔ A را دامنهٔ تابع و مجموعهٔ B را هم دامنهٔ تابع می‌نامیم. هر عضوِ هم دامنه، نیازی به یک عضوِ متناظر در دامنه ندارد، امّا هر عضو دامنه باید با عضوی در هم‌دامنه متناظر باشد. [اعضایی از مجموعهٔ B که تصاویر اعضای دامنه باشند؛ بُرد (مجموعهٔ بُرد) تابع نامیده می‌شوند.]

(۱) تابع ($y = f(x)$) را یک تابع جبری می‌نامند، هرگاه x و y در رابطه‌ای به صورت $F(x , y)=0$ صدق کند که $F(x , y)$ یک چند جمله‌ای برحسب x و y است.

در این جا تنها توابعی را در نظر می‌گیریم که متغیر حقیقی x را به متغیر حقیقی y تصویر کنند، یعنی: $f: x \to y = f(x)$

We usually refer to x as the *independent variable* and to y as the *dependent variable*.

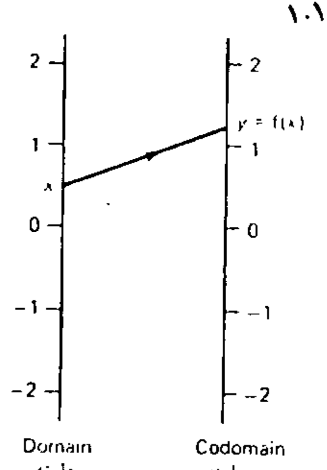
There are two important ways of representing a function f from **R** to **R** diagrammatically.

(i) The domain and codomain are represented by two parallel number lines with an arrow from x to its image $y = f(x)$ (see Fig. 1.1).

معمولاً x را متغیر آزاد و y را متغیر وابسته می‌نامیم.

به‌طریق نموداری دو روش مهّم برای نمایش تابع f از IR به IR وجود دارد.

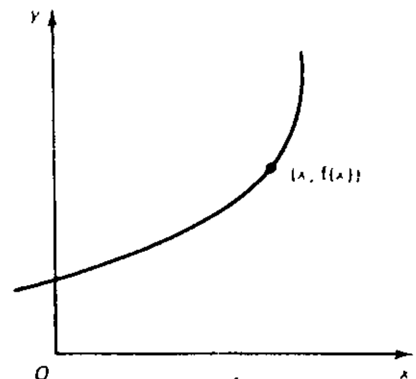
روش اول: دامنه و هم دامنه به صورت دومحور موازی اعداد حقیقی همراه با پیکانی از x به تصویرش، $y=f(x)$ نمایش داده می‌شود. شکل ۱.۱



شکل ۱.۱

(ii) Each element x of the domain and its image $f(x)$ form an ordered pair $[x, f(x)]$. This ordered pair can be represented by the coordinates (x, y) of a point in a cartesian plane. The set of all such points is called the *graph* of the function, and the relation $y = f(x)$ is called the equation of the graph or curve (see Fig. 1.2).

روش دوّم: هرعضوِ x از دامنه و تصویر آن عضو؛ یعنی f(x)، زوج مرتبِ |x,f(x)| را تشکیل می‌دهند. این زوج مرتب می‌تواند توسط مختصات (x,y) به‌صورت یک نقطه در صفحهٔ مختصات دکارتی نمایش داده شود. مجموعهٔ چنین نقاطی نمودار تابع نامیده می‌شود و رابطهٔ y=f(x) به معادلهٔ نمودار یا منحنی آن موسوم است (شکل ۱.۲).



شکل ۱.۲

A function f is said to be an *even* function if

$$f(x) = f(-x) \text{ for all values of } x.$$

A function f is said to be an *odd* function if

$$f(-x) = -f(x) \text{ for all values of } x.$$

تابعِ f را تابع زوج می‌نامیم هرگاه:

$$f(x) = f(-x)$$ (به ازای جمیع مقادیر x[1])

تابعِ f را تابع فرد می‌نامیم هرگاه:

$$f(-x) = -f(x)$$ (به ازای جمیع مقادیر x)

Example 1

(a) The mapping $x \to x^{1/2}$ does not define a function, since, for a given real number, there is not a unique element of the image set corresponding to it. (For each real value of x there are two elements of the image set corresponding to it, $+\sqrt{x}$ and $-\sqrt{x}$.)

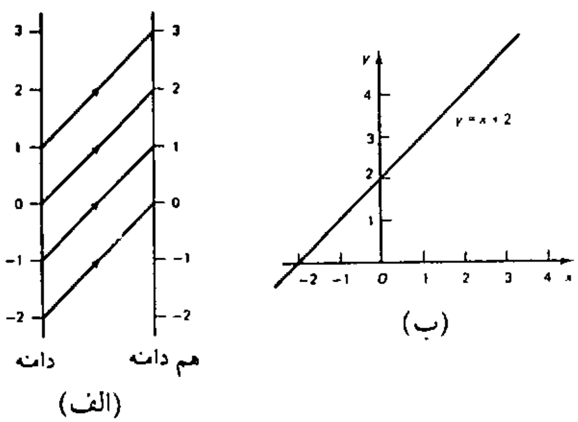
(b) The mapping $x \to x + 2$ is a function. The domain is the set **R** of real numbers, or some subset of **R**. The codomain is also the set of real numbers. It may be represented as in Fig. 1.3(a) or Fig. 1.3(b).

(۱) به شرطی که x− در دامنه تابع باشد.

مثال ۱ :

(الف) نگاشت $x \to x^{1/2}$ تابعی را تعریف نمی‌کند. زیرا، به ازایِ عدد حقیقی مفروضی، مشاهده می‌شود که عضو منحصر به فردی متناظر با آن از مجموعهٔ تصویر (برد تابع) وجود ندارد. (متناظر با هر مقدار حقیقی مانند x دو عضو $+\sqrt{x}$ و $-\sqrt{x}$، از مجموعهٔ تصویر وجود دارد.)

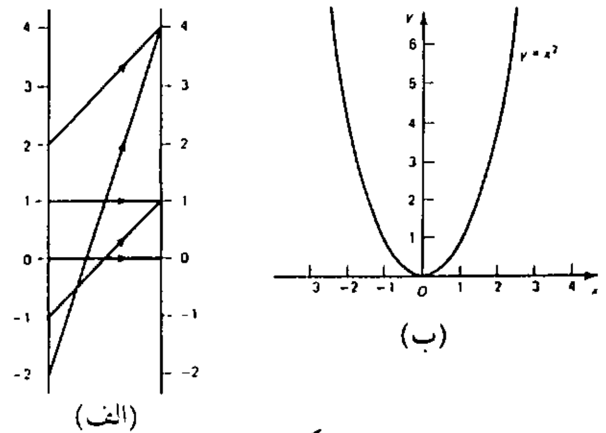
(ب) نگاشت $x \to x+2$ یک تابع است. دامنهٔ این تابع IR، مجموعهٔ اعداد حقیقی یا زیرمجموعه‌ای از IR است. هم دامنهٔ آن نیز مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌باشد. این تابع می‌تواند به صورت اشکالِ (الف) ۱.۳ و (ب) ۱.۳ نمایش داده شود.



شکل ۱.۳

(c) The mapping $x \to x^2$ is a function. The domain is **R** and the codomain is **R**. The range is the set $\{x: x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$. It may be represented as in Fig. 1.4(a) or Fig. 1.4(b).

(ج) نگاشت $x \to x^2$ یک تابع است. دامنهٔ آن IR و هم دامنهٔ آن نیز IR می‌باشد. برد این تابع مجموعهٔ $\{x : x \in IR \ , \ x \geq 0\}$ است. این تابع را می‌توان توسط اشکال (الف) ۱.۴ یا (ب) ۱.۴ نمایش داد.



شکل ۱.۴

Example 2 Determine whether the functions f, g, h, where (a) $f(x) = 3x^2$, (b) $g(x) = x - 2x^3$, (c) $h(x) = (x-2)/(x+2)$, are odd, even or neither.

(a) $f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x) \Rightarrow$ f is even.
(b) $g(-x) = (-x) - 2(-x)^3 = -x + 2x^3 = -[x - 2x^3] = -g(x) \Rightarrow$ g is odd.
(c) $h(-x) = (-x-2)/(-x+2)$ and this is neither $h(x)$ nor $-h(x)$. Hence, $h(x)$ is neither odd nor even.

مثال ۲

مشخص کنید کدام یک از توابع f ، g ، h ، که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند، زوج یا فرد یا نه زوج و نه فرد هستند.

(الف) $f(x) = ۳x^۲$

(ب) $g(x) = x - ۲x^۳$

(ج) $h(x) = \frac{(x-۲)}{(x+۲)}$

(الف) $f(-x) = ۳(-x)^۲ = ۳x^۲ = f(x) \Rightarrow$ f زوج است

(ب) $g(-x) = (-x) - ۲(-x)^۳ = -x + ۲x^۳ =$

$- [x - ۲x^۳] = -g(x) \Rightarrow$ g فرد است

(ج) $h(-x) = \frac{(-x-۲)}{(-x+۲)}$

و این ضابطه نه مساوی با h(x) است و نه مساوی با h(−x).
بنابراین h(x) نه زوج است و نه فرد.

Composition of functions
It is possible, under certain circumstances, to combine functions. This is best illustrated by a simple example. Suppose

$$f: x \mapsto x^2$$

and

$$g: x \mapsto x + 1.$$

Then the composite function, written gf (note the order), means 'square x and then add 1' — i.e. f first, followed by g:

$$gf: x \mapsto x^2 + 1.$$

This is not the same as fg, which means 'add 1 to x and then square':

$$fg: x \mapsto (x+1)^2.$$

In order for it to be possible to form a composite function gf, the image set of the function f must be the domain of the function g or a subset of this domain.

ترکیب توابع

ترکیب توابع؛ تحت شرایطی معین، امکان‌پذیر است. این موضوع را می‌توان با مثالی ساده به بهترین وضعی توضیح داد. فرض کنیم $f : x \to x^۲$ و $g : x \to x+۱$.

در این صورت ترکیب این دو تابع که به صورت gf (به ترتیب نوشتن توجه داشته باشید) نوشته‌می‌شود به معنی این است که:

«ابتدا x به توان دو رسیده و سپس با ۱ جمع می‌شود» ـ یعنی اول f و به دنبال آن g : «ابتدا تابع f روی x اثر کرده و سپس g روی حاصل آن تأثیر می‌کند»

$$gf : x \to x^۲+۱$$

ترکیب این دو تابع به‌صورت fg که «x و ۱ با هم جمع شده و سپس به توان دو می‌رسند» با gf یکی نیست.

$$fg : x \to (x+۱)^۲$$

بعلاوه برای امکان ترکیب تابع به شکل gf می‌بایست، مجموعهٔ تصویرِ تابع f دامنه یا زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ تابعِ g باشد.

Example 3 If $f: x \mapsto x^2 + 5$, $g: x \mapsto x + 2$, then
(a) $gf: x \mapsto (x^2 + 5) + 2 = x^2 + 7$,
(b) $fg: x \mapsto (x+2)^2 + 5 = x^2 + 4x + 4 + 5 = x^2 + 4x + 9$,
(c) $ff: x \mapsto (x^2+5)^2 + 5 = x^4 + 10x^2 + 25 + 5$
$= x^4 + 10x^2 + 30$,
(d) $gg: x \mapsto (x + 2) + 2 = x + 4$.

Note that

$$[f(x)]^2 = (x^2+5)^2 \equiv x^4 + 10x^2 + 25$$

and this is not the result of applying the mapping ff to x.

مثال ۳

اگر $f : x \to x^{۲}+۵$ و $g : x \to x+۲$، آنگاه خواهیم داشت:

(الف) $gf: x \to (x^{۲}+۵)+۲ \equiv x^{۲}+۷$

(ب) $fg : x \to (x+۲)^{۲}+۵ \equiv x^{۲}+۴x+۴+۵ = x^{۲}+۴x+۹$

(پ) $ff:x \to (x^{۲}+۵)^{۲}+۵ \equiv x^{۴}+۱۰x^{۲}+۲۵+۵ =$
$x^{۴}+۱۰x^{۲}+۳۰$

(ت) $gg: x \to (x+۲)+۲ \equiv x+۴$

توجه کنید که: $[f(x)]^{۲} = (x^{۲}+۵)^{۲} \equiv x^{۴}+۱۰x^{۲}+۲۵$ و این با نتیجهٔ به کارگیری نگاشت ff روی x یکسان نمی‌باشد.

Identities and equations

The reader will note that in the above example we have used the symbol ≡, which is to be read as 'is identical with'. We use this symbol when we have an algebraic relation which is true for all values of the variable x. For example,

$$(x+2)^2 \equiv x^2 + 4x + 4.$$

Such an algebraic relation is called an *identity*.

On the other hand, the expression

$$(x+2)^2 = 9x - 2$$

is only true when $x = 2$ or $x = 3$. An algebraic relation which is only true for a particular set of values of x is called an *equation*.

اتحادها و معادلات

خواننده توجه دارد که درمثال بالا، ما از نماد ≡ استفاده کردیم و آن به صورتِ «متحدّ است با» خوانده می‌شود. ما از این نماد زمانی استفاده می‌کنیم که رابطه‌ای جبری داشته باشیم و آن رابطه به ازای جمیع مقادیر برای متغیر x برقرار باشد. برای مثال:

$(x+۲)^{۲} \equiv x^{۲}+۴x+۴$

چنین رابطهٔ جبری را یک اتحاد می‌نامیم.

ازطرف دیگر، عبارت $(x+۲)^{۲} = ۹x-۲$ فقط زمانی درست است که $x=۲$ یا $x=۳$. یک رابطهٔ جبری را که فقط به ازای مجموعه‌ای خاص از مقادیر x درست است معادله می‌نامیم.

ترجمه برخی اصطلاحات و لغات

Function	تابع
Mapping	نگاشت
Cartesian Plane	صفحهٔ مختصات دکارتی
Equation	معادله
Curve	منحنی
Determine	مشخص کردن
Even	زوج
Odd	فرد
Suppose	فرض کردن
Composition	ترکیب
Composite	مرکب
Certain	معین
Circumstances	شرایط
Illustrated	تصور
Isidentical with	متحداست با
Identity	اتحاد
Expression	عبارت
Associate	مربوط ساختن
Element	عنصر ـ عضو
Unique	منحصربفرد
Domain	دامنه
Codomain	هم‌دامنه
Corresponding	متناظر
Image	تصویر
Real Variable	متغیرحقیقی
Independent Variable	متغیر مستقل
Dependent Variable	متغیر وابسته
Diagrammatically	به‌صورت نموداری
Parallel	موازی
Ordered Pair	زوج مرتب
Represent	نمایش دادن
Coordinates	مختصات

برهان خلف

در خلاف آمدِ عادت بطلب کام، که من
کسب جمعیّت از آن زلف پریشان کردم
«حافظ»

غلامرضا یاسی‌پور

روش اثبات غیرمستقیم[1] که آن را برهان خُلف[2] نیز می‌نامند برای جمیع کسانی که هندسهٔ مقدماتی[3] خوانده‌اند آشناست. اقلیدس در استخراج قضایایش[4]، غالباً کار را با فرض[5] مقابل[6] چیزی که می‌خواهد آن را ثابت کند، آغاز می‌کند؛ در این صورت اگر فرض[7] مزبور به کاذبی[8] منجر شود، باید دروغ[9] باشد، و بنابراین نقیض[10] آن، یعنی قضیّهٔ مورد اثبات باید راست[11] باشد.

اثبات غیرمستقیم، درستی[12] استدلالی[13] مفروض را، با فرض نقیض نتیجه‌اش[14]، به عنوان مقدمه‌ای[15] اضافی، و بعد استخراج کاذبی آشکار از مجموعهٔ فزودهٔ[16] مقدمات مزبور، بنا می‌کند. به این ترتیب، اثبات غیرمستقیم درستی استدلال

$A \Rightarrow (B \wedge C)$
$(B \vee C) \Rightarrow E$
$D \vee A$
$\therefore E$

را می‌توان به‌طریق زیر انجام داد:

1 .	$A \Rightarrow (B \wedge C)$	
2 .	$(B \vee D) \Rightarrow E$	
3 .	$D \vee A$	/ ∴ E
4 .	$\sim E$	I.P. (Indirect Proof)
5 .	$\sim (B \vee D)$	2, 4, M.T.
6 .	$\sim B \wedge \sim D$	5, DeM.
7 .	$\sim D \wedge \sim B$	6, Com
8 .	$\sim D$	7, Simp.
9 .	A	3, 8, D.S.
10.	$B \wedge C$	1, 9, M.P.
11.	B	10, Simp.
12.	$\sim B$	6, Simp.
13.	$B \wedge \sim B$	11, 12, Conj.

در این‌جا سطر ۱۳ کاذبی آشکار است. بنابراین برهان[17] کامل است، زیرا درستی استدلال اصلی از قاعدهٔ اثبات غیرمستقیم نتیجه می‌شود.

آسان است که نشان دهیم که از یک کاذب هر نتیجه‌ای را به درستی می‌توان استنتاج کرد. به‌عبارت دیگر، هر استدلال به‌صورت

p
$\sim p$
$\therefore q$

بی‌توجه به این‌که چه گزاره‌هایی به‌جای متغیرهای p و q قرارداده می‌شود، درست است. به این ترتیب، از سطرهای ۱۱، ۱۲ ی اثبات قبل، می‌توان نتیجهٔ E را تنها با دو سطر دیگر استنتاج کرد، و ادامهٔ کار به‌ترتیب زیر است:

14.	$B \vee E$	11 , Add.
15.	E	12,14, D.S.

درنتیجه امکان دارد که اثبات غیرمستقیم درستی یک استدلال

معلوم را نه به‌عنوان استنتاج درستی آن از این حقیقت که کاذبی به‌دست آورده‌ایم، بلکه بیشتر به‌عنوان استنتاج نتیجهٔ استدلال از خود کاذب، درنظر بگیریم. به‌این ترتیب به‌جای درنظر گرفتن برهان خلف به‌عنوان رسیدن به کاذب، می‌توانیم رسیدن از کاذب به نتیجهٔ استدلال اصلی را درنظر بگیریم. اگر ترکیب عطفی[۱۸] مقدمات یک استدلال را به‌صورت P و نتیجهٔ آن را به‌صورت C علامتی کنیم، دراین صورت اثبات غیرمستقیم درستی

P

∴ C

با استفاده از اثبات صوری[۱۹] درستی استدلال

P

~ C

∴ C

به‌دست می‌آید. اما بین دو استدلال

P		P
∴ C	و	~C
		∴ C

چه رابطه‌ای موجود است که اثبات درستی اولی برای انجام درستی دومی کفایت می‌کند؟ اثبات صوری درستی دومی اثبات شرطی[۲۰] درستی استدلال سوم

P

$\therefore \sim C \Rightarrow C$

را بنا می‌کند. اما نتیجهٔ استدلال سوم منطقاً معادل[۲۱] نتیجهٔ استدلال اوّل است. بنابه‌تعریف استلزام مادی[۲۲]، $\sim C \Rightarrow C$ منطقاً معادل $\sim \sim C \vee C$ که بنا به‌اصل نقیض دوگانه[۲۳] منطقاً معادل $C \vee C$ است، می‌باشد. $C \vee C$ و C نیز بنا به اصل صادق[۲۴] منطقاً معادلند. از آن‌جا که استدلالهای اول و سوم مقدمات یکسان و نتایج منطقاً معادل دارند، هر اثبات درستی اولی اثبات درستی دیگری نیز هست. اثبات درستی استدلال دوم، هم اثبات شرطی سومی، هم اثبات غیرمستقیم اولی است. به‌این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که بین روشهای اثبات غیرمستقیم و شرطی، یعنی بین قانون اثبات شرطی و قانون اثبات غیرمستقیم رابطهٔ نزدیکی وجود دارد.

اضافه کردن قانون اثبات غیرمستقیم به تقویت دستگاه اثباتمان کمک می‌کند. درستی هر استدلالی که نتیجه‌اش صادق است را می‌توان با استفاده از روش جدولهای ارزش[۲۵] و بی‌توجه به این‌که مقدماتش چیست، نشان داد. اما اگر نتیجهٔ صادق استدلالی گزاره‌ای شرطی نباشد، و مقدماتش با یکدیگر موافق و با آن نتیجه کاملاً بی‌ارتباط باشند، در این صورت درستی آن استدلال را نمی‌توان با روش قیاس[۲۶] بدون استفاده از قانون اثبات غیرمستقیم اثبات کرد. بنابراین هرچند که درستی استدلال

A

$\therefore B \vee (B \Rightarrow C)$

را باکمک قوانین مشروح در قسمتهای قبل نمی‌توان ثابت کرد، می‌توان درستی آن را با استفاده از قانون اثبات غیرمستقیم به‌سادگی معلوم کرد. یکی از اثباتهای درستی این استدلال عبارت‌است از:

1. $A \;/\; \therefore B \vee (B \Rightarrow C)$	
2. $\sim [\, B \vee (B \Rightarrow C) \,]$	I.P.
3. $\sim [\, B \vee (\sim B \vee C) \,]$	2, Impl.
4. $\sim [\, (B \vee \sim B) \vee C \,]$	3, Assoc.
5. $\sim (B \vee \sim B) \wedge \sim C$	4, DeM.
6. $\sim (B \vee \sim B)$	5, Simp.
7. $\sim B \wedge \sim\sim B$	6, DeM.

به این ترتیب نوزده قانون استنتاجمان[۲۷] همراه با قوانین اثبات شرطی و غیرمستقیم روش استنتاجی به‌دست‌مان می‌دهند که کامل است، و هر استدلالی راکه درستیش را بتوان با استفاده از جدولهای ارزش ثابت کرد، می‌توان بااستفاده از روش استنتاجی که در قسمتهای پیشین (به‌شماره‌های ۳، ۴، ۵ برهان رجوع کنید) شرح داده شده اثبات‌کرد. اما این موضوع دراین‌جا اثبات نخواهد شد.

اثبات صادقها

روشهای اثبات شرطی و غیرمستقیم نه‌تنها می‌توانند در

اثبات درستی استدلالها به کار روند، بلکه در اثبات این‌که گزاره‌ها و صورتهای گزاره‌ای معینی صادق‌اند نیز به کار می‌روند. به یک معنی، هر گزارهٔ شرطی متناظر با استدلالی است که تنها مقدمه‌اش مقدم[28] آن گزارهٔ شرطی، و نتیجه‌اش تالی[29] آن می‌باشد، و این گزارهٔ شرطی صادق است اگر و فقط اگر آن استدلال درست باشد. درنتیجه با استنتاج تالی یک گزارهٔ شرطی از مقدمش، با استفاده از یک رشته استدلالات درست مقدماتی، ثابت می‌شود که آن گزارهٔ شرطی صادق است. به این ترتیب، با استفاده از همان دنبالهٔ سطرهایی که درستی استدلال

$A \wedge B$

$\therefore A$

را ثابت می‌کند، ثابت می‌شود که گزارهٔ $(A \wedge B) \Rightarrow A$ صادق است. قبلاً نیز به این مطلب اشاره شده که روش شرطی را می‌توان کراراً در یک اثبات به کار برد. بنابراین صادق بودن گزارهٔ شرطی

$(Q \Rightarrow R) \Rightarrow [(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)]$

را می‌توان با استفاده از

1. $Q \Rightarrow R$ $/ \therefore (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (C.P.)
2. $P \Rightarrow Q$ $/ \therefore P \Rightarrow R$
3. $P \Rightarrow R$ 1,2, H.S.

ثابت کرد. این روش اثبات در مورد بعضی از گزاره‌های شرطی مرکب آسانتر و ساده‌تر از رسم جدولهای ارزش است.

صادقهای بسیاری وجود دارند که به‌صورت شرطی نیستند، و روش قبل را در مورد آنها نمی‌توان به کار برد. اما راستی هر صادق را با استفاده از روش غیرمستقیم می‌توان ثابت کرد، و در این مورد همان‌طور که درمورد استدلالها عمل شد، روش غیرمستقیم اثبات درستی با اضافه کردن نقیض نتیجهٔ استدلال به‌مقدمات آن و سپس با استنتاج کاذبی از دنبالهٔ استدلالات درست مقدماتی، انجام می‌گیرد، و همین‌ترتیب در مورد گزاره‌ها عمل می‌شود، یعنی روش غیرمستقیم اثبات صادق بودن آنها، با درنظرگرفتن نقیضشان به‌عنوان مقدمه و سپس با استنتاج کاذب واضحی از دنبالهٔ استدلالات درست مقدماتی انجام می‌پذیرد. به‌این ترتیب، صادق بودن گزارهٔ $B \vee \sim B$ با استفاده از اعمال زیر اثبات می‌شود:

1. $\sim (B \vee \sim B)$ $/ \therefore B \vee \sim B$ (I.P.)
2. $\sim B \wedge \sim \sim B$ 1,DeM.

گفتن این که یک گزاره صادق است اظهار این است که راستیش غیرشرطی است، بنابراین می‌توان راستی آن را بدون توسل به گزاره‌های دیگر اثبات کرد. طریق دیگر اظهار همین مطلب، که شاید خیلی گمراه‌کننده نباشد، بیان درستی «استدلالی» است که گزارهٔ مورد بحث را به‌عنوان «نتیجه» دارد، اما مقدمه ندارد. به‌این ترتیب اگر این «نتیجه» صادق باشد در این‌صورت روش استنتاج، با استفاده از قانون اثبات شرطی یا قانون اثبات غیرمستقیم، مجازمان می‌کند که ثابت کنیم که «استدلال» مذکور علی‌رغم این‌که مقدمه ندارد درست است. راستی هر صادق را می‌توان با استفاده از روش قیاس اثبات کرد، اما در این‌جا به‌آن نمی‌پردازیم.

یادداشتها

1. Indirect Proof
2. Reductio ad Absurdum

بوعلی سینا این کلمه را به فتح اول، یعنی خَلْف، می‌داند و آنرا به‌معنی پشت‌می‌گیرد.

3. Elementary Geometry
4. Theorems
5. Assuming
6. Opposite
7. Assumption
8. Contradiction
9. False
10. Negation
11. True
12. Validity
13. Argument
14. Conclusion
15. Premiss
16. Augmented Set
17. Demonstration
18. Conjunction
19. Formal Proof
20. Conditional Proof
21. Equivalent
22. Material Implication
23. Double Negation
24. Tautology
25. Truth Tables
26. Method of Deduction
27. Rule of Inference
28. Antecedent
29. consequent

مراجع: Irving M. Copi, Symbolic Logic

تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۵)

دراین شماره نیز به‌بررسی مجلهٔ آشتی با ریاضیات می‌پردازیم:

– دکارت[۱]، موجودات زنده و انسان را، به استثنای جان و روان او، مثل یک ماشین می‌دانست. یک روز، وقتی که به ملکهٔ مسیحی سوئد درس می‌داد، ملکه از او پرسید:
«ولی چگونه ماشین می‌تواند خودش را تولید کند؟» همین پرسش، امروز هم، ریاضیدانهایی را که مرزهای ممکنهٔ ماشین را بررسی می‌کنند برآشفته کرده است.

ریاضیات در زیست‌شناسی[۲]

مطمئناً امکان دارد که روزی من (نوعی) مغلوب کامپیوتر شطرنج‌باز بشوم ولی مطمئناً زمان زیادی لازم دارد ... برنامه‌های کنونی در سطح پایین بازی می‌کنند و علت آن این است که در طراحی آنها فقط متخصصین شرکت کامپیوتر شرکت دارند و از شطرنج‌بازها کمک گرفته نشده است.
«بابی‌فیشر[۳] در مقالهٔ شطرنج و کامپیوتر[۴]»

در سال گذشته (۱۹۷۳ میلادی) به‌وسیلهٔ کامپیوتر، محاسباتی بر مبنای اعداد نجومی، وکسوف خورشید و محاسبهٔ تقویمها که در کارهای ابوریحان مندرج است، در آمریکا صورت گرفت و شتاب زمین را از روی اعدادی که او داده بود اندازه گرفتند.
از حاصل کارهای علمی و نجومی در این باب همین‌قدر آشکار شد که آنچه این مرد با چشم سِر دید و در گوشهٔ ده از راه تفکر و تعمق به آن دست‌یافت، از میزان حقیقی سیر و شتاب این کرهٔ خاکی زیاد دور نبود.

آدمی به این دقت اگر وسایل امروزی را دراختیار داشت در دل کهکشانها فرو می‌رفت و بر ماه و مشتری خیمه می‌افکند[۵]...
از ویژگیهای روش ابوریحان بیرونی که او را از دیگر علمای اسلامی ممتاز می‌کند، استقلال فکری اوست. او در پژوهشهای علمی خود، درنظام ارسطویی هنگامی که با موانعی مواجه می‌شود، و درمی‌یابد که قیاسات منطقی از حل بسیاری از مسائل و معضلات عالم هستی عاجز و ناتوان است، اصول ارسطویی را به یک سو می‌نهد و راهی دیگر مبتنی بر تجربه و مشاهده و براهین هندسی برمی‌گزیند[۶].
بیرونی تقلید را در مسائل علمی ابداً جایز نمی‌داند و از این‌که ابن‌سینا باوجود نبوغ ذاتی و هوش سرشاری که دارد، یکسره و دربست در اختیار ارسطو قرارگرفته است و کلمات او را به‌عنوان وحی منزل تلقی می‌کند، سخت ناراحت است. وی ارسطو را دانایی می‌داند که افکار و اندیشه‌های بشری را از جولان باز داشته، دهنه می‌زند و کنترل می‌کند، آنچه هست تثبیت می‌کند و برای وضع موجود حصار و قلعهٔ استوار می‌سازد و این همان قلعه‌ای است که ابن‌سینا خواسته یا ناخواسته در آن واقع می‌شود و عنکبوت‌آسا به دور خود می‌تند. لاجرم حقایق را آن‌طور که هست درنمی‌یابد.
در مواردی بر روش فکری و منطق ارسطو طعن می‌زند و آن را برای رسیدن به حقیقت کافی نمی‌داند.[۷]
بنابراین اگر نظر برتراندراسل را بپذیریم که گفت: علم از آن روز پیشرفت کرد که جهان افکار ارسطو را کنار گذاشت، باید بیرونی را از بزرگترین منتقدان ارسطویی بدانیم که با انتقادهای

خود از فلسفهٔ ارسطویی افقهای تازه‌ای به‌روی محققان بعد از
خود گشود.

«پژوهشهای نجومی ابوریحان بیرونی[۸]»

- ریاضیات گاهی چنان ناگهانی و بدون انتظار و بادقت
(محاسبه هرگز دروغ نمی‌گوید) وارد میدان می‌شود که
به‌هیچ‌وجه دست‌کمی از شکلهای شاعرانه ندارد.
یک مسألهٔ قدیمی را درنظر می‌گیریم. دوظرف یکی با
گنجایش ۷ لیتر و دیگری باگنجایش ۱۱ لیتر و یک بشکهٔ بزرگ
پر از آب داریم، با استفاده از همین دو ظرف، می‌خواهیم دقیقاً
۲ لیتر آب برداریم.
البته این مسأله را با روشهای معمولی جبر می‌توان حل کرد.
ولی ما، راه به‌کلی متفاوت دیگری را عرضه می‌کنیم. ما این
مسأله را به‌کمک توپ بیلیاردی که بین کناره‌های میز لوزی
شکلی حرکت می‌کند، حل می‌کنیم! آیا این غیرمنتظره نیست؟
«توپ بیلیارد و ریاضیات[۹]»

* * *

در مجله به داستانهای علمی تخیلی نیز برمی‌خوریم.
داستانهایی چنین در خارج‌از سرزمین ما معروفتراند و حتی از
روی بعضی از آنها مثل اودیسهٔ فضایی[۱۰] (در ایران با نام
ازکیهان) فیلم هم ساخته‌اند.
یکی‌از داستانهای آمده در آن، داستان پرفسوری که نزدیک
بود پشت و رو شود، اثر؛ مارتین‌گاردنر[۱۱] است. این داستان برای
آموزش بعضی از مطالب مربوط به‌توپولوژی به‌رشتهٔ تحریر
کشیده شده است.

درمقالهٔ نگاهی به‌مسائل و مشکلات کتابهای ریاضی ایران و معرفی و
نقد چند کتاب[۱۲] نویسندهٔ مقاله یکی از مشکلات کتابهای درسی
دانشگاه را وجود کلمات واصطلاحات نامأنوس در آنهامی‌داند
در این مورد مثال زیر رااز کتاب «هندسه‌های گوناگون» نوشتهٔ
دکتر اسدالله آل‌بویه[۱۳] که در سال ۱۳۴۱ منتشر شده‌است
می‌آورد:

«اگر سروکار ما با یک انبوه درگرفته‌ها و داوریها باشد که
برخی را ورجاوند گرفته بر پایه نهاده باشیم و برخی دیگر را از
آنها به‌خود برآورده باشیم گوییم یک «ساختمان هندسی»
داریم.»

به‌زعم نویسندهٔ مقاله، مشکل کتاب «مقدمه بر آنالیزنوین»
دکتر وازگن آوانسیان[۱۴] عدم توجه نویسندهٔ آن به امکانات و
شرایط محیط، نیز مختصر و ثقیل بودن کتاب و ناآگاهی
دانشجویان و تااندازه‌ای مدرسان آن است.
مشکل بعضی از کتابها زودآمدن و مشکل بعضی دیگر دیر
آمدنشان است.
نویسنده، کتاب ورودی به منطق ریاضی[۱۵] را آموزنده‌تر از
منطق کتاب آنالیز ریاضی مصاحب می‌داند و دلایلی نیز در این
مورد اقامه می‌کند.

در مقالهٔ فصلی از کتاب «ریاضیات جدید[۱۶]»، نویسنده به بیان
قضیهٔ ناتمامیت[۱۷] گودل پرداخته صورت آن را چنین می‌آورد:
سازگاری یک دستگاه ریاضی را در داخل خود آن دستگاه
نمی‌توان ثابت کرد.

یکی از مقاله‌های خواندنی و مفید مجله مقالهٔ قواعد
نقطه‌گذاری در زبان فارسی و زبان ریاضی[۱۸] است. در این مقاله علائم
نقطه‌گذاری، بخصوص در ریاضیات، معرفی شده است.

مقالهٔ بوریس آبراموویچ روزنفلد[۱۹] به‌معرفی روزنفلد یکی از
پژوهشگرانی که به بررسی کارهای ریاضیدانهای دورهٔ
درخشندگی علم در کشورهای اسلامی پرداخته، می‌پردازد، و
در این مورد می‌نویسد:

مورخ مشهور شوروی در ریاضیات، بوریس آبراموویچ
روزنفلد در ۳۰ اوت ۱۹۷۷ شصت‌ساله می‌شود. در پتروگراد
به‌دنیا آمد. پدرش مهندس اقتصاددان و مادرش جراح بود. در

۱۹۳۹ از دانشگاه مسکو، دانشکدهٔ مکانیک ـ ریاضی فارغ‌التحصیل شد. در سال ۱۹۴۲ درجهٔ فوق لیسانس در علوم فیزیک، ریاضی از مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه مسکو را دریافت کرد. در ۱۹۴۷ از رسالهٔ دکترای خود دفاع کرد.

در باکو بود که پژوهشهایش در تاریخ را آغاز کرد و به بررسی کارهای ریاضی خواجه‌نصیرطوسی پرداخت. رساله‌های ریاضی عمرخیام و جمشیدکاشانی[۲۰] را با همکاری یوشکوویچ منتشر کرد. باز هم با همکاری یوشکوویچ کتاب «ریاضیات قرون وسطی متعلق به مشرق‌زمین» را در ۱۹۶۰ به زبان آلمانی در برلین انتشار داد. کتابهای قانون مسعودی و التفهیم‌لاوایل صناعت التنجیم بیرونی را با همکاری دیگران به‌روسی ترجمه کرد. این دانشمند در ۱۹۷۱ به عضویت وابستهٔ آکادمی بین‌المللی تاریخ علوم برگزیده شد.

یادداشتها

۱. ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی، واضع هندسهٔ تحلیلی
۲. آشتی با ریاضیات، سال دوم شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱، پرویز شهریاری
۳. شطرنج‌باز جنجالی آمریکایی
۴. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۲۵
۵. پروفسور فضل‌الله رضا: «نکاتی چند دربارهٔ مقام علمی ابوریحان بیرونی»، **یادنامهٔ بیرونی**، جلد اول صفحهٔ ۲۴۶ ـ ۲۴۷
۶. به این بیت زیبا از دیوان شمس توجه کنید:

عقل گوید شش جهت حد است و بیرون راه نیست
عشق گوید راه هست و رفته‌ام من بارها

۷. سیدجعفر شهیدی: «بیرونی قلعهٔ فولادین منطق ارسطو را در هم می‌ریزد»، **یادنامهٔ بیرونی**، جلد اول، صفحهٔ ۲۳۷
۸. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۶۸، جعفر آقایانی چاوشی
۹. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۸۷، نام نویسندهٔ مقاله مشخص نیست. برای حل مسأله به خود مقاله رجوع کنید.
۱۰. 2001 :A Space Odyssey
۱۱. نویسندهٔ معماها و بازیهای ریاضی و داستانهای تخیلی که از او آثار زیادی به زبان فارسی ترجمه شده است.
۱۲. سال دوم شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱، هوشنگ شکرانیان
۱۳. استاد ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران
۱۴. استاد ریاضی دانشکدهٔ علوم دانشگاه ملی، استاد دانشگاه استراسبورگ فرانسه
۱۵. ترجمهٔ پرویز شهریاری
۱۶. همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۳۰، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی
۱۷. Incompleteness
۱۸. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۷۹، نویسنده علی‌اکبر عالم‌زاده
۱۹. همان مرجع، سال دوم شمارهٔ ۵ صفحهٔ ۷۶، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی
Boris Abramovich Rosenfeld, by: A. T. Grigoryan and A. P. Yushevich. Historia Mathematica, vol. 4, November 1977.
۲۰. غیاث‌الدین جمشید کاشانی صاحب دو رسالهٔ معروف مفتاح‌الحساب و رسالهٔ محیطیه

ادب و ریاضی

... ابن هیثم مدّعی بود که می‌تواند با تعبیهٔ ساختمانی برروی رود نیل جریان آب آن رود را تنظیم کند و خلیفه که تحت تأثیر این ادعا قرار گرفته بود از او که هم در آن زمان ریاضی‌دانی نام‌آور بود دعوت کرد که به مصر برود.

به گفتهٔ قفطی، ابن‌هیثم مدتی بعد در رأس هیأتی از مهندسان به مرز جنوبی مصر، که گمان می‌کرد آب نیل در آن‌جا از سرزمینهای مرتفع به مصر وارد می‌شود، سفر کرد. اما پیش از آن‌که به مقصد برسد، کم‌کم اعتقادش به نقشه‌هایی که در دست داشت سست شد، زیرا با مشاهدهٔ ساختمانهای کهنی که بر ساحل نیل می‌دید و در طرح و اجرا هیچ نقصی نداشت، دریافت که اگر نقشهٔ او عملی بود، حتماً سازندگان این ساختمانهای شگفت‌آور بدان کار اقدام می‌کردند.

زندگینامهٔ علمی دانشمندان اسلامی
احمد آرام و ...



توابع پوشا و بررسی خاصیت پوشایی در انواع توابع

حمید رضا امیری

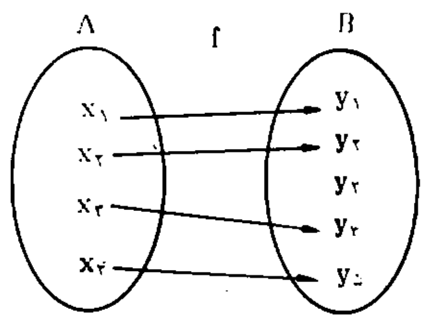
در مقاله‌ای تحت عنوان «تابع و بررسی خاصیت یك به یکی در انواع توابع» (برهان ۲ صفحهٔ ۲۲) با مفهوم تابع و خاصیت یك به یکی توابع آشنا شدیم. در این مقاله می‌خواهم توابع پوشا یا پوششی را مورد بحث و بررسی قرار دهم. ابتدا به تعریف چنین توابعی می‌پردازم:

هرگاه $f : A \to B$ تابعی مفروض باشد، این تابع را پوششی یا پوشا می‌نامیم در صورتی که برد آن تمامی مجموعهٔ دوم یعنی B را بپوشاند یا به عبارت دیگر:

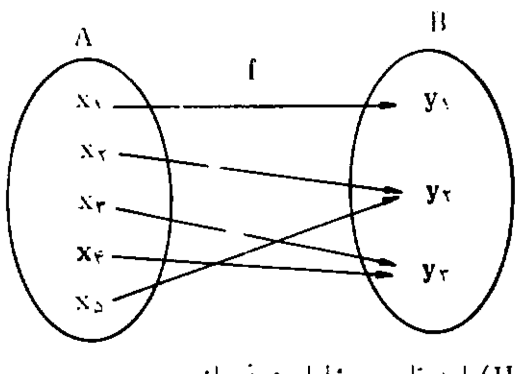
$R_f = B \iff$ تابع $f : A \to B$ پوشا است

در تعریف تابع دیدیم که درحالت کلی $R_f \subseteq B$، بنابراین در توابع پوشا که $R_f = B$، هیچ عضوی از مجموعهٔ دوم نمی‌توان یافت که توسط عضوی از دامنه پوشیده نشده باشد.

برای درك بهتر مطلب به بررسی وضعیت چند تابع به صورت نمودار پیکانی می‌پردازیم، دقت کنید:



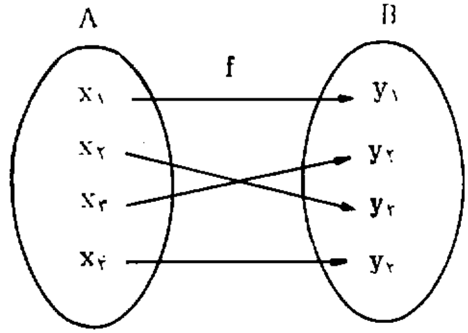
I) این تابع پوشا نیست زیرا $y_3 \in B$ و y_3 توسط هیچ یك از اعضای A پوشیده نشده است ولی تابع یك به یك است.



II) این تابع پوشا است زیرا:

$$R_f = \{y_1 , y_2 , y_3\} = B$$

و همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع در عین‌حال که پوششی است یك به یك نمی‌باشد.



III) این تابع هم یک‌به‌یک است و هم پوششی.

حال می‌خواهیم این مفهوم را به زبان ریاضی بیان کنیم. به عبارت زیر توجه کنید:

$f: A \to B$ تابع $\Longleftrightarrow$ پوشا است

$\forall y \in B \; \exists x \in D_f \; , \; f(x) = y$

(به ازای هرعضو از مجموعهٔ دوم مانند y ، باید عضوی از دامنه، چون x وجود داشته باشد به قسمی که این x توسط تابع f (تأثیر تابع f) برابر با y باشد.)

بنابراین بررسی این که آیا تابع پوششی است یا خیر، با توجه به تعریف توابع پوشا، مستلزم این است که برد تابع را تعیین کرده و بررسی کنیم آیا با مجموعه دوم برابر است یا خیر؟

این مسأله گاهی با مشکلاتی مواجه می‌شود (مسألهٔ تعیین برد تابع) و برای رفع این مشکل به طریق زیر عمل می‌کنیم:

(اگر بتوانیم به ازای yای دلخواه ازمجموعهٔ دوم همواره xای از دامنهٔ تابع بیابیم که $f(x) = y$ مشکل برطرف می‌شود.)

قدم اول: yای دلخواه از مجموعهٔ دوم انتخاب کرده و مساوی باضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم.

قدم دوم: پس از مساوی قراردادن y باضابطهٔ تابع:

$(y = f(x))$

x را برحسب y به دست می‌آوریم $(x = f(y))$. این عمل امکان‌پذیر است که سعی می‌شود درحالتهای مختلف به چگونگی آن پرداخته شود.

قدم سوم: پس از مشخص کردن ضابطهٔ x برحسب y ، به بحث روی وجود x به ازای yهای واقع در مجموعهٔ دوم می‌پردازیم که نیاز است دوشرط زیر بررسی شوند:

شرط اول- به ازای هر y در مجموعهٔ دوم ، x همواره تعریف‌شده باشد.

شرط دوم- x در دامنهٔ تعریف تابع باشد.

تذکر ۱ : نقض هریک از دوشرط بالا، پوشایی تابع را نقض می‌کند.

تذکر ۲ : اگر f^{-1} را وارون f فرض کنیم ، هرعضوی را که f از دامنه به برد انتقال دهد f^{-1} آن عضو را مجدداً از برد به دامنه منتقل می‌کند درحقیقت همواره داریم: برد f = دامنهٔ f^{-1} $(R_f = D_{f^{-1}})$ و $x = f(y)$ همان ضابطهٔ f^{-1} است که از روی ضابطهٔ تابع $(y = f(x))$ حاصل می‌شود و اگر به خاطر داشته باشید گفتیم که مسألهٔ اصلی در بررسی خاصیت پوشایی توابع تعیین برد آنها می‌باشد.

حال به بررسی چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱ - خاصیت پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ

$f: N \to IR$
$f(x) = 2x - 3$

بررسی کنید .

فرض کنیم $y \in IR , y = 2x - 3 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{y+3}{2}}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود به ازای هر y در IR همواره x تعریف شده است و عددی است حقیقی اما لزوماً ممکن است در D_f یعنی N نباشد مثلاً اگر قرار دهیم $y = 2$ در این صورت $x = \frac{5}{2}$ که $\frac{5}{2} \notin N$ لذا تابع پوشا نیست.

مثال ۲ - خاصیت پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ:

$$f : IR^{+} \rightarrow IR$$
$$f(x) = \frac{۳x - ۴}{۲}$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $y \in IR \ , \ y = \frac{۳x-۴}{۲} \Longrightarrow$

$$۲y = ۳x - ۴ \Longrightarrow \boxed{x = \frac{۲y+۴}{۳}}$$

واضح است که برای هر $y \in IR$ همواره x تعریف شده و عددی است حقیقی اما ممکن است در D_f یعنی IR^{+} نباشد مثلاً اگر $y = -۳$ را از IR انتخاب کنیم در این صورت

$$x = \frac{-۲}{۳}$$

که $-\frac{۲}{۳} \notin IR^{+}$ لذا تابع پوششی نیست.

مثال ۳ - تابع با ضابطهٔ $f : IR - \{-۲\} \rightarrow IR$ مفروض

$$f(x) = \frac{۲x-۱}{x+۲}$$

است، آیا این تابع پوشا است؟

فرض کنیم $y \in IR \ , \ y = \frac{۲x-۱}{x+۲} \Longrightarrow$

$$yx + ۲y = ۲x - ۱$$
$$\Longrightarrow yx - ۲x = ۱ - ۲y \Longrightarrow$$
$$x(y-۲) = ۱ - ۲y \Longrightarrow \boxed{x = \frac{۱-۲y}{y-۲}}$$

با توجه به ضابطهٔ اخیر (x برحسب y) واضح است که برای $y = ۲$ ، x تعریف نشده و عددی حقیقی حاصل نمی‌شود پس تابع f پوشا نیست (عدد ۲ در IR توسط هیچ عضوی از دامنه پوشیده نمی‌شود)

تذکر: اگر مجموعهٔ دوم یا هم‌دامنهٔ تابع f را از IR به $IR - \{۲\}$ تبدیل کنیم تابع پوشا خواهد شد زیرا دیگر $y = ۲$ در مجموعهٔ دوم وجود ندارد تا انتخاب شود و x ای به‌ازای آن تعریف نشود.

مثال ۴ - در تابع با ضابطهٔ $f : IR - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow IR$ ،

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجموعهٔ دوم را طوری تغییر دهید که تابع پوشا باشد.

اگر $y \in IR \ , \ y = \frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow$

$$cxy + dy = ax + b \Longrightarrow cxy - ax = b - dy$$
$$\Longrightarrow x = \frac{b-dy}{cy-a}$$

تنها عضوی از IR که بـه ازای آن x ای از دامنهٔ تابع تعریف نمی‌شود ریشهٔ مخرج یعنی $y = \frac{a}{c}$ است

پس اگر مجموعهٔ دوم را به $IR - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ تغییر دهیم تابع پوششی خواهد شد.

طرح یك تست: تابع $f : IR - \left\{\frac{۳}{۲}\right\} \rightarrow IR - \left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$ با کدام ضابطه می‌تواند پوشا باشد؟

۱) $f(x) = \frac{x+۲}{۲x-۳}$

۲) $f(x) = \frac{۴x-۲}{۲x-۳}$

۳) $f(x) = \frac{۲x+۱}{۴x-۶}$

۴) $f(x) = \frac{۱-۲x}{۴x-۶}$

با توجه به مثال قبل واضح است که گزینهٔ (۴) جواب موردنظر است.

مثال ۵ - تابع باضابطهٔ $f: IR \to IR^+$ مفروض است.

$$f(x)=x^2$$

آیا این تابع پوشا است؟

$$y\in IR^+ \;,\; y=x^2 \implies x=\pm\sqrt{y}$$ اگر

می‌بینیم که برای هر $y\in IR^+$، همواره x تعریف شده و در دامنهٔ f موجود است درحقیقت بـرای هر $y\in IR^+$، دو عدد حقیقی از دامنه وجود دارد که برروی y تصویر می‌شوند (هر عضو IR^+ توسط دو عضو دامنه پوشیده می‌شود). لذا تابع پوشا می‌باشد.

تذکر: اگـر تابع تعریف شده در مثال ۵ را به صورت $f: IR \to IR$ تعریف کنیم، دراین‌صورت پوششی نمی‌باشد

$$f(x)=x^2$$

(اعداد منفی پوشیده نمی‌شوند).

تذکر: چون همواره‌حاصل یك‌رادیکال بـا فرجهٔ زوج، مثبت می‌باشد پس توابع‌به صورت $f: IR \to IR$ کـه $\underline{n}$

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$$

زوج است هیچگـاه نمی‌توانند پـوشا باشند. (IR^- پوشیده نمی‌شود.)

مثال ۶ - آیا تابع با ضابطهٔ :

$$f: IR \to IR^+$$
$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$

پوشا می‌باشد (چون‌درمعادلهٔ $x^2+x+1=0$، دلتاهمواره منفی و ضریب x^2 عددی است مثبت لذا همواره

$$x^2+x+1>0$$

پس دامنهٔ f، IR می‌باشد).

$$y\in IR^+ \;,\; y=\sqrt{x^2+x+1}$$ اگر

$$\implies y^2=x^2+x+1$$

$$\implies x^2+x+1-y^2=0$$

$$\implies \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=(1-y^2) \end{cases}$$

$$\implies \Delta=1-4(1-y^2)$$

$$\implies x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1-y^2)}}{2}$$

$$\implies x=\frac{-1\pm\sqrt{4y^2-3}}{2}$$

$$\implies x=\frac{-1+\sqrt{4y^2-3}}{2}$$ یـا

$$x=\frac{-1-\sqrt{4y^2-3}}{2}$$

با توجه به ضابطه‌های به دست‌آمده برای x برحسب y واضح است‌که اگر $-\frac{\sqrt{3}}{2}<y<\frac{\sqrt{3}}{2}$ در ایـن صورت زیر رادیکال منفی و x تعریف نشده خواهد بود، بنابراین تـابع پوشا نمی‌باشد.

y	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$4y^2-3$	$+$	0	$-$	0	$+$

تذکر: در مثال (۶) اگردر $x^2+x+1-y^2$ ضریب x را بزرگتر یا مساوی‌با ۲ انتخاب‌کنیم دراین‌صورت $\Delta\geqslant 0$ بوده وهمواره برای‌هر y در IR^+، xای‌حقیقی‌دردامنه‌وجود دارد و تابع‌پوششی خواهد شد.

مثلاً در $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}$ داریم :

$$y=\sqrt{x^2+3x+1} \implies y^2=x^2+3x+1$$

$$\implies x^2+3x+1-y^2=0$$

$$\Delta = ۹ - ۴(۱ - y^۲) \implies \Delta = ۴y^۲ + ۵ \geqslant ۰$$

$$\implies x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۴y^۲ + ۵}}{۲} \in IR$$

$$(\forall y \in IR^+)$$

مثال ۷ ـ اولاً نشان‌دهید که توابع:

$f : IR \to IR \ , \ f : IR \to IR$
$f(x) = \cos x \qquad f(x) = \sin x$

غیر پوشا و توابع

$f : IR \to IR \ , \ f : IR \to IR$
$f(x) = \cot g x \qquad f(x) = tg x$

پوشا می‌باشند.

ثانیاً دوتابع اول با چه قیدی پوششی خواهند بود؟

اولاً چون حدود تغییرات $\sin x$ و $\cos x$ اعداد حقیقی بین ۱ و ۱ — وخود ۱ و ۱ — است، یعنی:

$$-۱ \leqslant \cos x \leqslant ۱ \ , \ -۱ \leqslant \sin x \leqslant ۱$$

واضح است که yهای‌خارج از این محدوده توسط این توابع پوشیده نمی‌شوند ولی چون

$$-\infty < \cot g x < +\infty \ , \ -\infty < tg x < +\infty$$

این دوتابع پوشا هستند. یعنی، اگر مثلاً:

$$y \in IR \ , \ y = tg x \implies x = \operatorname{arctg} y$$

و برای‌هر y، xای در IR موجود است که $f(x) = y$. ثانیاً واضح است که اگر دوتابع‌اول رابه صورت زیر تعریف‌کنیم پوششی خواهند بود:

$f : IR \to [-۱ \ , ۱] \quad , \quad f : IR \to [-۱ , ۱]$
$f(x) = \sin x \qquad f(x) = \cos x$

مثال ۸ ـ پوشایی تابع با ضابطهٔ:

$f : IR \to IR^+$
$f(x) = \sqrt{x - ۲}$

را بررسی‌کنید.

اگر $y \in IR^+ \ , \ y = \sqrt{x - ۲} \implies$

$$y^۲ = x - ۲ \implies \boxed{x = y^۲ + ۲}$$

دامنهٔ تابع فوق عبارت است از:

$$D_f = \{ x \in IR \mid x \geqslant ۲ \}$$

وهمان طورکه مشاهده می‌کنید برای هر $y \in IR^+$، همواره x تعریف‌شده وچون $y^۲ + ۲ \geqslant ۲$ پس‌در دامنهٔ‌تعریف f نیز واقع است بنابراین تابع‌پوشا می‌باشد.

تذکر: در توابع ثابت به شکل $f(x) = c$ که $c \in IR$ هرگاه مجموعهٔ‌دوم را به صورت $\{c\}$ معرفی‌کنیم تابع پوشا و درغیر این‌صورت تابع‌پوشا نخواهدبود.

بررسی خاصیت پوشایی در توابع از $IR^۲$ به $IR^۲$

کلیات بررسی خاصیت‌پوشایی در توابع‌از $IR^۲$ به $IR^۲$ هیچ گونه فرقی‌با توابع‌از IR به IR نداشته وفقط‌جزئیات آن کمی‌اختلاف دارد. به این‌شکل که اولاً عضوی‌که از مجموعهٔ دوم‌به صورت دلخواه درنظر می‌گیریم چون از $IR^۲$ انتخاب می‌شود باید یك زوج مرتب مثلاً بـه شکل $(x_۱ \ , \ y_۱)$ باشد. ثانیاً وقتی این عضورا مساوی باضابطهٔ تابع‌که آن‌هم به‌صورت زوج مرتب‌خواهد بـود، قرار می‌دهیم به یك دستگاه معادلات برخورد می‌کنیم‌که باید از این‌دستگاه x را برحسب $x_۱$ و y را برحسب $y_۱$ به دست‌آورده وهردوشرط ذکرشده در ابتدای مقاله را برای هردوضابطه‌بررسی‌کنیم.

مثال ۹ ـ تابع با ضابطهٔ

$f : IR^۲ \to IR^۲$
$f(x \ , \ y) = (۲x - ۱ \ , \ ۳y + ۲)$

مفروض‌است. خاصیت پوشایی‌را دراین تابع بررسی‌کنید.

فرض کنیم $(x_1 , y_1) \in IR^2$.

$$(x_1 , y_1) = (2x-1 , 3y+2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x-1 \\ y_1 = 3y+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{x_1+1}{2} \\ y = \dfrac{y_1-2}{3} \end{matrix}$$

و مشاهده می‌کنید که به ازای هر $x_1 \in IR$ همواره xای در IR و برای هر $y_1 \in IR^2$ ، yای در IR یافت می‌شود و در کل برای هر $(x_1 , y_1) \in IR^2$ همواره می‌توان (x , y)ای در IR^2 یافت که، $f(x,y)=(x_1,y_1)$ زیرا :

$$f(x,y) = f(\frac{x_1+1}{2} , \frac{y_1-2}{3})$$

$$= (2(\frac{x_1+1}{2})-1 , 3(\frac{y_1-2}{3})+2) = (x_1,y_1)$$

بنابراین تابع پوشا می‌باشد.

تذکر: بررسی اینکه پس از یافتن x و y برحسب x_1 و y_1 آیا $f(x,y)=(x_1,y_1)$ ضروری نیست.

مثال ۱۰ - خاصیت پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ

$$f : IR^2 \rightarrow IR^2$$
$$f(x , y) = (2x+y , x-3y)$$

بررسی کنید .

فرض کنیم $(x_1 , y_1) \in IR^2$,

$$(x_1 , y_1) = (2x+y , x-3y) \Longrightarrow$$

$$3\begin{cases} x_1 = 2x+y & (1) \\ y_1 = x-3y & (2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 6x+3y \\ y_1 = x-3y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 7x = 3x_1 + y_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \frac{3x_1+y_1}{7}}$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} y_1 = \frac{3x_1+y_1}{7} - 3y \Longrightarrow$$

$$3y = \frac{3x_1+y_1-7y_1}{7} \Longrightarrow 3y = \frac{3x_1-6y_1}{7}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = \frac{x_1-2y_1}{7}}$$

وچون برای هر x_1 و y_1 همواره x و y تعریف شده و زوج مرتب (x,y) در D_f قرار دارد بنابراین تابع پوشا می‌باشد.

مثال ۱۱ - خاصیت پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ

$$f : IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$f(x,y) = (\frac{x-1}{2x+1} , y+5)$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $(x_1 , y_1) \in IR^2$,

$$(x_1 , y_1) = (\frac{x-1}{2x+1} , y+5)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1} = x_1 \\ y+5 = y_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-x_1-1}{2x_1-1} \\ y = y_1-5 \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود برای هر $y_1 \in IR$ همواره $y \in IR$ تعریف می‌شود. اما برای $x_1 = \frac{1}{2}$ ، x تعریف نشده و بنابراین با انتخاب هر زوج مرتب به شکل $(\frac{1}{2} , y_1)$ نمی‌توان زوج مرتبی از IR^2 مانند (x , y) یافت که

$$f(x , y) = (\frac{1}{2} , y_1)$$

پس تابع پوشا نیست. برای این که این تابع پوشا باشد باید کلیهٔ زوج مرتبهایی که مؤلفهٔ اول آنها $\frac{1}{2}$ است از مجموعهٔ دوم خارج

شوند پس تابع به شکل زیر می‌بایست تعریف شود:

$$f : IR^{۲} \to (IR - \{\frac{۱}{۲}\}) \times IR$$

$$f(x,y) = (\frac{x-۱}{۲x+۱}, y+۵)$$

مثال ۱۲- آیا تابع با ضابطهٔ

$$f : Z^{۲} \to IR^{۲}$$

$$f(x,y) = (۲x-۱, ۳y+۲)$$

پوششی است؟

فرض کنیم $(x_۱, y_۱) \in IR^{۲}$

$$(x_۱, y_۱) = (۲x-۱, ۳y+۲)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۲x-۱ = x_۱ \\ ۳y+۲ = y_۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_۱+۱}{۲} \\ y = \frac{y_۱-۲}{۳} \end{cases}$$

واضح است که برای هر $x_۱$, $y_۱$ همواره x و y تعریف شده اما ممکن است در دامنهٔ تعریف تابع یعنی $Z^{۲}$ نباشند مثلاً اگر قرار دهیم $x_۱ = ۲$ و $y_۱ = ۱$ داریم $x = \frac{۳}{۲}$ و $y = \frac{-۱}{۳}$ که زوج مرتب $(\frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۳})$ در $Z^{۲}$ نیست. پس تابع پوشا نمی‌باشد.

مثال ۱۳- آیا تابع با ضابطهٔ

$$f : IR^{۲} \to IR^{۲}$$

$$f(x,y) = (۲x-y, ۴x-۲y)$$

پوششی است؟

فرض کنیم $(x_۱, y_۱) \in IR^{۲}$:

$$(x_۱, y_۱) = (۲x-y, ۴x-۲y)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۲x-y = x_۱ \\ ۴x-۲y = y_۱ \end{cases}$$

دستگاه فوق برای x و y برحسب $x_۱$ و $y_۱$ فاقد جواب است. درحقیقت با معلوم بودن $x_۱$ و $y_۱$ دستگاه فوق معادلهٔ دو خط موازی باهم را مشخص می‌کند که نقطهٔ تقاطع ندارند بنابراین برای هر $x_۱$ و $y_۱$ نمی‌توان x و y ای یافت که همواره

$$f(x,y) = (x_۱, y_۱)$$

پس تابع پوشا نیست. مثلاً اگر قرار دهیم $x_۱ = y_۱ = ۱$ در این صورت باید:

$$\begin{cases} ۲x-y = ۱ \\ ۴x-۲y = ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x-y = ۱ \\ ۲x-y = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

و این ممکن نیست!

مثال ۱۴- خاصیت پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ

$$f : N^{۲} \to N$$

$$f(m,n) = ۲^{m-۱}(۲n-۱)$$

بررسی کنید.

فرض کنیم $K \in N$, $K = ۲^{m-۱}(۲n-۱)$

به دنبال زوج مرتبی مانند (m, n) در $N^{۲}$ هستیم به قسمی که $f(m,n) = K$ اگر قرار دهیم $m = ۱$ در این صورت $۲^{m-۱} = ۱$ درنتیجه می‌بایست $K = ۲n-۱$ یا $n = \frac{K+۱}{۲}$

بنابراین به ازای هر K در N همواره زوج مرتب

$$(۱, \frac{K+۱}{۲})$$

در $N^{۲}$ وجود دارد به قسمی که:

$$f(۱, \frac{K+۱}{۲}) = ۲^{۱-۱}[۲(\frac{K+۱}{۲}) - ۱]$$

$$= ۲^{\circ}(K+۱-۱) = K$$

پس تابع پوشا است.

در این قسمت به بررسی خاصیت پوشایی برای توابع

چند ضابطه‌ای می‌پردازیم.

همان طور که می‌دانید توابع چند ضابطه‌ای، توابعی هستند که: مجموعهٔ دوم آنها را به چند زیرمجموعه افراز کرده و روی هر یك از آنها ضابطه‌ای مجزا تعریف کرده‌ایم. بنابراین برای بررسی پوشایی در این تابعها کافی است که به یکی از دو روش زیر عمل کنیم:

I) برد هر ضابطه را جداگانه به دست آورده و اجتماع این بردها را محاسبه کنیم که اگر اجتماع بردها با مجموعهٔ دوم برابر باشد تابع پوشا است و در غیر این صورت تابع پوشا نیست.

II) مطابق معمول عضوی دلخواه از مجموعهٔ دوم مانند y انتخاب کرده و مساوی با هر یك از ضابطه‌ها قرار دهیم که در این حالت باید حداقل توسط یکی از ضابطه‌ها x ای یافت به قسمی که $f(x)=y$.

مثال ۱۵- تابع با ضابطهٔ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ مفروض است، خاصیت پوشایی را در این تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{۲} & x \text{ زوج}\\[2ex] \dfrac{x-۱}{۲} & x \text{ فرد}\end{cases}$$

بررسی کنید.

هرگاه فرض کنیم $f_۱(x)=\dfrac{-x}{۲}$ (برای xهای زوج) و $f_۲(x)=\dfrac{x-۱}{۲}$ (برای xهای فرد) در این صورت:

$$R_{f_۱}=\mathbb{Z}^- \ , \ R_{f_۲}=\mathbb{Z}^+\cup\{۰\}$$

بنابراین $R_{f_۱}\cup R_{f_۲}=\mathbb{Z}$ پس تابع پوشا است.

مثال ۱۶- تابع با ضابطهٔ $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ مفروض است. خاصیت پوشایی را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x>۱\\ ۱ & x=۱\\ ۳x-۴ & x<۱\end{cases}$$

اگر قرار دهیم:

$$f_۱(x)=۲x-۱\ ,\ f_۲(x)=۱\ ,\ f_۳(x)=۳x-۴$$

در این صورت:

$$R_{f_۱}=\{x\in\mathrm{IR}\,|\,x>۱\}\ ,\ R_{f_۲}=\{۱\}$$

$$R_{f_۳}=\{x\in\mathrm{IR}\,|\,x<-۱\}$$

(مجموعهٔ اعداد بین ۱ و ۱- پوشیده نمی‌شود.)

$$R_{f_۱}\cup R_{f_۲}\cup R_{f_۳}\neq\mathrm{IR}$$

بنابراین پس تابع پوشا نیست مثلاً اگر قرار دهیم $y=۰$، توسط هیچ یك از ضابطه‌ها نمی‌توان $y=۰$ را به دست آورد. زیرا اگر $۲x-۱=۰$ نتیجه می‌شود $x=\frac{۱}{۲}$ و چون ضابطهٔ $(۲x-۱)$ برای $x>۱$ تعریف شده، قابل قبول نیست و نیز اگر $۳x-۴=۰$ نتیجه می‌شود $x=\frac{۴}{۳}$ که چون ضابطهٔ $(۳x-۴)$ برای $x<۱$ تعریف شده، باز هم قابل قبول نمی‌باشد.

درخاتمه متذکر می‌شوم که سعی شده پوشایی توابع در این مقاله به‌صورت مختصر و کلی بیان شود و مثالهای انتخاب‌شده برای فهم و درك مفهوم پوشایی آورده شده‌اند که امیدوارم مفید واقع شده باشد و توفیق روزافزون شما دانش‌آموزان عزیز را در تمامی مراحل زندگی و تحصیل از خداوند متعال خواستارم.

والسلام

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۴)

از: The Mathematics Teacher May 1992
Thomas W. Shilgalis استاد ریاضیات در دانشگاه‌ایالتی‌ایلینوی است. وی در هندسه و کامپیوتر در آموزش ریاضیات تخصص‌دارد.

ترجمهٔ نغمه شریک‌زاده
ویراستار: غلامرضا یاسی‌پور

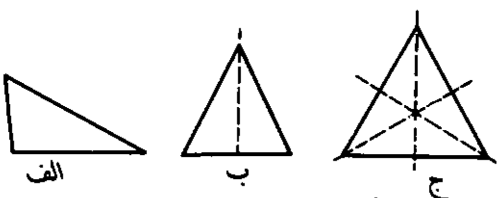
تقارن در چندضلعیهای نامنتظم

هدف از این مقاله بررسی تقارنهای دو طرفه در چند ضلعیهای محدب نامنتظم است. این‌که آنها می‌توانند چند محور تقارن داشته‌باشند، پرسشی است که دریک دوره از «موضوعاتی در هندسه» قابل طرح است و به‌اعتقاد من بحثها و حدسیات پرباری را میان آموزگاران ریاضی دورهٔ دبیرستان موجب می‌شود.

البته بررسی تقارن اشکال مسطح در کلاسهای درسی معمول است و در بسیاری از سطوح اجرا می‌شود. در بررسیهایی از این دست تصور نادیده انگاشتن چندضلعیهای منتظم با همهٔ فراوانیشان در داشتن هر دوگونهٔ محورهای تقارن دوطرفه و دورانی مشکل است، ولی مسائل جالبی نیز در رابطه با تقارنهایی که چندضلعیهای نامنتظم دارند، موجود است. در این صورت اجازه بدهید که توجهمان را به‌همین مسائل معطوف کنیم.

مثلثها

بگذارید ابتدا مثلثها را مورد بررسی قرار دهیم. شکل ۱ مثلثهایی را نشان می‌دهد که صفر (الف)، یک (ب) و سه (ج) محور تقارن دارند. محورهای تقارن مورد بحث خط‌چین شده‌اند. آیا یک مثلث می‌تواند دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد؟ تجربه‌ای کوچک با مداد و کاغذ پاسخی منفی را پیشنهاد می‌کند. برای اثبات، ابتدا متوجهیم که یک خط تقارن از یک مثلث باید از یک رأس بگذرد و ضلع مقابل آن‌را نصف کند. یک خط تقارن دو ضلع همنهشت از مثلث را به‌دست می‌دهد، دو ضلعی که یکدیگر را در رأسی که محور تقارن مزبور از آن می‌گذرد، تلاقی می‌کنند. دومین محور تقارن، دو ضلع همنهشت از مثلث را که یکی از آنها می‌تواند متمایز از دوتای اولی باشد، به‌دست می‌دهد، پس مثلث متساوی‌الاضلاع خواهد شد. بدین‌ترتیب مثلثی که بیش از یک محور تقارن دارد حتماً متساوی‌الاضلاع بوده، سه خط تقارن خواهد داشت.



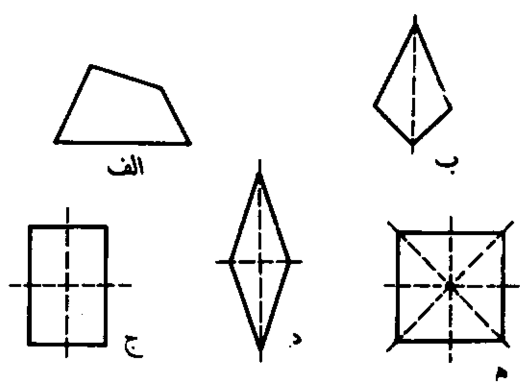
شکل ۱. مثلث‌هایی با صفر (الف)
یک (ب)، سه (ج) محور تقارن

چهار ضلعیها

در مثلثها ویژگیهای «متساوی الاضلاع» بودن و «متساوی الزوایا» بودن، لازمهٔ یکدیگر هستند، ولی برای چند ضلعیهایی با بیش از سه ضلع چنین نیست. در شکل ۲ چهار ضلعیهایی می‌بینیم با صفر (الف)، یک (ب)، دو (ج و د)، چهار (ه) محور تقارن، اما هیچ‌یک از آنها سه محور تقارن ندارند. مستطیل نامربع (ج) متساوی الزوایاست، حال آن‌که متساوی الاضلاع نیست و لوزی نامربع (د) متساوی الاضلاع است، حال آن‌که متساوی الزوایا نیست.

آیا ممکن است که یک چهار ضلعی دقیقاً سه محور تقارن داشته باشد؟ قبل از پاسخ دادن به این سؤال باید دو مطلب دربارهٔ خصوصیات محورهای تقارن چندضلعیها را، مدّنظر داشته باشیم. اگر تعداد اضلاع چند ضلعی فرد باشد، در این‌صورت محور تقارن باید از یک رأس بگذرد و ضلع مقابل آن را در زوایای قائمه نصف کند. محور تقارن در چند ضلعیهایی با تعداد اضلاع زوج یکی از این دو حالت را خواهد داشت. یا از دو رأس مقابل می‌گذرد و یا دو ضلع مقابل را در زوایای قائمه نصف می‌کند. این هر دو، نتایج تعریف محور تقارن ـ خطی که انعکاس در آن، چندضلعی را تغییر ناپذیر باقی می‌گذارد ـ می‌باشند.

بررسی فوق از خصوصیات محور تقارن نشان می‌دهد که یک چهار ضلعی نمی‌تواند دقیقاً سه محور تقارن داشته باشد. اگر در شکل ۲ ج محور تقارن سومی وجود داشته باشد، لاجرم باید از دو رأس مقابل گذر کند که لازمهٔ این، آن است که جفتهایی از اضلاع مجاور چهار ضلعی که یکدیگر را در آن رئوس تلاقی می‌کنند، همنهشت گردند و این، چهار ضلعی را به یک مربع بدل خواهد کرد. خط تقارن سومی در شکل ۲ د، همنهشت شدن زوایای مجاور را ایجاب می‌کند که باز هم چهارضلعی را به یک مربع مبدّل می‌سازد. بنابراین یک چهارضلعی نمی‌تواند دقیقاً سه خط تقارن داشته باشد.



شکل ۲. چهارضلعیهایی با صفر (الف)، یک (ب)، دو (ج و د) و چهار (ه) محور تقارن

به پیش ...

البته ما به‌سوی یافتن قانونی پیش می‌رویم که قادر باشد بیشترین تعداد خطوط تقارنی را که یک n ضلعی نامنتظم می‌تواند داشته باشد، معین کند. ملاحظه کردیم که پاسخها برای زمانی که n برابر ۳ و ۴ بود، به ترتیب ۱ و ۲ است. ممکن است در این مقطع یکی دو حدس به ذهنمان خطور کند، اما در واقع به اطلاعات بیشتری نیازمندیم. پس مقادیر ۵ تا ۱۱ از n را در شکلهای ۹ ـ ۳ درنظر می‌گیریم. هریک از این شکلها یک n ضلعی منتظم (قسمت (ب) از شکل مزبور و یک n ضلعی نامنتظم قسمت (الف) از شکل مزبور) را با بیشترین تعداد محورهای تقارن نشان می‌دهد. درچند ضلعیهای نامنتظم مورد بحث زوایای هم شماره همنهشت هستند و اضلاعی که تعداد علامتهای واقع بر آنها یکی است نیز، همنهشت می‌باشند. محورهای تقارن خط‌چین شده‌اند.

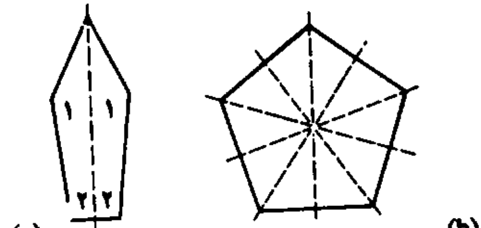
جدول ۱ خلاصه‌ای از نتایجی را که این مثالها حاوی آن هستند، همراه با علامت سؤالهایی که خواننده ممکن است خود، قبل از ادامه دادن بحث، آنها را با اعدادی جایگزین کند، به‌دست می‌دهد.

جدول ۱

$f(n)$	n
بیشترین تعداد محورهای تقارن در n ضلعی نامنتظم	تعداد اضلاع

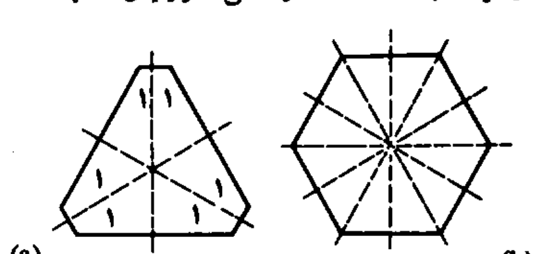
دلایلی چند

به‌عنوان مثال بگذارید نشان بدهیم که $f(۹) = ۳$. اینکه حداقل $f(۹)$ برابر ۳ است از نه ضلعی نامنتظم شکل ۷ الف روشن است. از آن‌جا که ۹ فرد است، چهارمین محور تقارن باید ازیک رأس، مثلاً B، بگذرد و ضلع مقابل آن را، مثلاً FG، در زوایای قائمه نصف کند. این‌نتیجه HB و BC را همنهشت می‌سازد. بنابراین تمام اضلاع همطول خواهند شد، زیرا در شکل ۷ الف داریم: $AB = CD = DE = FG = GH = IA$



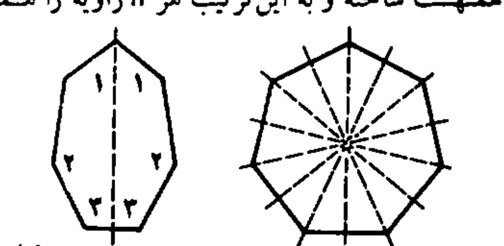
شکل ۳. $n = ۵$

حال آنکه $BC = EF = HI$. درشکل ۷ الف زوایای A، D و G بایکدیگر همنهشت هستند، در حالی‌که زوایای همنهشت B،



شکل ۴. $n = ۶$

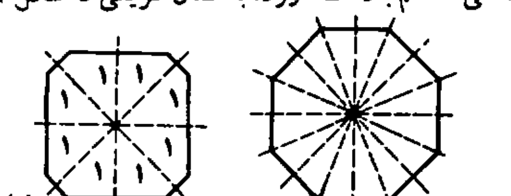
C، E، F، H و I می‌توانند اندازه‌های متفاوت از اندازهٔ A داشته باشند. چهارمین محور تقارن گذرنده از B، زوایای A و C را همنهشت ساخته و به این ترتیب هر n زاویه را همنهشت



شکل ۵. $n = ۷$

می‌سازد، بنابراین محور چهارم تقارن نه ضلعی را منتظم خواهد ساخت، پس به‌واقع f (۹) برابر ۳ است.

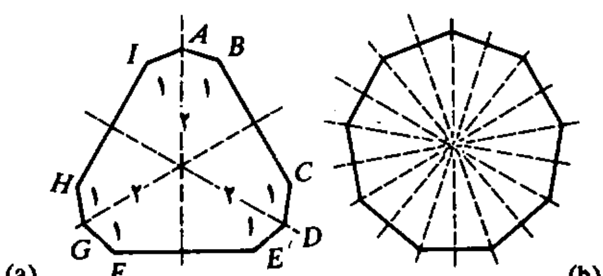
پانزده ضلعی نامنتظم با ۵ محور تقارن را می‌توان از یک پنج ضلعی منتظم به‌دست آورد، به همان طریقی که شکل ۷ الف



شکل ۶. $n = ۸$

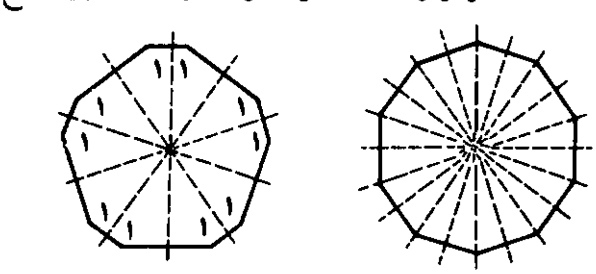
از مثلثهای متساوی الاضلاعی ساخته شده است که با ثابت نگاه داشتن «بیشتر» هر ضلع، هر رأس مثلث مزبور، «اندکی» به مرکز نزدیک آورده شده است. (گرچه برای تطبیق کردن با رئوس انتقال یافته، شکسته شده‌اند). بحثی مشابه با حالت $n = ۹$، نشان می‌دهد که f (۱۵) = ۵.

برای نشان دادن این‌که f (۱۱) = ۱ فرض می‌کنیم که محور تقارن دومی از رأس دیگری جز A گذشته باشد. رأس I رابرای



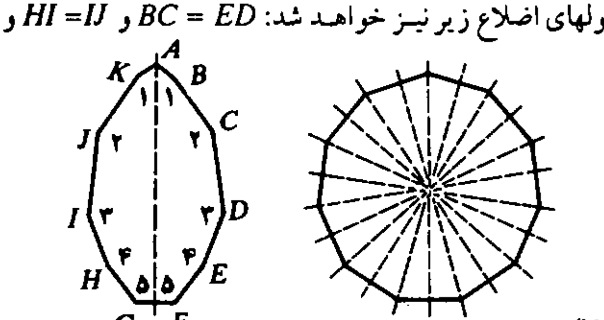
شکل ۷. $n = ۹$

توضیح این موضوع منظور می‌داریم. مباحثی مشابه با این برای انتخابهای دیگر برقرار است. این محور تقارن جدید باید ضلع



شکل ۸. $n = ۱۰$

CD را در زوایای قائمه نصف کند و وجود آن مستلزم برابری طولهای اضلاع زیر نیز خواهد شد: $BC = ED$ و $HI = IJ$ و



شکل ۹. $n = ۱۱$

$JK = HG$ و $KA = GF$ و $AB = FE$. تساویهای فوق بر حسب علائم واقع بر آنها به ترتیب به‌صورت زیر معنا شده‌اند:

III = IIII

II = IIIII

I = GF

I = IIIII

II = IIII

و بنابراین همهٔ اضلاع هم‌طول هستند. خط تقارن جدید بر برابری اندازهٔ زوایای زیر نیز دلالت خواهد کرد: (۳ = ۲ یا) C=D، (۱=۴ یا) B=E، (۱=۵ یا) K=G، (A=۵ یا) A=F، (۴ = ۲ یا) J = H. نگاهی به فهرست فوق نشان می‌دهد که چندضلعی مزبور متساوی الزوایا نیز هست، پس منتظم است بنابراین ۱ = f(۱۱).

حالت کلی

بازبینی جدول ۱ با درنظر داشتن مباحث مذکور می‌تواند تعمیم زیر را مطرح کند:

$f(n)$ = بزرگترین مقسوم علیه n (بجز خودش)

اثبات اظهار صحیح فوق با استفاده از مسیر استدلالات داده شده دربارهٔ ۱۱ و ۹ = n تا اندازه‌ای مشکل است. اثبات حالت کلی آن فراتر از بُرد این مقاله است، اما درصورت تقاضا از طریق نویسنده قابل دستیابی است. پس اجازه دهید در اینجا چند تکلیف کلاسی را مطرح کنیم، زیرا بحثی از این نوع می‌تواند زمینه‌های مساعدی را برای تحقیقات دانش آموزان دربر داشته باشد.

تکالیف

● برای شروع، آموزگاران می‌توانند اشکال ۹ - ۱ را در ابعاد بزرگ تهیه کرده، در اختیار دانش آموزان قرار دهند، تا دانش آموز بتواند با تا کردن آنها، محورهای تقارنشان را نشان دهد. پرسشهایی دربارهٔ تقارب محورهای تقارن و زوایای بین محورهای تقارن مناسب این مقطع است.

● فعالیت در سطحی بالاتر می‌تواند شامل فراخواندن دانش آموزان به یافتن و ساختن تعدادی چند ضلعی باشد، چند ضلعیهایی که تعداد محورهای تقارنشان را خود بچه‌ها تعیین کنند. برای مثال آیا می‌توان یک شانزده ضلعی با دو محور تقارن ساخت؟ با سه تا چطور؟ و با چهارتا؟ بهترین نتایج حاصل از اعضای گروه یا کلاس را می‌توان در جدولی مثل جدول ۱ ثبت کرد.

● کار را در مورد مقادیر بزرگتر n به مسابقه بکشانید. تکلیف دربارهٔ مقادیر بزرگتر n این است که به کمک نقاله چند ضلعی نامنتظمی با بیست و یک ضلع رسم کنیم که دقیقاً دارای ۷ محور تقارن باشد.

امید می‌رود که تحقیقات در این زمینه، هندسه را برای دانش آموزان، نیز معلمین دلپذیرتر نماید.

مراجع :

Grossman, Israel, and Wilhelm Magnus. *Groups and their Graphs.*
Washington, D. C. Mathematical Association of America , 1965.

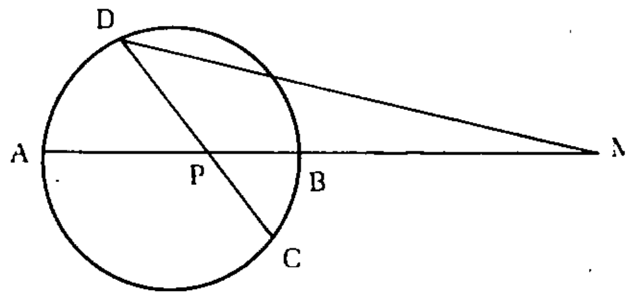
Shilgalis , Thomas W ."A Theorem on Lines of Symmetry . " Mathematics Teacher 65 (January 1972) : 69 - 72

مسائل برای دانش‌آموزان

● طرح از دکتر احمد شرف‌الدین

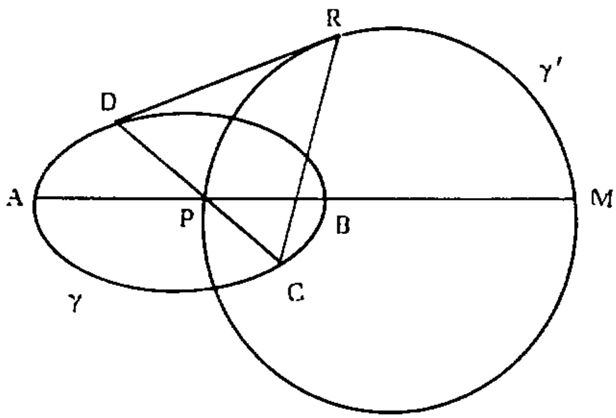
۱. مسألهٔ هندسه (تعمیم قوت نقطه)

در سطرهای زیر قضیهٔ قوت نقطه‌را تعمیم می‌دهیم. برای این منظور ابتدا قضیهٔ‌قوت نقطه‌را به صورت زیردرمی آوریم. درصفحهٔ π ، دایرهٔ γ وقطر AB از آن را درنظر گرفته و نقطهٔ M را برخط AB اختیار می‌کنیم. مزدوج توافقی نقطهٔ M را نسبت‌به دونقطهٔ A و B نقطهٔ P می‌نامیم. از نقطهٔ P خط قاطع دلخواهی رسم‌کرده ونقاط تلاقی آن رابا دایرهٔ γ با C و D نشان می‌دهیم. هنگامی‌که امتدادخط قاطع‌تغییر کند حاصل‌ضرب MC . MD ثابت می‌ماند.



تعمیم قضیه قوت نقطه نسبت به دایره

درصفحهٔ π ، دایرهٔ γ وقطر AB از آن را درنظر گرفته ونقطهٔ M را برخط AB اختیار می‌کنیم. مزدوج توافقی نقطهٔ M را نسبت به دونقطهٔ A و B ، نقطهٔ P می‌نامیم. از نقطهٔ P خط‌قاطع دلخواهی رسم‌کرده ونقاط تلاقی ان‌را با دایرهٔ γ با C و D نشان می‌دهیم. درصفحهٔ π' عمودبرصفحه π ، دایرهٔ γ' را به قطر MP رسم می‌کنیم و نقطهٔ R را برمحیط آن اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که هنگامی‌که امتداد خط قاطع مار بـر نقطهٔ P تغییر کند؛ حاصل ضرب RC . RD ثـابت می‌ماند.



برهان : درستی‌حکم برای‌دونقطهٔ M و P از دایرهٔ γ' مسلم است. درستی حکم‌را برای‌هرنقطهٔ R از شکل

$$\gamma' - \{P\ ,\ M\}$$

ثابت می‌کنیم. برای این منظور، کرهٔ S راکه بردایرهٔ γ ونقطهٔ R می گذرد درنظر می گیریم. خط RP کرهٔ S را در نقطه‌ای که آن را κ می‌نامیم قطع می‌کند. چون‌خط RP نیمساز زاویه ARB است پس‌نقطهٔ κ محل تلاقی‌کرهٔ S بـا محور دایرهٔ γ

می‌باشد. صفحهٔ κ'' کــه در نقطهٔ κ باکرهٔ S مماس شود موازی صفحهٔ γ است. پس صفحهٔ RCD ، صفحهٔ مماس κ'' را در خط $C'D'$ که موازی CD است قطع می‌کند. مقطع صفحهٔ RCD را با کرهٔ S ، دایــرهٔ γ'' می‌نــامیم . چون خط $C'D'$ مماس بردایرهٔ γ'' است و موازی خط CD است نتیجه می‌شود کــه خط RP نیمساز زاویه CRD است.

بنا بر قضیهٔ نیمساز می‌توان نوشت:

$$(1)\quad RC\cdot RD=RP\,.\,R\kappa$$

از ایــن رابطه نتیجه می‌شود که وقتی خط CD حول نقطهٔ P می‌چرخد حاصل‌ضرب RC.RD ثابت‌می‌ماند. به‌آسانی نتیجه می‌شود که :

$$(2)\quad RC\cdot RD=RA\cdot RB$$

نتیجه: (تعمیم قضیهٔ ارتفاع مثلث قائم الزاویه)

اگر در صفحهٔ π ، از نقطهٔ P عمودی بر خط AB رسم کنیم و نقاط تلاقی آن را با دایرهٔ γ ، نقاط E و E' بنامیم ، چنین خواهیم داشت:

$$(3)\quad \overline{RE}^2=\overline{RE'}^2=RA\,.\,RB$$

رابطهٔ (۳) از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود.

اگرنقطه R ، روی دایــره γ' حرکت کند و به نقطهٔ P بی‌نهایت نزدیک‌شود طولهای‌پاره‌خطهای RE ، RA ، وRB به ترتیب به سوی طولهای‌پاره خطهای PE ، PA ، وPB میل خواهندکرد و رابطهٔ (۳) به‌صورت رابطه زیردر می‌آید:

$$(4)\quad \overline{PE}^2=PA\,.\,PB$$

رابطهٔ (۴) همان‌حکم مربع‌ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه است. لذا رابطهٔ (۳) تعمیم قضیهٔ مربع‌ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه است.

۲. مسألهٔ مثلثات

ثابت‌کنید اگر A ، B ، و C زاویه‌های یك مثلث‌باشند رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(1)\quad -\left(tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}\right)^2\sin A+\left(tg^2\frac{B}{2}-tg^2\frac{C}{2}\right)\sin B+\left(tg^2\frac{C}{2}-tg^2\frac{B}{2}\right)\sin C=0$$

حل : مقدار عبارت سمت‌چپ تساوی بالا ، هنگامی‌که B=C باشد صفراست. اگر $B\neq C$ باشد درستی رابطهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

$$(2)\quad -\left(tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}\right)\sin A+\left(tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)(\sin B-\sin C)=0$$

چون $B\neq C$ فرض شده‌است پس‌رابطهٔ (۲) بارابطهٔ‌زیرمعادل است :

$$(3)\quad \frac{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}}{tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}}=\frac{\sin A}{\sin B-\sin C}$$

برای اثبات‌درستی تساوی (۳) به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$\frac{tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}}{tg\frac{B}{2}-tg\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B-C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin A}{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

حال کافی‌است ثابت کنیم که :

$$2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}=\sin B-\sin C$$

و این به طریق زیر انجام می گیرد:

$$2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}=$$

$$2\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\times$$

$$\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=$$

$$\left(\sin B\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\sin C-\cos^2\frac{B}{2}\sin C+\sin B\sin^2\frac{C}{2}\right)=\sin B-\sin C$$

۴. مسألهٔ جبر

درصفحهٔ مختصات قائم دکارتی xoy ، دو نقطهٔ

$A'(-a\,,0)$ و $A(a\,,0)$

را درنظر می گیریم ($a\neq 0$). مطلوب‌است مکان‌هندسی نقاطی که مختصات آنها در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$(1)\quad \frac{1}{(x-a)^2+y^2}+\frac{1}{(x+a)^2+y^2}=\frac{1}{y^2}$$

از نقطهٔ A' خط d را غیر واقع برخط $A'A$ رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن را بـا مکان هندسی موردنظر با C و D نشان می‌دهیم. نقطهٔ تلاقی خط d را با خط به معادلهٔ $x=a$ ، نقطهٔ B می‌نامیم. ثابت کنید چهار نقطهٔ A' ، B ، C ، و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند .

حل : دو نقطه A و A' متعلق به مکان‌هندسی مطلوب نیستند، زیرا به ازای $x=\pm a$ ، رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(2)\quad \frac{1}{4a^2+y^2}=0$$

رابطه (۲) ، به ازای $y=0$ برقرار نیست.

مکان‌هندسی نقاطی که مختصات آنها در معادلهٔ (۱) صدق می کنند عبارت‌است از مکان‌هندسی نقاطی که مختصات آنها در معادلهٔ زیر صدق می کنند بجز دو نقطهٔ

$A'(-a\,,0)$ و $A(a\,,0)$

$$y^2[(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2]=$$
$$[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]$$

پس از اختصار حاصل می‌شود:

$$y^4-(x-a)^2(x+a)^2=0$$

و یا

$$(3)\quad y^2=\pm(x^2-a^2)$$

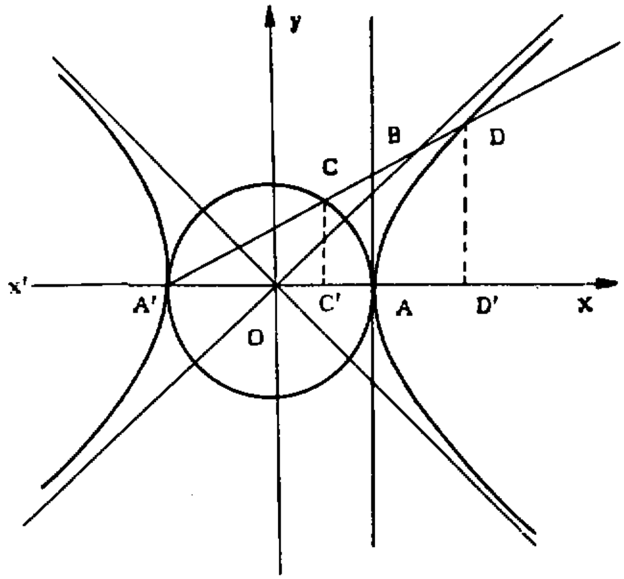
مکان‌هندسی نقاطی که مختصات آنها درمعادله (۳) صدق‌می‌کنند عبارت است از اجتماع دایره C به معادلهٔ

$$y^2=-(x^2-a^2)$$

و هذلولی متساوی الساقین H بـه معادلـه $y^2=x^2-a^2$. پس مکان هندسی نقاطی که مختصات آنها در معادله (۱) صدق می کنند عبارت است از شکل

$$T=C\cup H-\{A'\,,A\}$$

اکنون ثابت می کنیم که چهار نقطهٔ A' ، B ، C ، و D تشکیل تقسیم‌توافقی می‌دهند. تصاویر نقاط C و D را بـرخط $x'x$ به ترتیب با C' و D' نشان می‌دهیم . برای آن‌که ثابت کنیم $(A'BCD)=-1$ کافی است ثابت کنیم :



$$(A'AC'D') = -1$$

و برای این منظور کافی است درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنیم:

$$(۴)\quad \overline{OA}^2 = \overline{OC'} \cdot \overline{OD'}$$

معادله‌خط $A'D$ باضریب زاویه m به صورت زیر است:

$$y = m(x+a)$$

مختصات نقاط A' ، C ، و D عبارت‌اند از جوابهای دستگاه معادلات زیر :

$$\begin{cases} y^4 = (x^2 - a^2)^2 \\ y = m(x+a) \end{cases}$$

طولهای نقاط A'، C ، و D (و یا طولهای نقاط A' ، C'، و D') عبارت‌اند از ریشه‌های معادله زیر

$$(x+a)^2[(m^4-1)x^2+2a(m^2+1)x+a^2(m^4-1)] = 0$$

جواب مضاعف $x = -a$ طول نقطهٔ A' است. طولهای نقاط C' و D' جوابهای معادلهٔ زیر هستند

$$(m^4-1)x^2+2a(m^2+1)x+a^2(m^4-1) = 0$$

حاصل‌ضرب دوجواب معادلهٔ اخیرالذکر عبارت‌اند از:

$$(۵)\quad x_1x_2 = a^2$$

از رابطهٔ (۵) ، رابطه (۴) حاصل می‌شود.

ادب و ریاضی

... یک روز داشتیم با هایزنبرگ قدم می‌زدیم که صحبتهایمان به مفهوم فضا کشیده شد. من که همان روزها تازه کتاب «فضا، زمان، ماده» (ویل) را خوانده بودم بادی به غبغب انداختم و کاملاً تحت تأثیر این کتاب با تبختر گفتم: «فضا میدان عملکردهای خطی است.» هایزنبرگ با خونسردی گفت: «چرند می‌گویی: فضا آبی است و پرندگان در آن پرواز می‌کنند.»

فلیکس بلوخ

مجلهٔ فیزیک ـ بهار ۱۳۷۱

* * *

ـ رمز پیروزی نهایی و مقبولیت عام یک نظریهٔ علمی جدید، «معمولاً آن نیست که مخالفان بالاخره متقاعد می‌شوند که دست از لجاجت بردارند و چشم به‌روی واقعیات بگشایند. بلکه این است که مخالفان سرانجام می‌میرند و نسل جدیدی ظهور می‌کند که از ابتدا با آن واقعیت اُخت شده است.

ماکس پلانک

مجلهٔ فیزیک ـ بهار ۱۳۷۱

تابع معکوس تابعهای مثلثاتی (Arcها) (قسمت اول)

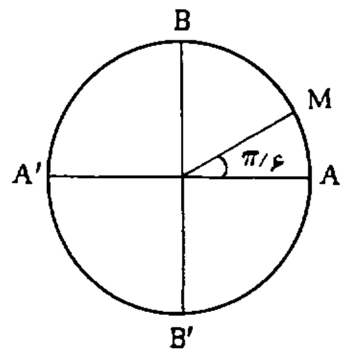
● علی حسن‌زاده ماکویی

(مورد استفاده دانش‌آموزان دوم ـ سوم و چهارم)

۱. **کمان مثلثاتی**: هریك ازکمانهای ،

$$K \in Z \ , \ \omega = ۲K\pi + \frac{\pi}{۶}$$

درازای مقادیرمختلف (K) اندازهٔ معینی دارند. برای مشخص کردن‌کمان ω در دایرهٔ مثلثاتی اگرنقطهٔ A انتهای سمت‌راست



قطرافقی دایـره را مبدأ اختیارکنیم ، به آسانی می‌توان نتیجه گرفت‌کـه انتهای همهٔ‌کمانهای مذکور نقطهٔ M خواهد بود . موضع‌نقطهٔ M با مسیرحرکت ومقادیرمختلف K هیچ رابطه‌ای ندارد. یعنی اگرمتحرکی بخواهد ازنقطهٔ A شروع به‌حرکت کرده، پس از طی‌کمان ω به‌نقطهٔ M برسد ، مسیر حرکت او مثبت یـا منفی (عکس حرکت عقربه‌های ساعت یا موافق آن) باشد. پس از طی K دور دایره بایـد کمان $\frac{\pi}{۶}$ را طی کند . همچنین می‌دانیم‌که نسبتهای مثلثاتی همه کمانهای ω برابر با نسبتهای کمان $\frac{\pi}{۶}$ است . یعنی اندازه‌آنها هیچ‌رابطه‌ای با عدد K ندارد .

به این ترتیب درتعیین نسبتهای مثلثاتی‌کمانهای ، $K \in Z$ و $\omega = ۲K\pi + \alpha$ می‌توان کمان α را در نظرگرفت . α بـه کمان اولیهٔ‌کمانهای ω موسوم است. واضح است‌که اگر φ از نظر اندازه موردبررسی قرار گیرد مجموعهٔ کمانهای ω متشکل از $(K+۱)$ کمان‌است. به عکس وقتی صحبت ازکمان‌مثلثاتی ω باکمان اولیهٔ ، $۰ < |\alpha| < ۲\pi$ می‌رود، بایدکمانهای :

$$\omega = ۲K\pi + \alpha \ , \ (K \in Z)$$

را درنظر گرفت .

۲. **کمان اصلی**: باتوجه‌به مطالب‌فوق‌کمانهای بی‌شماری است‌که در رابطهٔ :

$$\sin(x) = m \quad و \quad |m| \leqslant ۱$$

صدق می‌کند. بنا به‌قرارداد ازبین‌کمانهای مزبور،کمانی مانند α با شرط: $\sin\alpha = m$ و $\frac{-\pi}{۲} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{۲}$ بـه‌کمان اصلی ، کمانهای x موسوم است.

به همین‌ترتیب اگر β کمان‌اصلی،کمانهای y دررابطهٔ، $|n|\leqslant ۱$ و $\cos(y)=n$ و γ کمـان اصلی ،کمانهای z در رابطـهٔ ، $t\in IR$ و $tg(z)=t$ و λ کمان‌اصلی‌کمانهای u در رابطهٔ، $q\in R$ و $cotg(u)=q$ و φ کمان اصلی ، کمانهای v در رابطهٔ، $|s|\geqslant ۱$ و $\sec(v)=s$ (سکانت) و θ کمان‌اصلی، کمانهای w دررابطهٔ، $|r|\geqslant ۱$ و $\csc(w)=r$ (کسکانت) فرض شوند ، بنابه قرارداد حدودکمانهای اصلی فوق‌الذکر به ترتیب عبارتنداز:

$$s\geqslant ۱ \Rightarrow ۰\leqslant\varphi<\frac{\pi}{۲} \text{ و } ۰<\lambda<\pi \text{ و } \frac{-\pi}{۲}<\gamma<\frac{\pi}{۲}$$

$$۰\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{۲} ،$$

$$r\leqslant -۱ \Rightarrow \frac{-\pi}{۲}\leqslant\theta<۰ \text{ و}$$

$$r\geqslant ۱ \Rightarrow ۰<\theta\leqslant\frac{\pi}{۲} \text{ و}$$

$$s\leqslant -۱ \Rightarrow \frac{\pi}{۲}<\varphi\leqslant\pi$$

درکتابهای درسی ایران کمانهای اصلی ، α و β و γ و λ و φ و θ را به ترتیب:

$\gamma=Arctg(t)$ و $\beta=Arccos(n)$ و

$\alpha=Arcsin(m)$ و $\theta=Arc\csc(r)$ و

$\varphi=Arc\sec(s)$ و $\lambda=Arc\,cotg(q)$

و همچنین کمانهای، x و yو z و u و v و w را به ترتیب با نمادهای:

$z=arctg(t)$ و $y=arccos(n)$ و

$x=arcsin(m)$ و $w=arc\csc(r)$ و

$v=arc\sec(s)$ و $u=arc\,cotg(q)$

نشان داده شده‌اند. (Arc به معنی کمان است.)

با توجه‌به مطالب‌فوق به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت:

الف) کمانهای ، $Arc\,sin(m)$ و $Arc\,tg(t)$ و $Arc\csc(r)$ حاده‌هستند. و به‌ازای مقادیر مثبت اعداد، m و t و r کمانهاحادهٔ مثبت، و به ازای مقادیرمنفی اعداد مزبور، کمانها حادهٔ منفی هستند.

ب) کمانهـای ، $Arccos(n)$ و $Arccotg(q)$ و $Arc\sec(s)$ همواره مثبت‌هستند. به‌ازای مقادیرمثبت اعداد ، n و q و s کمانهای حادهٔ مثبت، و به ازای مقادیر منفی اعداد مزبور کمانها منفرجهٔ مثبت می‌باشند.

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$Arcsin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{\pi}{۳} \qquad (۱)$$

$$arc\,sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=۲K\pi+\frac{\pi}{۳} \text{ یا } +\frac{۲\pi}{۳}$$

$$Arcsin\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۶} \qquad (۲)$$

$$arc\,sin\left(\frac{-۱}{۲}\right)=۲K\pi-\frac{\pi}{۶} \text{ یا } +\frac{۷\pi}{۶}$$

$$Arccos\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\pi}{۳} \qquad (۳)$$

$$arc\,cos\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲K\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

$$Arccos\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\frac{۳\pi}{۴} \qquad (۴)$$

$$arc\,cos\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۲K\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$$

$$Arc\,tg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)=\frac{\pi}{۶} \qquad (۵)$$

$$arc\,tg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)=K\pi+\frac{\pi}{۶}$$

$$\mathrm{Arc}\,tg(-۱) = -\frac{\pi}{۴} \qquad (۶)$$

$$\mathrm{arc}\,tg(-۱) = K\pi - \frac{\pi}{۴}$$

$$\mathrm{Arc}\,cotg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) = \frac{\pi}{۳} \qquad (۷)$$

$$\mathrm{arc}\,cotg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right) = K\pi + \frac{\pi}{۳}$$

$$\mathrm{Arc}\,cotg(-۱) = \frac{۳\pi}{۴} \qquad (۸)$$

$$\mathrm{arc}\,cotg(-۱) = K\pi - \frac{\pi}{۴}$$

$$\mathrm{Arc}\,sec(\sqrt{۲}) = \frac{\pi}{۴} \qquad (۹)$$

$$\mathrm{arc}\,sec(\sqrt{۲}) = ۲K\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

$$\mathrm{Arc}\,sec(-\sqrt{۲}) = \frac{۳\pi}{۴} \qquad (۱۰)$$

$$\mathrm{arc}\,sec(-\sqrt{۲}) = ۲K\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$$

$$\mathrm{Arc}\,csc(۲) = \frac{\pi}{۶} \qquad (۱۱)$$

$$\mathrm{arc}\,csc(۲) = ۲K\pi + \frac{\pi}{۶} \text{ یا } \frac{۵\pi}{۶}$$

$$\mathrm{Arc}\,csc(-\sqrt{۲}) = -\frac{\pi}{۴} \qquad (۱۲)$$

$$\mathrm{arc}\,csc(-\sqrt{۲}) = ۲K\pi - \frac{\pi}{۴} \text{ یا } + \frac{۵\pi}{۴}$$

$$\alpha = \mathrm{Arc}\,tg(cos(۰)) \Longrightarrow \qquad (۱۳)$$

$$\alpha = \mathrm{Arc}\,tg(۱) = \frac{\pi}{۴}$$

$$x = \mathrm{arc}\,cotg\left(cos\left(\frac{\pi}{۲}\right)\right) \Longrightarrow \qquad (۱۴)$$

$$x = K\pi + \mathrm{Arc}\,cotg(۰) = K\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\beta = \mathrm{Arc}\,tg\left(sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)\right) \Longrightarrow \qquad (۱۵)$$

$$\beta = \mathrm{Arc}\,tg(-۱) = -\frac{\pi}{۴}$$

$$y = \mathrm{arc}\,tg(sin(۰)) \Longrightarrow \qquad (۱۶)$$

$$y = K\pi + \mathrm{Arc}\,tg(۰) = K\pi$$

$$\gamma = \mathrm{Arc}\,sec\left(\frac{۱}{cos\left(\frac{\pi}{۳}\right)}\right) \Longrightarrow \qquad (۱۷)$$

$$\gamma = \mathrm{Arc}\,sec\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\right) = \frac{\pi}{۶}$$

$$z = \mathrm{arc}\,sec\left(sin\left(\frac{۷\pi}{۲}\right)\right) \Longrightarrow \qquad (۱۸)$$

$$z = ۲K\pi + \mathrm{Arc}\,sec(-۱) \Longrightarrow z = ۲K\pi + \pi$$

$$A = sin\,\mathrm{Arc}\,cotg\left(sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)\right) \Longrightarrow \qquad (۱۹)$$

$$A = sin\,\mathrm{Arc}\,cotg(-۱) \Longrightarrow$$

$$A = sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$B = cos\,\mathrm{Arc}\,tg(cos(۲K\pi)) \Longrightarrow \qquad (۲۰)$$

$$B = cos\,\mathrm{Arc}\,tg(۱) \Longrightarrow$$

$$B = cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

نقدی بر کتاب

مجموعهٔ پرسشها و پاسخهای تشریحی ریاضی آزمونهای سراسری سازمان سنجش

● سید حسین سید موسوی

انبوه داوطلبان ورود به دانشگاهها و از سوی دیگر اضطراب آنها، گروههای مختلفی را وسوسه کرده که از این خوان گسترده، بهره‌ای ببرند. از جمله، کسانی تستهای کنکور سالهای پیش‌را با جواب در جزواتی تحت‌عناوین ۲۰سال کنکور ونظایر آن با کیفیتی بسیار نازل و با چاپی از نوع پلی کپی در اختیار داوطلبان می‌گذاشتند که اغلب نه‌تنها پاسخ سؤالات، بلکه‌خود سؤالات نیز اشتباه بود، که‌جز گمراهی‌خوانندگان چیزی نصیب آنها نمی کرد.

ظاهراً مسئولان‌جدید سازمان سنجش‌نیز «به‌انگیزهٔ مقابله با بازار آشفته سوءاستفاده‌ازداوطلبان‌شرکت‌در آزمون‌سراسری واندیشهٔ یاری‌دادن به داوطلبان‌به ویژه‌داوطلبان‌مناطق محروم*»، از این وسوسه بدور نمانده و سرانجام با عقب‌نشینی از شعار خودکه «تست وسیله سنجش‌است نه‌آموزش» به‌چاپ کتابهای تست با حل‌تشریحی آنها اقدام‌کردند. البته نا گفته‌نماندکه‌اگر قرار باشدکه مجاز باشیم‌چنین کتابهایی‌را چاپ کنیم هیچ‌مرجعی ذی‌صلاح‌تر از سازمان سنجش‌نیست زیرا اولاً از نظر قانونی تستها متعلق‌به سازمان سنجش‌است، دوم‌اینکه‌خودطراحان‌تستها علی‌القاعده اهداف‌طرح تست‌را می‌دانند و لذا بهتر می‌توانند تستهارا پاسخ‌دهند. بادر نظر گرفتن مطالب‌فوق انتظارمی‌رفت که شاهدانتشار مجموعه‌ای‌وزین ودرخورشأن‌سازمان‌سنجش‌باشیم، اما حداقل در مورد مجموعه ریاضیات اینطور نیست و به نظر می‌رسدکه تعجیل درانتشار آن باعث‌بروز مشکلاتی شده‌است که ذیلاً به آن اشاره می کنیم.

۱ــ تعدادی از تستهای‌کنکورکه غلط طرح‌شده بود، در این‌کتاب بدون اینکه اصل نادرست تست‌آورده شود، اصلاح شده‌آن در متن‌کتاب آورده‌شده است‌که به‌نظر می‌رسد با اصل امانتداری منافات دارد زیرا این‌کتاب به هرحال‌یك سنداست و ممکن‌است باعث گمراهی‌شود. نمونه‌هایی‌از این نوع‌تستها:

الف) تست ۱۲ از آزمون سراسری گروه‌ریاضی و فنی سال ۶۳ ــ ۶۲ است‌که گزینهٔ (۳) را به $2x$ تغییر داده‌اند تا تست فقط یك‌جواب داشته باشد.

ب) تست ۱۰ از آزمون سراسری گروه ریاضی و فنی سال ۶۸ ــ ۶۷ است‌که تابع‌داده‌شده دراصل سؤال به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{x^{2}-16}, & |x|\leqslant 4\\ x-4, & |x|>4\end{cases}$$

بودکه به صورت زیر اصلاح شده است.

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{16-x^{2}}, & |x|\leqslant 4\\ x-4, & |x|>4\end{cases}$$

۲) از سوی دیگر به تعداد دیگری از تستهای‌غلط توجه نکرده وبه‌آنها پاسخ داده‌اندکه نمونه‌هایی از آنها عبارتنداز:

الف) تست ۲۵ از آزمون سراسری گروه ریاضی وفنی سال ۷۰ ــ ۶۹ (مرحلهٔ اول) دارای سه گزینهٔ صحیح است‌که

* به نقل از مقدمه کتاب مزبور

در این کتاب فقط یکی از آنها صحیح فرض‌شده است.

ب) اصل تست ۱۹ از آزمون سراسری کنکور گروه ریاضی وفنی سال ۷۰ ـ ۶۹ (مرحلهٔ دوم) غلط و مبهم‌است و پاسخ داده‌شده نیز کاملاً اشتباه است.

پ) تست ۲۲ از آزمون سراسری گروه ریاضی و فنی سال ۷۱ ـ ۷۰ (مرحلهٔ دوم) اصل‌تست غلط است وپاسخ داده شده درکتاب نیز اشتباه است.

۳ـ دربرخی‌تستها استدلال ارائه‌شده‌ست ویاغلطاست که نمونه‌هایی از آن به صورت زیراست:

الف) درپاسخ‌تست ۳۲ ازآزمون سراسری گروه‌ریاضی و فنی سال ۶۶ ـ ۶۵ به قضیه‌ای استنادشده‌که شرایط قضیه‌در مورد مسألهٔ مورد بحث‌برقرار نیست. درکتاب مزبور عبارات زیر آورده شده است:

«اگر تابع $f(x)$ در فاصله (a,b) پیوسته باشد و $a<c<b$، می‌توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

پس دراین پرسش انتگرال مفروض‌را چنین می‌نویسیم:

$$\int_0^1 [x]\cos x\,dx+\int_1^{\frac{\pi}{2}} [x]\cos x\,dx$$»*

در صورتی‌که تابع $[x]\cos x$ در فاصله $\left(1\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ ناپیوسته است، زیرا

$$f(x)=[x]\cos x=\begin{cases}0 & , \quad 0\leqslant x<1\\ \cos x & , \quad 1<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

و در $x=0$ داریم:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\cos 1$$

* به نقل از ص ۲۷۹ کتاب مزبور

بنابراین قضیه‌فوق دراین‌جا به کار نمی‌آید، قضیهٔ زیر درمورد این تست به کار می‌آید.

قضیه: اگرتابع f درفاصلهٔ (a,b) جزدرتعدادی‌نامتناهی نقطه پیوسته‌باشد و $a<c<b$ دراین صورت

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

ب) درپاسخ‌تست ۱۶ از آزمون سراسری گروه‌ریاضی وفنی سال ۶۳ـ۶۲ برای محاسبهٔ مشتق $f(x)=x^2[x]$ روش دومی ارائه‌شده است‌که اشکال‌دارد. ما نخست عین‌پاسخ مورد نظررا می‌آوریم:

«**روش دوم** . با استفاده از محاسبهٔ مشتق، تابع مفروض درحوالی $x=0$ پیوسته است و به صورت‌تابع چندضابطه‌ای نوشته شده، داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2(-1) & , \quad -1\leqslant x<0\\ x^2(0) & , \quad 0\leqslant x<1\end{cases}$$

و مشتق‌آن چنین است:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & , \quad -1\leqslant x<0\\ 0 & , \quad 0\leqslant x<1\end{cases}$$

و لذا؛ در هردوصورت $f'(0)=0$. پس f در نقطهٔ $x=0$ دارای‌مشتق برابرصفر است.»*

روش‌صحیح‌پاسخ‌به این‌تست به صورت‌زیر است. ابتدا قضیهٔ زیررا یادآوری می‌کنیم.

قضیه : الف) اگر f روی فاصلهٔ $[a\ ,\ x_0]$ پیوسته و روی فاصله $(a\ ,\ x_0)$ مشتق پذیر بوده و

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$$

وجود داشته باشد ، آنگاه

* به نقل‌از ص ۳۱ کتاب مزبور

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

ب) اگـر f روی فاصلهٔ $[x_0 , b)$ پیوسته و در فاصلهٔ (x_0 , b) مشتق‌پذیر بوده و $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ موجود باشد آنگاه

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

در مورد

$$f(x) = \begin{cases} x^2(-1) & , \ -1 \leqslant x < 0 \\ x^2(0) & , \ 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

مشتق تابع f به‌جز در $x = 0$ به صورت زیر است :

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & , \ -1 \leqslant x < 0 \\ 0 & , \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

چون f روی فاصله $[0 , -1)$ پیوسته و f' روی $(0 , -1)$ موجود است و

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2x) = 0$$

بنابراین $f'(0) = 0$ و به‌طریق مشابه $f'_{+}(0) = 0$. در نتیجه

$$f'(0) = 0$$

تفریح اندیشهٔ ۲



سیاحی درکشوری است که درآن هرکسی یا در دشت یا درکوه زندگی می‌کند. آنها به یک زبان صحبت می‌کنند، اما مقیمان دشت همواره راست می‌گویند، درحالی که کوه‌نشینان همیشه دروغ‌زنند.

سیاح اندکی از زبان ایشان را می‌داند. می‌داند که «گرب» و «منل» به معنی آری و نه است اما نمی‌داند که کدام، کدام است. از هریک از سه تن از اهالی مملکت دو سؤال می‌پرسد:

ـ آیا هردو فرد دیگر دشت نشین‌اند؟

ـ آیا هردو فرد دیگر کوه نشین‌اند؟

همهٔ آنها، جز یکی که به‌سؤال دوم پاسخ «منل» می‌دهد، به هردوسؤال پاسخ «گرب» می‌دهند.

«گرب» به چه معنی است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

تعیین دامنه[1] و برد[2] توابع[3] (قسمت اول)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

(مورد استفاده دانش‌آموزان دوم ـ سوم و چهارم)

تعریف: فرض‌کنیم f تابعی از A در B باشد. مجموعهٔ مؤلفه‌های اول اعضای f را دامنهٔ تابع f و مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم اعضای f را برد تابع f گوییم، دامنهٔ یك تابع مانند f را به D_f و برد آن را به R_f نشان می‌دهیم. درنتیجه خواهیم داشت:

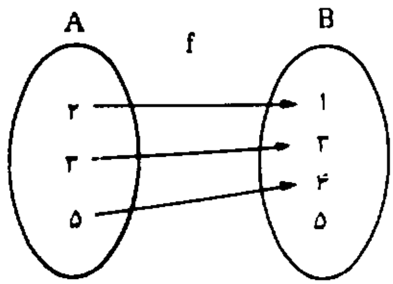
$$D_f \subset A \ ، \ D_f = \{x|(x,y)\in f\}$$

$$R_f \subset B \ ، \ R_f = \{y|(x,y)\in f\}$$

لازم است توضیح دهیم که مجموعهٔ B «مجموعهٔ انجام» یا «هم دامنه[4]» تابع f و مجموعهٔ A «مجموعهٔ آغاز» f نامیده می‌شوند اگر داشته باشیم:

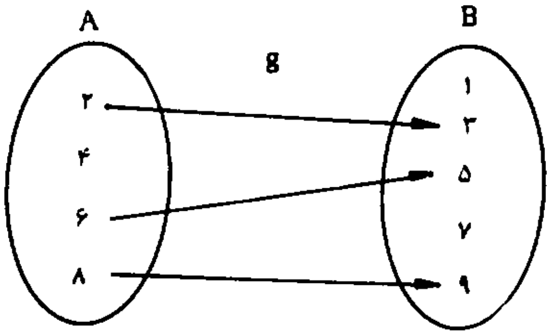
$$D_f \subset A \quad , \quad R_f \subset B$$

مثال ۱: تابع f روی مجموعهٔ $A=\{۲ , ۳ , ۵\}$ در مجموعهٔ $B=\{۱,۳,۴,۵\}$ با نمودار زیر تعریف شده است، دامنه و برد آن‌را تعیین کنید.



حل: دراین‌جا A و B به ترتیب دامنه و هم دامنهٔ f می‌باشند، زیرا از هرعضو A یك پیکان خارج شده‌است، در صورتی‌که به هرعضو B پیکان منتهی نشده‌است. بدیهی‌است برد تابع f مجموعهٔ دوعضوی {۳,۴} می‌باشد.

مثال ۲: تابع g از مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ در مجموعهٔ $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ مطابق نمودار زیر تعریف شده است، دامنه و برد آن را مشخص کنید.



حل: همان‌طورکه ازنمودار مشخص است داریم:

$$D_g \subset A \quad , \quad R_g \subset B$$

بنابراین A مجموعهٔ آغاز g و B مجموعهٔ انجام g می‌باشند؛

---

۱) Domain ۲) Range

۳) Function ۴) Co - domain

که با توجه به پیکانهای خارج‌شده از مؤلفه‌های مجموعهٔ A و واردشده به‌مؤلفه‌های مجموعهٔ B دامنه و بردتابع g مجموعه‌های زیر می‌باشند.

$$D_f=\{۲,۶,۸\} \quad , \quad R_f=\{۳,۵,۹\}$$

نکتهٔ۱: برای تعیین دامنه و برد یك تابع ابتدا باید از تابع بودن آن اطمینان حاصل کنیم و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنیم. البته باید توجه‌داشت که یك‌رابطه ممکن‌است تابع نباشد و برای آن دامنه و برد مشخص کنیم. مثال زیر گویای این مطلب مهم می‌باشد.

مثال ۴ : ابتدا تعیین کنید که آیا رابطهٔ زیر یك تابع است؟ اگر تابع نیست زیر مجموعه‌هایی از آن را با سه زوج مرتب مشخص کنید که تابع باشند و دامنه و برد هریك را نیز بنویسید .

$$R=\{(\sqrt{۲}-۱,۴) ، (\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱},۵) ، (۳,۶) ، (\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}},۱) ، (۲+\sqrt{۳},۱)\}$$

حل : با توجه به رابطهٔ R می‌بینیم که مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب آن یعنی $(\sqrt{۲}-۱,۴)$ و $(\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱},۵)$ مساوی است زیرا داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}$$
$$=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}-۱$$

ودر نتیجه این دو زوج‌را می‌توان چنین نوشت:

$$(\sqrt{۲}-۱,۵) \quad , \quad (\sqrt{۲}-۱,۴)$$

واز آن‌جاکه می‌دانیم در تابع هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مؤلفه‌های اول مساوی نیست ، نتیجه می‌شود که R یك تابع نیست.

اینك زیرمجموعه‌ای‌از R را مشخص می کنیم که شرایط تابع‌را دارا باشد. برای‌این منظور کافی‌است یکی‌ازدوزوج مرتبی که دارای مؤلفه‌های‌اول مساوی بودند را حذف کنیم. زیرا با کمی‌دقت می‌توان به تساوی زوجهای مرتب $(۲+\sqrt{۳},۱)$ و $(\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}},۱)$ پی‌برد :

$$\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}$$
$$=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

دراین‌جا با توجه به مطالب‌اخیر، نتیجه می‌شود که تنها دو زیر مجموعه از R می‌توان نوشت که شرایط‌تابع موردنظررا دارا باشند :

$$f_۱=\{(\sqrt{۲}-۱,۴) ، (۳,۶) ، (۲+\sqrt{۳},۱)\}$$
$$f_۲=\{(\sqrt{۲}-۱,۵) ، (۳,۶) ، (۲+\sqrt{۳},۱)\}$$

دامنه وبرد توابع $f_۱$ و $f_۲$:

$$D_{f_۱}=\{\sqrt{۲}-۱ , ۳ , ۲+\sqrt{۳}\} ,$$
$$R_{f_۱}=\{۱ , ۴ , ۶\}$$
$$D_{f_۲}=\{\sqrt{۲}-۱ , ۳ , ۲+\sqrt{۳}\} ,$$
$$R_{f_۲}=\{۱ , ۵ , ۶\}$$

نکتهٔ ۲ : گزاره‌نماها را با تابع اشتباه‌نکنید. به عنوان مثال گزاره نمای $y=\frac{۱}{x^۲}$ یك تابع نیست بلکه ضابطهٔ[۵] یك تابع‌است. اگر برای این‌ضابطه حوزهٔ تعریف (دامنه) و حوزهٔ مقادیر (برد) درنظر گرفته‌شود، در آن صورت مشخص کنندهٔ یك تابع خواهد شد. در صورتی‌که R^+ را برای نمایش مجموعهٔ اعدادحقیقی مثبت مخالف‌صفر به کاربریم باتعریف‌دامنه وبردی برای‌آن مانند زیر می‌توان‌آن را به تابع‌تبدیل کرد:

---
۵) Rule

$$f : R^+ \to R^+$$

$$f : x \to \frac{1}{x^2}$$

بنابراین نماد f با نماد $y=f(x)$ متفاوت است، به طوری که f خودتابع و $y=f(x)$ قانون یاضابطهٔ تابع می‌باشد.

توجه: دراین مقاله تمام توابـع در $R \to R$ تعریف شده‌اند و برای نمایش فاصله‌های باز ازپرانتز استفاده می‌کنیم. مثلاً فاصلهٔ باز $]a,b[$ را با (a,b) نشان می‌دهیم (R مجموعهٔ اعداد حقیقی است).

مثال ۴ : دامنه وبرد تابع زیررا تعیین‌کنید. سپس تابع فوق‌را باچند ضابطه نشان‌دهید.

$$f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷),(۵,۹)\\(۶,۱۱),(۷,۱),(۸,۷),(۹,۸),(۱۰,۹)\\(۱۱,۱۰)\}$$

حل : درصورتی‌که دامنهٔ تابع رابه D_f و بردآن را به R_f ومجموعهٔ اعداد طبیعی‌را به N نمایش‌دهیم داریم:

$$D_f=\{۱,۲,۳,\cdots,۱۱\}=\{x|x\in N\ ,\ x\leqslant ۱۱\}$$

$$R_f=\{۱\ ,\ ۳\ ,\ ۵\ ,\ ۷\ ,\ ۸\ ,\ ۹\ ,\ ۱۰\ ,\ ۱۱\}$$

بنابراین تابع رابه شکل‌ضوابط زیر می‌توان نشان داد:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\leqslant ۶\ ,\ x\in N \\ ۱ & x=۷ \\ x-۱ & ۸\leqslant x\leqslant ۱۱\ ,\ x\in N \end{cases}$$

مثال ۵ : دامنه وبردتابع چندضابطه‌ای زیر را به دست آورید وتابع رابه شکل مجموعهٔ زوجهای مرتب‌نشان دهید و نمودار[۶] آن‌را رسم نمایید.

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

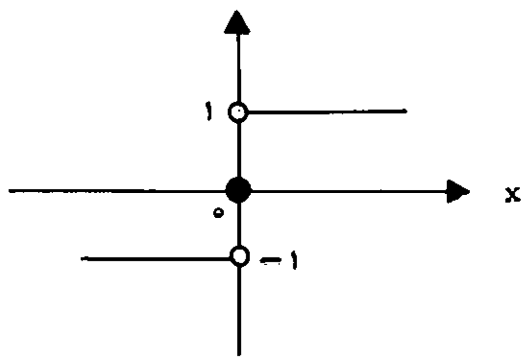
حل : دامنهٔ‌تابع باتوجه به ضوابط تابع: $D_f=R$.
برد تابع مجموعهٔ سه‌عضوی است:

$$R_f=\{-۱\ ,\ ۰\ ,\ ۱\}$$

تابع‌به شکل مجموعهٔ زوجهای مرتب:

$$f=f_۱\cup f_۲\cup f_۳=\begin{cases} f_۱=\{(x,y)\mid x\in R^+,y=۱\} \\ f_۲=\{(۰,۰)\} \\ f_۳=\{(x,y)\mid x\in R^-,y=-۱\} \end{cases}$$

نمودار تابع :



توجه: این تابع‌را تابع علامت گویند و با نماد sgnx نمایش می‌دهند:

$$f(x)=\text{sgn}x=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

در این‌جا برای آن‌که تعیین دامنه وبرد توابع آسانتر انجام‌گیرد آنها رابه ۱۰ دستهٔ اساسی تقسیم‌کرده و روشهایی برای‌تعیین دامنه وبرد هردسته ، با ذکرچند مثال‌نشان می‌دهیم.

۱ـ تعیین دامنه وبرد توابع چندجمله‌ای[۷]

تابع f را یك‌تابع چندجمله‌ای گوییم هرگاه‌بازاءهر x

---

۶) Graph

۷) Polynomial functions

حقیقی باضابطه‌ای به صورت:

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

$$(n\in N\cup\{0\})$$

تعریف شود.

اعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n را ضرایب چندجمله‌ای وعدد صحیح و نامنفی n را درصورتی‌که $a_n\neq 0$ باشد درجهٔ آن می‌نامیم. دامنهٔ این توابع اگرذکر نشود R مجموعهٔ اعدادحقیقی منظور می‌شود وسپس برد آنان را باحل‌کردن x برحسب y و برقراری‌شرط‌حقیقی‌بودن x معین می‌کنیم. بدیهی‌است yهایی که به ازای آنان مقدار x حقیقی است برد تابع را تشکیل می‌دهند. توجه‌داشته‌باشیدکه حل‌کردن x برحسب y درحالت عمومی مخصوصاً وقتی‌که $n\geqslant 5$ باشد همیشه امکان‌پذیر نیست ونیز به همین علت‌است‌که تعیین‌برد توابع چندجمله‌ای همیشه امکان‌پذیر نمی‌باشد. شکل کلی این‌توابع به صورت زیر است:

$$f: R\rightarrow B$$

$$x\rightarrow a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

مثال ۶ : دامنه وبرد تابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=-x^2+1$$

حل : بدیهی‌است دامنهٔ تابع R مجموعهٔ اعداد حقیقی است:

$$D_f=R$$

همان‌طورکه گفته شد برای تعیین‌برد توابع کافی است x را برحسب y حل کنیم و سپس y هایی را معین کنیم‌که به ازای آنان مقدار x حقیقی است :

$$y=-x^2+1 \Longrightarrow x^2=1-y$$

$$\Longrightarrow x=\pm\sqrt{1-y}$$

باتوجه‌به رابطهٔ‌اخیر وحقیقی‌بودن x خواهیم‌داشت:

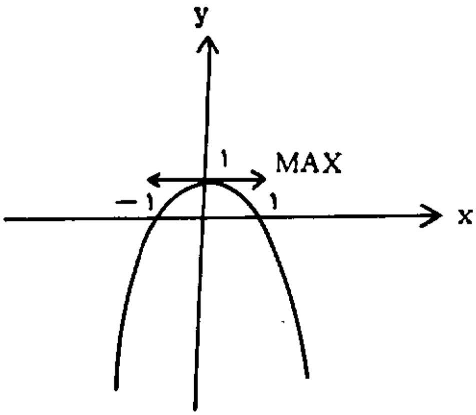
$$1-y\geqslant 0 \Longrightarrow y\leqslant 1$$

بنابراین بردتابع چنین است:

$$R_f=(-\infty\ ,\ 1]$$

باید توجه داشت‌که برد توابع‌را از روی جدول تغییرات ویا نمودارآنان نیز می‌توان معین‌کرد.

به عنوان مثال‌نمودارتابع $y=-x^2+1$ در زیررسم شده است:



همان‌طورکه مشاهده می‌شود از نمودار تابع‌نیز مشخص است‌که مؤلفهٔ‌دوم زوجهای مرتب مربوط‌به تابع‌بزرگتراز یك نمی‌توانند باشند. درنتیجه برد تابع‌رااعدادکوچکتر یا مساوی یك‌تشکیل می‌دهند.

مثال ۷ : دامنه وبردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=x^4-2x^2+4$$

حل : دامنهٔ‌تابع R مجموعهٔ اعداد حقیقی است:

$$D_f=R$$

برای‌تعیین بردتابع‌به شکل زیرعمل می‌کنیم:

$$x^4-2x^2+4-y=0$$

$$\Longrightarrow x^2=1\pm\sqrt{1-(4-y)}$$

$$x=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{y-3}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{1+\sqrt{y-3}} & (1) \\ \text{یا} & \\ x = \pm\sqrt{1-\sqrt{y-3}} & (2) \end{cases}$$

برای هریک از روابط (۱) و (۲) شرط زیر لازم است:

$$y-3 \geqslant 0 \Longrightarrow y \geqslant 3 \qquad (3)$$

برای رابطهٔ (۲) شرط زیر را نیز داریم:

$$1-\sqrt{y-3} \geqslant 0 \Longrightarrow \sqrt{y-3} \leqslant 1$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant y-3 \leqslant 1 \Longrightarrow 3 \leqslant y \leqslant 4 \qquad (4)$$

بنابراین روابط (۱) و (۲) با توجه به شرایط (۳) و (۴) چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{1+\sqrt{y-3}} & y \geqslant 3 \\ \text{یا} & \\ x = \pm\sqrt{1-\sqrt{y-3}} & 3 \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}$$

و در نتیجه برای حقیقی بودن x کافی است داشته باشیم:

$$y \geqslant 3$$

در این جا برد تابع نتیجه می‌شود:

$$R_f = [3 \ , \ +\infty)$$

۴ـ تعیین دامنه و برد توابع کسری[8] (غیراصم)

توابع کسری که غالباً صورت ومخرج آنها توابعی ازچند جمله‌ای است (ویا صورت ومخرج آنان‌را می‌توان تحویل بـه توابع چند جمله‌ای کرد) را توابع کسری گویا می‌نامیم. دامنهٔ این‌توابع R مجموعهٔ اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های مخرج (در صورت وجود) می‌باشد. باید توجه داشت کـه در حالت عمومی تعیین برد این گونه توابع نیز امکان‌پذیر نیست، مخصوصاً حالتی که درجهٔ چندجمله‌ای صورت یا مخرج ویاهر دو بزرگتر یا مساوی ۵ باشد. صورت کلی ضابطهٔ این‌نوع توابع به شکل زیر است:

$$y = f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$D_f = R - \{x | Q(x) = 0\}$$

مثال ۸ : دامنه و بردتابع زیر را تعیین کنید:

$$y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

حل : برای تعیین دامنهٔ تابع فوق ابتدا ریشه‌های مخرج کسررا به دست می‌آوریم. سپس مجموعهٔ ریشه‌های مخرج‌را از مجموعهٔ اعدادحقیقی کم می‌کنیم:

$$x^2-1=0 \Longrightarrow x=\pm 1$$

$$\Longrightarrow D_f = R - \{-1 \ , \ 1\}$$

تعیین برد تابع:

$$y(x^2-1) = x^2+1 \Longrightarrow x^2(y-1) = y+1$$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{y+1}{y-1}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}$$

برای حقیقی بودن x باید داشته‌باشیم:

$$\frac{y+1}{y-1} \geqslant 0$$

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$y+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$y-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{y+1}{y-1} \geqslant 0$		$+$		$-$		$+$	
			جواب		نامعین		

---

۸) Fractional functions

با توجه به جدول، بردتابع چنین نتیجه می‌شود:

$$R_f=(-\infty\ ,\ -1]\cup(1\ ,\ +\infty)$$

مثال ۹ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}$$

حل : تعیین دامنه :

$$x(x+1)(x^2-4)=0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \Longrightarrow x=-1 \\ x^2-4=0 \Longrightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

$$D_f=R-\{-2,-1,0,2\}$$

برای تعیین بردتابع ابتدا با توجه به دامنهٔ آن تابع را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$y=\frac{x(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x-2)}$$

با توجه به دامنهٔ تابع داریم:

$$x\neq 0\ \ ,\ \ x\neq -1\ \ ,\ \ x\neq -2$$

و در نتیجه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y=f(x)=\frac{1}{x-2}$$

در این جا باید عرض هریك از مقادیر فوق را حساب کنیم و در تعیین برد مجموعهٔ فوق را از R مجموعهٔ اعداد حقیقی کم کنیم:

$$f(0)=\frac{-1}{2}\ ,\ f(-1)=\frac{-1}{3}\ ,\ f(-2)=\frac{-1}{4}$$

اینك آخرین مرحلهٔ تعیین برد:

$$y=\frac{1}{x-2}\Longrightarrow x-2=\frac{1}{y}\Longrightarrow x=\frac{1}{y}+2$$

برای حقیقی بودن x باید داشته باشیم: $y\neq 0$

بنابراین بردتابع چنین نتیجه می‌شود:

$$R_f=R-\left\{\frac{-1}{2},\frac{-1}{3},\frac{-1}{4},0\right\}$$

* توجه داشته باشید که عرض نقاطی به طولهای $x=0$، $x=-1$ و $x=-2$ از تابع فوق مبهم ($\frac{0}{0}$) است. در این گونه موارد ابتدا تابع را به عاملهای مبهم ساده می‌کنیم وسپس مقادیر هر یك را از تابع ساده شده محاسبه کرده و در آخرین مرحلهٔ تعیین بردتابع مجموعهٔ مقادیر حاصل را از R مجموعهٔ اعداد حقیقی کم می‌کنیم.

۳ـ تعیین دامنه و برد توابع اصم یا گنگ[9]

توابعی را اصم (گنگ) گوییم که در ضابطهٔ آنها متغیر x (یا عبارتی برحسب متغیر x) در زیر رادیکال باقی بماند. به بیانی دیگر، توان x (یا عبارت برحسب x) کسری باشد. ضابطهٔ این گونه توابع در حالت عمومی به شکل زیر است:

$$y=f(x)=\sqrt[n]{p(x)}$$

اگر $p(x)$ چندجمله‌ای باشد، درصورتی که n (فرجهٔ رادیکال) فرد باشد R (مجموعهٔ اعداد حقیقی) است. و اگر فرجهٔ رادیکال عددی زوج باشد، دامنه عبارت است از: مجموعهٔ xهایی که به ازای آنها زیر رادیکال عددی نامنفی (مثبت یا صفر) باشد.

برای تعیین برد در صورت امکان x را برحسب y حل می‌کنیم وسپس مجموعهٔ yهایی که به ازای آنها برای x مقدار حقیقی به دست می‌آید برد تابع را تشکیل می‌دهند. بنابراین در حالت عمومی برد توابع گنگ (اصم) نیز همیشه امکان‌پذیر نیست.

مثال ۱۰ . دامنه و بردتابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}}$$

9) Irrational functions

حل : دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=\left\{x \mid \frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}\geqslant 0\right\}$$

$$\frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}\geqslant 0 \Rightarrow$$

$$x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

$$-x^2+2x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}$		$-$		$+$	0	$-$		$-$	

$$\Rightarrow D_f=(-1\ ,\ 0]$$

تعیین برد تابع : ازضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود: $y\geqslant 0$.
باتوجه به دامنه، تابع‌را ساده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{\frac{x(x-3)}{-(x+1)(x-3)}}$$

$$\frac{x-3\neq 0}{(x\neq 3)} \Rightarrow y=\sqrt{\frac{x}{-(x+1)}}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{x}{-(x+1)} \Rightarrow -xy^2-y^2=x$$

$$x(1+y^2)=-y^2 \Rightarrow$$

$$x=\frac{-y^2}{1+y^2}\in(-1\ ,\ 0]$$

$$\Rightarrow -1<\frac{-y^2}{1+y^2}\leqslant 0$$

$$\Rightarrow -1<\frac{-y^2-1+1}{1+y^2}\leqslant 0$$

$$\Rightarrow -1<-1+\frac{1}{1+y^2}\leqslant 0$$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{1+y^2}\leqslant 1$$

$$\Rightarrow 1+y^2\geqslant 1 \Rightarrow y^2\geqslant 0 \Rightarrow y\in R$$

از اشتراک $y\in R$ و $y\geqslant 0$ داریم :

$$R_f=[0\ ,\ +\infty)$$

مثال ۱۱: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید.

$$y=f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$$

حل : دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=\{x \mid x^2-4x+5\geqslant 0\}$$

$$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$$

$$\Rightarrow D_f=R \qquad \text{(مجموعهٔ اعداد حقیقی)}$$

برای‌تعیین بردتابع درابتدا ازضابطهٔ تابع نتیجه می گیریم که همواره $y\geqslant 0$ است.

اینک به ترتیب زیرعمل می کنیم:

$$y=\sqrt{(x-2)^2+1} \Rightarrow y^2=(x-2)^2+1$$

$$\Rightarrow (x-2)^2=y^2-1$$

$$|x-2|=\sqrt{y^2-1} \Rightarrow y^2-1\geqslant 0$$

$$\Rightarrow y^2\geqslant 1 \Rightarrow |y|\geqslant 1 \left(\begin{matrix} y\geqslant 1 \\ \text{یا} \\ y\leqslant -1\end{matrix}\right)$$

از اشتراك $|y|\geqslant 1$ و $y\geqslant 0$ بردتابع معین می‌شود:

$$R_f=[1\ ,\ +\infty)$$

مثال ۱۲: دامنه وبردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x^4+2}{\sqrt{x^4+1}}$$

حل : با توجه به $x^4+1>0$ داریم:

$$D_f=R \qquad \text{(مجموعهٔ اعداد حقیقی)}$$

برای تعیین برد به شکل زیرعمل می کنیم:

$$y=\frac{x^4+1+1}{\sqrt{x^4+1}}=\frac{x^4+1}{\sqrt{x^4+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$=\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$$

می‌دانیم اگر k عددی مثبت باشد همواره داریم:

$$k+\frac{1}{k}\geqslant 2$$

و تساوی وقتی برقرار است که $k=1$ باشد ، بنابراین اصل خواهیم داشت:

$$y=\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\geqslant 2$$

$$\Longrightarrow\ R_f=[2,+\infty)$$

مثال ۱۳ : دامنهٔ تعریف‌تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید.

$$y=f(x)=\frac{\sqrt[8]{2x-2\sqrt{x}}}{\sqrt[6]{4-x^2}}+\frac{\sqrt[4]{1+x^2}}{\sqrt{2x-x^2}}$$

حل : برای‌تعیین دامنه ابتدا هریك از عبارتهای داخل رادیکال‌را تعیین علامت می کنیم.

اشتراك مجموعه‌هایی‌از متغیر x که به ازای آنها عبارت داخل‌رادیکالها مثبت یاصفر (درصورتی‌که رادیکالها در مخرج نباشند) است دامنهٔ تعریف‌تابع خواهد بود:

$$\begin{cases} x\geqslant 0\\ 2x-2\sqrt{x}\geqslant 0\\ 4-x^2>0\\ 2x-x^2>0\end{cases}$$

$$1)\quad 2x-2\sqrt{x}\geqslant 0\ \Longrightarrow\ x\geqslant\sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1\ \Longrightarrow\ x\leqslant\sqrt{x}\\ \qquad\text{(مخالف } x\geqslant\sqrt{x}\text{ است)}\\ x\geqslant 1\ \Longrightarrow\ x\geqslant\sqrt{x}\end{cases}$$

بنابراین از نامعادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$x\in[1\ ,\ +\infty)$$

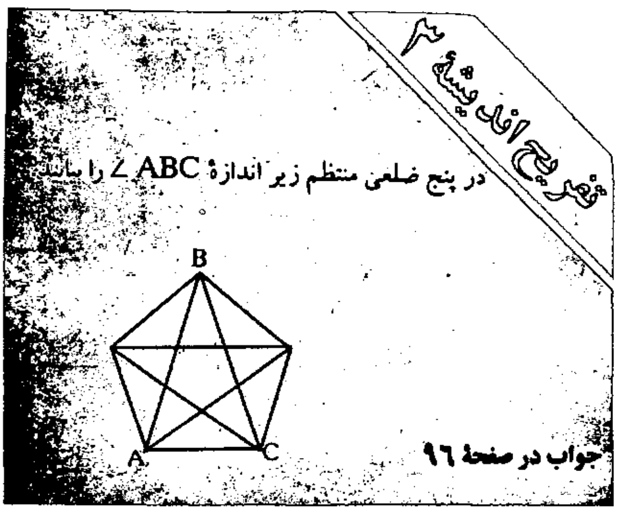
$$2)\quad 4-x^2>0\ \Longrightarrow\ x^2<4\ \Longrightarrow\ -2<x<2$$

$$\Longrightarrow\ x\in(-2\ ,\ 2)$$

$$3)\quad 2x-x^2>0\ \Longrightarrow\ 0<x<2\Longrightarrow x\in(0,2)$$

$$D_f=[1,+\infty)\cap(-2,2)\cap(0,2)=[1,2)$$

ادامهٔ مطلب در دو شمارهٔ آیندهٔ مجله ارائه خواهد شد.



طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۴)

از جلد دوم کتاب مسائل پیکارجوی ریاضی تألیف یاگلوم

الف) جمیع ترتیبات ممکن چهار نقطهٔ واقع در صفحه‌ای را، چنان که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آنها یکی از دو مقدار معلوم a و b باشد، بیابید. جمیع مقادیر نسبت a:b یی را، که به ازای آنها چنین ترتیباتی ممکن است، به‌دست آورید.

ب) جمیع ترتیبات ممکن n نقطهٔ واقع در صفحه‌ای را، چنان که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آنها a یا b باشد، بیابید. به ازای چه مقادیر n ی چنین ترتیباتی موجود است؟

حل الف) فرض می‌کنیم D ،C ،B ،A چهار نقطه باشند. بین این نقاط، کلاً، شش فاصلهٔ ممکن، یعنی BC ،AD ،AC ،AB، CD ،BD، موجوداند. هریک از این شش فاصله باید یکی از دو مقدار a و b را داشته باشند، امکانات زیر به‌طور پیشینه «a priori» موجوداند:

(۱) جمیع شش فاصله a باشند.

(۲) پنج فاصله a باشند و یکی b باشد.

(۳) چهار فاصله a باشند و دوتا b باشد.

(۴) سه فاصله a باشند و سه فاصله b باشند.

چهار حالت فوق را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

حالت ۱. این حالت غیرممکن است. زیرا در این صورت نقاط C ،B ،A رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌شوند، و D، با به یک فاصله بودن از جمیع آنها، باید بر مرکز دایرهٔ محیطی آن واقع باشد. اما دراین صورت AD<AB می‌شود که تناقض است.

حالت ۲. سه نقطه از نقاط مفروض، مثلاً B ،A، و C، باید رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a باشند. چهارمین نقطه، D، باید به فاصلهٔ a از دو رأس از این رئوس، مثلاً A و C، و به فاصلهٔ b از B باشد.

بنابراین نقاط D ،C ،B ،A رئوس لوزی‌ای، که یکی از اقطار آن، AC، مساوی ضلع آن است (شکل ۱a)، می‌باشند. محاسبهٔ این‌که در این حالت $b = BD = a\sqrt{3}$ است، آسان است.

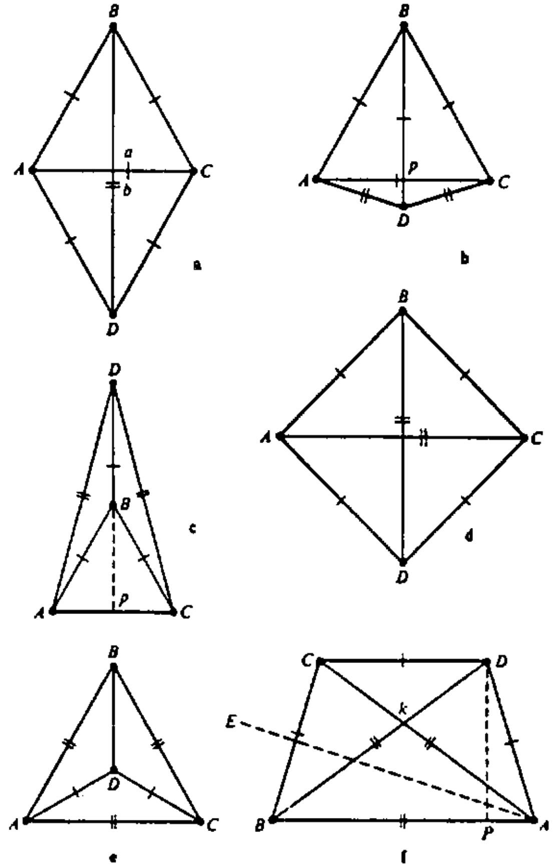
حالت ۳. این حالت شامل دو حالت فرعی است.

(i) فرض می‌کنیم دو قطعه خط به طول b دارای سر مشترکی، مثلاً D، باشند. در این صورت نقاط باقی‌ماندهٔ، B ،A، C، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a می‌سازند. نقطهٔ D به فاصلهٔ b از دو رأس، مثلاً A و C، و به فاصلهٔ a از رأس سوم B است. از آن جاکه $AD = CD$ است، D بر عمودمنصف AC واقع می‌شود؛ و از آن‌جاکه

$$BD = a = BA = BC$$

است، D بر دایره‌ای به مرکز B، که از A و C می‌گذرد، واقع است. در نتیجه چنان که در شکلهای ۱b و ۱c نموده شده، دو موقعیت ممکن برای D وجود دارد. به این ترتیب:

D ،C ،B ،A بر رئوس یک شبه لوزی* «deltoid» که دو ضلعش a و دو ضلعش b اند، و هریک از اقطارش برابر a می‌باشند، قرار می‌گیرند. از نمودارها به سادگی نتیجه می‌شود که



شکل ۱

در این حالت

$$b^2 = AP^2 + PD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= (2 \pm \sqrt{3})\, a^2$$

یعنی،

$$b = a\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \text{یا} \quad b = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

(دو علامت زیر رادیکالها متناظر با دو امکان، نشان داده شده با شکلهای ۱b و ۱c، اند.)

(ii) فرض می‌کنیم دو قطعهٔ به‌طولهای b سر مشترک نداشته باشند. در این صورت نماد مزبور را می‌توان چنان انتخاب کرد که $AC = BD = b$، و $AB = AD = BC = CD = a$ باشد. از آن‌جا که $BA = BC$ و $DA = DC$ است، هم B هم D بر عمودمنصف AD واقع است (شکل ۱d). از این گذشته، از آن‌جا که $AD = AD$ است، B و D متساوی‌الفاصله از ACاند. به این ترتیب اقطار چهارضلعی ABCD عمودمنصف یکدیگراند، و بنابراین ABCD لوزی است. و از آن‌جا که AC=BD است، لوزی مزبور مربع است، ودرنتیجه $b = a\sqrt{2}$.

حالت ۴. این حالت نیز شامل دو حالت فرعی است.

(i) فرض می‌کنیم که میان چهار نقطهٔ مفروض سه نقطه (مثلاً A، B، C) وجود دارند که رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند. دراین‌صورت D باید متساوی‌الفاصله از این سه نقطه‌باشد، و لذادر مرکز دایرهٔ محیطی آنها قرار بگیرد (شکل ۱c). واضح است که دراین حالت $b = AD = a\sqrt{3}/3$ است.

(ii) فرض می‌کنیم که هیچ سه نقطه‌ای از چهار نقطه‌مان تشکیل رئوس مثلث متساوی الاضلاعی را نمی‌دهند و فرض می‌کنیم که $b > a$ باشد.

در میان سه پاره خط به طول b باید دوپاره خط با یک نقطهٔ انتهایی مشترک باشند، زیرا شش نقطهٔ انتهایی این پاره‌خطها جمیعاً در مجموعهٔ {A , B , C , D} واقع‌اند. فرض می‌کنیم A یک چنین نقطهٔ انتهایی‌ای باشد و $AB = AC = b$ باشد. از آن‌جا که فرض کرده‌ایم که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع نیست، باید BC را مساوی a داشته باشیم. اکنون توجه می‌کنیم که نقطهٔ D نمی‌تواند از B و C به یک فاصله باشد (یعنی، نمی‌تواند بر عمودمنصف AE ی BC واقع شود): زیرا اگر چنین باشد، آنگاه یا $BD = CD = a$ و مثلث BCD متساوی‌الاضلاع می‌شود یا $BD = CD = b$، که چهار فاصله از شش فاصله‌مان را مساوی b می‌کند.

بنابراین نقطهٔ D بر AE واقع نمی‌شود، و می‌توان با استفاده از تقارن فرض کرد که در همان طرف AE که C است، واقع می‌شود. در این صورت DB>DC، وبنابراین باید $DB = b$ ، $DC = a$ را داشته باشیم. اما مجموعاً سه‌پاره‌خط به‌طول a و سه‌پاره‌خط به‌طول b داریم؛ ونتیجه می‌شود که تنها پاره‌خطی که تاکنون مورد بررسی قرار نداده‌ایم، یعنی AD، باید به طول

a باشد. اکنون ملاحظه می‌کنیم که مثلثهای ABC و BAD هم‌نهشت‌اند، بنابراین C و D به یک فاصله از AB اند و CD موازی AB است. به این ترتیب نقاط A ، B ، C ، D ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی می‌سازند که قاعدهٔ کوچکترش مساوی ساقها، و قاعده بزرگترش مساوی اقطارش می‌باشد (شکل ۱f).

فرض می‌کنیم P پای عمود از D به AB باشد. دراین صورت
$$BD^۲ = BP^۲ + PD^۲ \text{ و } AD^۲ = AP^۲ + PD^۲$$
و بنابراین
$$BD^۲ - AD^۲ = BP^۲ - AP^۲ = (BP+AP)(BP - AP)$$
اما $BD = b$ ، $AD = a$ ، $BP + AP = BA = b$ و $BP - AP = CD = a$ است. به این ترتیب $b^۲ - a^۲ = ba$ است. با تقسیم بر $a^۲$ و انتقال به یک طرف، به‌دست می‌آوریم $(b/a)^۲ - (b/a) - ۱ = ۰$، و از آن $b/a = (۱ + \sqrt{۵})/۲$ (زیرا ریشهٔ دیگر معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - x - ۱ = ۰$، $(۱ - \sqrt{۵})/۲$ است که منفی است).

به این ترتیب شکلهای ۱a تا ۱f ، جمیع ترتیبات ممکن چهار نقطهٔ واقع در صفحه، چنان که فاصلهٔ بین هر دو نقطه‌ای از آنها یکی از مقادیر a و b باشد، را نشان می‌دهند. ملاحظه می‌کنیم که چنین ترکیباتی ممکن‌اند، تنها اگر

$$b = a\sqrt{۳} \text{ و } b = a\sqrt{۲ + \sqrt{۳}} \text{ ، } b = a\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$
$$b = a\sqrt{۲} \text{ و } b = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} \text{ ، یا } b = a\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

برقرار باشد، که در آنها b فاصلهٔ کمتر رخ دهنده است، یا اگر هر دو فاصله به یک تعداد (سه) مرتبه رخ دهند، b بزرگتر است. اما، آسان‌تر آن است که نتیجهٔ مورد بحث را چنان بازسازی کنیم که b در هر حالت بزرگترین دو طول باشد. از آن‌جا که

$$۱/\sqrt{۲ - \sqrt{۳}} = \sqrt{۲ + \sqrt{۳}} \text{ و } ۱/(\sqrt{۳}/\sqrt{۳}) = \sqrt{۳}$$

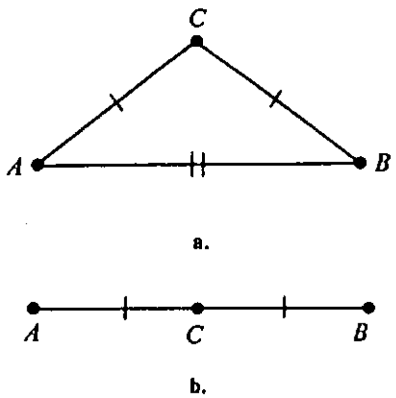
امکانات زیر تنها امکاناتی هستند که می‌مانند:

$$b = a\sqrt{۳} \text{ ، } b = a\sqrt{۲ + \sqrt{۳}} \text{ ، } b = a\sqrt{۲} \text{ ، } b = a = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

حل ب) مقادیر ممکن n را، به ترتیب، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

(۱) $n = ۲$. در این حالت تنها یک فاصله موجود است؛ یعنی، موقع دو نقطه در صفحه هرچه که باشد، این فاصله تنها یک مقدار a را می‌گیرد.

(۲) $n = ۳$. در این حالت سه فاصله موجود است. اگر این فاصله‌ها باید تنها دو مقدار a و b (مثلاً a دوبار و b یک‌بار) را اختیار کنند، نقاط مزبور باید رئوس مثلث متساوی‌الساقینی با قاعدهٔ b و ضلع a باشند (شکل ۲a و ۲b ؛ مورد اخیر حالت زوال یافته‌ای را، که در آن مثلث به پاره‌خط تحویل می‌شود، توضیح می‌دهد).



شکل ۲

واضح است که a و b تنها نیاز به صدق کردن در نامساوی

$$a \geq \frac{b}{۲}$$

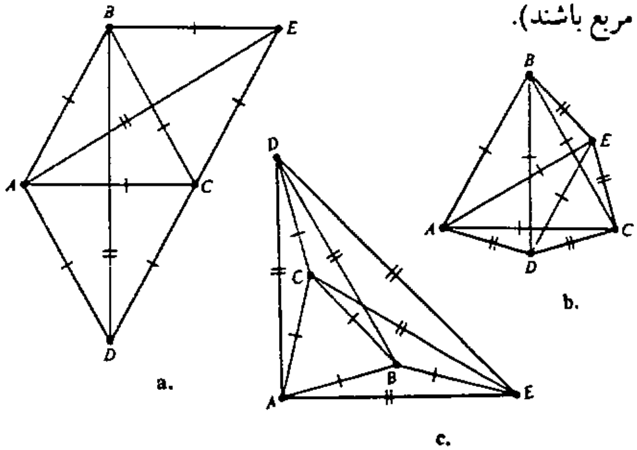
دارند؛ در حالت خاص، داشتن $a = b$ ممکن است.

(۳) $n = ۴$. این حالت در قسمت الف انجام گرفت.

(۴) $n = ۵$. اگر A ، B ، C ، D هر چهار نقطه از پنج نقطهٔ A ، B ، C ، D ، E باشند، درشرط قسمت الف صدق می‌کنند و بنابراین باید در یکی از شش ترکیب نشان داده شده در شکل ۱ قرار گیرند. مثلاً، فرض می‌کنیم A ، B ، C ، D ، چنان که

در شکل ۱a، مرتب شده باشند. فاصله‌های بین چهار نقطهٔ A ،B ،C ،E باید همان دومقدار a و $b = a\sqrt{3}$ فرض شوند؛ و نتیجه می‌شود که این نقاط باید چون در شکل ۱a یا ۱e قرار گیرند. اما سه نقطه از این چهار، A ، B ، C ، رئوس مثلث متوازی الاضلاعی به ضلع a می‌باشند، و تنها مثلث متساوی الاضلاع شکل ۱c ضلع $b>a$ دارد. بنابراین A ، B ، C ، E باید، چنان که در شکل ۱a، قرارگرفته باشند. از آن‌جاکه E بر D منطبق نیست، تنها ترکیب ممکن، آن‌که در شکل ۳a توضیح داده شده‌است. اما در این ترکیب $DE = 2a$ نه طول a نه طول b دارد. بنابراین نشان داده‌ایم که غیرممکن است که چهار نقطه از پنج نقطه‌مان، چنان که در شکل ۱a، مرتب شوند.

به‌همین ترتیب، می توانیم نشان‌دهیم که‌نقاط A ، B ، C ، D نمی‌توانند چون در شکل ۱b یا ۱c قرار گیرند، زیرا اگر فرض شود که چنین‌اند، درمورد پنج نقطهٔ A ، B ، C ، D ، E، لزوماً به یکی از ترکیبات ۱b یا ۱c می‌رسیم، و طول DE در هریک از این ترکیبات متفاوت از a یا b است. اگر A ، B ، C ، D، چنان که درشکل ۱e، قرارگیرند، دراین‌صورت A ، B ، C ، E نیز چنین می‌شوند، و این وضع، اگر بخواهیم که D و E متمایز باشند، به‌طور وضوح غیر ممکن است. به‌همین ترتیب، اگر A ، B ، C ، D چنان‌که در ۱d ، باشند، E باید منطبق بر D باشد (زیرا چهار نقطهٔ A ، B ، C ، E نیز باید در رئوس یک مربع باشند).

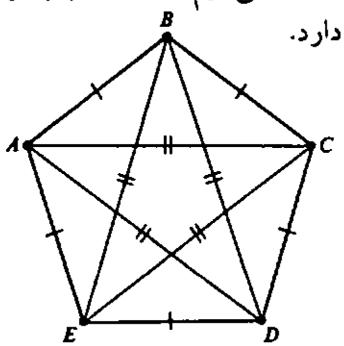


شکل ۳

به این ترتیب تنها حالت باقی مانده، حالتی است که در آن A ، B ، C ، D در رئوس ذوزنقهٔ نموده شده در شکل ۱f اند. در این حالت A ، B ، C ، E باید ذوزنقه‌ای هم نهشت بسازند، و ملاحظهٔ این که پنج نقطهٔ A ، B ، C ، D ، E باید بر رئوس یک پنج ضلعی منتظم قرار گیرندآسان‌است (شکل ۴)**. لذا این ترتیب، تنها ترتیب پنج نقطهٔ مورد بحث است که در شرایط مسأله صدق می‌کند، یعنی، جمیع ۱۰ فاصلهٔ بین ازواج پنج نقطهٔ مزبور بایکی‌از مقادیر a و $b = a(1+\sqrt{5})/2$ مساوی‌اند.

(۵) $n \geq 6$. بنابه نتیجه‌ای که هم اکنون به‌دست آوردیم، هر پنج نقطه از n نقطهٔ مفروض باید در رئوس یک پنج ضلعی منتظم واقع شوند. اما اگر $n \geq 6$ نقطه جمیعاً متمایز باشند، چنین ترتیبی به‌طور وضوح غیر ممکن است. بنابراین مسأله‌مان به ازای $n \geq 6$ جواب ندارد.

به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که مسأله تنها به ازای $n = 2$، ۳، ۴، یا ۵ جواب دارد.



شکل ۴

زیرنویس‌ها:

* توجه‌داشته‌باشید که اگر دایره‌ای برذوزنقهٔ ABCE محیط کنیم (شکل ۱f)، در این‌صورت نقاط A، B، C، D چهاررأس‌پنج ضلعی‌منتظمی محاط دراین دایره می‌شوند. برای‌اثبات‌این‌موضوع، قرارمی‌دهیم $\angle DAB=\angle ADB=\alpha$. در این صورت $\angle CDB=\angle CBD=\angle CDA-\angle BDA=(180^\circ-\alpha)-\alpha$ (توجه کنید که در چهار ضلعی محاطی ABCD مجموع زوایای B و D ، 180° است، و زاویهٔ B بنابه هم‌نهشتی مثلثهای ABC و BAD ، α است) $=\angle ABD=180^\circ-2\alpha$، و $\angle BCD=180^\circ-2(180^\circ-2\alpha)=4\alpha-180^\circ$ است، ازآن‌جاکه $\angle CBA+\angle BCD=180^\circ$ است، داریم: $180^\circ=5\alpha-180^\circ$ $\alpha=2(180^\circ/5)=72^\circ$. اکنون ازآن‌جاکه $\angle ABD=\angle DBC=180^\circ/5$ است، نتیجه می‌شود که CD ، CB ، AD سه ضلع از پنج ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مورد بحث‌اند.

** شبه لوزی چهارضلعی‌یی با دو زوج ضلع مجاور مساوی است.

جواب نامه‌ها

آقای ارشام برومند سعید (کرمان)

ضمن عرض تشکر از مقالهٔ شماتحت عنوان «مجموعه‌های شگفت» که بدون ذکر مرجع آن، ارائه داده‌اید. در اینجا عین آن را می‌آوریم: مجموعهٔ مرتب $A=\{۱۳۱۳۹ ، ۶۷۲۵ ، ۴۳۳۸ ، ۴۵۱۴ ، ۱۱۳۸ ، ۴۱۷۹ ، ۹۲۱۹\}$ را درنظر می‌گیریم. اگر مجموع توان چهارم‌ارقام هرعدد را به دست آوریم حاصل جمع عدد بعدی است و به همین ترتیب به آخرین عدد مجموعه خواهیم رسید. و اگر این عمل را ادامه دهیم دوباره اولین عدد مجموعهٔ A حاصل می‌شود.

$$۱^۴ + ۳^۴ + ۱^۴ + ۳^۴ + ۹^۴ = ۶۷۲۵$$
$$۶^۴ + ۷^۴ + ۲^۴ + ۵^۴ = ۴۳۳۸$$
$$۴^۴ + ۳^۴ + ۳^۴ + ۸^۴ = ۴۵۱۴$$
$$۴^۴ + ۵^۴ + ۱^۴ + ۴^۴ = ۱۱۳۸$$
$$۱^۴ + ۱^۴ + ۳^۴ + ۸^۴ = ۴۱۷۹$$
$$۴^۴ + ۱^۴ + ۷^۴ + ۹^۴ = ۹۲۱۹$$
$$۹^۴ + ۲^۴ + ۱^۴ + ۹^۴ = ۱۳۱۳۹ \text{ و ...}$$

و درمجموعهٔ مرتب زیر نیز خاصیت فوق را با توان پنجم ارقام هرعدد داریم:

$$B = \{۲۴۵۸۴ ، ۳۷۹۷۳ ، ۹۳۱۴۹ ، ۷۴۸۴۶ ، ۵۹۳۹۹ ، ۱۸۰۵۱۵ ، ۳۹۰۲۰ ، ۵۹۳۲۴ ، ۶۳۴۷۳ ، ۲۶۰۹۳ ، ۶۷۱۰۰\}$$

$$۲^۵ + ۴^۵ + ۵^۵ + ۸^۵ + ۴^۵ = ۳۷۹۷۳ ، ...$$

آقای حسن بای (مازندران)

باتشکر از مسائل ارسالی شما، درصورت لزوم از آنان استفاده می‌شود.

آقای مهرداد کرباسی (صومعه‌سرا)

ضمن عرض سلام متقابل و تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «دربارهٔ یک سری نامحدود» به عرض می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در شماره‌های آیندهٔ مجله بوجود آید.

آقای طالب حسین کریمی دانش‌آموز سال سوم ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از زحمات بی‌دریغ شما برای تهیهٔ و ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «بحثی درمورد قضیهٔ فیثاغورث» امید است که امکان درج آن درشماره‌های بعدی مجله بوجود آید.

ضمناً متذکر می‌شویم که مقالهٔ شما از نظر تاریخی و سیرتحولاتی برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضیات بسیار مناسب است.

آقای مهرداد کاظمیان دانش‌آموز سال دوم ریاضی (اصفهان)

ضمن عرض سلام متقابل و تشکر از شما برای ارسال دو مسئله (همراه با حل) به عرض می‌رسانیم که درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای احمد خادمیان دانش‌آموز سال دوم ریاضی (مشهد)

ضمن تشکر از شما برای ارائهٔ حل مسائل مسابقه‌ای و ارسال مسائلی (همراه با حل) به عرض می‌رسانیم که پس‌از بررسی لازم و درصورت تأیید، برای شما به همراه یک نامه جایزه‌ای نیز به عنوان یادبود اهدا خواهد شد. و درصورت لزوم از مسائل ارسالی شما نیز درجای مناسب استفاده خواهد شد.

آقای امید خاتین‌زاده دانش‌آموز سال سوم ریاضی (اهواز)

باتشکر از مسائل ارسالی شما باید عرض کنیم که تمامی مسائل ارسال شده باید با حل ارائه شود و همچنین باید در سطح مطلوب‌تر و مفیدتری طرح شود.

خانم لیلا فرضی دانش‌آموز سال سوم ریاضی (شهرستان اهر)

ضمن عرض سلام متقابل و تشکر از نامهٔ محبت آمیز شما باید به عرض برسانیم که متأسفانه راه‌حل شما درمورد حل تست بخش‌پذیری سال سوم ریاضی مندرج در شمارهٔ ۲ مجله صحیح نیست زیرا عبارت:

$$(x^{۹۹۹} + x^{۸۸۸} + ... + x^{۱۱۱} + ۱)\ (x - ۱)$$

با عبارت $x^{۱۰۰۰} - ۱$ متحد نیست و توجه شما را به اتحاد زیر جلب می‌کنیم:

$$x^{۱۰۰۰} - ۱ = (x - ۱)\ (x^{۹۹۹} + x^{۹۹۸} + x^{۹۹۷} + ... + x + ۱)$$

آقای بهروز بهرامی دانش‌آموز سال دوم ریاضی (شهرستان نقده)
پس‌از عرض سلام متقابل درجواب نامهٔ شما باید بگوییم که هدف مجلهٔ ریاضی برهان پاسخ دادن به سؤالات ریاضی دانش‌آموزان کشور نیست بلکه یک مجلهٔ تعلیمی و کمک آموزشی است و هدف آن بسط و بررسی مطالب و مفاهیم اساسی ریاضی دبیرستانی و طرح و حل مسائل مربوط به آن می‌باشد. و از شما دانش‌آموزان هم برای رسیدن به این هدف مهم یاری می‌جوید.

آقای مهدی صفری دانش‌آموز سال چهارم دبیرستان (تهران)
با تشکر از مسئلهٔ استنتاج شما، امیدواریم در آیندهٔ نزدیک در جای مناسب از آن استفاده شود.

آقای رضابردباری دانش‌آموز سال دوم ریاضی (شیراز)
با تشکر از مسائل ارسالی شما، در آیندهٔ نزدیک از مسائل شما در صورت امکان استفاده خواهد شد. متذکر می‌شویم که مسائل ارسالی تکراری نباشد و بیشتر توسط خودتان طراحی شود و اگر هم از منبعی برداشت می‌کنید نام آن را ذکر کنید.

آقای شانت شهبازیان دانش‌آموز سال اول (تهران)
ضمن تشکراز مقالهٔ شما به عرض می‌رسانیم که از مقالهٔ شما درصورت امکان و درجای مناسب استفاده خواهد شد.

آقای حمید باباوند (تهران)
باعرض سلام متقابل و تشکر از پیشنهادات شما، روش محاسبهٔ n عدد اولیهٔ طبیعی را با روش تعمیم یافتهٔ گوس در اینجا می‌آوریم. برای این منظور ابتدا مجموع n عدد اولیه طبیعی را به S نمایش می‌دهیم و به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + n \qquad (۱)$$

بار دیگر اعداد را از آخر به اول می‌نویسیم:

$$S = n + (n-۱) + (n-۲) + \dots + ۱ \qquad (۲)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۲S = \underbrace{(n+۱) + (n+۱) + \dots + (n+۱)}_{n \text{ مرتبه}}$$

پس می‌توان نوشت:

$$۲S = n(n+۱)$$

(مجموع n عدد اولیه طبیعی)

$$S = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

ضمناً مجلهٔ آشنایی با ریاضیات و مجلهٔ برهان و سایر کتب موردنیاز را می‌توانید از شعبه‌های مختلف انتشارات مدرسه در سراسر کشور تهیه فرمایید.

آقای اسماعیل مهدوی دانش‌آموز سال دوم تجربی (آمل)
با تشکر از مسائل ارسالی شما، امید است از آنان در شماره‌های بعدی مجله استفاده شود.

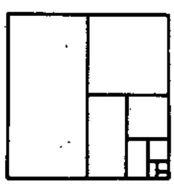
آقای زهیر طیب (تهران)
ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که از مسائل شما در شماره‌های آیندهٔ مجله درجای مناسب استفاده خواهد شد و متذکر می‌شویم که سعی کنید صورت مسائل کوتاه و جواب آنان نیز طولانی نباشد.

آقای شیرعلی رحمانپور دانش‌آموز سال دوم ریاضی (سیاهکل)
پس از عرض سلام متقابل درجواب نامهٔ شما باید بگوییم که هدف مجلهٔ ریاضی برهان پاسخ گویی به سؤالات ریاضی دانش‌آموزان نیست. زیرا باتوجه به کار پر حجم مجله و سعی برای رسیدن به اهداف موردنظر پاسخ گویی به سؤالات ریاضی دانش‌آموزان درحال حاضر به هیچوجه ممکن نیست. امیدواریم که در آینده با بازکردن بخش پاسخ به سؤالات امکان آن بوجود آید.

تفریح اوقات فراغت ۴

باتوجه به شکل زیرحاصل جمع زیر چیست؟

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \dots$$



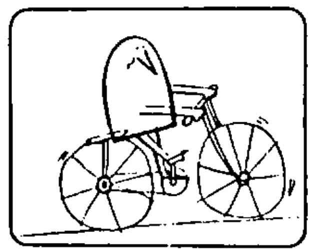
جواب در صفحهٔ ۹۶

تناقضها در ریاضیات و علوم

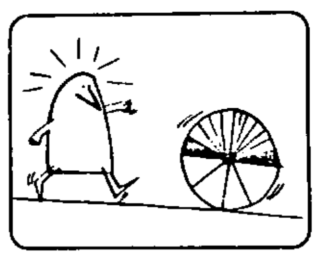
چرخ گیج کننده

نوشتهٔ مارتین گاردنر
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

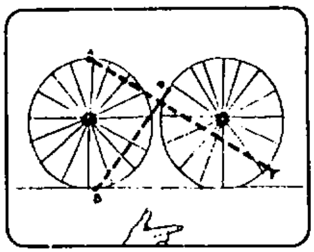
آیا می‌دانستید که قسمتهای بالای چرخهای دوچرخه سریعتر از قسمتهای پایین آنها حرکت می‌کند؟



برای همین است که وقتی دوچرخه‌ای از کنار ما می‌گذرد، میله‌های چرخهای آن در قسمتهای بالا به‌صورت مَحو و درهم دیده می‌شود.



برای پی‌بردن به واقعیت‌امر، به یک چرخِ درحالِ حرکت در دو وضعیتِ مختلف نگاه‌می‌کنیم. چنانچه ملاحظه می‌شود، نقطهٔ A واقع در بالا به مراتب تندتر از نقطهٔ B واقع در پایین حرکت کرده است. چون سرعت عبارت است از مسافت طی شده در زمان واحد می‌گوییم: نقطهٔ A بسیار سریعتر از نقطهٔ B حرکت کرده است. این‌طور نیست؟

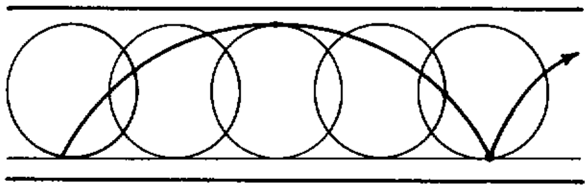


البته به‌هنگام مقایسهٔ سرعتهای قسمتهای بالا و پایین چرخهایِ درحال حرکت، سرعتهای آنها در روی زمین، مورد نظر است. یکی از بهترین راههای توضیح این پارادوکس[1] توجه کردن به منحنیی است که به آن سیکلوئید یا چَرخزاد[2] می‌گویند. منحنی چرخزاد با درنظرگرفتن نقطه‌ای بر روی طوقهٔ یک چرخ در حال چرخیدن در مسیرِ مستقیم پدید می‌آید. وقتی که نقطهٔ مورد نظر با زمین مماس می‌شود، سرعت آن صفر است. همگام با چرخیدن چرخ، سرعت نقطه افزایش می‌یابد، به‌طوری که در هنگام قرارگرفتن در بالای چرخ، سرعتش به حداکثر می‌رسد. سپس از سرعت آن کاسته می‌شود تا آن‌جاکه با مماس شدن دوباره با زمین سرعتش به صفر باز می‌گردد. در مورد چرخهای دارای لبهٔ بیرون آمده (دارایِ فلانژ)، مانند چرخهای قطار، هر نقطهٔ واقع بر روی فلانژ به هنگام قرارگرفتن بر طوقهٔ کوچکِ پایین‌تر از سطحِ خط آهن در واقع به عقب حرکت می‌کند.

۱ـ پارادوکس (Paradox) یا شگفت‌نما، واژه‌ای یونانی به مفهوم «فراتر از اعتقاد» است و منظور از آن احکامی است که با عقل متعارف یا اصول مقدماتی منطق در تضاد باشد. (م.)

۲ـ Cycloid Curve

چرخزاد دارای بسیاری خاصیتهای زیبای ریاضی و مکانیکی است که شرح آن در فصلِ «چرخزاد: عروسِ هندسه» مندرج در ششمین کتابِ نگارنده از مجموعه کتابهای موسوم به «بازیهای ریاضی» (تجدید چاپ شدهٔ مجموعهٔ مقالات مربوط در مجلهٔ سایِنتیفیک‌امریکن) آمده است. در آن فصل توضیح داده شده است که چگونه می‌توان با غلتاندن قوطیِ قهوه یک منحنی چرخزاد کشید. ساختن این منحنی و به دست آوردن اتحاد آن می‌تواند تحسینِ بیشترِ ما از زیبایی و خاصیتهای نامتعارفِ چرخزاد را برانگیزاند.



مآخذ ترجمه:

Gardner, Martin, aha! Gotcha: Paradoxes to puzzle and delight. W.W. Freeman & company, New York, 1989.

مسائل مسابقه‌ای

حمیدرضا امیری

۱) اولاً ثابت کنید اعداد $_n$(۱۲۳۴۳۲۱) و $_n$(۴۴۱۰۰) به ازای ۴ < n مربع کاملند ثانیاً تحقیق‌کنید به‌ازای ۵ < n عدد $_n$(۱۲۵۴۳) بر اعداد $_n$(۱۱۱) و $_n$(۱۱۳) قابل قسمت است.

توجه کنید:

$$(abcd)_n = a \times n^3 + b \times n^2 + c \times n + d$$

۲) مجموع دو عدد ۱۴۸ است اگر هر کدام از این دو عدد را مقلوب کنیم (به ترتیب جای ارقام آنها را عوض کنیم) و دوباره با هم جمع کنیم حاصل جمع ۵۵۳ خواهد شد. این دو عدد را تعیین کنید.

توجه کنید: ۴۲۱ $\xleftrightarrow{\text{مقلوب}}$ ۱۲۴

تفریح اندیشه ۵

عبور از شبکه

یکی از قدیمیترین معماهای توپولوژی، که برای بسیاری از دانش‌آموزان آشناست، عبارت است از رسم خط متصلی در امتداد شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۱ چنان که خط مزبور هر یک از ۱۶ پاره‌خط شبکه را تنها یک‌بار قطع کند. خط خمیده‌ای که در این شکل نشان داده شده معما را حل نمی‌کند زیرا که پاره‌خط را قطع نشده باقی می‌گذارد. هیچ‌گونه راه «کلک‌آلود» ی، چون عبور خط مذکور از رأس یا در امتداد پاره‌خطها، تا کردن کاغذ، و غیره، مجاز نیست.

اثبات این که معمای مورد بحث نمی‌تواند بر رویه‌ای مسطح حل شود مشکل نیست. و اینک دو سؤال. آیا می‌توان آن را بر رویهٔ کره حل کرد؟ بر رویهٔ چنبره چطور؟

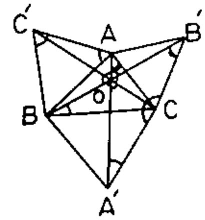


جواب در صفحهٔ ۹۶

حل مسائل مسابقه‌ای برهان۴

محمد هاشم رستمی

حل ۱- نقطهٔ برخورد AA' و BB' را O می‌نامیم و ثابت می‌کنیم که سه‌نقطهٔ C و O و C' روی یک خط راست واقع‌اند.



دو مثلث ACA' و BCB' با هم‌برابرند زیرا:

$$AC=CB' \quad , \quad CA'=CB$$

و

$$A\hat{C}A'=B\hat{C}B'=60^\circ+A\hat{C}B$$

از تساوی این دو مثلث نتیجه می‌شود که

$$B\hat{B}C'=C\hat{A}A' \quad و \quad A\hat{A}'C=B'\hat{B}C$$

در نتیجه چهار ضلعیهای $OBA'C$ و $OAB'C$ محاطی می‌باشند که چون

$$B\hat{A}'C=C\hat{B}'A=60^\circ$$

است، پس:

$$B\hat{O}C=C\hat{O}A=120^\circ$$

از آنجا $A\hat{O}B=120^\circ$ خواهد بود. اما $B\hat{C}'A=60^\circ$ است پس چهارضلعی $AC'BO$ نیزمحاطی است:

$$(B\hat{C}'A+A\hat{O}B=60^\circ+120^\circ=180^\circ)$$

لذا $B\hat{O}C'=B\hat{A}C'=60^\circ$ است. در نتیجه:

$$C\hat{O}C'=C\hat{O}B+B\hat{O}C'=120^\circ+60^\circ=180^\circ$$

یعنی نقاط C و O و C' روی یك خط راست واقع‌اند؛ پس CC' نیز از نقطهٔ O محل تقاطع AA' و BB' می‌گذرد. در نتیجه خطوط AA' و BB' و CC' در نقطهٔ O متقارب‌اند.

نکتهٔ ۱ــ نقطهٔ O محل‌همرسی‌خطهای AA' و BB' و CC'، نقطهٔ برخورد کمان در خورهای زاویهٔ 120° مقابل به اضلاع مثلث ABC است زیرا:

$$A\hat{O}B=B\hat{O}C=C\hat{O}A=120^\circ$$

است که این نقطه‌را نقطهٔ فرما نظیرمثلث ABC، می‌نامند.

نکتهٔ ۲ــ هریك از زوایای ایجاد شده بین دونیم خط متوالی درنقطهٔ O برابر 60° است یعنی:

$$A\hat{O}C'=C'\hat{O}B=B\hat{O}A'$$

$$=A'\hat{O}C=C\hat{O}B'=B'\hat{O}A=60^\circ$$

نکتهٔ ۳ ــ مسئله باروشهای دیگر، ازجمله‌به‌کمك دوران نیز قابل حل است.

حل ۲- ابتدا مسئله‌را درحالت‌کلی‌حل می‌کنیم. ازنقطهٔ

$$A(x_1 , y_1 , z_1)$$

عمودهای AM و AM' را به ترتیب برصفحه‌های:

$$P' : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

و

$$P : ax+by+cz+d=0$$

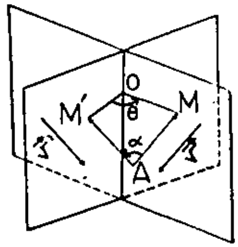
رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم:

$(\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AM'}) = \alpha$

باشد. اگر O نقطهٔ برخورد صفحهٔ MAM' با فصل مشترك دو صفحهٔ فوق باشد، زاویهٔ $M\hat{O}M' = \theta$ زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ حاصل از این دوصفحه درناحیه‌ای است که نقطهٔ A واقع است. بـا توجه به اینکه $\overrightarrow{v}(a,b,c)$ بردار نرمال صفحهٔ P و

$\overrightarrow{v'}(a', b', c')$

بردار نرمال صفحهٔ P' است، داریم:



$$\overrightarrow{AM} = \overline{AM} \cdot \overrightarrow{v} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AM'} = \overline{AM'} \cdot \overrightarrow{v'}$$

حال حاصل‌ضرب داخلی دوبردار $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AM'}$ را محاسبه می کنیم :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'} = (\overline{AM}\cdot\overrightarrow{v})\cdot(\overline{AM'}\cdot\overrightarrow{v'}) =$$

$$\overline{AM}\cdot\overline{AM'}\cdot(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v'}) =$$

$$\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \times \frac{a'x_1+b'y_1+c'z_1+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$$\times(aa'+bb'+cc') =$$

$$\frac{P(A)P'(A)(aa'+bb'+cc')}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$$= |\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AM'}|\cos\alpha$$

مقادیر:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}$$

$|\overrightarrow{AM'}|$ و $|\overrightarrow{AM}|$

همواره مثبت‌اند، پس‌علامت $\cos\alpha$ بستگی به علامت

$$P(A)P(A')(aa'+bb'+cc')$$

دارد که اگراین مقدار را δ بنامیم یعنی

$$\delta = P(A)P'(A)(aa'+bb'+cc')$$

سه‌حالت پیش می‌آید:

۱) $\delta > 0$، دراین‌حالت $\cos\alpha > 0$ ودر نتیجه

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

پس $90^\circ < \theta < 180^\circ$ خواهد بود. یعنی نقطهٔ A داخل فرجه‌ای قرار داردکه زاویهٔ مسطحه‌اش منفرجه است.

۲) $\delta < 0$، دراین‌حالت $\cos\alpha < 0$، درنتیجه

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

پس $0^\circ < \theta < 90^\circ$ خواهد بود. یعنی نقطهٔ A داخل فرجه‌ای واقع است که زاویهٔ مسطحه‌اش حاده است.

۳) $\delta = 0$، در این‌حالت اگر

$$P(A) \neq 0 \quad \text{و} \quad P'(A) \neq 0$$

باشد، $aa'+bb'+cc' = 0$، ولذا دوصفحه بـرهم عمود می‌باشند، و در صورتی‌که $P(A) = 0$ یا $P'(A) = 0$ باشد، به‌ترتیب، نقطهٔ A روی‌صفحهٔ P یا روی‌صفحهٔ P' قرار خواهد داشت .

در مورد قسمت اول مسئله:

$$P : x + 2y - z + 1 = 0$$

و

$$P' : 2x - 3y - 2z + 3 = 0$$

و $A(1, -2, 3)$، پس داریم:

$$\delta = P(A)P'(A)(aa'+bb'+cc')$$
$$= (1-4-3+1)(2+6-6+3)\times$$
$$(2-6+2) = +50 > 0 \implies \alpha > 90^\circ \implies$$

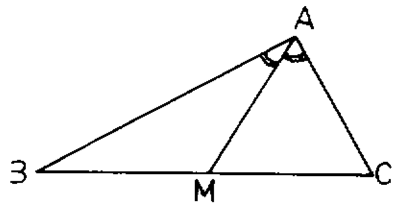
نقطهٔ A داخل فرجهٔ منفرجهٔ حاصل از تقاطع دوصفحهٔ P و P' قرار دارد.

مسائل و تست برای حل

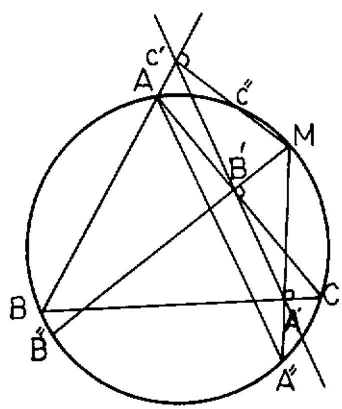
مسائل ریاضیات سال اول

۱- در مثلث ABC ، اگر $AB>AC$ و AM میانهٔ نظیر رأس A باشد ، ثابت کنید :

$$M\hat{A}B < M\hat{A}C$$



۲- اگر نقطه‌های A' و B' و C' به ترتیب تصاویر نقطهٔ M از دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی اضلاع BC و AC و AB ، و نقطه‌های A'' و B'' و C'' به ترتیب نقاط برخورد خطوط MA' و MB' و MC' با دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند، ثابت کنید که خطوط AA'' و BB'' و CC'' با خط سمسن نظیر نقطهٔ M موازی‌اند .



۳- هرگاه گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \Leftrightarrow q$ گزاره‌هایی درست و $(p\wedge q)$ گزاره‌نادرست باشد ارزش گزارهٔ

$$(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow [q \Leftrightarrow (\sim p \vee s)]$$

را تعیین کنید.

۴- اگر فرض کنیم

$$A=\{x \in IR \mid ۲ \leqslant x < +\infty\}$$

و

$$B=\{x \in IR \mid -\infty < x \leqslant ۵\}$$

در این صورت مطلوب است محاسبهٔ مجموعه‌های زیر:

الف) $A-B$

ب) $B-A$

ج) $B'-A$

د) $A' \cap B'$

۵- دستگاه مقابل را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{۴}{۵x-y-۱}+\dfrac{۵}{۳x+۲y-۱۱}=۲ \\[2mm] \dfrac{۳}{۵x-y-۱}+\dfrac{۴}{۳x+۲y-۱۱}=\dfrac{۳۱}{۲۰} \end{cases}$$

۶- اگر a و b و c اعداد حقیقی و مثبت باشند به‌کمک اتحادها ثابت کنید:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant ۸abc$$

تستهای سال اول

۱- فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر ۴ است . مجموعهٔ نقاطی مانند M از خط d ، که از نقطهٔ A به فاصلهٔ

$۵ \leqslant AM \leqslant ۶$

قرار دارند کدام شکل است؟

۱) تمام خط d

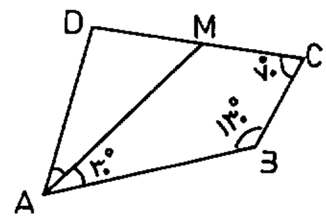
۲) یك پاره خط از خط d

۳) دو پاره خط متساوی از خط d

۴) یك نیم‌خط از خط d

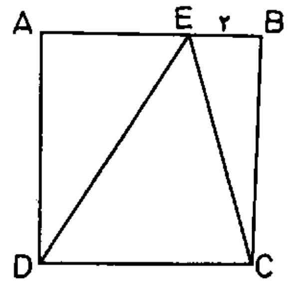
۲- در شکل زیر ، AM نیمساز زاویهٔ DAB است. اندازهٔ زاویهٔ ADM چقدر است؟

۱) °۶۰ ۲) °۸۰ ۳) °۹۰ ۴) °۱۰۰



۳- مربع ABCD به ضلع ۶ سانتیمتر مفروض است. اگر E نقطه‌ای از ضلع AB واندازهٔ EB مساوی ۲ سانتیمتر باشد، مساحت مثلث EDC چند سانتیمتر مربع است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰



۴- هرگاه گزاره‌های $(p \vee q)$ و $(p \Longleftrightarrow q)$ درست باشند ارزش گزارهٔ $p \Longrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

۱) همواره نادرست است

۲) همواره درست است

۳) به ارزش p بستگی دارد

۴) به ارزش q بستگی دارد

۵- هرگاه $A-B=A-C$ دراین صورت همواره داریم :

۱) $B=C$ ۲) $B=C'$

۳) $B-A=C-A$ ۴) هیچ یك‌از موارد قبل

۶- اگر $b \neq ۰$ و $a > b$ ، آنگاه کدام یك از روابط زیر همواره برقرار است؟

۱) $a^۲ > b^۲$ ۲) $a^۳ > a^۲b$

۳) $ab^۲ > b^۳$ ۴) $\frac{۱}{a} < \frac{۱}{b}$

۷- حاصل کسر $\frac{a^۶-b^۶}{(a+b)^۳(a^۳-b^۳)}$ به ازای

$$\begin{cases} a=۲\sqrt{۲} \\ b=\sqrt{۲} \end{cases}$$

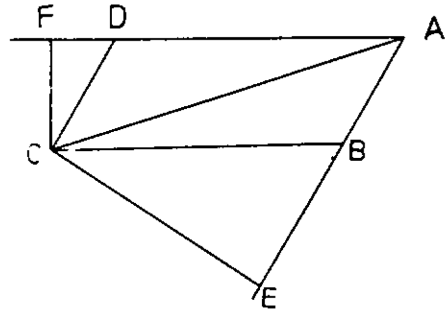
کدام است ؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ - AC قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع ABCD است. از رأس C عمودهای AE و AF را بـه ترتیب برامتدادهای



اضلاع AB و AD فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

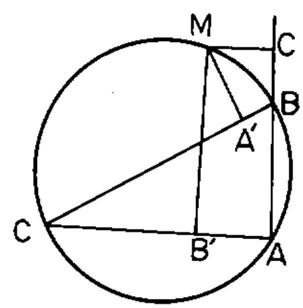
$$AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF$$

اگر AC قطر کوچك متوازی‌الاضلاع ABCD باشد، رابطهٔ فوق‌به چه صورت درمی‌آید؟

فرستنده: امیررضا فرزین از اصفهان

۲ - تصویر نقطهٔ M واقع برکمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی خطهای راست BC ، AC و AB را بـه ترتیب A' و B' و C' می‌نامیم ثابت کنید:

$$\frac{BC}{MA'} = \frac{AC}{MB'} + \frac{AB}{MC'}$$



۳ - هرگاه R رابطه‌ای دلخواه روی مجموعهٔ A باشد، ثابت کنید $R \cap R^{-1}$ و $R \cup R^{-1}$ رابطه‌هایی متقارن‌روی A می‌باشند.

۴ - رابطهٔ R به صورت زیرروی اعداد حقیقی تعریف شده است، ثابت کنید شرط لازم و کافی بـرای‌آنکه رابطهٔ R پادمتقارن باشد آن است که $a \neq b$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;;\; xRy \iff ax + by = c$$

ثابت کنید که تابع با ضابطهٔ

$$f : N^2 \to N$$

$$f(a, b) = 2^{a-1}(2b - 1)$$

یك‌به‌یك و پوششی است.

۵ - اگر در معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$S_1 = x' + x'' \text{ و } S_2 = x'^2 + x''^2 \text{ و } S_3 = x'^3 + x''^3$$

و... باشداگردر معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، $S_{10} = K$ باشد $S_{20} = ?$.

۶ - اگر $a^{\log x}$ و $a^{\log y}$ و $a^{\log z}$ تصاعد هندسی بسازد ثابت کنید x و y و z نیز تصاعدهندسی می‌سازند.

۷ - باتوجه به تساوی و اتحادهای مثلثاتی زیر $\cos\frac{\pi}{10}$ را محاسبه کنید.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} \quad \text{و} \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 3\frac{\pi}{10} = 4\cos^3\frac{\pi}{10} - 3\cos\frac{\pi}{10}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

۸ - معادلهٔ زیر را حل کنید:

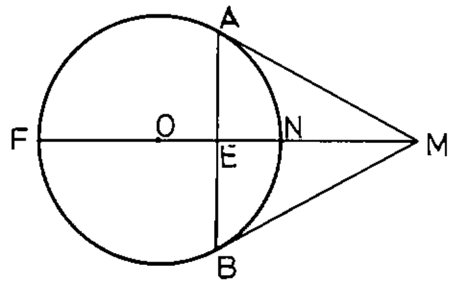
$$\sin 5x + \sin x = 2 + \cos^5 2x$$

تستهای سال دوم ریاضی

۱- از نقطهٔ M مماسهای MA و MB را بر دایره‌ای به مرکز O رسم می‌کنیم. اگر MO دایره را در نقاط N و F و وتر AB را در نقطهٔ E قطع کند نسبت $\frac{FM}{EF}$ همواره با کدام نسبت برابر است؟

۱) $\frac{NE}{MN}$ ۲) $\frac{MN}{NE}$

۳) $\frac{OE}{OM}$ ۴) $\frac{OM}{OE}$



۲- مساحت قطاع °۳۰ در یك دایره، برابر ۳π است. قطر این دایره کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳- پنج نقطهٔ A، B، C، D و E غیر واقع در یك صفحه‌اند. چندصفحه وجود دارد که شامل سه‌نقطه از نقاط فوق باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۴- روی مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶\}$ رابطهٔ

$R=\{(۲,۶)\}$

تعریف‌شده است این رابطه:

۱) هم‌ارزی است

۲) ترتیب است

۳) تقارنی و تعدی است

۴) پاد تقارنی و تعدی است

۵- تابع $f: IR^{+۲} \rightarrow IR^۲$ با ضابطهٔ

$f(x,y)=(\sqrt{x}\ ,\ \sqrt{y})$

تعریف شده است این تابع :

۱) یك به یك است و پوشا نیست .

۲) یك به یك نیست ولی پوشا است.

۳) دو سویی است.

۴) نه یك به یك و نه پوشا است.

۶- روی مجموعهٔ اعداد طبیعی عمل * به صورت

$x*y=Max\{x,y\}$

تعریف شده است. عضو خنثی دراین مجموعه نسبت به عمل * کدام است ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ندارد

۷- اگر در یك تصاعد عددی $S_n=۲n(۳n+۱)$ ، (S_n مجموع n جمله اول است) آنگاه $a_n=?$ (a_n جمله (n)ام یا جمله عمومی است)

۱) $۸n$

۲) $۱۲n-۴$

۳) $۲n+۴$

۴) $۴n+۴$

۸- بیشترین مقدار $(tg_۳^{\ ۲})^{\sin\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲: $log_۲^{\ ۲}$

۳) $log_۳^{\ ۲}$ ۴: ۶

۹- عبارت $\frac{\sin x}{۱+\cos nx}$ برابر کدام است؟

(با فرض: $x\neq\frac{۲k\pi+\pi}{n}$)

۱) $cotg\,\frac{nx}{2}$ ۲) $tg\,\frac{nx}{2}$

۳) $\sin\frac{nx}{2}$ ۴) $\cos\frac{nx}{2}$

۱۰- حاصل عبارت

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}}\ \sqrt[4]{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

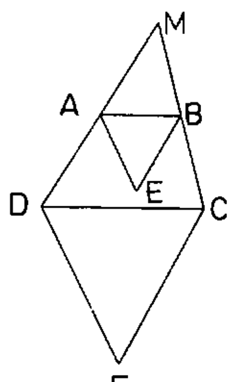
با شرط این‌که انتهای x در ناحیهٔ اول دایره مثلثاتی باشد کدام است؟

الف) $\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$ ب) $\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$

ج) $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ د) $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

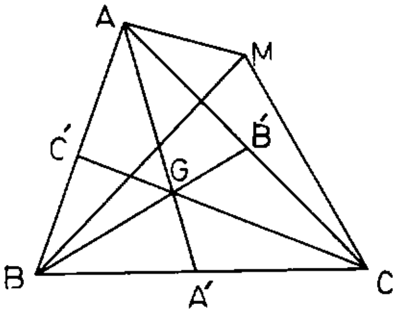
۱- ذوزنقهٔ ABCD را در نظر می‌گیریم. روی قاعده‌های AB و CD از این ذوزنقه مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABE و CDF را در یک طرف آنها می‌سازیم. ثابت کنید که



نقاط E و F و M محل تقاطع ساقهای ذوزنقه روی یک خط راست واقع‌اند.

۲- درصورتی که M نقطه‌ای واقع درصفحهٔ مثلث ABC، و G محل برخورد میانه‌های این مثلث باشد، ثابت کنید داریم:

$$MA^2+MB^2+MC^2=$$
$$GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$$



۳- هرگاه V یک‌فضای برداری‌حقیقی باشد، ثابت کنید هرمجموعه از بردارهای این‌فضا که شامل بردارهایی‌وابسته‌خطی باشد، خود وابستهٔ خطی است.

۴- ۱۲ نفر که دونفرآنها باهم‌برادرهستند به‌تصادف‌دور یک میز گرد می‌نشینند، مطلوب است:

الف) احتمال آنکه دقیقاً ۴ نفر بین این دو برادر قرار بگیرند.

ب) احتمال این‌که دو برادر درکنار هم باشند.

۵- حروف کلمهٔ Abcli را به تصادف مرتب کرده‌ایم. مطلوب است، احتمال این‌که حروف با صدا در مکانهای فرد قرار بگیرند.

۶- چند دانش‌آموز واردکلاسی می‌شوند وهمگی باهم دست می‌دهند، اگرتعداد دست‌دادنها ۲۸ باشد معین کنید تعداد دانش‌آموزان را.

۷- تابع $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ ، $a'\neq 0$ راطوری‌مشخص کنید تا خطوط $x=-\frac{1}{2}$ و $y=1$ مجانبهـای آن باشد و منحنی‌تابع محور yها را درنقطه‌ای به عرض ۱ — قطع‌کند.

پس‌از مشخص‌شدن تابع، نقاطی‌از منحنی‌تابع‌را بیابید که خطوط مماس درآن نقاط برخط $4y+x=0$ عمودباشد.

۸- از مبدأ مختصات قائمی برمنحنی تابع

$$y=\frac{x^2+4\sqrt{2}}{x}$$

رسم‌نمودیم. مطلوب‌است طولهای‌پای‌قائم ومعادله‌خط قائم.

۹- معادلهٔ زیرمفروض‌است:

$$\cos^2x-(4m+1)\cos x\sin x+m\sin^2x=0$$

الف) معادله به ازای‌چه مقادیری از m دارای جواب است.

ب) اگـر مجموع چهار ریشهٔ معادله‌کـه بین ۰ و 2π می‌باشنـد برابر $\frac{9\pi}{2}$ باشد مقدار m را تعیین‌کنید.

تستهای سال سوم ریاضی

۱- ازنقطهٔ P واقع‌دربرون دایرهٔ $C(0,3)$ که به‌فاصلهٔ ۵ از مرکزدایره قرار دارد قاطع PAB را چنان‌رسم می‌کنیم که $PA=AB$ باشد. اندازهٔ وتر AB چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۲- در مثلثی به اضلاع a وb وc واندازهٔ محیط 2P رابطهٔ

$$(P-a)(P-c)=P(P-b)$$

برقرار است. در این مثلث‌کدام گزینه درست است؟

۱) $\hat{C}=90^\circ$ ۲) $\hat{B}=90^\circ$

۳) $\hat{A}=90^\circ$ ۴) $\hat{B}>90^\circ$

۳- نقاط A' و B' و C' بـه ترتیب وسطهای اضلاع BC و AC و AB ونقاط A'' و B'' و C'' به ترتیب اوساط اضلاع $B'C'$ و $A'C'$ و $A'B'$ از مثلث $A'B'C'$ می‌باشند. مثلث $A''B''C''$ تبدیل‌یافته مثلث ABC باکدام تبدیل است؟

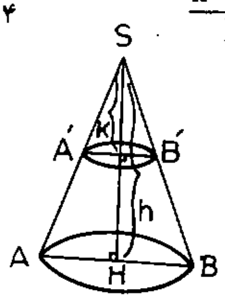
۱) انتقال ۲) تقارن مرکزی

۳) تقارن محوری ۴) تجانس

۴- مخروطی‌به ارتفاع h را باصفحه‌ای موازی‌قاعده و به فاصلهٔ k $(k\leqslant h)$ از رأس مخروط قطع کـرده‌ایم . نسبت حجم مخروط ایجاد شده در بـالا به حجم مخروط اولی کدام است ؟

۱) $\frac{k^3}{h^3}$ ۲) $\frac{k^3}{k^3+h^3}$

۳) $\frac{h^3-k^3}{h^3}$ ۴) $\frac{k^3}{h^3-k^3}$



۵- کدام گزینه صحیح **نیست** .

۱) IR روی‌خودش یك‌فضای برداری است.

۲) IR روی Q یك فضای برداری است.

۳) Q روی IR یك‌فضای برداری است.

۴) Q روی Q یك‌فضای برداری است.

۶- برای سکه‌ای احتمال آمدن «رو» $\frac{۱}{۴}$ است. اگر این سکه ۵ بار پرتاب شود، احتمال اینکه دقیقاً ۳ بار «رو» بیاید چقدر است؟

۱) $\frac{۹۰}{۵۱۲}$ ۲) $\frac{۱۸۰}{۱۰۲۴}$

۳) $\frac{۴۵}{۵۱۲}$ ۴) $۱-\frac{۹۰}{۵۱۲}$

۷- به چندطریق می‌توان ۲ خودکار و ۸ مدادرا درکنار هم‌چید به شرطی‌که همواره دقیقاً ۳ مدادبین ۲خودکار باشند.

۱) $۳!\times ۵!\times ۲!$

۲) $\binom{۸}{۳}\times ۳!\times ۲!$

۳) $\binom{۸}{۳}\times ۳!\times ۵!\times ۲!$

۴) $\binom{۸}{۳}\times ۵!\times ۳!$

۸- اگردر تابع f داشته‌باشیم $D_f=[-۱,۱]$، آنگاه $D_{f(۲x-۳)}$ کدام است؟

۱) $[۱\ ,\ ۲]$ ۲) $[۰\ ,\ ۱]$

۳) $[-۲\ ,\ -۱]$ ۴) $[-۱\ ,\ ۱]$

۹- درتابع $y=x^۳-۳x$ درنقاط اکسترمم خطوطی موازی محورهای مختصات رسم نمودیم. عدد مساحت مستطیل حاصل کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰- دستگاه‌زیربه ازای‌چه مقادیری‌از m دارای‌جواب است؟

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=m\\ x+y=\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

۱) $\{-\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۲}\}$

۲) $[-\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۲}]$

۳) $\left\{\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right\}$

۴) $\left[\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$

۱۱- معادلهٔ $\operatorname{Arccos}(۱-۲x^۴)=۲\operatorname{Arcsin}x^۴$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) بی‌شمار

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱- اگر $|\vec{V_۱}|=۳\sqrt{۳}$ و $|\vec{V_۲}|=۴$ و $|\vec{V_۳}|=۵$ و $(\vec{V_۱}\ ,\ \vec{V_۲})=۶۰^\circ$ و $\vec{V_۳}$ بردوبردار $\vec{V_۱}$ و $\vec{V_۲}$ عمودباشد، $\vec{V_۱}\vec{V_۲}\vec{V_۳}$ را حساب کنید.

۲- نقطه‌ای روی محورyها بیابیدکه از نقطهٔ

$A(۲\ ,\ ۳\ ,\ -۱)$

وازصفحهٔ $P:۲\sqrt{۲}\,x-z-۹=۰$ به یك فاصله باشد.

۳- معادلهٔ دایرهٔاصلی سه دایرهٔ $C_۱$و$C_۲$و$C_۳$ را بنویسید در صورتی‌که:

$C_۱:(x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۴$

$C_۲:x^۲+y^۲+۲x-۲y+۱=۰$

$$C_4 : x^2+(y+2)^2=4$$

۴- درستی و اعتبار استنتاج زیررا بررسی کنید:

$$(\sim p \wedge r) \Longrightarrow q \quad \wedge$$
$$(r \wedge s) \quad \wedge$$
$$\sim (s \Longrightarrow q)$$
$$\therefore \sim p \Longrightarrow (r \Longrightarrow \sim s)$$

۵- حلقه‌ای مانند $(R,+,\times)$ مثال بزنید که صفر حلقه و یك حلقه با هم برابر باشند و ثابت کنید هرمیدان یك حوزهٔ صحیح است.

۶- هرگاه K مضرب ۴ باشد رقم یکان عدد زیررا بیابید.

$$A=3^{2n+1}\times 2^{5n+3}+4^{n+1}$$

۷- به روشی غیر از روش کتاب درسی، ثابت کنید هرماتریس متعامد یا به‌صورت ماتریس‌دوران‌حول مبدأمختصات است و یا به صورت ماتریس تقارن نسبت به خط

$$y=x\,tg\,\frac{\theta}{2}$$

۸- در معادله $x^3-5x-2=0$ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله باشد مقدار عددی $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}$ را بیابید.

۹- مطلوب‌است محاسبه

$$\int\frac{\sqrt{\sin^2 2x}\,dx}{\sin^5 x} \qquad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

تستهای سال چهارم ریاضی

۱- نقاط $M(5\,,\frac{\pi}{6})$ و $N(12\,,\alpha)$ در یك صفحه مختصات قطبی مفروض‌اند. اگر اندازهٔ پاره خط MN برابر ۱۳ باشد، α کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{6}\,,\frac{\pi}{6}$　　۲) $\frac{2\pi}{3}\,,\frac{-\pi}{6}$

۳) $\frac{-\pi}{3}\,,\frac{2\pi}{3}$　　۴) $\frac{2\pi}{3}\,,\frac{\pi}{3}$

۲- اگر $\overrightarrow{V_1}(2,-1,3)$ و $\overrightarrow{V_2}(-2,3,0)$ باشند، اندازهٔ جبری تصویر $\overrightarrow{V_2}-\overrightarrow{V_1}$ روی بردار $\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_1}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{41}}{41}$　　۲) $\frac{-\sqrt{41}}{41}$

۳) $\frac{-\sqrt{41}}{41}$　　۴) $\frac{-\sqrt{41}}{14}$

۳- معادلهٔ صفحه‌ای که شامل خط

$$D:\ 2x-1=y+3=-3z$$

بوده و موازی‌بردار $\overrightarrow{V}(1,-1,2)$ باشد، کدام است؟

۱) $10x+8y-9z-29=0$

۲) $10x+8y+9z-29=0$

۳) $10x-8y-9z-29=0$

۴) $10x+8y+9z+29=0$

۴- فاصلهٔ نقطهٔ $A(-2,1,3)$ از محورxها کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۱۰　　۴) $\sqrt{10}$

۵- اگر $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=K$ ونقطهٔ O وسط پاره‌

خط MM' باشد نسبت $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$ برابر کدام مقدار است؟

۱) $\frac{k^2}{k^2-1}$ ۲) $\frac{k^2}{1-k^2}$

۳) $\frac{k^2}{1+k^2}$ ۴) $\frac{k^2-1}{k^2+1}$

۶- نقطه $M(a+2\,,\,2a-1)$ مفروض است. به‌ازای کدام‌مقدار a، از نقطهٔ M دو مماس به‌طول‌های مساوی بر دو دایره

$$C\ :\ 2x^2+2y^2-3x+4y=0$$

و

$$C'\ :\ x^2+y^2+x-y=1$$

می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- کدام‌نقطه کانون بیضی به معادلهٔ

$$4x^2+9y^2+16x-18y-23=0$$

است؟

۱) $(-2+\sqrt{5},-1)$

۲) $(-2+\sqrt{5},1)$

۳) $(2-\sqrt{5},0)$

۴) $(-2-\sqrt{5},-1)$

۸- عکس نقیض گزارهٔ

$$\{[(\sim p\wedge q)\Rightarrow r]\vee[(q\wedge s)\Rightarrow \sim r]\}\Rightarrow[(p\wedge q)\Rightarrow p]$$

هم‌ارز باکدام گزاره است؟

۱) $p\wedge\sim p$ ۲) $\sim p\vee\sim p$

۳) $(q\vee r)$ ۴) $p\Rightarrow p$

۹- کدام دستگاه ریاضی، حوزهٔ‌صحیح‌نیست؟

۱) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ۲) $(Q,+,\cdot)$

۳) $(Z_8\,,\oplus,\times)$ ۴) $(Z_7,\oplus,\times)$

۱۰- عضو ابتدای کرانهای بالا و عضو انتهای کرانهای پایین مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<10\}$ به ترتیب عبارتند از:

۱) ۵− و ۱۰ ۲) ۱۱ و ۴−

۳) ۹ و ۶− ۴) ۱۰ و ۵−

۱۱- ماتریس $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ یك مربع به مساحت ۴ سانتیمتر مربع را به:

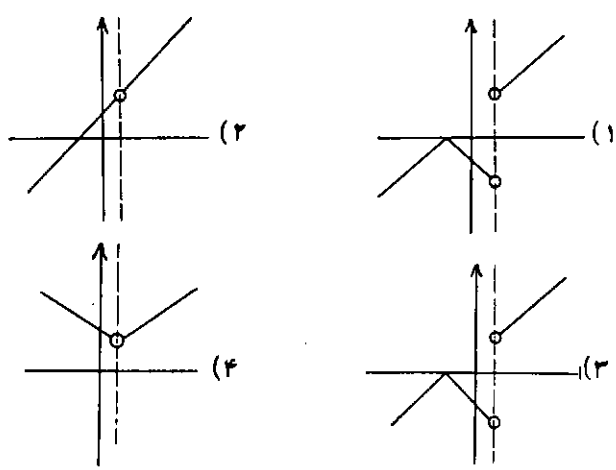
۱) مستطیلی با همان مساحت تبدیل می‌کند

۲) به مربعی قابل‌انطباق‌برهمان‌تبدیل می‌کند

۳) به یك خط تبدیل می‌کند

۴) به یك لوزی باهمان مساحت‌تبدیل می‌کند

۱۲- نمودار تابع $y=\frac{|x^2-1|}{x-1}$ کدام است.



۱۳- نمودار $\begin{cases}|x+1|\leqslant 1\\|y+1|\leqslant 1\end{cases}$ کدام است؟

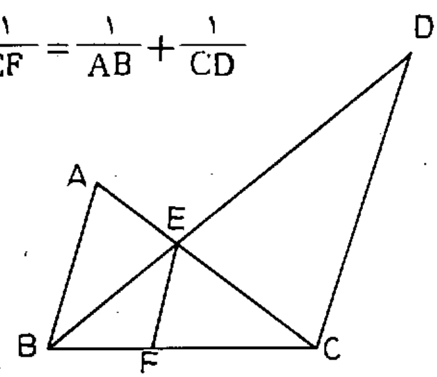
۱) یك مربع است ۲) یك لوزی است

۲) دوخط موازی است ۴) یك مستطیل است

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

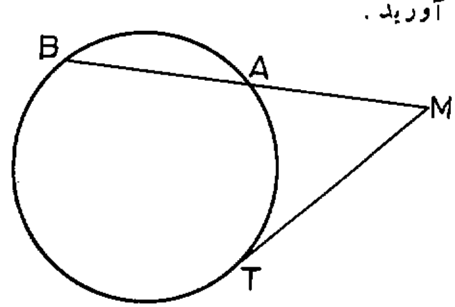
۱- مثلث ABC مفروض است. از رأس B خطی رسم می‌کنیم که ضلع AC را درنقطهٔ E قطع کند. از نقاط C و E خطوطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا به ترتیب خطوط BE و BC را در نقاط D و F قطع کنند ثابت کنید:

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$$



فرستنده: علی عمیدی، دانش‌آموز، از گرمسار

۲- ازنقطهٔ M واقع در خارج دایره‌ای قاطع MAB را چنان نسبت بـه دایره رسم می‌کنیم کـه $MA=AB=8$ باشد. اندازهٔ مماس MT راکه ازنقطهٔ M بردایره‌رسم‌می‌شود به دست آورید.



۳- معادلهٔ زیر مفروض است:

$$25^x=3+m5^x$$

الف) به ازای چه مقادیری از m یـك جواب معادله $x=-1$ است.

ب) به ازای چه مقادیری از m معادله جواب حقیقی ندارد.

ج) مجموعهٔ جواب معادله را به ازای $m=2$ به‌دست آورید.

۴- ثابت کنید اگر x و y و z به ترتیب جمله‌های پنجم وهفده‌ام وسی‌وهفتم یك تصاعدحسابی و همچنین یك تصاعدهندسی باشند، داریم:

$$x^{y-z}\cdot y^{z-x}\cdot z^{x-y}=1$$

۵- ریشه‌های معادلهٔ زیررا به دست‌آورید وآنها را به ساده‌ترین‌صورت ممکن‌برحسب نسبتهای مثلثاتی α بنویسید.

$$(tg\alpha)x^2-(tg^2\alpha+3)x+3tg\alpha=0$$

۶- معادلهٔ زیررا حل کنید

با فرض: $((1+\sin x)(\sin x+\cos x)\neq 0$

$$\frac{1-\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x}=0$$

تستهای سال دوم تجربی

۱- طول مماس مرسوم از نقطهٔ P بردایرهٔ $C(O,10)$ کدام است؟ درصورتی‌که وتر واصل بین نقاط تماس برابر ۱۲ باشد.

۱) ۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲/۵

۲- اضلاع مثلثی $2\sqrt{3}$ و ۴ و ۲ سانتی‌مترند. اندازهٔ روبه‌رو به‌کوچکترین ضلع کدام است؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 75°

۳- مساحت شش‌ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R برابر است با :

۱) $2R^2$ ۲) $2\sqrt{3}R^2$

۳) $\sqrt{3}R^2$ ۴) $4\sqrt{3}R^2$

۴- نامعادلهٔ $\frac{(1-x^2)^5}{\sqrt{x^3}}<0$ با کدام یک از شرایط زیر دارای جواب است؟

۱) $0<x<1$ ۲) $x<-1$

۳) $x>1$ ۴) $-1<x<1$

۵- اگر :

$$8\log_{x^8}^{(c^2-a^2)} \quad و \quad 4\log_{x^4}^{b^2} \quad و \quad 2\log_{x^2}^{(a^2+c^2)}$$

به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی تصاعد حسابی باشند، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $a^2+b^2=c^2$ ۲) $a^4+b^4=c^4$

۳) $a^2+c^2=b^2$ ۴) $a^4+c^4=b^4$

۶- اگر معادلهٔ $9ax^2+6bx+c=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) a و b و c به تصاعد حسابی (عددی) می‌باشند.

۲) a و b و c تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

۳) بین a و b و c رابطهٔ $b^2=9ac$ برقرار است.

۴) بین a و b و c رابطهٔ $4b^2=3ac$ برقرار است.

۷- جواب عمومی معادلهٔ

$$\text{Arccos}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$$

کدام است ؟

۱) $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۲) $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$

۳) $x=k\pi+\frac{5\pi}{6}$ ۴) $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$

۸- حاصل عبارت زیر معادل کدام گزینه است؟

$$P=\frac{\log(tg88^\circ)\times\log(tg87^\circ)\times\log(tg86^\circ)}{\log(\sin 88^\circ)\times\log(\sin 87^\circ)\times\log(\sin 86^\circ)}$$
$$\frac{\times\cdots\times\log(tg3^\circ)\times\log(tg2^\circ)}{\times\cdots\times\log(\sin 3^\circ)\times\log(\sin 2^\circ)}$$

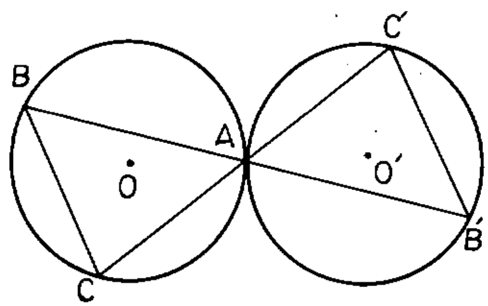
۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\log\frac{\pi}{2}$

۳) $\log(\sin\frac{\pi}{2})$ ۴) $tg\frac{\pi}{2}$

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱- دو دایره به مراکز O و O′ و به شعاعهای برابر در نقطهٔ A مماس مفروض می‌باشند. از نقطهٔ A دو خط راست رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در نقاط B و C و دایرهٔ O′ را در نقاط B′ و C′ قطع کنند ثابت کنید :

الف) $BC=B'C'$ ب) $BC \parallel B'C'$



۲- بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ با محور xها به ترتیب زوایای °۵۲ و °۱۱۴ می‌سازند. اگر

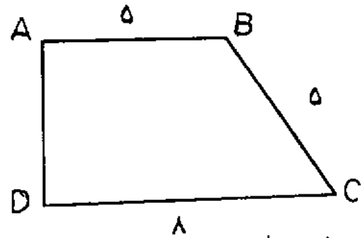
$$|\overrightarrow{OB}|=2 \quad و \quad |\overrightarrow{OA}|=2$$

باشند اندازهٔ زاویه‌ای که برایند این دو بردار با محور x′ox می‌سازند را تعیین کنید.

۳- در ذوزنقهٔ قائم الزاویه ABCD ،

$$\hat{A}=\hat{D}=۹۰°$$

است. اگر AB = ۵ و CD = ۸ و BC = ۵ باشد ؛ اولاً- اندازهٔ ساق قائم AD را محاسبه‌کنید. ثانیاً- حجم مخروط ناقص دوارحاصل از دوران این‌ذوزنقه‌حول ساق‌قائم AD را تعیین‌کنید.



۴- اگر داشته باشیم:

$$fog(x) = \frac{x^۲}{x^۲+۱} \quad و \quad f(x)=\frac{۱}{x+۱}$$

دامنهٔ‌تابع gof(x) را تعیین کنید.

۵- حدود زیر را حساب کنید (m و n و k عددهای طبیعی دلخواه فرض می‌شوند).

الف) $$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{x^۳-۳x+۲}{(x^۵-۱)^۲}\right)=?$$

ب) $$\lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{x^n+n}{x^{n+۱}+x}\right)=?$$

۶- معادلهٔ زیررا درنظر می گیریم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۵})+\sin(x+\frac{۳\pi}{۵}) =$$

$$\sin x+\sin(x+\frac{۲\pi}{۵})+\sin(x+\frac{۴\pi}{۵})$$

الف) ثابت‌کنیدکه تساوی‌فوق یك اتحاد مثلثاتی است.

ب) از اتحاد فوق، با اختیارکردن x = ۰ ثابت کنید:

$$\cos\frac{\pi}{۵}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$$

۷- معادلهٔ زیررا حل‌کنید وجوابهای بین‌صفر و ۲π را به دست‌آورید.

$$\sin x+\sin(x+\frac{۲\pi}{۵})+\sin(x+\frac{۴\pi}{۵})=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$$

تستهای سال سوم تجربی

۱- اگر :

O(۰ , ۰) و B(۳ , ۰) و A(۰ , ۳)

رئوس مثلث OAB باشند، اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۲- اگر :

$$|\vec{b}|=۳ \quad و \quad |\vec{a}|=۴ \quad و \quad (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{۲}$$

باشد، $(\vec{a}+۲\vec{b})\cdot(\vec{a}-۳\vec{b})$ کدام است؟

۱) ۳۸− ۲) ۳۸+
۳) ۱۸− ۴) ۱۸+

۳- دوازده وجهی منتظم ۳۰ یال دارد. عده رئوس آن کدام است ؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۴- استوانهٔ دوار و مخروط دواری‌قاعدهٔ مشترك‌دارند. درصورتی‌که حجم استوانه ۳ برابرحجم مخروط باشد، نسبت اندازهٔ ارتفاع استوانه‌به اندازهٔ ارتفاع مخروط‌کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

۵- دامنهٔ تعریف تابع باضابطهٔ

$$f(x)=\sqrt{\log(\frac{x-1}{x+1})}$$

کدام است ؟

۱) $(-\infty\ ,\ 1)$　　۳) $(-1\ ,\ +\infty)$

۲) $(-\infty, -1)$　　۴) $(1\ ,\ +\infty)$

۶- اگر :

$$f(x)=x^3-1$$

و

$$fog(x)=x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x})$$

باشد آنگاه $gof(0)$ کدام است؟

۱) $-\sqrt[3]{3}$　　۴) $-7\sqrt[3]{3}$

۲) $-3\sqrt[3]{7}$　　۴) $-\sqrt[3]{7}$

۷- اگر تابع :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2-x} & x\neq 2\\ c & x=2\end{cases}$$

در نقطهٔ $x=2$ پیوسته باشد c کدام است؟

۱) -2　　۲) -4

۳) 2　　۴) 8

۸- فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=1-x^2$$

ازخط مماس برمنحنی نمایش تابع باضابطهٔ

$$g(x)=x^3-3x^2+3x+1$$

در مرکزتقارن آن برابراست با:

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱- فاصلهٔ مرکزتقارن منحنی نمایش تابع باضابطهٔ

$$xy=x+y$$

را از مرکزتقارن بیضی به معادلهٔ

$$3x^2+9y^2-12x-36y+2=0$$

حساب کنید.

۲- توابع :

$$f(x)=1-\frac{1}{x+1} \quad و \quad gof(x)=\frac{1+x}{\sqrt{x+1}}$$

مفروض‌اند. دامنه و برد تابع مرکب $fog(x)$ را تعیین کنید.

۳- ضریب زاویهٔ خط مماس برمنحنی نمایش تابع اولیهٔ تابع بـا ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^9}{\sqrt[5]{x^5-1}}$ را در نقطـه‌ای روی محور عرضها بـه دست آورید . سپس با شرط این‌کـه عرض اکسترمم تابع اولیهٔ تابع f برابر $\frac{-1}{9}$ بـاشد ضابطهٔ آن را مشخص کنید.

۴- معادلهٔ زیر مفروض است:

$$\cos x(\sin x-m\cos x)=\frac{1-m}{2}$$

الف) معادله به ازای‌چه مقادیری از m جواب ندارد

ب) مجموعهٔجوابهای معادلهٔ فوق رابه ازای

$$m=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

به دست آورید.

۵- در مثلث ABC دوضلع b و c معلوم ومثلث معادل مثلث متساوی‌الاضلاعی است که به‌ضلع a می‌باشد، مثلث‌را حل کنید.

تستهای سال چهارم تجربی

۱- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\log_{2}\frac{4-x^{2}}{2+x}$$

کدام است؟

۱) $(-\infty,-2)\cup(-2,2)$

۲) $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

۳) $(-\infty,2)$

۴) $(-2,2)$

۲- اگر :

$$g(x)=\frac{1}{x} \quad و \quad 2f(\frac{1}{x^{5}})+f(x^{5})=\frac{1}{x}$$

آنگاه $fog(-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{-2}{3}$

۳- حد :

$$f(x)=\left(\frac{1+x}{2x-1}\right)\left(\frac{6x^{5}+4x^{7}-1}{x^{2}(x^{5}+x^{3}+1)}\right)$$

وقتی $x\to\pm\infty$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- اگر تابع :

$$f(x)=\begin{cases}2x^{k}+k & x\geqslant 0\\ \frac{1}{x}\left(\frac{\sin^{2}2x}{x}\right) & x<0\end{cases}$$

درنقطهٔ صفر پیوسته باشد، مقدار k چیست؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵- اگرمجموع طولهای‌نقاط ماکزیمم ومینیمم تابع با ضابطهٔ $y=x^{3}+mx^{2}+x$ برابرطول مرکزتقارن تابع با ضابطهٔ $y=\frac{2x-1}{3x+1}$ باشد m برابراست‌با:

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۶- اگر در مثلثی رابطهٔ

$$\frac{\cos B-\cos C}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\cos B+\cos C}$$

برقرار باشد مثلث‌کدام است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه‌ومتساوی‌الساقین
۳) قائم‌الزاویه ۴) غیر مشخص

۷- به ازای‌چه مقادیری‌از m معادلهٔ زیرجواب ندارد؟

$$m(\sin x+\cos x)+\cos x=\sin x+2$$

۱) $m<1$ ۲) $|m|<2$
۳) $m>-1$ ۴) $-1<m<1$

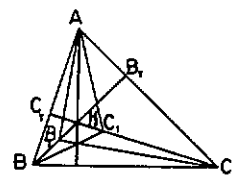
$$m(m-1)x=(m-1)(m+1)$$

اگر $m=-1 \Longrightarrow 2x=0 \Longrightarrow x=0$

حل مسائل سال دوم ریاضی

۱- پای ارتفاعهای رئوس B و C را به ترتیب B_2 و C_2 می‌نامیم.

از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویه زیر داریم:



$$\Delta AB_1C \sim \Delta AB_2B_1 \Longrightarrow$$
$$AB_1^2=AB_2 \cdot AC \qquad (1)$$
$$\Delta ABB_2 \sim \Delta ACC_2 \Longrightarrow$$
$$AB_2 \cdot AC=AC_2 \cdot AB \qquad (2)$$
$$\Delta AC_1B \sim \Delta AC_2C_1 \Longrightarrow$$
$$AC_1^2=AC_2 \cdot AB \qquad (3)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گردد:

$$AB_1^2=AC_1^2 \Longrightarrow AB_1=AC_1$$

۲- ازنقطهٔ C عمود CH را بر AD فرود آورده، آن رابه اندازهٔ خود تانقطهٔ C' امتداد می‌دهیم. از C' به‌نقاط A و B و D وصل می‌کنیم. دو مثلث ACD و $AC'D$ با هم برابرند. پس:

$$C'D=DC=2DB \text{ و } C'\hat{D}A=A\hat{D}C=60^\circ$$

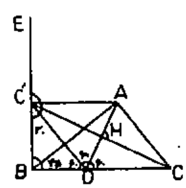
است. یعنی‌نقطهٔ A روی‌نیمساز زاویهٔ $C'DC$ واقع است و

$$C'\hat{D}B=180^\circ-60-60=60^\circ$$

است. مثلث $BC'D$ که متشابه با مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر ۲ وضلع مجاور به زاویهٔ قائمه ۱ است، قائم‌الزاویه می‌باشد. یعنی $C'\hat{B}D=90^\circ$ است در نتیجه:

$$C'\hat{B}A=45^\circ \text{ و } B\hat{C'}D=30^\circ$$

است. پس نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ $C'BD$ واقع است.



بنابراین نقطهٔ A که از خطهای راست DC' و BC' به یک فاصله می‌باشد روی نیمساز زاویهٔ $DC'E$ واقع است درنتیجه:

$$A\hat{C}B=A\hat{C'}D=\frac{1}{2}(180-30)=75^\circ$$

۳- چون R_1 و R_2 دو رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A هستند لذا هردو رابطه دارای ۳ خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی می‌باشند حال این ۳ خاصیت را برای $(R_1\cap R_2)$ بررسی می‌کنیم.

1) $\forall x\in A[(x,x)\in R_1 \wedge (x,x)\in R_2] \xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (x,x)\in(R_1\cap R_2)$

2) فرض کنیم: $(x,y)\in(R_1\cap R_2)$

$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$ $(x,y)\in R_1 \xrightarrow{R_1 \text{ تقارنی}}$ و $(x,y)\in R_2 \xrightarrow{R_2 \text{ تقارنی}}$

$\left.\begin{matrix}(y,x)\in R_1\\(y,x)\in R_2\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (y,x)\in(R_1\cap R_2)$

3) فرض کنیم: (x,y) و $(y,z)\in(R_1\cap R_2)$

$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$ (x,y) و $(y,z)\in R_1 \xrightarrow{R_1 \text{ تعدی}}$ و (x,y) و $(y,z)\in R_2 \xrightarrow{R_2 \text{ تعدی}}$

$\left.\begin{matrix}(x,z)\in R_1\\(y,z)\in R_2\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} (x,z)\in(R_1\cap R_2)$

درحالت کلی ممکن‌است $(R_1\cup R_2)$ یک‌رابطهٔ‌هم‌ارزی نباشد مثلاً فرض کنیم:

$$A=\{2,4,6\}$$

دراین صورت:

$$R_1=\{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)\}$$
$$R_2=\{(2,2)(4,4)(6,6)(2,6)(6,2)\}$$

R_1 و R_2 هردو رابطهٔ هم‌ارزی هستند اما رابطهٔ $(R_1\cup R_2)$ هم ارزی نمی‌باشد زیرا مثلاً:

$$(2,6)\in R \text{ و } (4,2)\in R$$

ولی $(4,6)\notin R$ یعنی‌خاصیت تعدی‌ندارد.

$$R=(R_1\cup R_2)=$$
$$\{(2,2)(4,4)(6,6)(2,4)(4,2)(2,6)(6,2)\}$$

۴- تعریف رابطه‌که روی N می‌باشد به صورت زیر است:

$$\forall a,b\in N ، aRb \Longleftrightarrow a+b-ab\leqslant 1$$

۱) ابتدا باید ثابت‌کنیم به ازای هر $a\in N$:

$$a+a-aa\leqslant 1 \text{ یا } 2a-a^2\leqslant 1$$

می‌دانیم: $\forall a\in N ، (a-1)^2\geqslant 0$

$$\Longrightarrow a^2-2a+1\geqslant 0 \Longrightarrow 2a-a^2\leqslant 1$$

$\Longrightarrow aRa$ بازتابی

۲) فرض‌کنیم: $aRb \Longrightarrow a+b-ab\leqslant 1$

$\Longrightarrow b+a-ba\leqslant 1 \Longrightarrow bRa$ تقارنی

۳) اگر $a=1$ دراین صورت:

$$a+c-ac=c+1-c=1\leqslant 1$$

اگر $c=1$ نیز مشابه بالا ثابت می‌شود که:

$$a+c-ac\leqslant 1$$

درحالت $a=c=2$ که $a+c=ac$ و واضح است که

$$a+c-ac=0\leqslant 1$$

در بقیهٔ حالتهای ممکن و برای هر دو عدد طبیعی مانند a و c داریم:

$$a+c<ac \Longrightarrow (a+c)-ac<0\leqslant 1$$

بنابراین هرگاه aRb و bRc آنگاه aRc یعنی‌گزارهٔ شرطی زیر چون‌همواره دارای تالی درست است پس ارزش درست دارد. لذا رابطهٔ خاصیت‌تعدی نیز دارد و بنابراین یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

$$\forall a,b,c\in N ، [aRb\wedge bRc] \Longrightarrow \underbrace{aRc}_{T}$$

۵-

$$f: z\to N$$

داریم: $f(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ -2x+1 & x\leqslant 0\end{cases}$

اگر $x_1 , x_2>0$ و $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow$

$$2x_1=2x_2 \Longrightarrow x_1=x_2$$

اگر $x_1 , x_2\leqslant 0$ و $f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow$

$$-2x_1+1=-2x_2+1 \Longrightarrow x_1=x_2$$

بنابراین تابع در هر ضابطه یک به یک است از طرفی برد ضابطهٔ بالایی با توجه به این که $x>0$ عبارت است از مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج وبرد ضابطهٔ پایینی با توجه به این که $x\leqslant 0$ عبارت است از مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و چون برد ضابطه‌ها عضو مشترک ندارند لذا تابع درکل یک به یک است.

از طرفی همان‌طورکه در بالا ذکر شد، مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج توسط ضابطهٔ بالایی و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد توسط ضابطهٔ پایینی پوشیده می‌شود و درکل مجموعهٔ دوم یعنی N پوشیده می‌شود و یا به عبارت دیگر $R_f=N$، پس تابع‌پوشا است.

-۶

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2\alpha-4}{2}=\alpha-2$$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+4\alpha-2}{2}=2\alpha-1$$

$$C\left|\begin{matrix}\alpha-2\\ 2\alpha-1\end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$OC=\sqrt{x_C^2+y_C^2}=\sqrt{2}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{(\alpha-2)^2+(2\alpha-1)^2}=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$(\alpha-2)^2+(2\alpha-1)^2=2$$

$$\alpha^2-4\alpha+4+4\alpha^2-4\alpha+1=2$$

$$5\alpha^2-8\alpha+3=0$$

$$\alpha=\frac{4\pm\sqrt{16-15}}{5}=\frac{4\pm1}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=1\ ,\ \frac{3}{5}}$$

۷- ریشه‌های معادله‌جدید را Z_1 و Z_2 می‌نامیم:

$$Z_1=x'^2+x'' \qquad Z_2=x''^2+x'$$

$$S=Z_1+Z_2=x'^2+x''+x''^2+x'$$

$$=x'^2+x''^2+x'+x''$$

$$S=(x'+x'')^2-2x'x''+x'+x''$$

$$S=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\times\frac{c}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$=(3)^2-2(1)+3=10$$

$$P=Z_1\cdot Z_2=(x'^2+x'')(x''^2+x')$$

$$P=(x'x'')^2+x'^3+x''^3+x'x''$$

$$P=(x'x'')^2+(x'+x'')^3-3x'x''(x'+x'')+x'x''$$

$$P=(1)^2+(3)^3-3(1)(3)+1=20$$

معادلهٔ جدید: $Z^2-SZ+P=0 \Rightarrow$

$$Z^2-10Z+20=0$$

-۸

$$81^{\sin^2x}+81^{\cos^2x}=30 \Rightarrow$$

$$81^{\sin^2x}+81^{1-\sin^2x}=30$$

$$81^{\sin^2x}+\frac{81}{81^{\sin^2x}}=30 \Rightarrow$$

$$(81^{\sin^2x}=A) \Rightarrow A+\frac{81}{A}=30$$

$$A^2-30A+81=0 \Rightarrow$$

$$(A-3)(A-27)=0 \Rightarrow \left|\begin{matrix}A=3\\ A=27\end{matrix}\right.$$

$$81^{\sin^2x}=3 \Rightarrow 3^{4\sin^2x}=3^1 \Rightarrow$$

$$\sin^2x=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\cos2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}}$$

$$81^{\sin^2x}=27 \Rightarrow 3^{4\sin^2x}=3^3$$

$$\Rightarrow 4\sin^2x=3 \Rightarrow \sin^2x=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{3}{4} \Rightarrow \cos2x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}}$$

۹- معادلهٔدوم دستگاه‌را در $tg\theta$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}2x=y\,tg\theta+\sin\theta\\ 2y\,tg\theta=x+\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=y\,tg\theta+\sin\theta\\ x=2y\,tg\theta-\sin\theta\end{cases}$$

معادلهٔ دوم را در ۲− ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}2x=y\,tg\theta+\sin\theta\\ -2x=-4y\,tg\theta+2\sin\theta\end{cases}$$

از جمع دو رابطهٔ دستگاه داریم:

$$-3y\,tg\theta+3\sin\theta=0$$

از رابطهٔاخیر نتیجه می‌شود:

$$y=\cos\theta \qquad (1)$$

با قراردادن رابطهٔ(۱) در معادلهٔاول دستگاه داریم:

$$y=\cos\theta:\ 2x=\cos\theta\,tg\theta+\sin\theta \Rightarrow$$

$$2x=2\sin\theta$$

پس خواهیم داشت:

$$x=\sin\theta \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه خواهد شد:

$$\sin^2x+\cos^2x=1 \quad : \quad x^2+y^2=1$$

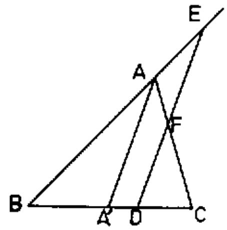
حل تشریحی تستهای دوم ریاضی

۱- گزینهٔ (۲) درست است. زیرا:

$$AA'\parallel DE \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{A'D}{A'B} \qquad (1)$$

$$AA'\parallel DF \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{A'D}{A'C=A'B} \ (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$$



۲- گزینهٔ (۴) درست است ، زیرا اگر BB' نیمساز زاویهٔ B باشد بنا به فرض مسأله

$B'C=6cm$ و $B'A=4cm$

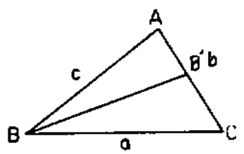
است. در نتیجه :

$$b=AC=4+6=10cm$$

خواهد بود. اما $a+b+c=40cm$ می‌باشد پس:

$$b+c=40-10=30m$$

است.



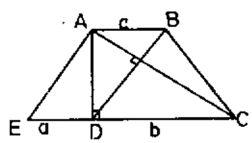
بنا به خاصیت‌نیمساز می‌توان نوشت:

$$B'C=\frac{b\cdot a}{a+c} \Rightarrow 6=\frac{10\times a}{30}$$

$$\Rightarrow a=18cm$$

۳- گزینهٔ (۳) درست است ، زیرا اگر ABCD ذوزنقه‌ای قائم‌الزاویه باشدکه اقطارش برهم عمود باشند، با فرض $\hat{A}=\hat{D}=90°$ ، از رأس A خطی موازی قطر BD رسم می‌کنیم تا امتداد قاعدهٔ CD را در نقطهٔ E قطع کند چهار ضلعی ABDE متوازی الاضلاع است . پس

$$DE=AB=a$$



است و مثلث AEC قائم‌الزاویهٔ در رأس A و $AD=h$ ارتفاع وارد بروتر این مثلث است. بنابراین داریم:

$$AD^2=DE\cdot DC \Rightarrow \boxed{h^2=a\cdot b}$$

۴- (۲)

$$[A\times(B\cup C)]-(A\times C')$$
$$=A\times[(B\cup C)-C']=A\times[\underbrace{(B\cup C)\cap C}_{\text{جذب}}]$$
$$=A\times C$$

۵- (۳) می‌دانیم کلاسهای هم‌ارزی هر رابطهٔ هم‌ارزی مجموعه‌های جدا ازهم‌هستند و نمی‌توانند عضر مشترک داشته باشند به عبارت دیگر:

$$\forall a,b\in A\ ،\ a\in[b] \iff [a]=[b]$$

حال با توجه به این‌که طبق فرض داریم:

$$\forall b\in A\ ;\ b\in[a]$$

درحقیقت تمامی اعضای A با $a\in A$ رابطه‌دارند پس‌رابطهٔ R فقط دارای یک کلاس‌هم‌ارزی می‌باشد یعنی‌بایدهمهٔ اعضای A با a در رابطه باشند و این ممکن نیست جز آن‌که :

$$R=A\times A$$

(توجه داریم که R باید هم‌ارزی‌باشد.)

۶- (۲) روش اول: گزینه‌های ۱و۲و۳ باتوجه به این که $D_f=IR$ نمی‌توانند توابعی یک‌به‌یک‌را معین کنند لذا:

$$f(x)=x^۲|x|$$

یک‌به‌یک است .

روش دوم: $f(x)=x^۲|x|$ یک تابع دوضابطه‌ای است (برحسب این‌که $x\geqslant ۰$ یا $x<۰$) که بررسی‌خاصیت یک‌به یکی در آن به‌راحتی امکان‌پذیر است (رجوع کنید به برهان ۴، مقالهٔ تابع و بررسی‌خاصیت یک‌به یکی درانواع توابع).

۷- (۳)

ولی $f(۰,۰)=(۰,۰)$ و $f(۱,۱)=(۰,۰)$

$$(۰,۰)\neq(۱,۱)$$

پس تابع یک به یک نیست از طرفی اگر فرض‌کنیم

$$(۰,۱)\in IR^۲$$

دراین صورت $f(x,y)=(۰,۱)$ و یا

$$(x-y\ ,\ ۳x-۳y)=(۰,۱)$$

که معادله جواب‌ندارد پس تابع‌پوشا نیست!

۸- (۳) ریشهٔ معادله را مساوی x قرار می‌دهیم :

$$x=۲-\sqrt{۵}$$

چون می‌خواهیم ضرایب معادله‌حاصل رادیکال نداشته باشد:

$$x-۲=-\sqrt{۵}$$

$(-\sqrt{۵})$ را دریک‌طرف نگه می‌داریم وطرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^۲-۴x+۴=۵$$
$$x^۲-۴x-۱=۰$$

۹- (۳) معادلهٔ اول را در (۲) و معادلهٔ دوم را در (−۱) ضرب می‌کنیم. سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}۴x+۳y+۶z=۳/۵\\ -۳x-۲y-۵z=-۱/۲۵\end{cases}$$

$$x+y+z=۲/۲۵$$

۱۰- با توجه به تساوی زیر:

$$\frac{\sin x}{۱-\cos x}=\frac{۱+\cos x}{\sin x}$$

خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\sin x}{۱-\cos x}\right)^{۲n-۱}+۳\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}$$
$$=\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}+۳\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}$$
$$=۴\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲n-۳}$$
$$\left(\frac{۱+\cos x}{\sin x}\right)^{۲n-۱}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲n-۱}$$
$$\Longrightarrow \frac{۱+\cos x}{\sin x}=\frac{۱}{۲}$$
$$۲+۲\cos x=\sin x \Longrightarrow (۲+۲\cos x)^۲=\sin^۲ x$$
$$۸+۸\cos x+۴\cos^۲ x=۱-\cos^۲ x$$
$$\Longrightarrow ۵\cos^۲ x+۸\cos x+۳=۰$$
$$(۵\cos x+۳)(\cos x+۱)=۰ \Longrightarrow \begin{cases}\cos x=-۱\\ \cos x=\frac{-۳}{۵}\end{cases}$$

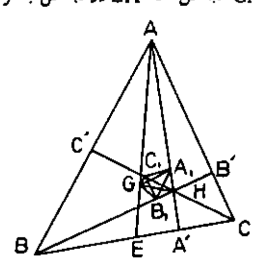
پس گزینهٔ (۱) صحیح است .

حل مسائل ریاضیات سال سوم

۱- اولاً: اگر AE میانهٔ‌رأس A ونقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد داریم:

$$\frac{\overline{AA_۱}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین‌خط $GA_۱$ مجانس‌خط EA' درتجانس به مرکز A و



نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ است. لذا $GA_۱\parallel EA'$ است. پس:

$$GA_۱\perp AA'$$

یعنی $G\hat{A}_۱H=۹۰^\circ$ می‌باشد. در نتیجه نقطهٔ $A_۱$ بر دایره‌ای به قطر GH واقع‌است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که نقاط $B_۱$ و $C_۱$ نیز روی دایره‌ای به قطر GH قرار دارند. پس پنج نقطه $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$، G و H روی یک دایره‌اند.

ثانیاً : پنج‌ضلعی $GB_۱HA_۱C_۱$ محاطی‌است. پس:

$$B_۱\hat{A}_۱C_۱=B_۱\hat{H}C_۱=\frac{\widehat{B_۱GC_۱}}{۲}$$

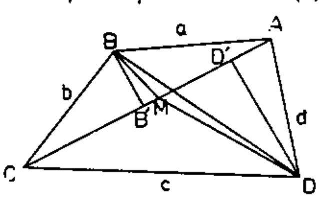
از طرفی $B_۱\hat{H}C_۱=B\hat{A}C$ است. درنتیجه:

$$B_۱\hat{A}_۱C_۱=B\hat{A}C$$

می‌باشد. به همین‌ترتیب‌ثابت می‌شود که دیگر زوایای نظیر در دو مثلث $A_۱B_۱C_۱$ و ABC با هم‌برابرند. پس این دومثلث متشابه‌اند.

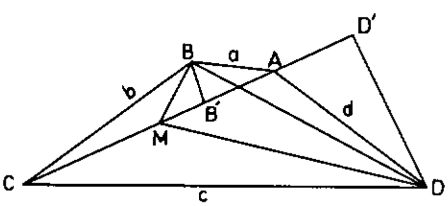
۲- در چهارضلعی ABCD فرض می‌کنیم $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $DA=d$ باشد. تصاویر نقاط B وD روی قطر AC را B' و D' و وسط قطر AC را نقطهٔ M می‌نامیم. در مثلثهای ABC وACD رابطه‌های زیر را می‌توان نوشت :

$$\triangle ABC : |a^۲-b^۲|=۲AC\cdot MB' \quad (۱)$$
$$\triangle ACD : |c^۲-d^۲|=۲AC\cdot MD' \quad (۲)$$



حال اگر $a-b$ و $c-d$ متحدالعلامه باشند نقطهٔ M روی‌پاره خط $B'D'$ قرار می‌گیرد واز جمع کردن رابطه‌های (۱)و(۲) خواهیم داشت:

$$(a^۲+c^۲)-(b^۲+d^۲)=۲AC(MB'+MD')$$
$$=۲AC\cdot B'D'$$



و درصورتی که $a-b$ و $c-d$ مختلف‌العلامه باشند نقطهٔ M در امتداد پاره خط $B'D'$ واقع می‌شود‌که در این حالت از تفریق رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$(s \sim \Longrightarrow r)$ هم‌ارزنباشند و با توجه به این‌که $r \equiv F$ پس $(s \sim \Longrightarrow r)$ به انتفای مقدم دارای ارزش درست است بنابراین باید $(p \Longleftrightarrow q)$ نادرست‌باشد و چون $p \equiv T$ پس: باید $q \equiv F$.

حال می‌توان با توجه به ارزشهای تعیین شده برای گزاره‌های r و p و q ارزش گزارهٔ موردنظر را تعیین کرد که ارزش آن همواره درست است.

۴- در کتاب ریاضیات جدید سال اول ثابت شد که

$$\varnothing' = M \text{ و } M' = \varnothing$$

حال فرض کنیم $A' \cup B = M$ پس:

$$(A' \cup B)' = M'$$

بنابراین:

$$A \cap B' = \varnothing$$

اگر فرض کنیم $A \cap B' = \varnothing$ پس $(A \cap B')' = \varnothing'$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$A' \cup B = M$$

۵- کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت برابر است با: عوامل مشترک با بزرگترین توان ضرب در عوامل غیرمشترک

$$A = ۲^{۱۱} \times ۳^{۲}(x-y)(x^{۲}+y^{۲}+xy)(x+y)^{۲}$$

$$B = ۲^{۷} \times ۳^{۳}(x+y)(x^{۲}+y^{۲}-xy)(x-y)^{۲}$$

$$\text{ک.م.م } B , A = ۲^{۱۱} \times ۳^{۳}(x-y)^{۲}(x+y)^{۲}(x^{۲}+y^{۲}+xy)(x^{۲}+y^{۲}-xy)$$

$$\text{ک.م.م } B , A = ۲^{۱۱} \times ۳^{۳}(x^{۲}-y^{۲})^{۲}(x^{۴}+y^{۴}+۲x^{۲}y^{۲}-x^{۲}y^{۲})$$

$$\text{ک.م.م } B , A = ۲^{۱۱} \times ۳^{۳}(x^{۲}-y^{۲})^{۲}(x^{۴}+y^{۴}+x^{۲}y^{۲})$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عبارت، برابر است با عوامل مشترک باکوچکترین توان،

$$\text{ب.م.م } B , A = ۲^{۷} \times ۳^{۲}(x-y)(x+y)$$

$$\text{ب.م.م } B , A = ۲^{۷} \times ۳^{۲}(x^{۲}-y^{۲})$$

۶-

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۲)^{۲}}+\sqrt[۳]{(\sqrt{۲})^{۲}}+\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}} \qquad a=۲ ,\ b=\sqrt{۲}$$

داریم:

$$a-b=(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^{۲}}+\sqrt[۳]{b^{۲}}+\sqrt[۳]{ab})$$

مخرج کسر فوق به صورت

$$(\sqrt[۳]{a^{۲}}+\sqrt[۳]{b^{۲}}+\sqrt[۳]{ab})$$

است که برای گویاکردن باید صورت و مخرج را در $\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}$ ضرب کرد، پس:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۲)^{۲}}+\sqrt[۳]{(\sqrt{۲})^{۲}}+\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}} \times \frac{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}}{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}}$$

$$= \frac{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}}{۲-\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}}{۲-\sqrt{۲}} \times \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{(\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۶]{۲})(۲+\sqrt{۲})}{۴-۲}$$

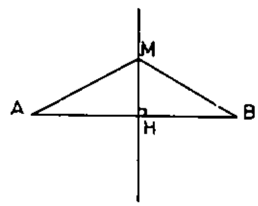
$$= \frac{(\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۶]{۲})(۲+\sqrt{۲})}{۲}$$

حل تشریحی تستهای سال اول

۱- گزینهٔ (۱) درست است. زیرا مکان‌هندسی نقاطی که از دونقطهٔ A و B به یک فاصله می‌باشند، عمود منصف پاره‌خط AB است. و چون $AB = ۸cm$ می‌باشد پس کمترین مقدار فاصلهٔ نقاط عمود منصف از نقاط A و B

$$HA = HB = \frac{۸}{۲} = ۴$$

می‌باشد بنابراین نقطه‌ای روی عمود منصف پاره‌خط AB وجود ندارد که از نقاط A و B به‌فاصلهٔ ۳ سانتیمتر واقع باشد.



۲- می‌دانیم که مجموع تعداد اضلاع واقطار یک n ضلعی محدب مساوی $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است. پس:

$$\frac{n(n-۱)}{۲} = ۳۶ \Longrightarrow n^{۲}-n-۷۲=۰$$

$$\Longrightarrow n=۹ \text{ و } n=-۸$$

اما مجموع زوایای یک n ضلعی محدب برابر $(۲n-۴)$ قائمه است. پس:

قائمه $۱۴ = ۴ - ۹ \times ۲$ = مجموع زوایای ۹ ضلعی

بنابراین گزارهٔ (۳) درست است.

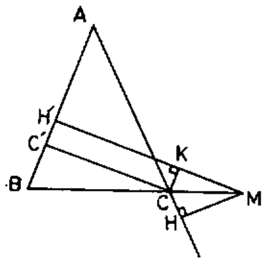
۳- گزینهٔ (۴) درست‌است. زیرا اگردر مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ ارتفاع CC' را رسم کنیم و M نقطه‌ای واقع برامتداد قاعدهٔ این مثلث باشد واز این نقطه عمودهای MH و MH' را برساقهای مثلث یا امتداد آنها فرود آوریم واز نقطهٔ C عمود CK را بر MH' رسم کنیم، دومثلث قائم‌الزاویهٔ MCK و MCH با هم برابرند و چهارضلعی $CKH'C'$ مستطیل است. پس:

$$CC' = KH' \text{ و } MH = MK$$

است. از آن‌جا داریم:

$$MH' - MH = MH' - MK = KH'$$

$$= CC' = h_c = h_b$$



۴- (۲)

$$[\overbrace{(q \wedge p)}^{r} \vee (\sim q \vee p)] \overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\equiv} [\overbrace{(q \wedge p)}^{r} \vee \sim q] \vee p$$

$$\equiv (p \vee \sim q) \vee p \overset{\text{جابجایی‌وشرکت‌پذیری}}{\equiv} \sim q \vee (p \vee p)$$

$$\equiv \sim q \vee p$$

۵- (۲)

گزاره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(اگر p اول‌باشد) $\Longrightarrow$ (p طبیعی است)

که عکس‌نقیض آن‌به صورت زیر نوشته می‌شود:

$\underbrace{\text{(اگر p طبیعی‌نباشد)}}_{p} \Longrightarrow \underbrace{\text{(p اول‌نیست)}}_{q}$

پس p شرط کافی برای q و نیز می‌توان گفت q شرط لازم برای p است.

۶- (۳)

باتوجه به قضیهٔ یکتایی متمم نتیجه می‌گیریم که باید B' متمم A باشد یعنی باید $B'=A'$ یا $B=A$.

۷- (۴)

$$\sqrt[۲۱]{\frac{a}{\sqrt[۲۲]{a}}} = \sqrt[۲۱]{\frac{\sqrt[۲۲]{a^{۲۲}}}{\sqrt[۲۲]{a}}} = \sqrt[۲۱]{\sqrt[۲۲]{a^{۲۱}}} = \sqrt[۲۲]{a}$$

۸- (۴)

$$m^{۲}x - m^{۲} = mx - ۱$$

$$m^{۲}x - mx = m^{۲} - ۱$$

باید $\begin{cases} b=۰ \\ a\neq۰ \end{cases}$ باشد.

$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=2AC(MD'-MB')$$
$$=2AC\cdot D'B' \Rightarrow$$
$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=2AC\cdot B'D'$$

۳- ترکیبی خطی از این بردارها مساوی با بردار صفر قرار می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که ضرایب این ترکیب‌خطی باید همگی‌صفر باشند.

$$a(x^3+x^2+x+1)+b(x^2+x+1)$$
$$+c(x+1)+d5=0x^3+0x^2+0x+0$$
$$\Rightarrow ax^3+(a+b)x^2+(a+b+c)x$$
$$+(a+b+c+5d)=0x^3+0x^2+0x+0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=0}\\ a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=0}\\ a+b+c=0 \Rightarrow \boxed{c=0}\\ a+b+c+5d=0 \Rightarrow\\ 5d=0 \Rightarrow \boxed{d=0}\end{cases}$$

پس بردارها مستقل خطی‌اند.

۴- فرض کنیم مثلاً بردار v_i مضرب ناصفری از بردار v_j باشد یعنی $v_i=kv_j$ که $k\neq 0$ در این صورت:

$$v_i-kv_j=0$$

و یا:

$$0v_1+0v_2+\dots+0v_{i-1}+0v_{i+1}+\dots+$$
$$0v_{j-1}+0v_{j+1}+\dots+0v_n+v_i-kv_j=0$$

وهمان‌طور که مشاهده می‌شود، رابطهٔ اخیر یک ترکیب‌خطی از n بردار فوق‌است که مساوی با بردار صفرشده اما حداقل یکی‌از ضرایب آن یعنی $k-$ مخالف صفر است پس بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

۵- باید ثابت کنیم s نسبت به جمع وضرب اسکالر بسته است. (زیرمجموعه‌بودن s نسبت به v و ناتهی بودن آن واضح است.)

فرض کنیم: $r_1u\ ,\ r_2u\in s$

$$r_1u+r_2u=\overbrace{(r_1+r_2)}^{r_3}u=r_3u\in s$$

فرض کنیم: $\alpha\in IR\ ,\ ru\in s\Rightarrow$

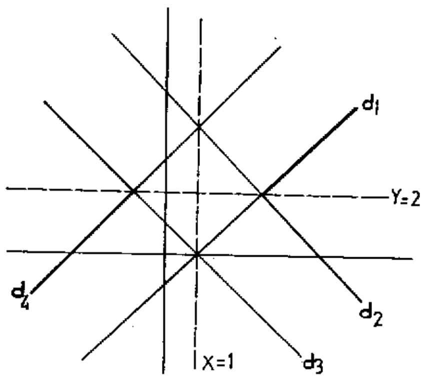
$$\alpha(ru)=\underbrace{(\alpha r)}_{r_1}u=r_1u\in s$$

پس s طبق‌قضیهٔ زیر فضای v است.

۶-

$$\begin{cases}x\geqslant 1\\ y\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x-1-y+2=2$$
$$\Rightarrow x-y=1 \qquad \text{خط } d_1$$
$$\begin{cases}x\geqslant 1\\ y\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow x-1+y-2=2$$
$$\Rightarrow x+y=5 \qquad \text{خط } d_2$$
$$\begin{cases}x\leqslant 1\\ y\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow -x+1-y+2=2$$
$$\Rightarrow x+y=1 \qquad \text{خط } d_3$$
$$\begin{cases}x\leqslant 1\\ y\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow -x+1+y-2=2$$
$$\Rightarrow y-x=3 \qquad \text{خط } d_4$$

خطوط d_1 و d_2 و d_3 و d_4 را رسم می‌کنیم. با توجه به خطوط $x=1$ و $y=2$ شکل، قسمتهای دلخواه را انتخاب می‌کنیم:



۷- می‌دانیم:

اگر $x\to 0 \Rightarrow \sin ax\sim ax$

$$\Rightarrow \text{حد مسأله}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x+3x+\dots+nx}{2x+4x+6x+2nx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+2+3+\dots+n)}{x(2+4+6+\dots+2n)}$$
$$=\frac{1+2+3+\dots+n}{2+4+6+\dots+2n}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)}=\frac{1}{2}$$

۸-

$$S=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos x}$$

با توجه به اتحادهای $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ خواهیم داشت:

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$$
$$S=\sqrt{(a^2+b^2)(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})-2ab(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}$$
$$=\sqrt{(a+b)^2\sin^2\frac{x}{2}+(a-b)^2\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$=\left|(a+b)\cos\frac{x}{2}\right|\sqrt{1+(\frac{a+b}{a-b})^2tg^2\frac{x}{2}}$$

با فرض: $tgy=\frac{a+b}{a-b}tg\frac{x}{2}$ داریم:

$$S=\left|(a+b)\cos\frac{x}{2}\right|\sqrt{1+tg^2y}$$

ودر نتیجه داریم:

$$S=\left|(a+b)\cos\frac{x}{2}\sec y\right|$$

۹- معادلهٔ:

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=tgx+cotgx$$

با توجه به اتحادهای

$$tgx+cotgx=\frac{2}{\sin 2x}$$

و

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

تبدیل به معادلهٔ زیر می‌شود:

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sin 2x}$$

وچون به ازای هرمقدار دلخواه x داریم:

$$\left|\sin(x+\frac{\pi}{4})\right|\leqslant 1 \quad \text{و} \quad \left|\frac{1}{\sin 2x}\right|\geqslant 1$$

معادلهٔ فوق تنها وقتی دارای جواب است که یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم:

(الف) $\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1\\ \sin 2x=1\end{cases}$

(ب) $\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1\\ \sin 2x=-1\end{cases}$

حالت الف: از معادلات دستگاه (الف) نتیجه می‌شود

(الف) $\begin{cases}x=2m\pi+\frac{\pi}{4}\\ x=n\pi+\frac{\pi}{4}\end{cases}$

که جواب مشترك دومعادلهٔ دستگاه (الف) چنین است:

$$\boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}}$$

حالت ب: از معادلات دستگاه (ب) نتیجه می‌شود:

$$(ب)\ \begin{cases} x=2m\pi-\frac{3\pi}{4} \\ x=n\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

بدیهی است که در این‌حالت دومعادلهٔ دستگاه جواب مشترکی ندارد . بنابراین جواب عمومی معادلهٔ مفروض :

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

می‌باشد.

حل تشریحی تستهای سوم ریاضی

۱ - گزینهٔ (۳) درست است زیرا اگر قطری را که از نقطهٔ مفروض M می‌گذرد رسم کنیم :

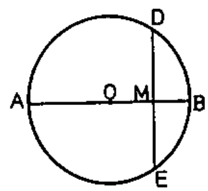
$$MB=2 \quad و \quad MA=8$$

خواهد بود. حال وتر DE را که عمود برقطر AB است رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این وتر کوچکترین‌وتری است که ازنقطهٔ M در دایره رسم می‌شود. بنابه خاصیت قوت نقطه نسبت به دایره می‌توان نوشت:

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MD}\cdot\overline{ME}=-MD^2 \Longrightarrow$$

$$MA\cdot MB=MD^2 \Longrightarrow MD^2=8\times 2=16$$

$$\Longrightarrow MD=4 \Longrightarrow DE=8$$



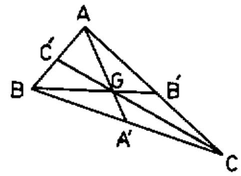
۲ - می‌دانیم که کوچکترین‌میانهٔ مثلث؛ میانه‌ای است که نظیر بزرگترین‌ضلع مثلث باشد. بنابراین‌باید میانهٔ نظیرضلعی راکه اندازه‌اش برابر ۱۳ است به دست‌آوریم. یعنی با فرض $a=13$ داریم:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(25+144)-169}$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{169}=\frac{13}{2}=6/5$$

بنابراین گزینهٔ (۲) جواب است.

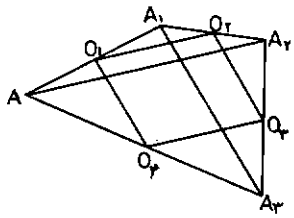


نکته : باتوجه به این‌که مثلثی با اضلاع ۵ و ۱۲ و ۱۳ (که‌یك‌دسته‌عدد فیثاغورثی است) مثلثی قائم‌الزاویه‌است که وتر آن برابر ۱۳ می‌باشد ، پس‌کوچکترین میانهٔ این مثلث ، میانه وارد بر وتر است که اندازهٔ آن نصف وتر یعنی

$$\frac{13}{2}=6/5$$

می‌باشد. پس گزینهٔ (۲) درست است.

۳ - گزینهٔ (۲) درست‌است زیرا نتیجهٔ‌ترکیب دوتقارن مرکزی، یك‌انتقال ونتیجه‌ترکیب یك‌انتقال ویك‌تقارن‌مرکزی، یك‌تقارن مرکزی است.



راه دیگر : اگر O_1 و O_2 و O_3 سه مرکز تقارن‌مفروض باشد، فرض می‌کنیم نقطهٔ A_1 قرینهٔ نقطهٔ مفروض A نسبت به نقطهٔ O_1 ونقطهٔ A_2 قرینهٔ‌نقطهٔ A_1 نسبت‌به نقطهٔ O_2 ونقطهٔ A_3 قرینهٔ‌نقطهٔ A_2 نسبت به نقطهٔ O_3 باشد. اگراز A_3 به A وصل کنیم و وسط پاره خط AA_3 را O_4 بنامیم چهار ضلعی

$$O_1O_2O_3O_4$$

متوازی‌الاضلاع است (متوازی‌الاضلاع وارینیون چهار ضلعی $AA_1A_2A_3$) . پس :

$$O_4O_3=O_1O_2 \quad و \quad O_4O_3 \parallel O_1O_2$$

است. بنابراین‌نقطهٔ O_4 نقطه ثابتی است و در نتیجه نقطهٔ A_3 قرینهٔ مرکزی‌نقطهٔ A نسبت‌به نقطهٔ ثابت O_4 است. یعنی نتیجه ترکیب سه‌تقارن مرکزی یك‌تقارن مرکزی می‌باشد.

۴ - اگریال چهار وجهی منتظم‌را a فرض‌کنیم مساحت کل‌چهار وجهی منتظم $a^2\sqrt{3}$ وحجم چهار وجهی منتظم برابر $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ است پس :

$$a^2\sqrt{3}=9\sqrt{3} \Longrightarrow a^2=9 \Longrightarrow a=3$$

اندازهٔ یال چهار وجهی منتظم

$$v=\frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Longrightarrow v=\frac{27\sqrt{2}}{12}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۵ - (۲)

زیرا : بردار صفر فضای IR^3 یعنی $(0,0,0)$ در مجموعهٔ $\{(x,y,z) \mid x+y<z\}$ نمی‌باشد لذا این‌مجموعه نمی‌تواند نسبت‌به عمل‌جمع تشکیل گروه بدهد (عضو خنثی را ندارد) پس زیرفضا نیز نمی‌باشد.

۶ - (۱)

زیرا : درفضای برداری IR^n هر $n+1$ بردار وبیشتر وابستهٔ خطی‌اند.

۷ - (۴)

زیرا: شرط‌لازم وکافی برای‌آن‌که بردارهای (a,b) و (c,d) در IR^2 مستقل‌خطی باشندآن است‌که

$$ad\neq bc \quad یا \quad ad-bc\neq 0$$

پس دراین تست باید $ab\neq 30$.

۸ - (۲)

این مسأله جزء مسائل ریاضیات جدید سوم ریاضی در برهان ۴ طرح ودرهمین شماره اثبات‌شده (مسأله ۲).

۹ - (۲)

$$a+[\underbrace{(b'+a')\cdot a'}_{جذب}]+a$$

$$=a+(a')+a=1+a=1$$

۱۰ - (۱)

$$(1/002)^5=(1+0/002)^5 \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=0/002 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+\dots$$

$$(1+0/002)^5=$$

$$1+5(0/002)+10(0/002)^2+\dots$$

$$(1/002)^5=1+0/01+0/00004$$

$$(1/002)^5=1/01004$$

پس گزینهٔ (۱) درست است.

۱۱ - (۴)

$$-\sin^2\pi x \geqslant 0 \Longrightarrow \sin\pi x=0$$

$$\Longrightarrow \pi x=k\pi \Longrightarrow x=k$$

پس داخل‌رادیکال همواره بایدصفر باشد. بنابراین

$$y=\sin\frac{\pi}{2}x$$

چون x عددصحیح‌است پس برد تابع $\{-1,0,1\}$ است.

۱۲ - ابتدا طرفین معادله‌را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$6\cos^2x+6\sin x\cos x-3=0 \Longrightarrow$$

$$2\cos^2x+2\sin x\cos x-1=0$$

حل مسائل برهان شمارهٔ ۵

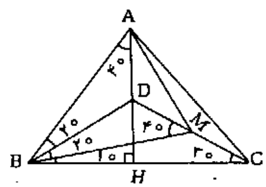
حل مسائل سال اول

۱- در مثلث متساوی‌الساقین ABC زاویهٔ رأس

$B\hat{A}C=80°$

است، پس $A\hat{B}C=A\hat{C}B=50°$ می‌باشد، ارتفاع رأس A را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع CM با این ارتفاع را D می‌نامیم. از D به B وصل می‌کنیم مثلث DBC متساوی‌الساقین است. (چرا؟) پس:

$$DB=DC \quad \text{و} \quad D\hat{C}B=30° \Longrightarrow DBC=30°$$



از آنجا:

$$D\hat{B}M=D\hat{B}C-M\hat{B}C=30°-10°=20°$$

و

$$A\hat{B}D=A\hat{B}H-D\hat{B}H=50°-30°=20°$$

$$\Longrightarrow D\hat{B}M=D\hat{B}A=20° \qquad (1)$$

$$\triangle ABH:\ B\hat{A}H=90°-50°=40°$$

و

$$D\hat{M}B=M\hat{B}C+M\hat{C}B=10°+30°=40°$$

$$\Longrightarrow D\hat{M}B=D\hat{A}B=40° \qquad (2)$$

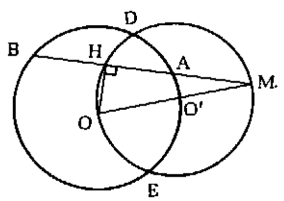
از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که دومثلث ABD و MBD که درضلع BD مشترک و زوایای متناظر متساوی دارند، با هم برابرند. پس AB = BM، یعنی مثلث ABM متساوی‌الساقین است که چون زاویهٔ رأسش

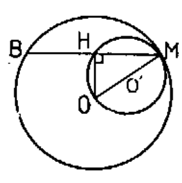
$$A\hat{B}M=40°$$

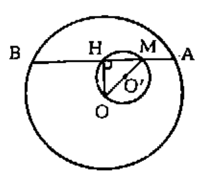
می‌باشد پس:

$$A\hat{M}B=B\hat{A}M=70°$$

۲- از نقطهٔ O مرکز دایره به نقاط M و H وصل می‌کنیم. می‌دانیم خطی که مرکز یک دایره را به وسط وتری از آن دایره وصل می‌کند، عمود منصف آن وتر است. پس OH عمودمنصف







وتر AB است. در نتیجه $OHM=90°$ می‌باشد، از طرفی پاره‌خط OM ثابت است، پس نقطهٔ H روی دایره‌ای به قطر OM قرار دارد. یعنی مکان‌هندسی نقطهٔ H وسط وترهای رسم شده از نقطهٔ M دایره، یا بخشی از دایرهٔ به قطر OM است.

بحث: ۱) اگر نقطهٔ M خارج دایرهٔ مفروض قرار داشته باشد و نقاط تقاطع دایرهٔ به قطر OM با دایرهٔ مفروض را D و E بنامیم، مکان‌هندسی نقطهٔ H بخشی از دایرهٔ به قطر OM است که داخل دایرهٔ C(O و R) قرار دارد با منظور کردن نقاط D و E که این دو نقطه نقاط تماس مماسهایی هستند که از نقطهٔ M بر دایره رسم می‌شوند. شعاع دایرهٔ مکان هندسی نقطهٔ H در این حالت، از $\frac{R}{2}$ بزرگتر می‌باشد.

۲) اگر نقطهٔ M روی دایرهٔ مفروض واقع باشد تمام نقاط دایرهٔ به قطر OM به مکان‌هندسی نقطهٔ H تعلق دارد. در این حالت دایرهٔ به قطر OM شعاعی برابر $\frac{R}{2}$ دارد و در نقطهٔ M بر دایرهٔ مفروض مماس است.

۳) اگر نقطهٔ M داخل دایرهٔ مفروض قرار داشته باشد مکان هندسی نقطهٔ H تمام دایرهٔ به قطر OM است و دراین حالت شعاع دایرهٔ مکان هندسی نقطهٔ H، از $\frac{R}{2}$ کوچکتر است.

۴) اگر نقطهٔ M بر نقطهٔ O مرکز دایره منطبق باشد دایرهٔ مکان‌هندسی نقطهٔ H به یک نقطه که همان نقطهٔ O مرکز دایرهٔ مفروض است تبدیل می‌شود.

۳-

$$(\sim r \wedge p)\equiv T \begin{cases} \sim r\equiv T \rightarrow r\equiv F \\ p\equiv T \end{cases}$$

از طرفی چون طبق فرض گزارهٔ

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (r \Longrightarrow \sim s)$$

نادرست است، لذا می‌بایست گزارهٔ $(p \Longleftrightarrow q)$ و گزارهٔ

$(2\cos^2 x - 1) + \sin 2x = 0 \Longrightarrow$

$\cos 2x + \sin 2x = 0$

$\cos 2x = -\sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x) \Longrightarrow$

$2x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} + 2x)$

$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Longrightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۱۳ - بیشترین مقدار عبارت :

$|6\cos x - 3\cos^2 x|$

وقتی است که $x = \pi$ و یا $\cos x = -1$ و در نتیجه خواهیم داشت :

$|6(-1) - 3(-1)^2| = |-9| = 9$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۴ - کافی‌است طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم:

$\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}$ (داریم: $\cos x \neq 0$)

$\Longrightarrow 2tgx = \frac{1}{\cos^2 x} + tg^2 x =$

$1 + tg^2 x + tg^2 x = 1 + 2tg^2 x$

$\Longrightarrow 2tg^2 x - 3tgx + 1 = 0$

$\Longrightarrow (tgx - 1)(2tgx - 1) = 0$

$\Longrightarrow tgx = 1$ یا $tgx = \frac{1}{2}$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

حل مسائل چهارم ریاضی

۱ -

$\vec v = 2\vec i - 2\vec j + \vec k \Longrightarrow \vec v(2, -2, 1)$

$\Longrightarrow |\vec v| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\vec{v_1} \parallel \vec v \Longrightarrow |\vec{v_1}| = |k|.|\vec v| \Longrightarrow$

$12 = |k| \times 3 \Longrightarrow k = \pm 4 \Longrightarrow \vec{v_1} = 4\vec v$,

$\vec{v_1}' = -4\vec v \Longrightarrow$

$\vec{v_1}(8, -8, 4)$ و $\vec{v_1}'(-8, +8, -4)$

۲ -

$\vec{v_1} = \vec i + 2\vec k$ و $\vec{v_2} = 3\vec j + \vec k$ و $\vec{v_3} = 3\vec i + \vec j$

$\vec{v_1} + \vec{v_3} = (\vec i + 2\vec k) + (3\vec i + \vec j)$

$= 4\vec i + \vec j + 2\vec k = \vec R$

$\Longrightarrow \vec R(4, 1, 2)$ و $\vec{v_2}(0, 3, 1)$

$|\vec{v_2}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\Longrightarrow \vec R \cdot \vec{v_2} = 0 + 3 + 2 = 5 \Longrightarrow$

$Pr_{\vec{v_2}}^{\vec R} = \frac{\vec R \cdot \vec{v_2}}{|\vec{v_2}|} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

۳ - بنا به تعریف داریم:

$\vec a\,\vec b\,\vec c = \vec a \cdot (\vec b \wedge \vec c)$

حال اگر

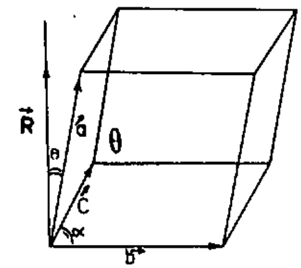
$\vec b \wedge \vec c = R$ و $(\vec b, \vec c) = \alpha$

و $(\vec a, \vec R) = \theta$ اختیار شود داریم:

$|\vec a\,\vec b\,\vec c| = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot |\vec c|\, |\sin\alpha| \cdot \cos\theta$

با توجه به این که $|\sin\alpha|$ و $\cos\theta$ حداکثر برابر ۱ می‌باشند

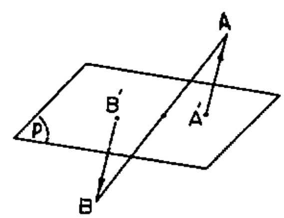
پس : $|\vec a\,\vec b\,\vec c| \leqslant |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot |\vec c|$



۴ - اگر تصاویر نقاط A و B روی صفحهٔ P را به ترتیب A′ و B′ بنامیم در صورتی که $\overrightarrow{A'A}$ و $\overrightarrow{B'B}$ مختلف‌العلامه باشند نقاط A و B در دوطرف صفحهٔ P واقع‌اند و در این صورت پاره‌خط AB صفحهٔ P را قطع خواهد کرد. اما وقتی نقاط A و B در دوطرف صفحهٔ $P(x, y, z) = 0$ واقع‌اند که : $P(A) \cdot P(B) < 0$

در این مسأله:

$P : 2x + y - 2z + 3 = 0$



$A(1, 0, 2)$ و $B(-1, 2, 2)$

$P(A) \cdot P(B) = (2 + 0 - 4 + 3)(-2 + 2 - 4 + 3)$

$= (+1)(-1) = -1 < 0$

بنابراین پاره‌خط AB صفحهٔ P را قطع می‌کند.

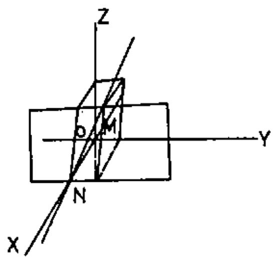
۵ - معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطهٔ M برمحور xها عمود می‌شود می‌نویسیم (صفحهٔ P) ونقطهٔ تقاطع این صفحه با محور xها را به دست می‌آوریم. اگر این نقطه را N بنامیم معادلهٔ خط MN جواب مسأله است.

$M(2, 1, 3)$ ، $P : x = 2$ یا $x - 2 = 0$

$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow N(2, 0, 0) \Longrightarrow$

$MN / x = 2$ و $\frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{z - 0}{3 - 0}$

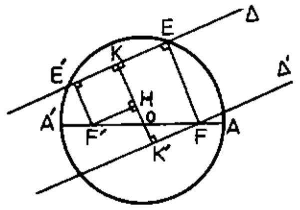
$\Longrightarrow MN : \begin{cases} x = 2 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$ معادلهٔ خط MN



۶ - بیضی به کانونهای F و F′ و دایرهٔ اصلی (o, a) را درنظر می‌گیریم. اگر خط Δ مماس بربیضی باشد و نقاط برخورد این خط مماس با دایرهٔ اصلی بیضی E و E′ باشد، این دونقطه تصاویرکانونهای F و F′ روی‌خط Δ می‌باشند. (قضیه: تصاویرکانونهای بیضی‌روی هرخط مماس بربیضی روی دایرهٔ اصلی آن بیضی واقع‌اند) . یعنی FE ⊥ Δ و F′E′ ⊥ Δ و داریم :

$FE \cdot F'E' = b^2$ یا $\overline{FE} \cdot \overline{F'E'} = b^2$

(قضیه: حاصل‌ضرب فاصله‌های دوکانون‌بیضی از هرخط مماس بربیضی برابر مقدار ثابت b^2 است.)



حال اگر از کانون F خط Δ′ را موازی خط مماس Δ رسم‌کنیم واز نقطهٔ O مرکز بیضی خطی عمود برخطوط Δ و Δ′

رسم کنیم تا این دوخط را در نقاط K و K' قطع کند، با توجه به این که چهارضلعیهای FEKK' و F'E'KH مستطیل و دو مثلث قائم الزاویهٔ OFK' و OF'H متساوی‌اند (شکل بالا). خواهیم داشت:

$$FE = KK' = OK + OK'$$
$$F'E' = KH = OK - OH = OK - OK'$$
$$FE \ F'E' = (OK+OK')(OK-OK')$$
$$\Longrightarrow b^2 = OK^2 - OK'^2$$
$$\Longrightarrow \boxed{OK^2 - OK'^2 = b^2}$$

۷-

$$1)\ (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r \quad \wedge$$
$$2)\ (r \wedge u) \Longrightarrow t \quad \wedge$$
$$3)\ \sim p$$
$$\therefore \sim u \vee t$$

از ۲) و عطف مقدمات $4)\ r \Longrightarrow (u \Longrightarrow t)$

از ۱) و ۴) و قیاس $5)\ (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (u \Longrightarrow t)$

از ۳) و ادخال فاصل $6)\ \sim p \vee q \equiv p \Longrightarrow q$

از ۵) و ۶) و انتزاع $7)\ u \Longrightarrow t$

از ۷) وتبدیل شرطی به فصلی $8)\ \therefore \sim u \vee t$

۸- اگر مقدم گزاره یعنی $\exists x ; [p(x) \wedge q(x)]$ نادرست باشد که گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم دارای ارزش درست‌است و اگر مقدم درست باشد پس x_1 ای متعلق به دامنهٔ متغیر هست که x_1 خاصیت p دارد و x_1 خاصیت q دارد، بنابراین:

$$\exists x_1 ;\ p(x_1) \quad و \quad \exists x_1 ;\ q(x_1)$$

بنابراین $[\exists x_1\ p(x_1) \wedge \exists x_1\ q(x_1)]$ گزاره‌ای درست است.

۹- می‌بایست ثابت‌کنیم:

$$\forall a,b \in R \ ،\ a+b=b+a$$

برای‌این منظور عبارت $(a+b)(1+1)$ را به دوشکل حساب می‌کنیم:

$$(a+b)(1+1) = a(1+1)+b(1+1) = a+a+b+b \quad (1)$$
$$(a+b)(1+1) = (a+b)1+(a+b)1 = a+b+a+b \quad (2)$$
$$(1)\ و\ (2) \Longrightarrow a+a+b+b = a+b+a+b \Longrightarrow a+b=b+a$$

۱۰-

$$\forall N>0 \ ;\ \exists M>0$$
$$x>M \Longrightarrow x^2+4x>N$$
$$x^2+4x > M \Longleftrightarrow x^2+4x+4 > M+4$$
$$\Longleftrightarrow (x+2)^2 > M+4$$
$$\Longleftrightarrow |x+2| > \sqrt{M+4}$$

داریم: $|a|-|b| \leqslant |a \pm b|$

اگر: $|x|-|2| > \sqrt{M+4}$

$$\Longrightarrow |x+2| > \sqrt{M+4}$$
$$\Longleftrightarrow |x| > \sqrt{M+4}+2$$
$$\Longrightarrow M \geqslant \sqrt{M+4}+2$$

۱۱- صورت را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{2}}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{2\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2}}{x-2}$$
$$x\to 2 \Longrightarrow \sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2} \sim \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{2\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2}\right)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cos\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \cos\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$
$$= \lim_{x\to 2} \cos\sqrt{2} \times \frac{x-2}{(x-2)(2\sqrt{2})}$$
$$\Longrightarrow \text{حد مسأله} = \frac{\cos\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

تابع فوق در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است.

حل تشریحی تستهای چهارم ریاضی

۱- گزینهٔ (۴) درست است زیرا

$$\frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi$$

است. یعنی نقاط O، C، A (قطب دستگاه مختصات قطبی) روی یک خط راست واقع‌اند.

۲- گزینهٔ (۱) درست است زیرا:

$$\vec{a} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k} \quad و \quad \vec{b} = 2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k} \Longrightarrow$$
$$\vec{a}(1,2,1) \quad و \quad \vec{b}(2,1,-2) \Longrightarrow$$
$$\vec{a} \wedge \vec{b}(-5,4,-3) \Longrightarrow$$
$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{25+16+9} = 5\sqrt{2}$$

حال اگر تصاویر بردار $\vec{a} \wedge \vec{b}$ را p و q و r و تصاویر بردار یکه روی بردار $\vec{a} \wedge \vec{b}$ را α و β و γ فرض کنیم داریم:

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$
$$\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$
$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{-3}{5\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{10}$$

۳- گزینهٔ (۳) درست است. زیرا اگر

$$\vec{v}(a,b,c) \quad و \quad \vec{u}(x,y,z)$$

باشد، بنابه نامساوی کوشی شوارتز

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant |\vec{u}||\vec{v}|$$

داریم:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqslant (ax+by+cz)^2$$

در این مسأله اگر

$$\vec{v}(1,3,4) \quad و \quad \vec{u}(x,2y,3z)$$

اختیار شود خواهیم داشت:

$$(1+9+16)(x^2+4y^2+9z^2) \geqslant (x+6y+12z)^2 \Longrightarrow$$
$$26(x^2+4y^2+9z^2) \geqslant 13^2 \Longrightarrow$$
$$x^2+4y^2+9z^2 \geqslant \frac{13}{2}$$

پس کمترین مقدار $x^2+4y^2+9z^2$ برابر $\frac{13}{2}$ می‌باشد.

۴- گزینهٔ (۲) درست است زیرا:

$$D: \frac{x-1}{a+1} = \frac{y}{3b-2} = \frac{z}{2} \Longrightarrow$$
$$\vec{v}(p=a+1 \quad و \quad q=3b-2 \quad و \quad r=2)$$

بردار هادی راستای D

$p: 2x+y-z+2=0 \Longrightarrow$

بردار نرمال صفحه $\vec{v'}(2,1,-1)$

$D \perp P \Longrightarrow \vec{v} \parallel \vec{v'} \Longrightarrow$

$\frac{a+1}{2}=\frac{2b-2}{1}=\frac{2}{-1} \Longrightarrow$

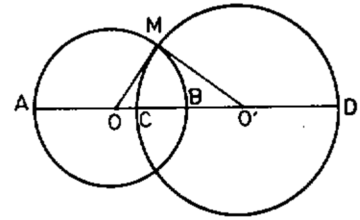
$a=-5$ و $2b=0 \Longrightarrow a+2b=-5$

۵- گزینهٔ (۴) درست است زیرا اگر ABCD یک تقسیم‌توافقی باشد دوایر به قطر AB و CD برهم عمودند. بنابراین بنابه خاصیت دو دایرهٔ عمود برهم $(R^2+R'^2=d^2)$ داریم:

$(\frac{AB}{2})^2+(\frac{CD}{2})^2=OO'^2 \Longrightarrow$

$\frac{1}{4}(AB^2+CD^2)=OO'^2$

$\Longrightarrow \boxed{AB^2+CD^2=4OO'^2}$



۶- (۲)
زیرا هیچ عدد گویایی نیست که حاصل‌جمع آن با هر عدد گویای دیگر صفر شود.

۷- (۳)
$p \Longrightarrow (\sim q \Longrightarrow r) \equiv (p \wedge \sim q) \Longrightarrow r$

بنابر قانون عطف مقدمات

$(p \wedge \sim q) \Longrightarrow r \equiv \sim r \Longrightarrow (\sim p \vee q)$

عکس نقیض

$\sim r \Longrightarrow (\sim p \vee q) \wedge$

$\sim r$

$\therefore (\sim p \vee q) \equiv (p \Longrightarrow q)$

۸- (۴)
زیرا مثلاً درحلقهٔ یکدار وجابجایی $(Z,+,\circ)$ عدد ۲ مقسوم علیه‌صفر نیست و وارون‌پذیر هم نمی‌باشد $(\frac{1}{2} \notin Z)$.

۹- (۴) زیرا:

$\frac{1}{6} \in Q$ و $6 \in I \overset{\text{ایده‌آل}}{\Longrightarrow} 6 \times \frac{1}{6} = 1 \in I \Longrightarrow I=Q$

(ثابت می‌شود هر گاه عدد ۱ در ایده‌آل یك حلقه وجود داشته باشد آن ایده‌آل با حلقه برابر می‌شود.)

۱۰- (۱)
زیرا: اولاً هرعدد فرد به هرتوانی مثبت‌فرد است وثانیاً اگر n^2 فرد باشد می‌توان نتیجه گرفت‌که n فرد است چه این که اگر n زوج باشد هر توان مثبت آن نیز باید زوج باشد.

۱۱- (۱)
زیرا: هرگاه a و b دوعدد فرد متوالی باشند داریم:

$a=2k+1$ و $b=2k+3$

$\Longrightarrow a+b=4k+4=4(k+1)$

۱۲- (۳)
توابع قدرمطلق به ازای تعداد ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق مشتق‌پذیر نیست.

$|x|=0 \Longrightarrow x=0$

$|x|-1=0 \Longrightarrow |x|=1 \Longrightarrow x=\pm 1$

$f'(x)=3x^2+1$ پس در سه نقطه

۱۳- (۳)

$\underset{\text{مماس‌در}A}{m}=3x^2+1 \Longrightarrow \underset{\text{مماس‌در}A'}{m}=\frac{1}{3x^2+1}$

$3x^2+1=\frac{1}{3x^2+1} \Longrightarrow$

$(3x^2+1)^2=1 \Longrightarrow 3x^2+1=1$

$\Longrightarrow x=0 \Longrightarrow A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

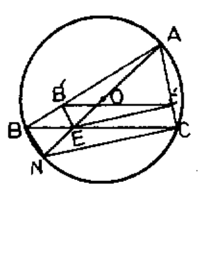
حل مسائل دوم تجربی

۱- ازنقطهٔ N به نقاط A و B وصل می‌کنیم، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به قطر ABN و ACN قائمه‌اند پس:

$A\hat{B}N=A\hat{B'}E=90° \Longrightarrow EB' \parallel BN$

$\Longrightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{AE}{AN} \quad (1)$

$A\hat{C}N=A\hat{C'}E=90° \Longrightarrow EC' \parallel NC$



$\frac{AC'}{AC}=\frac{AE}{AN} \quad (2)$

(۱) و (۲) $\Longrightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC} \Longrightarrow B'C' \parallel BC$

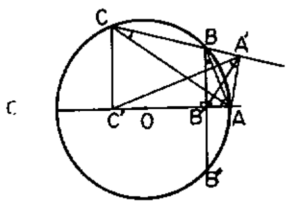
۳- مثلثهای $AA'B'$ و $AA'C'$ متشابه‌اند. زیرا در زاویهٔ $A'\hat{A}B'$ مشترك‌اند و $B'\hat{A'}A=A\hat{C'}A'$ است. چون:

$AB'BA'$ چهار ضلعی محاطی $\Longrightarrow$

$B'\hat{A'}A=B'\hat{B}A \quad (1)$

$AA'CC'$ چهار ضلعی محاطی $\Longrightarrow$

$A\hat{C'}A'=A\hat{C}A' \quad (2)$



از طرفی قطر OA عمود منصف وتر BB'' است پس:

$\widehat{AB}=\widehat{AB''}$

در نتیجه:

$A\hat{C}B=A\hat{B}B' \quad (3)$

از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$A\hat{C'}A'=A\hat{A'}B'$

و در نتیجه:

$\triangle AA'B' \sim \triangle AA'C' \Longrightarrow \frac{AA'}{AB'}=\frac{AC'}{AA'}$

$\Longrightarrow AA'^2=AB' \cdot AC'$

۴- الف)

$8ax-bx+8ay-by$
$=x(8a-b)+y(8a-b)$
$=(8a-b)(x+y)$

ب)

$a^4+a^2-a^3-a=a^3(a-1)+a(a-1)$
$=(a-1)(a^3+a)$
$=a(a-1)(a^2+1)$

ج)

$4a^4+b^4=4a^4+b^4+4a^2b^2-4a^2b^2$
$=(2a^2+b^2)^2-4a^2b^2$

$$=(۲a^۲+b^۲-۲ab)(۲a^۲+b^۲+۲ab)$$

د) $a^۳+a-۱۰=a^۳+a-۲-۸$
$$=(a^۳-۸)+(a-۲)$$
$$=(a-۲)(a^۲+۲a+۴)+(a-۲)$$
$$=(a-۲)(a^۲+۲a+۵)$$

۴- ابتدا کسرهای معادله‌های اول و دوم دستگاه را معکوس می‌کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{۳}{۸}\\[2mm] \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{۸}{۵}\\[2mm] \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{۳}{۴}\end{cases}\xrightarrow{(xyz\neq ۰\ \text{با فرض})}$$

$$\begin{cases}\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{y}=\dfrac{۳}{۸}\\[2mm] \dfrac{۱}{y}+\dfrac{۱}{z}=\dfrac{۵}{۸}\\[2mm] \dfrac{۱}{z}+\dfrac{۱}{x}=\dfrac{۳}{۴}\end{cases}$$

از تفاضل معادله‌های اول و دوم دستگاه داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{۱}{z}-\dfrac{۱}{x}=\dfrac{۱}{۴}\\[2mm] \dfrac{۱}{z}+\dfrac{۱}{x}=\dfrac{۳}{۴}\end{cases}$$

از جمع معادله‌های اخیر داریم:

$$\frac{۲}{z}=۱\implies \boxed{z=۲}$$

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{x}=\frac{۳}{۴}\implies \frac{۱}{x}=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}$$
$$\implies \frac{۱}{x}=\frac{۱}{۴}\implies \boxed{x=۴}$$

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{y}=\frac{۳}{۸}\implies \frac{۱}{y}=\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۴}$$
$$\implies \frac{۱}{y}=\frac{۱}{۸}\implies \boxed{y=۸}$$

۵- فرض می‌کنیم ریشه‌های معادلهٔ اول α و β ومعادلهٔ دوم α' و β' باشند.

بنا به فرض مسأله داریم:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=k$$

و برای معادلهٔ اول خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}\\[2mm] \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}\implies\begin{cases}\beta+k\beta=\dfrac{-b}{a}\\[2mm] \beta(k\beta)=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

$$\implies\begin{cases}(k+۱)\beta=\dfrac{-b}{a}\\[2mm] k\beta^۲=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta^۲(k+۱)^۲=\dfrac{b^۲}{a^۲}\\[2mm] k\beta^۲=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

$$\implies \frac{(k+۱)^۲}{k}=\frac{b^۲}{ac}\qquad(۱)$$

به همین ترتیب برای معادلهٔ دوم داریم:

$$\frac{(k+۱)^۲}{k}=\frac{q^۲}{pr}\qquad(۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{q^۲}{pr}=\frac{b^۲}{ac}$$

۶- با فرض $\sin x=\dfrac{m^۲-۱}{m^۲+۱}$ داریم:

$$\cos^۲x=۱-\sin^۲x=۱-\left(\frac{m^۲-۱}{m^۲+۱}\right)^۲$$
$$=۱-\frac{(m^۲-۱)^۲}{(m^۲+۱)^۲}=\frac{(m^۲+۱)^۲-(m^۲-۱)^۲}{(m^۲+۱)^۲}$$
$$=\frac{۴m^۲}{(m^۲+۱)^۲}$$

بنابراین داریم:

$$\cos x=\pm\frac{۲m}{m^۲+۱}$$

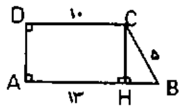
$$tg x+cotg x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=\frac{\sin^۲x+\cos^۲x}{\sin x\cos x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{۱}{\left(\dfrac{m^۲-۱}{m^۲+۱}\right)\left(\pm\dfrac{۲m}{m^۲+۱}\right)}=\frac{\pm(m^۲+۱)^۲}{۲m(m^۲-۱)}$$

$$m=-۲:\ tg x+cotg x=\pm\frac{۲۵}{۱۲}=\pm ۲\frac{۱}{۱۲}$$

حل تشریحی تستهای دوم تجربی

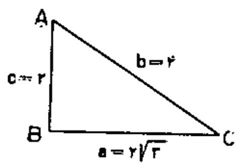
۱- گزینهٔ (۲) درست است. زیرا اگر از رأس C عمود CH را بر قاعدهٔ AB فرود آوریم، داریم:

$$BH=AB-CD=۱۳-۱۰=۳$$
$$BC=۵\implies HC^۲=BC^۲-BH^۲=۲۵-۹=۱۶$$
$$\implies HC=AD=۴\quad \text{ارتفاع ذوزنقه}$$
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(۱۳+۱۰)\times ۴=۴۶$$



۲- گزینهٔ (۳) درست است زیرا:

$$b^۲=a^۲+c^۲\implies ۱۶=۱۲+۴\implies$$
$$۱۶=۱۶\implies \hat{B}=۹۰^\circ\implies \hat{A}<۹۰^\circ$$

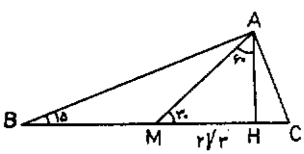


۳- گزینهٔ (۴) درست است زیرا اگر در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{B}=۱۵^\circ$ ، $(\hat{A}=۹۰^\circ)ABC$ باشد، $A\hat{M}H=۳۰^\circ$ و از آنجا:

$$MH=\frac{AM\sqrt{۳}}{۲}\ \text{و}\ AH=\frac{AM}{۲}$$

پس:

$$۲\sqrt{۳}=\frac{AM\sqrt{۳}}{۲}\implies AM=۴$$
$$\implies BC=۲AM=۸$$



جواب تستهای جبر دوم تجربی

۴- رابطه‌های بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ:

$$mx^۲+x-۱=۰$$

چنین است:

$$\begin{cases}x'+x''=\dfrac{-۱}{m}\\[2mm] x'x''=\dfrac{-۱}{m}\end{cases}\implies$$

$$x'^۲x''+x'x''^۲=x'x''(x'+x'')$$

$$=\left(\frac{-1}{m}\right)\left(\frac{-1}{m}\right)=4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m^2}=4 \Rightarrow m^2=\frac{1}{4} \Rightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵- برای تعیین مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ:

$$(x^8-1)(x^{16}-1)\leqslant 0$$

می‌نویسیم:

$$(x^8-1)(x^{16}-1)=(x^8-1)(x^8-1)(x^8+1)$$
$$=(x^8-1)^2(x^8+1)\leqslant 0$$

چون عبارات x^8+1 و $(x^8-1)^2$ همواره مثبت می‌باشند پس نامعادله فقط درحالت $x^8-1=0$ جواب دارد:

$$x^8=1 \Rightarrow x=\pm 1$$
$$\{-1\,,\,1\}=\text{مجموعهٔ جواب}$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

۶- برای تعیین جوابهای مشترك دو نامعادله؛ کافی است مجموعهٔ جوابهای دستگاه توأم زیر را به دست آوریم:

$$\begin{cases}-x^2+3x<0\\-3x^2-4x<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-3x>0\\3x^2+4x+1>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x(x-3)>0\\(x+1)(3x+1)>0\end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	3	$+\infty$
x^2-3x	+	+	+	0 − 0	+	
$3x^2+4x+1$	+	0 −		+	+	

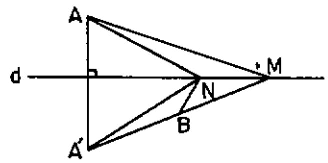
مجموعهٔ جوابهای مشترك نامعادلات فوق درفاصلهٔ $]-1\,,\,3[$ چنین است:

$$\{x\,|\,\frac{-1}{3}<x<0\}=\text{مجموعهٔ جوابهای مشترك}$$
$$=]\frac{-1}{3}\,,\,0[$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

حل مسائل سوم تجربی

۱- قرینهٔ یکی از دونقطهٔ A و B، مثلاً قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط d به دست می‌آوریم و A' می‌نامیم. از A' به نقطهٔ B وصل می‌کنیم. امتداد $A'B$ خط d را در نقطهٔ M قطع می‌کند. این‌نقطه جواب مسأله است.



یعنی: $NA-NB=NA'-NB=A'B$ بیشترین مقدار ممکن تفاضل نقاط واقع برخط d، از نقاط A وB است. زیرا اگر نقطه‌ای دیگر مانند N روی خط d اختیار کنیم، کافی است ثابت کنیم:

$$NA-NB<MA-MB$$

از A به B و A' وصل می‌کنیم. داریم: $NA=NA'$ اما در مثلث $NA'B$ داریم:

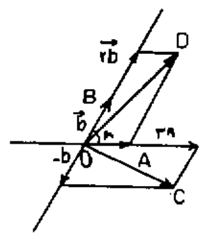
$$NA'-NB<A'B \Rightarrow NA-NB<A'B$$
$$\Rightarrow NA-NB<MA-MB$$

۳- حل الف)

$$|\vec{a}|=2 \text{ و } |\vec{b}|=3 \text{ و } (\vec{a}\,,\,\vec{b})=60^\circ$$

$$\Rightarrow |3\vec{a}|=6 \text{ و } |-\vec{b}|=|\vec{b}|=3$$

$$(3\vec{a}\,,\,-\vec{b})=180-(\vec{a}\,,\,\vec{b})$$
$$=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$



اما می‌دانیم که اگر مجموع دو بردار $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ برابر $\vec{R}$ و $(\vec{v_1}\,,\,\vec{v_2})=\alpha$ باشد داریم:

$$|\vec{R}|^2=|\vec{v_1}|^2+|\vec{v_2}|^2+2|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|\cos(\vec{v_1},\vec{v_2})$$

یا

$$|\vec{R}|^2=|\vec{v_1}|^2+|\vec{v_2}|^2+2|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|\cos\alpha$$

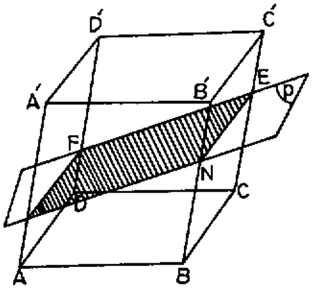
پس:

$$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=|3\vec{a}|^2+|-\vec{b}|^2+2|3\vec{a}||-\vec{b}|$$
$$\cos(3\vec{a}\,,\,-\vec{b}) \Rightarrow |3\vec{a}-\vec{b}|^2$$
$$=(6)^2+(3)^2+2(6)(3)\cos 120^\circ=$$
$$|3a-b|^2=36+9-18=27$$
$$\Rightarrow |3\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{3}$$

حل ب):

$$|\vec{a}|=2 \text{ و } |2\vec{b}|=6$$
$$(\vec{a}\,,\,2\vec{b})=(\vec{a}\,,\,\vec{b})=60^\circ$$
$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(2)^2+(6)^2+2(2)(6)\cos 60^\circ \Rightarrow$$
$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=4+36+12=52 \Rightarrow$$
$$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{13}$$

۳- می‌دانیم که وجوه جانبی هرمتوازی‌السطوح صفحات متوازی می‌باشند. ازطرفی فصل مشترك یك صفحه با دوصفحهٔ متوازی دوخط متوازی است. بنابراین اگر نقاط تقاطع صفحهٔ P با وجوه متوازی $ABB'A'$ و $CDD'C'$ خطوط MA و EF و با وجوه متوازی $ADD'A'$ و $BCC'B'$ خطوط MF و ME باشند، MV||EF و MF||AE است. پس چهارضلعی MAEF متوازی‌الاضلاع است.



۴- در معادلهٔ:

$$a(\sin x+\cos x)=(\cos x-\sin x)^2$$

برای تعیین a کافی است از رابطهٔ داده شده:

$$tg(x+\frac{\pi}{4})=\cos x-\sin x$$

x را محاسبه کنیم وجایگزین در معادلهٔ داده شده کنیم:

$$tg(x+\frac{\pi}{4})=\cos x-\sin x$$
$$=\sin(\frac{\pi}{2}-x)-\sin x$$
$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x+x}{2}$$
$$=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)$$
$$=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)$$
$$\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}-\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)=0$$

با فرض $\cos(x+\frac{\pi}{۴})\neq ۰$ خواهیم داشت:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})-\sqrt{۲}\cos^۲(x+\frac{\pi}{۴})=۰$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})-\sqrt{۲}[۱-\sin^۲(x+\frac{\pi}{۴})]=۰$$

$$۲\sin^۲(x+\frac{\pi}{۴})+\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})-۲=۰$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{-\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲+۱۶}}{۴}=\frac{-\sqrt{۲}\pm ۳\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=-\sqrt{۲}$$ (قبول ناپذیر)

یا:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴} \Longrightarrow \boxed{x=۲k\pi}$$

اینک با جایگزین کردن $x=۲k\pi$ در معادله مقدار a تعیین می‌شود:

$$a(\sin ۲k\pi+\cos ۲k\pi)=(\cos ۲k\pi-\sin ۲k\pi)^۲$$

$$\Longrightarrow \boxed{a=۱}$$

۵- با توجه به شرط $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ و اتحادهای:

$$\sin x=۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} \quad \text{و} \quad \sin^۲\frac{x}{۲}+\cos^۲\frac{x}{۲}=۱$$

خواهیم داشت:

$$\sqrt{۱+\sin x}+\sqrt{۱-\sin x}-۲\sin\frac{x}{۲}$$

$$=\sqrt{\sin^۲\frac{x}{۲}+\cos^۲\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}$$

$$+\sqrt{\sin^۲\frac{x}{۲}+\cos^۲\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}-۲\sin\frac{x}{۲}$$

$$=\sqrt{(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^۲}$$

$$+\sqrt{(\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲})^۲}-۲\sin\frac{x}{۲}$$

$$=|\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}|+|\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲}|-۲\sin\frac{x}{۲}$$

با توجه به فرض داریم:

$$۰<x<\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow ۰<\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۴}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\cos\frac{x}{۲}>\sin\frac{x}{۲}$$

پس می‌توان نوشت:

$$|\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲}|+|\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}|-۲\sin\frac{x}{۲}$$

$$=\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}$$

$$=۲(\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲})=۲\left[\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲})-\sin\frac{x}{۲}\right]$$

$$=۴\sin\frac{\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲}-\frac{x}{۲}}{۲}\cos\frac{\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲}+\frac{x}{۲}}{۲}$$

$$=۴\sin(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$=۲\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})$$

۶- الف) داریم:

$$x_M=k \quad \text{و} \quad x_B=-۲ \quad \text{و} \quad x_A=۱$$

برای این که M در وسط پاره خط AB باشد، باید داشته باشیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۱+(-۲)}{۲}=k$$

$$\Longrightarrow \boxed{k=-\frac{۱}{۲}}$$

ب) برای این که رابطهٔ $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{۱}{k}$ برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{x_M-x_A}{x_M-x_B}=\frac{۱}{k} \Longrightarrow \frac{k-۱}{k+۲}=\frac{۱}{k}$$

$$k^۲-k=k+۲ \Longrightarrow k^۲-۲k-۲=۰$$

$$\Longrightarrow \boxed{k=۱\pm\sqrt{۳}}$$

ج) با فرض $x_M=k$ و $x_N=۲k$ باید داشته باشیم:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}+\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}=۰$$

$$\frac{x_M-x_A}{x_M-x_B}+\frac{x_N-x_A}{x_N-x_B}=۰$$

$$\Longrightarrow \frac{k-۱}{k+۲}+\frac{۲k-۱}{۲k-۲}=۰$$

طرفین معادلهٔ اخیر را در عبارت $(۲k-۲)(k+۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$(k-۱)(۲k-۲)+(۲k-۱)(k+۲)=۰$$

$$۲k^۲-۲k-۲k+۲+۲k^۲+۴k-k-۲=۰$$

$$۴k^۲-k=۰ \Longrightarrow k(۴k-۱)=۰$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} k=۰ \\ k=\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

۷- الف) نقاط

$$C(۱,۱) \quad \text{و} \quad B(-۱,۰) \quad \text{و} \quad A(۰,-۱)$$

رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین می‌باشند زیرا داریم:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

$$=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^۲+(y_C-y_A)^۲}$$

$$=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^۲+(y_C-y_B)^۲}$$

$$=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

$$\Longrightarrow AC=BG=\sqrt{۵}$$

ب) از آن‌جا که ارتفاع و میانه و نیمساز رأس C از مثلث متساوی‌الساقین فوق برهم منطبق می‌باشند، بنابراین کافی است معادلهٔ ارتفاع نظیر رأس C را بنویسیم. چون خط فوق از رأس C گذشته و بر ضلع مقابل یعنی AB عمود است بنابراین می‌توان ضریب زاویهٔ آن را مشخص کرد:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-(-۱)}{(-۱)-۰}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

$$m_{AB}=-۱ \Longrightarrow m'_{AB}=\frac{۱}{m_{AB}}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

$$\Longrightarrow \boxed{m'_{AB}=-۱}$$

بنابراین معادلهٔ خطی که از نقطهٔ C گذشته و بر ضلع AB عمود باشد چنین است:

$$C(۱,۱) \quad \text{و} \quad m'_{AB}=-۱ : y-y_C=m'_{AB}(x-x_C)$$

$$\Longrightarrow y-۱=-۱(x-۱) \Longrightarrow$$

$$y-۱=-x+۱ \Longrightarrow \boxed{y=-x+۲}$$

ج) برای محاسبهٔ مساحت مثلث کافی است فاصلهٔ C را از ضلع AB حساب کنیم. برای این منظور به دو روش می‌توان عمل کرد:

روش اول: ابتدا مختصات وسط پاره‌خط AB را پیدا کنیم و سپس فاصلهٔ C را از وسط پاره خط AB با استفاده از محاسبهٔ فاصلهٔ دو نقطه به دست آوریم.

روش دوم: ابتدا معادلهٔ خط AB را نوشته و سپس فاصلهٔ C را از آن خط با استفاده از فرمول مربوطه حساب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0-1}{2}=\frac{-1}{2}$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+0}{2}=\frac{-1}{2}$$

$M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ مختصات وسط ضلع AB

بنابراین خواهیم داشت:

$$MC=\sqrt{(1+\tfrac{1}{2})^2+(1+\tfrac{1}{2})^2}$$

$$MC=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$S=\frac{1}{2}MC\times AB=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}$ (مساحت مثلث)

$=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ واحد سطح

$S=1\frac{1}{2}$ واحد سطح (مساحت مثلث)

حل تشریحی تستهای سوم تجربی

۱- گزینهٔ (۱) جواب است، زیرا اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی چندبردار برروی یک محور برابراست با جمع جبری تصاویر آن بردارها برآن محور. پس اگر اندازه‌های جبری تصاویر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را برمحور $x'x$ به ترتیب a' و b' و c' بنامیم داریم:

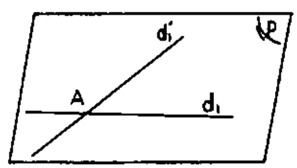
$$|\vec{a}|=8 \Rightarrow a'=8\cos60°=8\times\frac{1}{2}=4$$

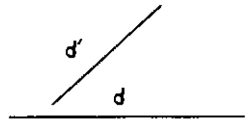
$$|\vec{b}|=4 \Rightarrow b'=4\cos(-60°)=4\times\frac{1}{2}=2$$

$$|\vec{c}|=6 \Rightarrow c'=6\cos120°=6(-\frac{1}{2})=-3$$

$$\Rightarrow a'+b'+c'=4+2-3=+3$$

۲- گزینهٔ (۲) درست‌است زیرا اگر نقطه A و دوخط





متنافر d و d' را درنظر بگیریم، از نقطهٔ A یک‌خط و تنها یک خط به موازات خط d (خط d_1) و یک خط و تنها یک خط به موازات خط d' (خط d'_1) می‌توان رسم کرد و براین دوخط منحصربه فرد d_1 و d'_1 که از نقطهٔ A رسم شده‌اند، تنها یک صفحه مانند P مرور می‌کند.

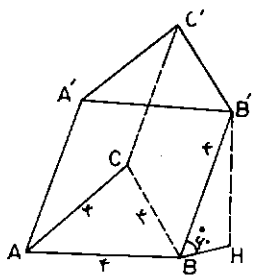
۳- گزینهٔ (۱) درست است زیرا:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{16\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$$ قاعده

$$B'H=BB'\times\sin60°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$ ارتفاع

ارتفاع × سطح قاعده = V = حجم منشور ⇐

$$\Rightarrow V=4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=24\,cm^3$$



۴- ابتدا تابع f(x) را از فرض

$$f(2x-3)=x-1$$

به دست می‌آوریم:

$$2x-3=t \Rightarrow f(t)=\frac{t+3}{2}-1$$

$$=\frac{t+1}{2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$$

t متغیرظاهری است پس داریم:

$$y=f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

اینک فاصلهٔ نقطهٔ $M\left(-1, 1\right)$ را از خط

$$\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}=0$$

محاسبه می‌کنیم:

$$d=\frac{\left|\frac{1}{2}(-1)-1+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۵- ابتدا تابع f(x) را از فرض

$$f(\sqrt[3]{x})=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

به دست می‌آوریم:

$$\sqrt[3]{x}=t \Rightarrow x=t^3$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt[6]{t^3}} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

بنابراین دامنهٔ تابع f(x) چنین است:

$$D_f=R^+=]0\ ,\ +\infty[$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح‌است.

حل مسائل ریاضیات چهارم تجربی

۱- طول مرکز تقارن منحنی نمایش تابع درجهٔ سوم با ضابطهٔ:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

را با x_p نمایش می‌دهیم و داریم:

$$x_p=\frac{-b}{3a}$$

بنابراین طول مرکز تقارن منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ

$$y=x^3-6x^2$$

چنین است:

$$x_p=-\frac{-6}{3}=2$$

با قراردادن طول مرکز تقارن درضابطهٔ تابع عرض آن محاسبه می‌شود:

$$y_p=2^3-6\times2^2=8-24=-16$$

$$\Rightarrow p\left|\begin{matrix}2\\-16\end{matrix}\right.$$ (مرکز تقارن تابع p)

اینک ضریب زاویهٔ معادلهٔ خط قائم برمنحنی نمایش تابع فوق را به دست می‌آوریم:

$$y'=3x^2-12x$$

$$m=y'(-1)=3(-1)^2-12(-1)$$

$$=3+12=15$$

$$m'=\frac{-1}{15}$$ ضریب زاویهٔ خط قائم:

$$y(-1)=(-1)^3-6(-1)^2=-7$$

$$y+7=\frac{-1}{15}(x+1) \Rightarrow$$

$$15y+x+106=0$$ (معادله خط قائم)

دراین‌جا فاصلهٔ مرکز تقارن را از خط قائم محاسبه می‌کنیم:

(فاصله مرکز تقارن از خط قائم)

$$d=\frac{|2+15(-16)+106|}{\sqrt{1+15^2}}=\frac{|2-240+106|}{\sqrt{226}}=\frac{132}{\sqrt{226}}=8/78 \Rightarrow \boxed{d=8/78}$$

۲- ابتدا مرکز تقارن تابع

$$2xy-2y-x+3=0$$

را به دست می‌آوریم:

$$2xy-2y-x+3=0 \Rightarrow$$
$$y(2x-2)=x-3$$
$$y=\frac{x-3}{2x-2}$$ (تابع صریح هموگرافیک)

می‌دانیم مرکز تقارن توابع هموگرافیک محل تلاقی مجانبهای آن می‌باشد.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow$$ (I مرکز تقارن تابع هموگرافیک)

$$I\left|\begin{matrix}-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}\end{matrix}\right.$$

بنابراین مختصات مرکز تقارن تابع هموگرافیک فوق چنین است:

$$I(1,\frac{1}{2})$$

اینک باید مقدار مشتق تابع $f(x)$ را به ازای $x=1$ حساب کنیم:

$$f'(x)=3\times2(4x^3)(x^4-1)\sin^2(x^4-1)^2$$
$$-3(2x)\cos^2(x^2-1)\times\sin(x^2-1)\sin(x-1)$$
$$+\cos(x-1)\cos^3(x^2-1) \Rightarrow f'(1)=1$$

۳- ابتدا طرفین معادله رابه توان ۲ می‌رسانیم:

$$m^2(\sin x+\cos x)^2=(1+\frac{1}{2}\sin 2x)^2$$

$$m^2(1+\sin 2x)=1+\frac{1}{4}\sin^2 2x+\sin 2x$$

$$m^2+m^2\sin 2x=1+\frac{1}{4}\sin^2 2x+\sin 2x$$

$$\frac{1}{4}\sin^2 2x+(1-m^2)\sin 2x+1-m^2=0$$

$$\Delta=(1-m^2)^2-(1-m^2)$$
$$=(1-m^2)(-m^2)=m^2(m^2-1)$$

بدیهی‌است اگر $-1<m<1$ آنگاه معادله جواب ندارد.

درحالت $m=\pm1$ معادله‌به شکل ساده‌شدهٔ زیرتبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{2}\sin^2 2x=0 \Rightarrow \sin 2x=0 \Rightarrow$$
$$2x=k\pi \Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}}$$

حل‌تشریحی تستهای چهارم تجربی

۱- طول مرکز تقارن تابع باضابطهٔ

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

برابر $x_0=\frac{-b}{3a}$ و مختصات مرکز تقارن تابع باضابطهٔ

$$g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

نقطهٔ $I(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$ است. بنابراین برای تابع

$$f(x)=2x^3-6x$$

می‌توان نوشت:

$$x_0=\frac{-(-6)}{3\times2}=1 \Rightarrow$$

$$y_0=2(1)^3-6(1)=2-6=-4 \quad و \quad P\left|\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right.$$

وبرای تابع $g(x)=\frac{6x-2}{3x-3}$ داریم: $I(1,2)$

زیرا I محل تلاقی مجانبهای قائم و افقی است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$PI=\sqrt{(1-1)^2+(2+4)^2}=6 \Rightarrow PI=6$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲- دررابطهٔ $2f(x^3)+3f(-x^3)=x$ ابتدا x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم:

$$2f(-x^3)+3f(x^3)=-x$$

بنابراین دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}2f(x^3)+3f(-x^3)=x\\3f(x^3)+2f(-x^3)=-x\end{cases}$$

ازجمع دو رابطهٔ دستگاه خواهیم داشت:

$$5f(x^3)+5f(-x^3)=0 \Rightarrow$$
$$f(-x^3)=-f(x^3)$$
$$2f(x^3)-3f(x^3)=x \Rightarrow -f(x^3)=x$$
$$\Rightarrow f(x^3)=-x$$
$$x^3=t \Rightarrow x=\sqrt[3]{t} \quad و \quad f(t)=-\sqrt[3]{t}$$

t متغیرظاهری است ودر نتیجه داریم:

$$f(x)=-\sqrt[3]{x}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(-1)=\frac{-1}{3}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۳- چون‌تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_0=-1$ پیوسته است پس داریم:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^-} f(x)=f(-1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-1^-}(ax+1)=\lim_{x\to-1^+}(x^3)$$

$$\Rightarrow a(-1)+1=-1$$

$$-a=-2 \Rightarrow a=2$$

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & x\geqslant-1\\2x+1 & x<-1\end{cases}$$

$$f(-2)=2(-2)+1=-3 \quad و \quad f'(-2)=2$$
$$f(2)=2^3=8 \quad و \quad f'(2)=3(2)^2=12$$

$$\frac{f'(-2)+f'(2)}{f(-2)+f(2)}=\frac{2+12}{-3+8}=\frac{14}{5}=2/8$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۴- برای معین بودن تابع باضابطهٔ

$$y=\frac{1}{x-1}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$$

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant0\\x^2-1\geqslant0\\x-1\neq0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2\leqslant1\\x^2\geqslant1\\x\neq1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant1\\x\geqslant1 \quad یا \quad x\leqslant-1\\x\neq1\end{cases} \Rightarrow D_f=\{-1\}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

۵- درصورتی که مرکز دایره‌ای (ω) روی‌نیمساز ربع دوم وچهارم قرار داشته باشد خواهیم داشت:

$$x=\alpha \Rightarrow y=-\alpha \quad و \quad \omega\left|\begin{matrix}\alpha\\-\alpha\end{matrix}\right.$$

(زیرا معادلهٔ نیمساز ربع‌دوم وچهارم چنین‌است: $y=-x$)

بنابراین داریم: $(x-\alpha)^2+(y+\alpha)^2=R^2$

وچون‌از مبدأ مختصات نیزمی‌گذردپس مختصات‌مبدأ $O(0,0)$ در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$(0-\alpha)^2+(0+\alpha)^2=R^2 \Rightarrow R^2=2\alpha^2$$

درنتیجه معادلهٔ دایرهٔ چنین است:

$$(x-\alpha)^2+(y+\alpha)^2=2\alpha^2$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

معرفی کتاب

گنجینه

مجلهٔ علوم پایه، ۱۱، انتشارات فاطمی

گنجینه مجله‌ای است که همانطور که از عنوان آن برمی‌آید مجلهٔ علوم پایه است و باز همانگونه که از آخرین شمارهٔ آن برمی‌آید تاکنون ۱۱ شمارهٔ آن به چاپ رسیده است، و در سرمقالهٔ آن که تحت عنوان سخنی با خواننده آمده، وعده داده شده که شمارهٔ ۱۲ آن نیز به زودی منتشر شود. مقالات این شمارهٔ گنجینه عبارتنداز: برای حل یک مسأله، باید به مسأله‌های کمکی ساده‌تری بیندیشید، پرویز شهریاری، بار در شیمی، ترجمهٔ افسانهٔ صدری، فیزیک در زندگی روزمره، ترجمهٔ اختر رجبی، جدول ۵، طرح از فریدون جهانشاهی، واکسنها و ایمن سازی بدن، ترجمهٔ دکتر رضا فرزان پی. آهان! ، ترجمهٔ مرتضی بهروز، نگاهی دوباره به یک مسأله، ترجمهٔ احمدتوحیدی. ابررساناها، ترجمهٔ دکتر منصور عابدینی. تعریف با استقرا، ترجمهٔ احمد صفاپور. کربن به شکل گرد هم وجود دارد، ترجمهٔ فریدهٔ جلیلوند. پرسش و پاسخ، دکتر منصور عابدینی، دکتر علی سیدی. فریدهٔ شریفی. مسابقه، دختر و مگس، داستانی دربارهٔ فون نویمان، ترجمهٔ احمد صفاپور، فردریک ژولیو ـ کوری، ترجمه و تلخیص پرویز تاریخی، نمایش ساختارهای ایزومر، ترجمهٔ دکتر علی سیدی، تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ مهدی مدغم، از میان کتابهای تازه، چند مسأله.

این شمارهٔ مجله ۱۲۰ صفحه دارد و قیمت آن پنجاه تومان است. مطالب مجله برای دانش‌آموزان دبیرستان نوشته شده گو اینکه دیگران نیز از مطالعهٔ آن بهره‌ای درخور خواهند برد.

خواندن گنجینه را به دانش آموزان و دبیران علوم توصیه می‌کنیم و توفیق گردانندگان آن را از خداوند متعال خواهانیم.

مجموعه: مقالات و مسائل ریاضی، شمارهٔ ۱

تنظیم از: غلامرضا یاسی‌پور، انتشارات مدبر

مجموعه، همان طور که از نام آن برمی‌آید مجموعه‌ای از مقالات و مسائل ریاضی است. در این شماره مقالات زیر را می‌خوانیم: نظریهٔ بازیها، ابن‌هیثم ریاضیدان مسلمان، اثبات نامساویها، نیوتون و اندیشهٔ ریاضی زمان ما، توابع و نمودارهای آنها، تکمیل مطالب کتابهای درسی، منطق و زبان، مثلثات، معرفی کتاب من ریاضیدانم (سرگذشت سیبرنتیک) ، نظریهٔ گرافها، مسائل، فرهنگ ریاضیات، هندسهٔ تصویری، هندسهٔ فضایی، مصاحبه با استاد پرویز شهریاری. نویسندگان و مترجمان این شماره عبارت‌اند از: موسی آذرنوش، پرویز شهریاری، محمدهاشم رستمی، احمد قندهاری، حمیدرضا امیری، سیدحسین سیدموسوی، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، نغمهٔ شریک‌زاده، غلامرضا یاسی‌پور.

همان‌گونه که درمقدمهٔ مجموعه آمده قصد از انتشار مجموعه، آشنا کردن خوانندهٔ علاقه‌مند، با وقایع و مطالب کهنه و نوی است که در جهان ریاضیات مطرح می‌شوند و در این سرزمین وسیع دانش بشری اتفاق می‌افتند.

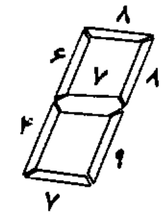
مجموعه به صورت فصلنامه منتشر می‌شود و هر سه‌ماه یک بار یک شمارهٔ آن به دست خوانندگان آن می‌رسد.

ضمن توصیهٔ مطالعهٔ مجموعه به دانش‌آموزان و دبیران ریاضی، توفیق دست‌اندرکاران آن را از خداوند خواستاریم.

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

شکل زیر تعداد دفعاتی را که هرقسمت به‌کارمی‌برد مشخص کرده است.



جواب ۲

اهالی مذکور نمی‌توانند هرسه از دشت یا هرسه از کوه باشند، زیرا دراین صورت تمام پاسخها یکسان می‌شود. اما آیا می‌شود که دونفر از کوه و یکی از دشت باشد؟ خیر، زیرا دراین صورت همگی به سؤال دوم پاسخ آری می‌دهند. بنابراین دونفر از دشت و یکی از کوه است. و همه آنها به سؤال اوّل خیر می‌گویند. و در سؤال دوم، دشت‌نشینان نه و کوه‌نشین آری می‌گویند. دراین صورت «گرب» به معنی نه است.

جواب ۳

۳۶، زیرا:

$$\angle ABC = (\frac{۱}{۲})AC$$
$$AC = (\frac{۱}{۵})(۳۶۰) = ۷۲$$

جواب ۴

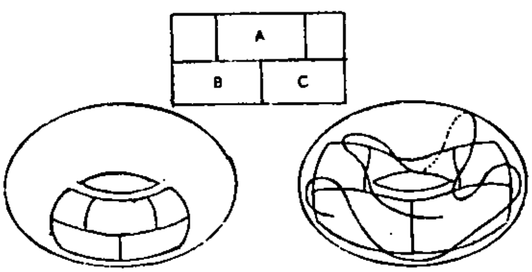
۱. راه حل دیگری غیراز راه حل «هندسی» عبارت است از:

فرض می‌کنیم $S = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \dots$ ؛ دراین صورت

$$\left.\begin{array}{l} S - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \dots \\ \frac{۱}{۲}S = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \dots \end{array}\right\rangle S - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}S\ ,\ S = ۱$$

جواب ۵

خط متصلی که داخل یکی از فضاهای مستطیل شود و از آن خارج گردد باید لزوماً دو پاره خط را قطع کند. از آن جا که هر یک از فضاهای مشخص شده با A ، B و C در شکل ۲، با تعداد فردی پاره‌خط احاطه شده است، نتیجه می‌شود که در صورتی که جمیع پاره‌خطهای شبکه قطع شوند، باید یک سر خط داخل هر یک از آنها باشد. اما خط متصل تنها دو سر دارد، بنابراین معما بر رویهٔ مسطح قابل حل نیست. در صورتی‌که شبکهٔ مورد بحث واقع برکره یا برکنار چنبره (رسم واقع در سمت چپ پایین) باشد، همین استدلال به‌کار می‌رود. اما، شبکه را می‌توان بر چنبره چنان رسم کرد که (رسم واقع در سمت راست پایین) سوراخ چنبره داخل یکی از سه فضای A ، B و C باشد. معما، هنگامی‌که این کار صورت پذیرد به سادگی قابل حل است.



In the name of God

Borhān

VOL.2. No.2
Serial numbers; 6
May 1993

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

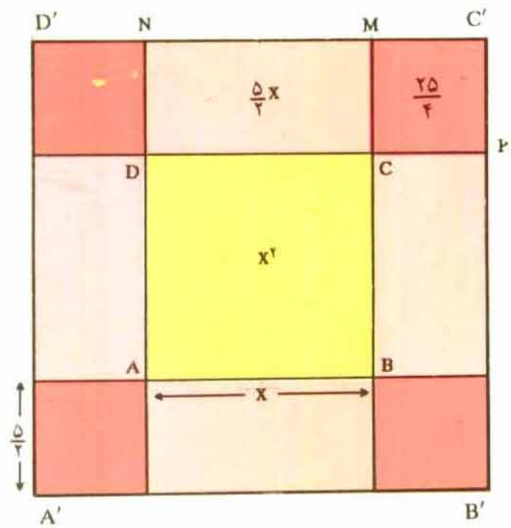
1. The first word
2. You, too, may be successful in your mathematics lessons — Parviz shahriari
3. Differential and integral — Ahmad Ghandehari
4. Instruction of translation of mathematics articles — Hamid Reza Amiri
5. Indirect proof — Golam Reza Yassipour
6. A brief history of Persian mathematics journals
7. Onto functions and consideration of onto property in all kinds of functions — Hamid Reza Amiri
8. Short articles of authentic mathematics journals — Naghmeh Sharikzadeh
9. Problems for students — Dr. Ahmad Sharafeddin
10. Inverse function of trigonometric function — Ali Hassan Zadeh Makooi
11. Some considerations about universities contest tests. — Hosain seyyed Moosavi
12. Determination of domain and range of a function — Mohammad Reza Hashemi
13. Solving a fundamental problem of mathematics by elementary methods
14. Answers to letters
15. Introduction of mathematics books
16. Contest problems — Hamid Reza Amiri
17. Solutions of contest problems
18. Problems
19. Solutions and hints of problems — Amiri, Ghandehari, Rostami, Hashemi

راه حل هندسی معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + ۱۰x = ۳۹$

کاشف، محمدبن موسی خوارزمی

(بیش از ۱۲۰۰ سال پیش)

محمدفرزندموسی خوارزمی (وفات درسال ۲۳۲ هجری قمری)، ریاضی‌دان مسلمان ایرانی اهل خوارزم، نویسندهٔ نخستین کتاب جبر به نام «الجبر والمقابله». در زمان مأمون خلیفه عباسی می‌زیست و در «بیت‌الحکمه» رفت وآمد داشت. اصطلاح «آلگوریتم» از نام «الخوارزمی» گرفته شده است.



ابتدا مربعی رسم می‌کنیم و طول ضلع آن را x می‌گیریم (مربع ABCD)، سپس ضلعهای مربع را از هرطرف به اندازهٔ $\frac{۵}{۲}$ ادامه می‌دهیم تا مربع A'B'C'D' پدید آید. باتوجه به شکل روشن است:

$$S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} + ۴S_{DCMN} + ۴S_{CPC'M'} =$$

$$= x^۲ + ۴ \times \frac{۵}{۲}x + ۴ \times \frac{۲۵}{۴} = x^۲ + ۱۰x + ۲۵$$

بنابر معادلهٔ مفروض داریم: $x۲ + ۱۰x = ۳۹$، پس :

$$S_{A'B'C'D'} = ۳۹ + ۲۵ = ۶۴$$

یعنی طول ضلع مربع A'B'C'D' برابر ۸ می‌شود و

$$x = ۸ - ۲ \times \frac{۵}{۲} = ۸ - ۵ = ۳$$

جواب مثبت معادلهٔ $x^۲ + ۱۰x = ۳۹$ برابر است با $x = ۳$.

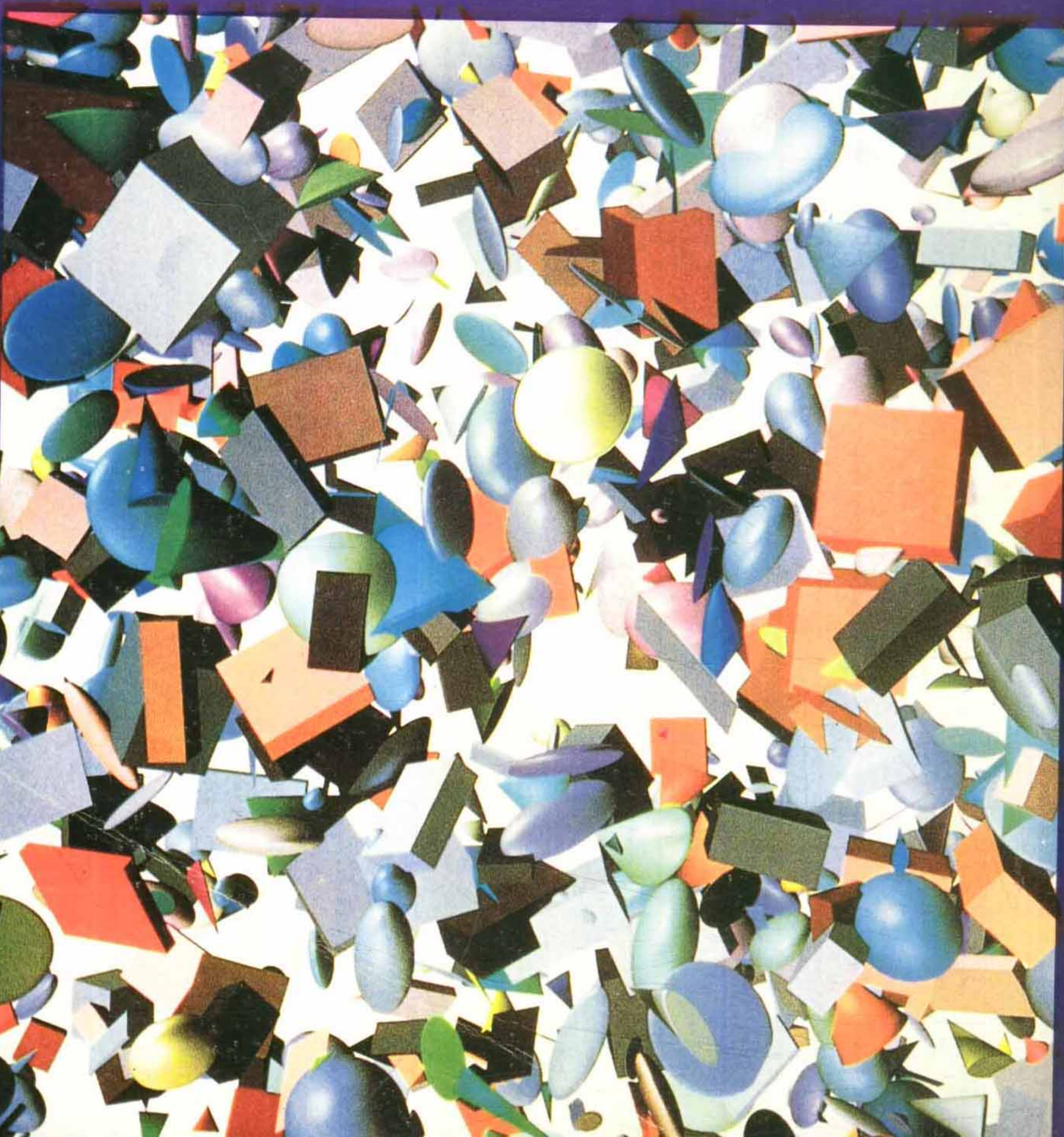
خوارزمی، به ریشه یا ریشه‌های منفی معادله، توجهی نداشته است.

مجله ریاضی

برهان

برای دانش‌آموزان دبیرستان

۷



سال دوم، تابستان ۱۳۷۲، شمارهٔ سوم، بهاء ۷۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:

• حمیدرضا امیری • محمدهاشم رستمی • احمد قندهاری

• سیدمحمدرضا هاشمی موسوی • غلامرضا یاسی‌پور

(باتشکراز همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری ، محمدعابدی ومهدی قمصری)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا: مهرزاد طاهری

• رسام: فرخ نیکزاد • حروفچینی: یگانه • تیراژ: ۵۰۰۰۰ نسخه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱- نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲- طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳- طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴- طرح معماهای ریاضی

۵- نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحک واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

• حرف اوّل ۱

• شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید/ پرویز شهریاری ۲

• دیفرانسیل و انتگرال (قسمت دوم)/ احمد قندهاری ۹

• آموزش ترجمه متون ریاضی(۳)/ حمیدرضا امیری ۱۸

• اثبات شرطی/ غلامرضا یاسی‌پور ۲۱

• تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۶) ۲۴

• تعیین دامنه و برد توابع (قسمت دوم)/ سید محمدرضا هاشمی موسوی ۲۹

• طرح یک مسأله جالب درباره قوطیها/ حسن نصیرنیا ۳۸

• تابع معکوس تابعهای مثلثاتی/ علی حسن‌زاده ماکویی ۴۰

• مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان/ نغمهٔ شریک زاده ۴۷

• مفهوم‌های اصلی و اصل موضوعها در هندسه فضایی (قسمت اول)/ پرویز شهریاری ۴۸

• طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۵) ۵۵

• عمود مشترک دو خط متنافر/ محمدابراهیم گیتی‌زاده ۵۸

• مرکز یاب دایره/ ۶۵

• معرفی کتاب/ ۶۶

• جواب نامه‌ها/ ۷۰

• مسائل مسابقه‌ای/ ۷۴

• حل مسائل مسابقه‌ای برهان (شمارهٔ ۵) ۷۵

• مسائل برای حل/ ۷۶

• حل مسائل برهان شماره ۶/ ۸۲

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه بهرام چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷ ، ۸۸۲۵۹۶۴ ، ۸۸۲۳۱۴۹ ، فاکس ۸۸۲۰۵۹۹

حرف اول

همه ساله هزینه‌های بسیار بالایی صرف تعلیم و تربیت و آموزش شما عزیزان دانش‌آموز می‌شود و چون هریک از شما در آینده باید در گوشه‌ای از این کشور اسلامی و پهناور عهده‌دار مسئولیتی باشید، امروز کاملاً به هوش باشید تا در انتخاب راهتان و انگیزهٔ این انتخاب خدای ناکرده دچار گمراهی نشوید و راه آیندهٔ خود را با انگیزه‌هایی الهی و نه از روی هوی و هوس و نگرش مادی انتخاب کرده و در آن راه سعی و کوشش کنید و در تمامی مراحل، خدا و خدمت به خلق خدا را در نظر داشته باشید.

اگر امروز شما از تسهیلات آموزشی که با پس‌انداز همهٔ اقشار ملت و برنامه‌ریزی و مدیریت مسئولین فراهم آمده، استفاده می‌کنید، فردا روزی است که شما باید با همهٔ توان و تخصصی که به‌دست آورده‌اید و با همان انگیزه‌های الهی در خدمت این اقشار باشید اگر پس از سالها تحصیل به اخذ درجه مهندسی‌یاپزشکی‌در یکی از رشته‌های موجود نایل می‌شوید مبادا فقط به فکر خود و مدرکتان باشید که این طرز فکر شیطانی و فناپذیر است.

اگر پیرمردی را در خیابان مشاهده می‌کنید که به خاطر فقرش محکوم به مرگ است و در بیمارستانی از او x تومان بابت عمل جراحی روی یک تومور مغزی درخواست کرده‌اند و او جرمش فقر است و به حکم این جرم محکوم به مرگ، و شما با استفاده از مواهب الهی و تسهیلاتی که همین مردم در اختیارتان گذاشته و می‌گذارند روزی یک جراح مجرّب شده و توانستید درد چنین دردمندانی را دوا کنید آیا جای آن را ندارد که در هفته روزی را برای خدا و رایگان و به نیت کمک به چنین مردمی به جراحی و طبابت بپردازید. اگر چنین کنید شما چه از دست داده‌اید و چه چیز به‌دست آورده‌اید آیا دِین خود را اداکرده‌اید. این طرز فکر الهی و فناناپذیر است!

آری عزیزانِ دانش‌آموز شما گردانندگان و آینده‌سازان این مملکت هستید و چه کسی دلسوزتر از شما به حال آیندهٔ کشور خود.

به امید روزی که آخرین خورشید آسمان امامت از پشت ابرهای غیبت به درآید و روشنی بخش راه همهٔ ما و پیروان بر حقش باشد، ان‌شاءا...

سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید ۷

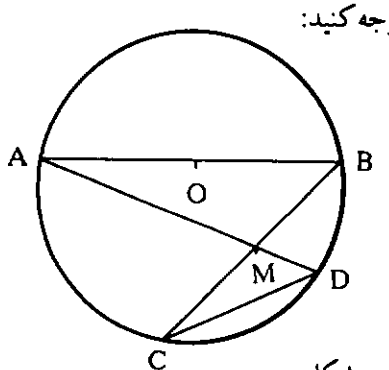
● پرویز شهریاری

بحث شمارهٔ قبل برهان را دنبال می‌کنیم.
چرا باید «شک» کرد و در کجا و چگونه؟

«شک» را، در حالت کلی، می‌توان به دو گونه تقسیم کرد: ۱) شک نسبت به درستی داوری خود، ۲) شک نسبت به درستی و منطقی بودن داوری دیگران و در این جا، بیشتر به گونهٔ اول آن کار داریم، یعنی: شک نسبت به عمل و کار خود و بررسی و تجزیه و تحلیل دقیق آن. گونهٔ دوم شک، گرچه برای پیشرفت دانش، و از آن جمله ریاضیات، اهمّیتی جدی دارد، ولی از آن‌جا که به مرزهای بالای علمی مربوط می‌شود؛ در شرایط دانش‌آموزی و وقتی که تنها نوآموزی در ریاضیات هستیم، به ما، به من و شما، ربطی پیدا نمی‌کند. اگر من و شما توانستیم، زمانی، خود را به مرز شناخته‌ها و ناشناخته‌ها در ریاضیات برسانیم، آن وقت حق داریم، دربارهٔ کارهای دیگران هم، به بررسی و تحقیق بپردازیم و تلاش خود را در دقیقترکردن و عامترکردن آنها آغاز کنیم. ولی حالا، بیش از همه، باید به خود بپردازیم.

شک نسبت به درستی عمل و داوری خود، به این معنا است که، وقتی قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم یا وقتی مسأله‌ای را حل می‌کنیم، دائماً از خود بپرسیم: «آیا عملها را درست انجام داده‌ایم؟»، «آیا با استدلالی منطقی و قانع کننده پیش رفته‌ایم؟»، «آیا تعریف، مفهوم یا قضیه‌ای که مورد استفاده قرار داده‌ایم، بواقع در این‌جا کاربرد دارد؟»، «آیا همهٔ فرضهای مسأله را درنظر گرفته‌ایم؟»، «بر کدام قضیه‌ها یا فرمولها تکیه کرده‌ایم، آیا اثبات ریاضی آنها را می‌دانیم؟»، «آیا شکل، ما را فریب نداده است؟»، در یک کلام، همهٔ عملها و داوریهای خود را، جزء به جزء بشکافیم و، دست‌کم خودمان، نسبت به درستی آنها و درستی مفهومها و قضیه‌های مورد استنادمان، قانع شویم.

آیا این قضیه درست است، اگر بگوییم: «**برای برابر بودن دو مثلث، کافی است سه زاویه و یک ضلع از مثلثی با سه زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر، برابر باشند**»به‌ظاهر، اشکالی در بیان این قضیه نیست. به این مسأله توجه کنید:



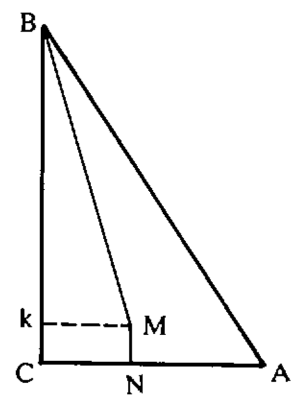
شکل ۱

در شکل، AB قطر دایره، BC وتری دلخواه از آن و M، نقطهٔ وسط پاره‌خط راست BC است. دو مثلث AMB و MCD را درنظر می‌گیریم. سه زاویهٔ مثلث اول با سه زاویهٔ مثلث دوم، برابرند(زاویه‌های به رأس M روبه‌رو و برابرند، دو زاویهٔ به

رأسهای A و C ،محاطی و روبه‌رو به یک کمان از دایره‌اند، زاویه‌های به رأسهای B و D هم، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک‌کمان از دایره‌اند). در ضمن دو پاره‌خط راست MB و MC طولی برابر دارند. به این ترتیب سه زاویه و یک ضلع از مثلث AMB ، با سه زاویه و یک ضلع از مثلث MCD برابرند. بنابر قضیه‌ای که در بالا آوردیم، باید دو مثلث برابر باشند که، از آن‌جا نتیجه می‌شود: $|CD| = |AB|$. طول قطر دایره با طول وتری از آن برابر شد. اشتباه درکجاست؟ اگر صورت قضیه را درست به‌حساب آوریم، در استدلالهای ما نقصی وجود ندارد. پس باید گرفتاری، ناشی از صورت قضیه باشد. چه اشکالی در قضیه وجود دارد؟ آیا می‌توانید آن را پیدا کنید؟ قضیه را چگونه تنظیم کنیم که درست باشد و موجب نتیجه گیری نادرست نشود؟

حالا به این مسأله توجه کنید:

مسأله. در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ($\hat{C} = ۹۰°$) می‌دانیم: $|BC| = a$ و $|AC| = b$. عمود منصف ضلع AC را رسم کرده‌ایم تا نیمساز داخلی زاویهٔ B را درنقطهٔ M قطع کند. نقطهٔ وسط ضلع AC را N می‌نامیم. اگر داشته باشیم $|MN| = m$ ، طول پاره‌خط راست BM را پیدا کنید.



شکل ۲

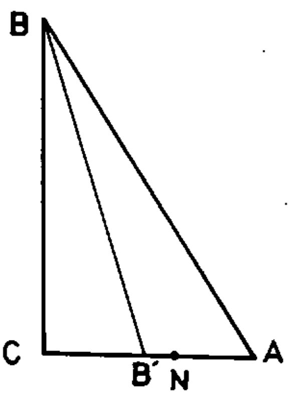
حل. محاسبهٔ طول پاره‌خط راست BM دشوار نیست. از روی شکل معلوم است که: $|BK| = a\text{-}m$ و $|KM| = \frac{b}{۲}$. بنابراین، در مثلث قائم الزاویهٔ KMB داریم:

$$|BM|^۲ = |BK|^۲ + |KM|^۲ = (a-m)^۲ + \frac{b^۲}{۴}$$

که از آن جا به‌دست می‌آید: $|BM| = \frac{۱}{۲}\sqrt{b^۲ + (a-m)^۲}$

مسأله حل شد.به هیچ دشواری برنخوردیم. ولی اندکی بیندیشیم. چرا درصورت مسأله گفته بود، BM نیمساز داخلی زاویهٔ B است؟ نیمساز بودن BM ، چه فایده‌ای داشت؟ ما، ضمن حل مسأله، از نیمساز بودن BM، هیچ استفاده‌ای نکردیم آیا بی‌جهت، یک فرض اضافی درصورت مسأله آمده است که به هیچ دردی نمی‌خورد؟

دربارهٔ ویژگیهای‌نیمساز داخلی یک‌زاویهٔ‌مثلث بیندیشیم، شاید ما را به نکته‌ای راهنمایی کند. بدون توجه به جنبه‌های دیگر مسأله، نیمساز داخلی زاویهٔ B را در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ($\hat{C} = ۹۰°$) رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در B′ قطع کند. یکی‌از ویژگیهای نیمساز این است که ضلع قاعده را به نسبت طولهای دو ضلع دیگر قطع می‌کند، یعنی باید داشته باشیم



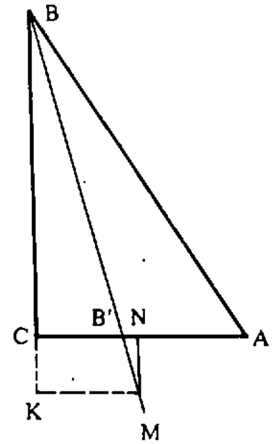
شکل ۳

$$\frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{|BC|}{|AB|} \qquad (۱)$$

سمت راست برابری (۱)، کسری است کوچکتر از واحد، زیرا در مثلث قائم الزاویه، طول ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از طول وتر کوچکتر است، پس :

$$\frac{|CB'|}{|B'A|} < ۱ \text{ و } |CB'| < |B'A|$$

یعنی نقطهٔ N، وسط ضلع AC، بین دو نقطهٔ B' و A قرار دارد ... عجب! شکل ۲ را اشتباه کشیده بودیم. شکل درست مسأله باید شبیه شکل ۴ باشد. ولی در این‌صورت محاسبهٔ ما برای طول پاره‌خط راست BM، چیز دیگری می‌شود:



شکل ۴

$$|BM| = \frac{۱}{۲}\sqrt{b^۲ + ۴(a+m)^۲}$$

می‌بینید که ممکن است، شکل، ما را فریب بدهد. معمولاً شکل را با دست و به تقریب رسم می‌کنیم و این، در بسیاری موردها و به‌دلیل عدم دقت شکل، موجب گمراهی ما می‌شود.

می‌دانیم، ضمن جمع جبری چند عدد، می‌توان آنها را، به هرنحوی گروه‌بندی کرد، مثلاً:

$$۵ - ۲ - ۷ + ۱۱ = ۵ - (۲ + ۷ - ۱۱)$$
$$= (۵ - ۷) + (۱۱ - ۲) = \ldots$$

اکنون فرض کنید، بخواهیم این مجموع را، که تعداد جمله‌های آن، بی‌نهایت است، محاسبه کنیم:

$$S = ۱ - ۵ + ۵^۲ - ۵^۳ + ۵^۴ - ۵^۵ + \ldots \qquad (۱)$$

اگر مجموع (۱) را به این‌صورت بنویسیم:

$$S = ۱ - ۵\,(۱ - ۵ + ۵^۲ - ۵^۳ + \ldots)$$

روشن است که مقدار داخل پرانتز، همان S است و به‌دست می‌آید:

$$S = ۱ - ۵S \Rightarrow ۶S = ۱ \Rightarrow S = \frac{۱}{۶} \qquad (۲)$$

یک شگفتی! مجموع جبری عددهای درست، برابر با یک عدد کسری شد! همین مطلب، ما را به فکر وامی‌دارد که بیشتر دقت کنیم. عددها را به‌ترتیب دیگری گروه‌بندی می‌کنیم:

$$S = (۱ - ۵) + (۵^۲ - ۵^۳) + (۵^۴ - ۵^۵) + \ldots$$

عجب! داخل هر پرانتز، عددی منفی قرار دارد، و این عددهای منفی، از لحاظ قدر مطلق، مرتباً بزرگ و بزرگتر می‌شوند و، به هرحال، S عددی منفی است. نسبت به جواب (۲) بیشتر شک می‌کنیم، باز هم گروه‌بندی عددها را عوض می‌کنیم:

$$S = ۱ + (۵^۲ - ۵) + (۵^۴ - ۵^۳) + (۵^۶ - ۵^۵) + \ldots$$

در این حالت، برای S مقداری مثبت به‌دست می‌آید ... چرا چنین می‌شود؟ چرا هربار، برای S، مقدار دیگری به‌دست می‌آید. حقیقت این است که قانون گروه‌بندی، در جمع جبری جمله‌ها، تنها وقتی اطمینان بخش است که با تعداد محدودی جمله سروکار داشته باشیم، نه با بی‌نهایت جمله ... و در واقع، برای S، اصلاً مجموعی وجود ندارد!

اکنون مثال ساده‌ای از معادله‌های مثلثاتی را می‌آوریم. می‌خواهیم این معادله را حل کنیم:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = ۲\ \operatorname{cotg}x - ۱ \qquad (۱)$$

برای حل، اگر از دستور تانژانت مجموع استفاده کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{\operatorname{tg}x + ۱}{۱ - \operatorname{tg}x} = \frac{۱}{\operatorname{tg}x} - ۱ \qquad (۲)$$

که بعد از ساده کردن و از بین بردن مخرجها، جواب به‌دست می‌آید:

$$\operatorname{tg}x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

چون tgx برابر $\frac{1}{2}$ شده است و برابر ۰ یا ۱ نیست، بنابراین نیازی به آزمایش جواب نیست. به‌ظاهر، همه چیز درست است ولی شتاب نکنیم با مراجعه به معادلهٔ اصلی، یعنی معادلهٔ (۱)، معلوم می‌شود که $x = \frac{\pi}{2}$ و، به‌طور کلی، $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ در معادله صدق می‌کند. چرا این جواب را گم کردیم؟ اندکی دقت کنیم. همین جواب $\frac{\pi}{2}(2k+1)$، در معادلهٔ (۲) صدق نمی‌کند. پس، ضمن عبور از (۱) به (۲)، این جواب را، از دست داده‌ایم. معادله‌های (۱) و (۲) هم ارز نیستند. همهٔ اشکال مربوط به این دو تبدیل است:

$$\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x}, \quad \operatorname{cotg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x} \qquad (3)$$

سمت چپ در هریک از این دو نابرابری، به ازای $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$، معنا دارد، درحالی که سمت راست برابریها، به ازای این مقدارهای x، معنا ندارد. و، به‌همین مناسبت، این جوابها از دست رفتند. این پرسش در برابر ما قرار می‌گیرد: چه کنیم که ضمن تبدیلها، دچار اشتباه نشویم و جواب یا جوابهایی را از دست ندهیم؟ چرا نمی‌توانیم از «اتحاد»های مثلثاتی، برای ساده‌تر کردن معادله استفاده کنیم؟ و یا دقیقتر: با چه شرطی می‌توان از این «اتحادها» استفاده کرد؟ ظاهر امر این است که، استفادهٔ از «اتحادها» نباید موجب ویرانی یک برابری شود! برای رفع دشواری، از خودمان می‌پرسیم: اتحاد یعنی چه؟ پرسش را به‌صورت دیگری می‌آوریم: آیا برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ یک اتحاد است؟ در سمت چپ این برابری، مقدارهای $x \geq 0$ و در سمت راست آن، مقدارهای $x \leq 0$ قابل قبول است، یعنی در این برابری، تنها می‌توان $x = 0$ گرفت و، به ازای این مقدار هم، برابری برقرار است. پس برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$، برای همهٔ مقدارهای قابل قبول x برقرار است، یعنی یک اتحاد است. ولی آیا این، به‌معنای آن است که در هرجا، می‌توان به‌جای $\sqrt{x}$، عبارت $\sqrt{-x}$ را گذاشت؟ نه! تنها اگر داشته باشیم $x = 0$، آن‌وقت حق داریم $\sqrt{x}$ را به $\sqrt{-x}$ تبدیل کنیم، اتحادهای (۳) هم، وقتی برقرارند که $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (و برای اولی، در ضمن $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$) باشد. در این مورد، می‌توان مثلاً از برابریهای

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,.\sqrt{b}\,, \quad \log_m(ab) = \log_m a + \log_m b \qquad (4)$$

نام برد که در هر دو، می‌توان هردو مقدار a و b را در سمت چپ برابری منفی گرفت، درحالی که در سمت راست، هم a و هم b مقدارهایی مثبت. اتحادهای (۴) تنها وقتی برقرارند که، برای اولی داشته باشیم $a \geq 0$ و $b \geq 0$ و برای دومی $a > 0$، $b > 0$. به این معادله توجه کنید:

$$\log[x(x+9)] + \log\frac{x+9}{x} = 0 \qquad (5)$$

که اگر آن را به‌این‌صورت تبدیل کنیم:

$$\log + \log(x+9) + \log(x+9) - \log x = 0$$

که به جواب $x = -8$ می‌رسد. ولی $x = -8$ در معادلهٔ (۵) صدق نمی‌کند، درحالی که $x = -10$ در آن صدق می‌کند. برای رسیدن به جواب باید اتحاد دوم (۴) را به این صورت نوشت:

$$(\log_m(ab) = \log_m|a| + \log_m|b|$$

به این ترتیب، معادلهٔ (۵)، این‌طور تبدیل می‌شود:

$$\log|x| + \log|x+9| + \log|x+9| - \log|x| = 0$$

که منجر به دو جواب $x_1 = -8$ و $x_2 = -10$ می‌شود و، بعد از آزمایش، معلوم می‌شود که معادلهٔ (۵) تنها یک جواب دارد. $x = -10$.

گاهی «معرفت شهودی» نتیجه‌ای را به ما القا می‌کند، ولی تا زمانی که این «استنباط»، با استدلال قیاسی و منطقی همراه نشود، قابل اعتماد نیست. «معرفت شهودی» اغلب متکی بر تجربهٔ گذشتهٔ ما و گاه متکی بر استقرای ناقص است. ذهن، با ترکیب سریع مشاهده‌ها و تجربه‌های قبلی، و بیشتر ناآگاهانه، نتیجه‌ای را به ما تلقین می‌کند و یا راهی را برای حل مسأله در برابر ما می‌گذارد ولی این «استنباط» ممکن است درست باشد و

ممکن است درست نباشد. استقرای ناقص، یعنی درست درآمدن «استنباط شهودی» در چند مورد خاص، هرچند که تعداد این موردها زیاد باشد، نمی‌تواند جای استدلال قیاسی ریاضی را بگیرد. اندکی به تاریخ ریاضیات مراجعه کنیم.

در یونان باستان و دوران اعتلای دانش و هنر آن سرزمین، اغلب گمان می‌کردند با فرو رفتن در خود و تنها با اندیشیدن، بدون مراجعه به دنیای واقع و بدون شناخت قانونهای موجود در طبیعت، می‌توان به رمز ساختمان جهان پی برد. تالس گمان می‌کرد، سرچشمه و زیربنای ساختمان جهان «آب» است، دموکریت، ذرّه‌های کوچک تقسیم ناپذیر را ـ که «اتم» می‌نامید، اساس ساختمان جهان می‌دانست؛ افلاطون زیبایی را در تقارن می‌دانست و، به تعبیری، «اصل زیبایی» را، اصل حاکم بر جهان می‌دانست | قضیه‌ای در هندسهٔ مسطحه وجود دارد که، امروز، درستی آن ثابت شده است: از بین همهٔ شکلهای مسطحهٔ با محیط برابر، مساحت دایره از همه بیشتر است. افلاطون، برای «اثبات» درستی این قضیه می‌گوید: دایره متقارنترین و، بنابراین، زیباترین شکلهاست، پس حق دایره است که بیشترین مساحت را داشته باشد. | ، پارمنیدس، جهان را یک پارچه‌وبی‌حرکت می‌دانست و معتقد بود، حرکتهای ظاهری، نتیجه‌ای از تخیل ماست و، در واقع امر، وجود ندارند؛ فیثاغورس و هواداران او، «عدد» را بنیان ساختمان جهان می‌دانستند و ...

درست است که، برخی از این دیدگاه‌ها، با همهٔ عدم دقتها و نادرستیها، انگیزه‌ای برای بحث و، در نتیجه، وسیله‌ای برای پیشرفت دانش شدند، در برخی موردها هم، به‌صورت سدی در برابر دانش واقعی درآمدند و حرکت آن را کُند و یا منحرف کردند. ولی شکست این دیدگاه‌ها، در ذات آنها نهفته بود: به طبیعت یا به اجتماع نمی‌توان قانونی را تحمیل کرد، باید قانونهای حاکم بر طبیعت و جامعه را شناخت و، با پیروی از آنها، راهی برای تسلط انسان پیدا کرد ... البته، انسان هوشمندتر از آن است که به دیدگاه‌های ناشی از ذهن و گمان، تن در دهد؛ انسان، درطول زمان، همین دیدگاه‌ها را می‌کاود و از میان سنگلاخ و آشوب دیدگاه‌های مختلف، راه خود را به سمت جلو باز می‌کند.

زنون، یکی از شاگردان پارمنیدس و هوادار نظریهٔ او مبنی بر عدم وجود حرکت، برای اثبات نظریهٔ استاد، چهار استدلال ریاضی آورد که، در تاریخ ریاضیات، مشهورند. او در همهٔ این استدلالها، با استفادهٔ نادرست از دو مفهوم «بی‌نهایت کوچک» و «بی‌نهایت بزرگ»، با سرایت دادن «معرفت شهودی» به «استدلال ریاضی» با مخلوط کردن قانونهای مربوط به عمل روی عددهای گویا با عمل روی «بی‌نهایت کوچکها و بی‌نهایت بزرگها» و عدم درک درست از مفهومهای «پیوستگی» و «ناپیوستگی»، به‌گمان خود، یک پارچه بودن و بی‌حرکت بودنِ جهان را ثابت کرد. استدلالهای زنون نادرست بود، ولی تأثیری منفی، بر کار ریاضی دانان بعد از خود گذاشت. اگر از ارشمیدس ـ که شجاع و سنت‌شکن بود ـ بگذریم، دیگر ریاضی‌دانان یونانی، به‌دلیل عجز خود در پاسخ‌گویی به «استدلالهای» زنون، از نزدیک شدن به مفهوم «بی‌نهایت» پرهیز می‌کردند و پرداختن به آن را، بیرون از حیطهٔ ریاضیات تصور می‌کردند. سده‌ها طول کشید تا ریاضی‌دانان بر این ترس غلبه کردند و قانونهای حاکم بر «بی‌نهایت کوچکها» و «بی‌نهایت بزرگها» راکشف کردند.

دربارهٔ دیدگاه فیثاغورس و فیثاغوریان، اندکی بیشتر صحبت می‌کنیم. فیثاغوریان تصور می‌کردند، «عدد» سازندهٔ جهان است و بر تمامی جهان حکومت می‌کند. از قبل این را بگوییم که «عدد» به معنایی که در آن زمان می‌شناختند، عددهای طبیعی و نسبتهای آنها، یعنی «عدد گویا و مثبت» بود.

گرچه فیثاغورس و هواداران او، به‌خاطر دلبستگی به «عدد» و اعتقاد به «نیروی عدد» توانستند بسیاری از رازهای درونی عدد را بشناسند و، از این جهت، باید آنها را بنیان گذاران نخستین نظریهٔ عددها دانست، ولی در مجموع، مُبلغ نظریه‌ای ذهنی و بی‌منطق دربارهٔ ساختمان جهان و قانونمندیهای حاکم بر

جامعه‌های انسانی بودند ...

افلاطون که، در ضمن، گرایشهای فیثاغوری داشت، در کتاب معروف خود «جمهور» تلاش می‌کند با استفاده از عدد و پهلوی هم چیدن «عددهای زشت و زیبا» آرمان شهر خود را با رنگ و بوی ریاضی بیاراید، ولی در واقع، بخشی از «جمهور» که به این جنبه‌های «رمزگونهٔ عدد» پرداخته است، نه ارزش ریاضی دارد، نه ارزش اجتماعی و نه ارزش تاریخی.

فیثاغوریان، که عدد را به‌معنای عدد گویا یعنی نسبت دو عدد درست (و مثبت) می‌شناختند، اعتقاد داشتند، می‌توان همهٔ پدیده‌ها و روندهای طبیعی و اجتماعی، و حتی خلق و خو و رفتار احساسی آدمی را، به یاری عدد توضیح داد ... و سرانجام، همین اعتقاد، جمع آنها را متلاشی کرد و به «ضد اعتقاد» آنها تبدیل شد. جریان این است که خود فیثاغورس ـ و یا به احتمالی قویتر، یکی از هواداران او ـ قضیه‌ای را که امروز هم، به‌نام قضیهٔ فیثاغورس می‌شناسیم، کشف کرد: اگر در مثلث قائم‌الزاویه، طول وتر را برابر c و طول ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه را، برابر a و b بگیریم، همیشه داریم:

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$$

فیثاغوریان با این پرسش روبه رو شدند که: **اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول هریک از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه برابر واحد باشد، طول وتر مثلث چقدر است!** امروز می‌گوییم، طول وتر این مثلث، برابر است با $\sqrt{۲}$. ولی هواداران فیثاغورس ـ که عددهای گنگ را نمی‌شناختندمی‌خواستند $\sqrt{۲}$ را، با نسبت دو عدد درست بیان کنند که ممکن نبود. در واقع، اگر m و n را دو عدد درست و نسبت به هم اول بگیریم و فرض کنیم:

$$\sqrt{۲} = \frac{m}{n}$$

به تناقض برخورد می‌کنیم. وقتی m و n نسبت به هم اوّلند، به‌معنای آن است که مقسوم علیه مشترکی ندارند، ولی از رابطهٔ فرض به‌دست می‌آید:

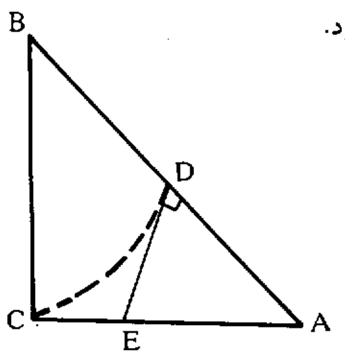
$$۲ = \frac{m^{۲}}{n^{۲}} \Rightarrow m^{۲} = ۲n^{۲}$$

و این به‌معنای آن است که m عددی است زوج $m = ۲k$ می‌گیریم، دز این صورت به برابری:

$$۴k^{۲} = ۲n^{۲} \Rightarrow n^{۲} = ۲k^{۲}$$

می‌رسیم، یعنی n هم باید عددی زوج باشد. به این ترتیب، m و n عددهایی زوجند و مقسوم علیه مشترکی برابر ۲ دارند که فرض ما را، یعنی بر این که m و n نسبت به هم اوّلند، نقض می‌کند. $\sqrt{۲}$ را نمی‌توان به‌صورت نسبت دو عدد درست نوشت.

گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را به یاری هندسه هم می‌توان ثابت کرد. وقتی می‌گوییم: $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است، به این معناست که، برای دو پاره خط راستی که یکی به‌طول واحد و دیگری به طول $\sqrt{۲}$ است، نمی‌توان مقیاس مشترکی پیدا کرد، یعنی نمی‌توان پاره‌خط راستی پیدا کرد که بتوان پاره‌خطهای راست به طولهای واحد و $\sqrt{۲}$ را برحسب طول این پاره‌خط مقیاس، با عددهای درستی بیان کرد.



شکل ۵

مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC

$\hat{C} = ۹۰^\circ$ ؛ $|AC| = |BC|$) را درنظر می‌گیریم و طول هر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه آن را، برابر واحد فرض می‌کنیم. آیا پاره‌خطهای راست BC (به طول واحد) و AB (به‌طول $\sqrt{۲}$) مقیاس مشترکی دارند؟ اگر به مرکز B و به شعاع برابر $|BC|$، کمانی از دایره را رسم کنیم تا وتر را در D قطع کند و، سپس، از

D مماسی بر این کمان رسم کنیم تا AC را در E قطع کند، روشن است که:

$$|CE| = |DE| = |AD|$$

اگر پاره‌خطهای راست BC و AB مقیاس مشترکی داشته باشند، با توجه به برابری $|BC| = |BD|$ ، باید پاره‌خطهای راست AD و AE هم مقیاس مشترکی داشته باشند ولی $|AD| > \frac{1}{2}|BC|$ و $|AE| < \frac{1}{2}|AB|$ (چرا؟).

پیدا کردن مقیاس مشترک بین دو پاره‌خط راست اخیر هم، با همان روش، منجر به پیدا کردن مقیاس مشترک بین دو پاره‌خط راست دیگری می‌شود که از نصف پاره‌خطهای راست نخستین، کوچکترند. اگر این عمل را ادامه دهیم، مرتباً با پاره‌خطهای راست کوچک و کوچکتری سروکار پیدا می‌کنیم و هرگز به مقیاس مشترک معینی نمی‌رسیم.

به هرحال، همهٔ تلاشهای هواداران فیثاغورس، برای بیان وتر مثلث قائم الزاویهٔ متساوی‌الساقین (وقتی ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، برابر واحد باشد) به شکست انجامید: عدد (یعنی عدد گویا)، که بنا به اعتقاد فیثاغوریان، باید قدرت بیان هر پدیده‌ای را داشته باشد، از عهدهٔ بیان طول یک پاره‌خط راست عاجز ماند... فیثاغوریان تلاش کردند، این کشف را از دیگران مخفی کنند و، برای فاش کنندهٔ آن، مجازاتی سخت درنظر گرفتند. ولی هیچ رازی پنهان نمی‌ماند و بتدریج، همگان از «ناتوانی» عدد در بیان طول یک پاره‌خط راست، آگاه شدند...

هواداران فیثاغورس کوشیدند راهی برای نجات خود پیدا کنند و پدیده‌ها و روندها را به دو گروه تقسیم کردند: گروهی که به کمک عدد قابل بیانند و گروهی که به‌وسیلهٔ عدد بیان نمی‌شوند. گروه اول را گویا (یا مُنطِق) و گروه دوم را گنگ (یا اَصَم) نامیدند ... ولی این تلاش هم، مُشکل آنها را حل نکرد و مکتب فلسفی فیثاغوری از هم پاشید.

تابعد

تفریح اندیشه ۱



مسأله ـ مهرداد تمام پولهای خود را در پنج مغازه‌ای که از آنها خرید کرده بود خرج کرد.

او در هر مغازه پنج ریال بیشتر از نصف مبلغی را که به‌هنگام ورود به آن مغازه داشت خرج کرده است. مقدار پولی را که مهرداد قبل از خرید داشته است تعیین کنید.

جواب در صفحهٔ ۹۶

دیفرانسیل و انتگرال

(قسمت دوم)

● احمد قندهاری

مورد استفاده دانش آموزان، سال چهارم

نوع ششم : انتگرال گیری توابع سادهٔ مثلثاتی

۱) $\int \sin ax\,dx = -\frac{۱}{a}\cos ax + c$

مثال: $\int \sin ۴x\,dx = -\frac{۱}{۴}\cos ۴x + c$

۲) $\int \cos ax\,dx = \frac{۱}{a}\sin ax + c$

مثال: $\int \cos ۲x\,dx = \frac{۱}{۲}\sin ۲x + c$

۳) $\int tg^{۲} ax\,dx = \frac{۱}{a}\, tg\, ax - x + c$

مثال: $\int tg^{۲}\, ۱۰x\,dx = \frac{۱}{۱۰}\, tg\, ۱۰x - x + c$

۴) $\int cotg^{۲} ax\,dx = -\frac{۱}{a}\, cotg\, ax - x + c$

مثال: $\int cotg^{۲}\frac{x}{۵}\,dx = -۵\, cotg\frac{x}{۵} - x + c$

تمرینها : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$\int \sin\frac{۱۰x}{۳}\,dx \qquad \int \cos\frac{۲x}{\sqrt{۳}}\,dx$

$\int tg^{۲}\, ۲\sqrt{۳}x\,dx \qquad \int cotg^{۲}\frac{x\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\,dx$

نوع هفتم : انتگرال گیری توابع مثلثاتی:

I. $\int \sin u\,du = -\cos u + c$

II. $\int \cos u\,du = \sin u + c$

III. $\int tg^{۲} u\,du = tg\,u - u + c$

IV. $\int cotg^{۲} u\,du = -cotg\,u - u + c$

مسأله : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $I = \int \frac{\cos(tg\,x)\,dx}{\cos^{۲} x}$

$u = tg\,x \implies du = (۱ + tg^{۲}x)\,dx = \frac{dx}{\cos^{۲}x} \implies$

$I = \int \cos u\,du = \sin u + c = \sin(tg\,x) + c$

۲) $I = \int -\sin x\, tg^{۲}(\cos x)\,dx$

$u = \cos x \implies du = -\sin x\,dx \implies$

$I = \int tg^{۲} u\,du = tg\,u - u + c$

$= tg(\cos x) - \cos x + c$

۳) $I=\int cotg^2(tgx)(1+tg^2x)dx$

$u=tgx \implies du=(1+tg^2x)dx \implies$

$I=\int cotg^2u\,du=-cotg\,u-u+c$

$=-cotg(tgx)-tgx+c$

---

۴) $I=\int x^{n-1}\sin x^n dx$

$u=x^n \implies du=nx^{n-1}dx \implies$

$I=\frac{1}{n}\int \sin u\,du=-\frac{1}{n}\cos u+c$

$=-\frac{1}{n}\cos x^n+c$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبه انتگرالهای زیر:

$\int\frac{\cos(tg5x)}{\cos^2 5x}dx \qquad \int\frac{\sin(cotg2x)}{\sin^2 2x}dx$

$\int\frac{cotg^2(cotg10x)}{\sin^2 10x}dx \qquad \int\frac{tg^2(tg4x)}{\cos^2 4x}dx$

نوع هشتم: انتگرالهایی است مثلثاتی ، مانند نوع دوم جبری، یعنی مسأله شامل دوعامل‌است به نامهای عامل‌اصلی و عامل مشتق و مانند همان‌نوع دوم‌جبری حل می‌شود.

مثال :
$$\begin{cases} tgx & \text{عامل اصلی} \\ \frac{1}{\cos^2x} & \text{عامل مشتق} \end{cases}$$

$$I=\int\frac{\sin^7x\,dx}{\cos^9x}=\int tg^7x\times\frac{dx}{\cos^2x}$$

$$u=tgx \implies du=\frac{dx}{\cos^2x} \implies$$

$$I=\int u^7du=\frac{1}{8}u^8+c=\frac{1}{8}tg^8x+c$$

$$I=\int\frac{2\cos2x\,dx}{\sin2x\sqrt{\sin2x}}$$

$$u=\sin2x \implies du=2\cos2x\,dx$$

$$\implies I=\int\frac{du}{u\sqrt{u}}=\int\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}=\int u^{-\frac{3}{2}}du$$

$$=-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{u}}+c$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{\sin2x}}+c$$

نوع نهم : انتگرالهایی است مانند نوع چهارم جبری، یعنی مسأله انتگرال‌شامل سه‌عامل‌است‌به نامهای: اصلی، مشتق و اضافی و مانند همان نوع‌چهارم جبری‌حل می‌شود.

مسأله :
$$I=\int\sin^4x\cos^3x\,dx$$

$$I=\int\underbrace{\sin^4x}_{\text{اصلی}}\;\underbrace{\cos^2x}_{\text{اضافی}}\;\underbrace{\cos x}_{\text{مشتق}}\,dx$$

$$\begin{cases} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \\ \cos^2x=1-\sin^2x=1-u^2 \end{cases}$$

$$\implies I=\int u^4(1-u^2)du=$$

$$\int u^4du-\int u^6du=\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{7}u^7+c$$

$$\implies I=\frac{1}{5}\sin^5x-\frac{1}{7}\sin^7x+c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int tg^6 x \times \frac{dx}{\cos^4 x} \quad \text{و} \quad \int \cos^7 x \sin^5 x\, dx$$

$$\int \frac{tg^{20} x}{\cos x\sqrt{\cos x}}dx \quad \text{و} \quad \int \frac{\cos^{10} x}{\sin^{14} x}dx$$

$$0<x<\frac{\pi}{2}$$

نوع دهم : انتگرال گیری توانهای‌فرد $\sin x$ و $\cos x$.

الف) درمورد $\cos^{2n-1}_{n\in N} x$: $\cos x^1$ راکنار گذاشته ، بقیه‌را به $\sin x$ تبدیل می کنیم،سپس، $\sin x$ را u فرض‌می کنیم پس‌از دیفرانسیل گیری در مسأله قرار می‌دهیم.

ب) در مورد $\sin^{2n-1} x$: $n\in N$

$\sin x$ را کنار گذاشته، بقیه را به $\cos x$ تبدیل می کنیم، سپس $\cos x$ را u فرض می کنیم، از این‌فرض دیفرانسیل گرفته در مسأله قرار می‌دهیم.

مسأله: $I=\int \cos^5 x dx$

$$I=\int \cos^4 x\cdot \cos x dx=\int (\cos^2 x)^2 \cos x dx$$

$$=\int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx$$

$$u=\sin x \implies du=\cos x dx$$

$$\implies I=\int (1-u^2)^2 du=\int (1+u^4-2u^2)du$$

$$=\int du+\int u^4 du-2\int u^2 du=$$

$$u+\frac{1}{5}u^5-\frac{2}{3}u^3+c=$$

$$\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\sin x+c$$

مسأله: $I=\int \sin^7 x dx$

$$I=\int \sin^6 x\cdot \sin x dx=\int (\sin^2 x)^3 \sin x dx$$

$$=\int (1-\cos^2 x)^3 \sin x dx$$

$$u=\cos x \implies du=-\sin x dx$$

$$\implies I=\int -(1-u^2)^3 du$$

$$=-\int (1-u^6+3u^4-3u^2)du$$

$$=-\int du+\int u^6 du-3\int u^4 du+$$

$$3\int u^2 du=-u+\frac{1}{7}u^7-\frac{3}{5}u^5+u^3+c$$

$$=-\cos x+\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\cos^3 x+c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبهٔ:

$$\int \cos^7 x dx \qquad \int \sin^9 x dx$$

نوع یازدهم : انتگرال گیری توانهای‌زوج $\sin x$ و $\cos x$.

باید کلیهٔ توانهای زوج را به کمك فرمولهای زیر حذف کرد .

$$2\cos^2 a=1+\cos 2a \qquad 2\sin^2 a=1-\cos 2a$$

مسأله : $I=8\int \sin^4 x dx$

$$I=2\int 4\sin^4 x dx=2\int (2\sin^2 x)^2 dx$$

$$=2\int (1-\cos 2x)^2 dx$$

$$I=۲\int(۱+\cos^{۲}۲x-۲\cos ۲x)dx$$

$$=\int(۲+۲\cos^{۲}۲x-۴\cos ۲x)dx$$

$$=\int(۲+۱+\cos ۴x-۴\cos ۲x)dx$$

$$=\int(۳+\cos ۴x-۴\cos ۲x)dx$$

$$=۳\int dx+\int \cos ۴x dx-۴\int \cos ۲x dx$$

$$=۳x+\frac{۱}{۴}\sin ۴x-۲\sin ۲x+c$$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$۸\int \cos^{۴}x dx \qquad ۳۲\int \sin^{۶}x dx$$

$$۳۲\int \cos^{۶}x dx \qquad ۶۴\int \cos^{۸}x dx$$

نوع دوازدهم : اگرمسأله انتگرال شامل حاصلضرب سینوسها وکسینوسها باشد، ابتداآنها را به حاصل‌جمع تبدیل کرده انتگرال می گیریم.

مثال :

$$I=۲\int \sin ۲۰x \sin ۳x dx$$

داریم : $۲\sin a \sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$

$$\Longrightarrow \ I=\int[\cos(۲۰-۳)x-\cos(۲۰+۳)x]dx$$

$$I=\int(\cos ۱۷x-\cos ۲۳x dx)$$

$$=\int \cos ۱۷x dx-\int \cos ۲۳x dx$$

$$=\frac{۱}{۱۷}\sin ۱۷x-\frac{۱}{۲۳}\sin ۲۳x+c$$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$۲\int \cos ۷x \sin ۲x dx$$

$$۲\int \cos ۵x \cos x dx$$

$$۲\int \cos\frac{۱۷x}{۲}\cos\frac{۵x}{۲}dx$$

$$۲\int \sin\frac{۱۷x}{۴}\cdot \cos\frac{۳x}{۴}dx$$

نوع سیزدهم : انتگرال گیری توانهای زوج

*cotg*x و *tg*x

از توان مسأله دو واحد، دو واحدکم‌کرده جمله‌هایی به مسأله اضافه وکم می کنیم، سپس با فاکتورگیری از راه دسته‌بندی مشتق tgx را می‌سازیم. سپس tgx را u فرض‌می‌کنیم پس از دیفرانسیل گیری در مسأله قرار می‌دهیم.

مسأله :

$$I=\int tg^{۸}x dx$$

$$I=\int(tg^{۸}x+tg^{۶}x-tg^{۶}x+tg^{۴}x-tg^{۴}x+ tg^{۲}x-tg^{۲}x+۱-۱)dx$$

$$I=\int[tg^{۶}x(۱+tg^{۲}x)-tg^{۴}x(۱+tg^{۲}x)+ tg^{۲}x(۱+tg^{۲}x)-(۱+tg^{۲}x)+۱]dx$$

$$I=\int tg^{۶}x(۱+tg^{۲}x)dx-\int tg^{۴}x(۱+tg^{۲}x)dx +\int tg^{۲}x(۱+tg^{۲}x)dx+\int(۱+tg^{۲}x)dx +\int dx$$

$$u=tgx \Longrightarrow du=(۱+tg^{۲}x)dx$$

$$I=\int u^{6}\,du-\int u^{4}du+\int u^{2}du-\int du$$
$$+\int dx=\frac{1}{7}u^{7}-\frac{1}{5}u^{5}+\frac{1}{3}u^{3}-u+x+c$$
$$=\frac{1}{7}tg^{7}x-\frac{1}{5}tg^{5}x+\frac{1}{3}tg^{3}x+tg\,x+x+c$$

توجه: فرمول انتگرال‌گیری توانهای زوج

$n\in N \qquad cotg\,x$ و $tg\,x$

$$1):\int tg^{2n}x\,dx=\frac{1}{2n-1}tg^{2n-1}x-\frac{1}{2n-3}tg^{2n-3}x$$
$$+\frac{1}{2n-5}tg^{2n-5}x-\dots\pm tg\,x\mp x+c$$

$$2):\int cotg^{2n}x\,dx=-\frac{1}{2n-1}cotg^{2n-1}x$$
$$+\frac{1}{2n-3}cotg^{2n-3}x-\frac{1}{2n-5}cotg^{2n-5}x$$
$$+\dots\pm cotg\,x\pm x+c$$

مثال :

$$\int cotg^{10}x\,dx=-\frac{1}{9}cotg^{9}x+\frac{1}{7}cotg^{7}x-\frac{1}{5}cotg^{5}x$$
$$+\frac{1}{3}cotg^{3}x-cotg\,x-x+c$$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int tg^{6}2x\,dx \qquad \int cotg^{8}8x\,dx$$
$$\int tg^{6}\frac{x}{3}dx \qquad \int cotg^{12}\frac{x}{4}dx$$

نوع چهاردهم : انتگرال $Arcsin\,u$.

داریم :

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}=Arcsin\,u+c$$

مسأله :

$$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^{2}-x^{4}}}\qquad a>0$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{a^{2}(1-\frac{x^{4}}{a^{4}})}}=\frac{1}{2a}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-\frac{x^{4}}{a^{4}}}}$$

$$\begin{cases}u=\dfrac{x^{2}}{a}\\ du=\dfrac{2x\,dx}{a}\\ a\,du=2x\,dx\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad I=\frac{1}{2a}\int\frac{a\,du}{\sqrt{1-u^{2}}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}$$
$$=\frac{1}{2}Arcsin\,u+c$$

$$I=\frac{1}{2}Arcsin\frac{x^{2}}{a}+c$$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

$$\int\frac{(1+tg^{2}x)dx}{\sqrt{1-tg^{2}x}}\qquad\int\frac{dx}{sin^{2}x\sqrt{1-cotg^{2}x}}$$

$$\int\frac{x^{2}dx}{\sqrt{4-x^{6}}}$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^{2})\sqrt{1-(Arctg\,x)^{2}}}$$

نوع پانزدهم : انتگرال $Arc\,tg\,u$.

داریم :

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arc}tg\,u + c$$

مسأله :

$$I=\int \frac{-2\sin 2x\,dx}{1+\cos^2 2x}$$

$$u=\cos 2x \Rightarrow du = -2\sin 2x\,dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arc}tg\,u + c$$

$$= \mathrm{Arc}tg(\cos 2x)+c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{x^2dx}{4+x^6} \qquad \int \frac{dx}{(4+tg^2x)\cos^2x}$$

نوع شانزدهم : محاسبهٔ انتگرال

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

به شرطی که $a>0$ و $\Delta<0$.

حل این انتگرال به حل انتگرال $\mathrm{Arc}tg\,u$ تبدیل می‌شود.

مسأله :

$$\int\frac{dx}{2x^2-8x+16} \qquad \begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases}$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-4x+4+4}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-2)^2+4}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{4\left[1+\frac{(x-2)^2}{4}\right]}=\frac{1}{8}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}$$

$$u=\frac{x-2}{2} \Rightarrow 2u=x-2 \Rightarrow 2du=dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{8}\int\frac{2du}{1+u^2}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{4}\,\mathrm{Arc}\,tg\,u+c$$

$$=\frac{1}{4}\,\mathrm{Arc}\,tg\,\frac{x-2}{2}+c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int\frac{dx}{4x^2-4x+5} \qquad \int\frac{dx}{x^2-2\sqrt{2}\,x+6}$$

نوع هفدهم : محاسبهٔ انتگرالهای

$$\int\frac{dx}{1\pm\cos x} \qquad \int\frac{dx}{1\pm\sin x}$$

برای حل این انتگرالها، صورت ومخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس کسرحاصل را تفکیک می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم.

مسأله :

$$I=\int\frac{dx}{1-\sin x}$$

$$I=\int\frac{dx}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$$=\int\frac{(1+\sin x)dx}{1-\sin^2 x}=\int\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=tg\,x+\frac{1}{\cos x}+c=tg\,x+\sec x+c$$

توجه :

$$y=\frac{1}{u} \Rightarrow dy=\frac{-du}{u^2} \Rightarrow$$

$$\int\frac{-du}{u^2}=+\frac{1}{u}+c$$

مثال :

$$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \quad u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{-du}{u^2}=\frac{1}{u}+c=\frac{1}{\cos x}+c$$

تمرینها : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int\frac{dx}{1-\cos x} \qquad \int\frac{dx}{1+\sin x} \qquad \int\frac{dx}{1+\cos x}$$

نوع هجدهم : محاسبهٔ انتگرالهای

$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x} \qquad \int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

$\cos^2 x$ را به $tg^2 x$ و $\sin^2 x$ را به $cotg^2 x$ تبدیل‌می‌کنیم پس‌از ساده‌کردن حل مسأله به حل انتگرال $\mathrm{Arc}tg u$ تبدیل می‌شود.

مسأله :

$$I=\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2 x} \Rightarrow$$

$$I=\int\frac{dx}{1+\frac{1}{1+tg^2 x}}=\int\frac{dx}{\frac{2+tg^2 x}{1+tg^2 x}}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{(1+tg^2 x)dx}{2+tg^2 x}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+tg^2 x)dx}{1+\frac{tg^2 x}{2}}$$

$$u=\frac{tg x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}u=tg x \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}du=(1+tg^2 x)dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{2}du}{1+u^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{du}{1+u^2}$$

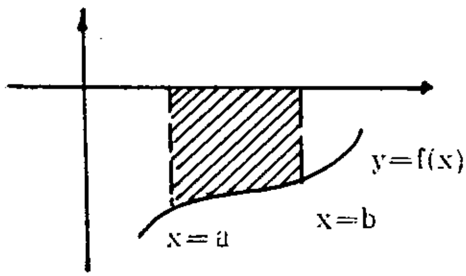
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arc}tg u+c$$

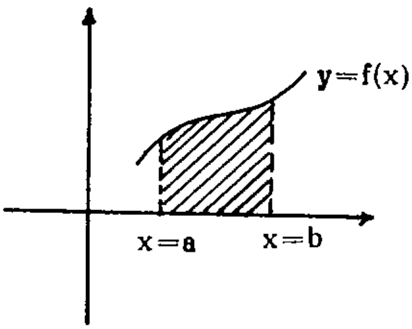
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arc}tg\left(\frac{tg x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

تمرین : مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرال

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 2x}$$

انتگرال معین:





قضیه: اگر تابع به معادلهٔ $y=f(x)$ درفاصلهٔ (I) پیوسته باشد ودرهمین فاصله $f(x)\geqslant 0$ یا $f(x)\leqslant 0$ در این‌صورت

سطح محصور بین منحنی تابع به معادله $y=f(x)$ ومحور xها و دو خط به معادله‌های $x=a$ و $x=b$ ($a,b\in I$ و $a<b$) از رابطهٔ $S=|F(b)-F(a)|$ به دست می‌آید، که $F(x)$ یکی از توابع اولیهٔ تابع $f(x)$ است.

بنابراین $\int_a^b f(x)\cdot dx$ که یک عدد است را انتگرال معین می‌نامند و a و b را حدود انتگرال می‌گویند.

مثال:

$$\int_1^2(-x^2+4x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)_1^2$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}+2\right)=\frac{11}{3}$$

یک فرمول مفید:

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$$

اثبات: اگر

$$\int f(x)dx=F(x)$$

آنگاه داریم:

$$\int_0^a f(x)dx=F(a)-F(0)$$

در این صورت:

$$\int_0^a f(a-x)dx=-F(a-x)$$

است و

$$\int_0^a f(a-x)dx=-F(0)+F(a)$$

پس؛ تساوی فوق درست است.

کاربرد فرمول $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ درحل مسائل زیر است. ثابت کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{\pi}{4}$$

درحالت کلی:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x\,dx}{\sin^n x+\sin^n x}=\frac{\pi}{4}\qquad n\in N$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x\,dx}{\sin^n x+\cos^n x}=\frac{\pi}{4}\qquad n\in N$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin x}\,dx}{\sqrt[n]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}}=\frac{\pi}{4}\qquad n\in N$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\cos x}\,dx}{\sqrt[n]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}}=\frac{\pi}{4}\qquad n\in N$$

برای نمونه یکی از آنها را حل می‌کنیم.

مسأله: ثابت کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x\,dx}{\sin^n x+\cos^n x}=\frac{\pi}{4}$$

بنا به فرمول بالا:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x\,dx}{\sin^n x+\cos^n x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(\frac{\pi}{2}-x)\,dx}{\sin^n(\frac{\pi}{2}-x)+\cos^n(\frac{\pi}{2}-x)}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x\,dx}{\cos^n x+\sin^n x}$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x\,dx}{\sin^n x+\cos^n x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x\,dx}{\cos^n x+\sin^n x}$$

$$\Longrightarrow\ 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}+\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\right)dx$$

$$\Longrightarrow\ 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx$$

$$\Longrightarrow\ 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\left(x\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\ \Longrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

ادب ریاضی

اینشتاین نشان داده است که هندسهٔ اقلیدسی باید کنار گذاشته شود، او براساس نظریهٔ جاذبی خویش، با پرسشهای کیهان شناسانه‌ای سروکار دارد و نشان می‌دهد که وجود یک عالم متناهی ممکن است. به‌علاوه، تمام نتایجی که از اخترشناسی حاصل آمده است، با این اصل که عالم بیضوی است، کاملاً سازگار است. تأسیس ما دایر بر آنکه عالم متناهی است به دو جهت است یعنی راجع است به بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ. اما احتمالاً هنوز مسألهٔ عمده این است که ناتناهی جای بر حقی در تفکرات ما اشغال کرده است و نقش یک مفهوم ضروری را ایفا می‌کند.

دیوید هیلبرت

فلسفهٔ ریاضی. حسین ضیائی و دیگران

کانت می‌گوید که هیچ چیز در حقیقت فضایی نیست و ظاهر فضایی اشیا فقط چیزی است که در مغز ما، نمایان می‌شود. اما علم وظیفه دارد جهان را به‌صورتی که به ما ظاهر می‌شود و نه به‌صورتی که در حقیقت دارد (و به عقیدهٔ کانت برای ما شناختی نیست) مورد مطالعه قرار دهد. به‌عقیدهٔ کانت این فرضیه روشن می‌سازد که چرا هندسه علم است، یعنی روشن می‌سازد که چگونه ما می‌توانیم از شکل فضایی جهانی که در برابر ما قرار دارد، یک معرفت ترکیبی بسازیم. برخی تضادها که خود وی آنها را آنتی‌نومی (Antinomy) می‌نامد او را ملزم به قبول این نتایج می‌سازند.

فلسفهٔ ریاضی. استیفن بارکر

احمد بیرشک

آموزش ترجمه متون ریاضی (۳)

● حمید رضا امیری

Inverse functions

توابع معکوس

If for a given function f a function g can be found such that

$$gf: x \mapsto x$$

and also

$$fg: x \mapsto x,$$

then g is denoted by f^{-1} and is said to be the *inverse* of f.

هرگاه با در نظرگرفتن تابع f بتوان تابعی مانند g یافت به قسمی که $gf:x \to x$ و همچنین $fg:x \to x$، در این صورت g به‌صورت f^{-1} نمایش داده شده و به آن معکوس f می‌گوییم.

In general, for a function f to have an inverse f^{-1} the following conditions must be satisfied:

(i) the range of f = the codomain of f,

(ii) $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, (iii) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, for all x_1 and x_2 in the domain of f.

درحالت کلّی، برای تابعی چون f یک معکوس مانند f^{-1} داریم هرگاه شروط زیر صادق باشند:

(۱) f هم دامنهٔ f = بُرد

(۲)[1] $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ، (۳) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ برای هر x_1 و x_2 در دامنهٔ f

Example 4

(a) $f: x \mapsto 3x + 1$.

Let $y = 3x + 1$, so that $x = (y - 1)/3$. Then $f: (y - 1)/3 \mapsto y$

$$\Rightarrow f^{-1}: y \mapsto (y - 1)/3 \quad \text{or} \quad f^{-1}: x \mapsto (x - 1)/3,$$

with domain and range $\mathbb{R}$.

(b) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$.

Let $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow f: \frac{1}{y} \mapsto y$.

Therefore, $f^{-1}: y \mapsto \frac{1}{y}$ or $f^{-1}: x \mapsto \frac{1}{x}$.

Hence, f is its own inverse.

مثال ۴

(الف) $f:x \to ۳x + ۱$

فرض کنیم: $y = ۳x + ۱ \Rightarrow x = \frac{(y - ۱)}{۳}$

درنتیجه $f: \frac{(y - ۱)}{۳} \to y$ بنابراین

$f^{-1}: x \to \frac{(x - ۱)}{۳}$ یا $f^{-1}: y \to \frac{(y - ۱)}{۳}$

که دامنه و بُرد آن IR می‌باشد.

(ب) $f: x \to \frac{۱}{x}$

فرض کنیم: $y = \frac{۱}{x} \Rightarrow x = \frac{۱}{y} \Rightarrow f: \frac{۱}{y} \to y$

بنابراین، $f^{-1}: y \to \frac{۱}{y}$ یا $f^{-1}: x \to \frac{۱}{x}$.

پس وارون f خودش می‌باشد.

---

(۱) با توجه به این‌که f را یک تابع فرض کرده‌ایم شرط دوّم همواره برقرار می‌باشد.

The above examples suggest the following rule for obtaining the inverse.

If $y = f(x)$ is the equation of the graph for any function f which has an inverse, then (i) interchange x and y so that $x = f(y)$, (ii) solve, if possible, for y in terms of x.

The result gives the inverse function f^{-1} if it exists.

مثالهای بالا دستور زیر را برای به دست آوردن معکوس یک تابع پیشنهاد می‌کنند.

اگر $y = f(x)$ معادلهٔ نمودار هر تابع مانند f بوده به قسمی که آن تابع دارای یک معکوس باشد، در این صورت (برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع معکوس آن به این شکل عمل می‌کنیم)

(۱) جای x و y را عوض می‌کنیم به قسمی که $x = f(y)$ (x را برحسب y به‌دست می‌آوریم)

(۲) در معادلهٔ y برحسب x ($y = f(x)$) به‌جای x مقدار به‌دست آمده برحسبِ y را قرار می‌دهیم: (با توجه به تعریف f^{-1} ضابطهٔ آن را از روی معادلهٔ حاصل و با وارون کردنِ آن به‌دست می‌آوریم که البته می‌توان ضابطهٔ f^{-1} را برحسب x نیز بیان کرد.)[1]

نتیجه به‌دست آمده، معکوس تابع یعنی f^{-1} را درصورت وجود حاصل می‌کند.

(c) Consider the function $f: x \mapsto x^2$ with the domain **R**. Clearly, both 2 and −2 map to 4. As it is not possible to say uniquely which point maps to 4, this function does not have an inverse.

However, if we restrict the domain to $\mathbf{R}^+$, the set of positive real numbers, then f maps onto the codomain $\mathbf{R}^+$ and f does have an inverse:

$$f^{-1}: x \mapsto \sqrt{x}.$$

[Note we use $\sqrt{x}$ to denote the positive square root of x.]

(پ) تابع $f: x \rightarrow x^2$ را با دامنهٔ IR درنظر می‌گیریم. واضح است، دوعدد ۲ و ۲ـ روی عدد ۴ نگاشته می‌شوند ($f(2) = 4$ و $f(-2) = 4$). به هرصورت این امکان نیست که بیان کنیم

(۱) دو مرحلهٔ (۱) و (۲) را می‌توان به این صورت خلاصه کرد و به کار برد: در معادلهٔ نمودار ابتدا جای x و y را عوض می‌کنیم و سپس y را برحسب x به‌دست می‌آوریم ضابطهٔ به‌دست آمده همان $f^{-1}(x)$ است.

منحصراً یک نقطه روی ۴ نگاشته می‌شود، این تابع دارای معکوس نمی‌باشد.

درهر حال، اگر دامنه را به IR^+، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، محدود کنیم، آنگاه f به روی هم دامنه‌اش IR^+ نگاشته می‌شود و دارای معکوس است:

$f^{-1}: x \sqrt{x}$

(توجه کنید که ما برای نشان دادن ریشهٔ دوّم مثبتِ x از $\sqrt{x}$ استفاده می‌کنیم.)

(d) If $f: x \mapsto x + 1$ and
$g: x \mapsto x^2$
then
$fg: x \mapsto x^2 + 1$.

The inverse is obtained by solving $y^2 + 1 = x$, which gives $y = \pm\sqrt{(x-1)}$. For $(fg)^{-1}$ to be a function we must restrict the new domain to $x \geq 1$ and the range to, say, the positive square root of $(x - 1)$. Then

$$(fg)^{-1}: x \mapsto +\sqrt{(x-1)} \quad \text{for } x \geq 1.$$

Notice that

$$f^{-1}: x \mapsto x - 1,$$
$$g^{-1}: x \mapsto +\sqrt{x}$$

and

$$g^{-1}f^{-1}: x \mapsto +\sqrt{(x-1)} \quad \text{for } x \geq 1.$$

Hence, with above restrictions on domain and range

$$(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$$

(ت) اگر $f: x \rightarrow x + 1$ و $g: x \rightarrow x^2$ در این صورت $fg: x \rightarrow x^2 + 1$ با حلِ معادلهٔ $y^2 + 1 = x$ معکوس به‌دست می‌آید، که خواهیم داشت $y = \pm\sqrt{(x-1)}$. برای اینکه $(fg)^{-1}$ تابع باشد باید دامنه و بُرد جدیدی را به $x \geq 1$ محدود کنیم، می‌گوییم، ریشهٔ دوّمِ مثبت از $(x-1)$ بنابراین

$(fg)^{-1}: x \rightarrow +\sqrt{(x-1)}$ برای $x \geq 1$.

توجه دارید که:

$f^{-1}: x \rightarrow x - 1$

$g^{-1}: x \rightarrow +\sqrt{x}$.

و $g^{-1}f^{-1}: x \rightarrow +\sqrt{(x-1)}$ برای $x \geq 1$

بنابراین، با محدودیت بالا روی دامنه و برد $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

Note the order, which may at first seem strange. It does, however, agree with practical experience — 'drive the car into the garage and then close the door' but the inverse is '*first* open the door and *then* drive the car out'.

بعلاوه توجه داریم که (مطلب فوق) در وهلهٔ اول ممکن است تا حدودی عجیب به نظر آید. به هر حال (دستورات و تعاریف فوق راجع به معکوس تابع) با این تجربه عملی مطابقت دارد - (عملِ تابع به منزلهٔ) «راندن ماشین داخل گاراژ و سپس بستن درب گاراژ است؟» امّا معکوس تابع «ابتدا درب را باز می‌کند و سپس ماشین را به بیرون می‌راند؟»

The general result is: for all functions f, g, ..., p, q such that the inverse function $(fg \ldots pq)^{-1}$ exists

$$(fg \ldots pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1} \ldots g^{-1}f^{-1}.$$

This may be proved by induction (see page 46).

نتیجهٔ کلّی این‌که: برای هر تابع مانند f و g و ... p و q که معکوس تابع $(fg \ldots pq)^{-1}$ وجود داشته باشد

$$(fg \ldots pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1} \ldots g^{-1}f^{-1}$$

اثبات رابطهٔ بالا توسط استقراء امکان پذیر است (به صفحهٔ ... مراجعه کنید).

1.2 Indices, surds and logarithms

۱.۲ نماها، اعداد گنگ (رادیکالی) و لگاریتمها

Indices

The three basic rules of indices are:

(i) To *multiply* powers of the same base *add indices*:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

(ii) To *divide* powers of the same base *subtract indices*:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

(iii) To raise a power of a base to a second index *multiply the indices*:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

These rules apply for $m, n \in \overline{Z}^+$. If we apply them to $m, n \in Q$, we require the following interpretations:

نماها

سه دستور اساسیِ نماها عبارتند از:

(۱) برای ضرب توانها با پایهٔ متشابه نماها را با هم جمع می‌کنیم:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

(۲) برای تقسیم توانها با پایهٔ متشابه نماها را از هم کم می‌کنیم:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

(۳) برای این‌که توانِ یک پایه را مجدداً به‌توان برسانیم نماها را درهم ضرب می‌کنیم:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

این دستورها برای $m, n \in Z^+$ به کار می‌رود. اگر ما اعداد $m, n \in Q$ را به کار ببریم تعبیرهای زیر برای ما ایجاب می‌شود.

ادب و ریاضی

چون جهان حقیقت، به‌معنای مطلق کلمه، اگر نگوییم مستقل از هر فکر انسانی است، لااقل مستقل از شخصیت دانشمند است. هر کشفی که به‌وسیلهٔ فرد خاصی صورت پذیرد ارزش و معنایی عام پیدا می‌کند. این امر برای دانشمندی که در سکوت آزمایشگاه خود با مسأله‌ای دست به گریبان است، این یقین را به بار می‌آورد که اگر به نتیجه‌ای برسد، این نتیجه را سراسر جهان دانش خواهد پذیرفت. این احساس که وی دربارهٔ اهمیّت کار خود دارد، سرچشمهٔ سعادت اوست و گذشتهایی را که بارها در زندگی به آنها رضا داده، جبران می‌کند.

تصویر جهان در فیزیک جدید. ماکس پلانک

مرتضی صابری

اثبات شرطی

غلامرضا یاسی‌پور

۱. قانون تقویت شده اثبات شرطی[1]:

در قسمتهای قبل* روش اثبات شرطی تنها درمورد استدلالهایی[2] به‌کار رفت که نتایجشان[3] صورت[4] شرطی داشت. اما در فصل بعد راحت‌تر است که روشی شبیه به روش اثبات شرطی در مورد استدلالهایی که نتایجشان گزاره‌های شرطی[5] واضح نیستند به کار رود. برای رسیدن به این مقصود قانون اثبات شرطی‌مان را تقویت می‌کنیم و از این رو به آن خاصیت عملی بودن وسیعتری می‌دهیم.

برای تنظیم قانون تقویت شدهٔ اثبات شرطی‌مان بی‌فایده نیست که در نوشتن اثباتها روش جدیدی راکه از روش شرطی[6] استفاده می‌کند بپذیریم. همان‌طور که در قسمتهای قبل توضیح داده شد، روش اثبات شرطی را برای اثبات درستی[7] استدلالی که گزاره‌ئی شرطی به‌عنوان نتیجه داشت، با اضافه‌کردن مقدم[8] آن گزارهٔ شرطی به مقدمات[9] استدلال به‌عنوان فرض[10]، و سپس استنتاج[11] تالی[12] آن گزارهٔ شرطی، به‌کار می‌بردیم، و علامت‌گذاری بخش قبل شامل استفاده از یک خط مایل اضافی و یک علامت بنابراین اضافی، همان‌گونه که در اثبات درستی استدلال:

$A \Rightarrow B$

$\therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$

توسط اثبات چهار سطری زیر به کار می‌رود، بود:

۱. $A \Rightarrow B \quad /\therefore \quad A \Rightarrow (A \wedge B)$

۲. $A \quad /\therefore \quad A \wedge B$ (C.P.)

۳. B ۱، ۲، M.P.

۴. $A \wedge B$ ۲، ۳، Conj

اثبات شرطی درستی همین استدلال در علامت‌گذاری جدیدمان به‌صورت دنبالهٔ[13] پنج سطری زیر انجام می‌گیرد:

۱. $A \Rightarrow B \quad /\therefore \quad A \Rightarrow (A \wedge B)$

۲. A فرض

۳. B ۱، ۲، M.P.

۴. $A \wedge B$ ۲، ۳، Conj

۵. $A \Rightarrow (A \wedge B)$ ۲، ۴، C.P.

در این‌جا سطر پنجم نه از یک یا دو سطر قبل بلکه از دنبالهٔ سطرهای ۲ و ۳ و ۴ که استنتاج درست سطر ۴ را از سطرهای ۱ و ۲ به‌دست می‌دهد استنتاج شده است. در سطر ۵ درستی استدلال:

$A \Rightarrow B$

$\therefore A \Rightarrow (A \wedge B)$

را از درستی مبرهن[14] استدلال:

$A \Rightarrow B$

A

$\therefore A \wedge B$

استنتاج می‌کنیم. این استنتاج[15] با اشاره به دنبالهٔ سطرهایی که به آنها رجوع شده، و با به کار بردن حروف «C.P.» برای نشان دادن این که اصل اثبات شرطی به کار رفته است، «توجیه» می‌شود.

در اثبات اخیر سطرهای ۳ و ۴ به سطر ۲ یعنی فرض بستگی دارند. اما سطر ۵ به سطر ۲ وابسته نیست بلکه فقط به سطر ۱ وابسته است. بنابراین سطر ۵ خارج یا ماورای برد[16] فرضی است که در سطر ۲ درنظر گرفته شده است. چون در اثبات شرطی درستیبی، فرضی در نظر گرفته می‌شود، «بردش» همواره محدود[17] است، و هیچ‌گاه به آخرین سطر برهان[18] نمی‌رسد.

اکنون علامت‌گذارئی را معرفی می‌کنیم که در مشخص کردن رد مفروضات و برد آنها بسیار مفید است. برای این منظور از پیکان شکسته‌یی که سرش از طرف چپ اشاره به فرض دارد و انتهایش در زیر آخرین سطر برد فرض واقع است استفاده می‌کنیم. به این ترتیب برد فرض اثبات قبل به ترتیب زیر مشخص می‌شود:

۱. $A \Rightarrow B$	$/\therefore\ A \Rightarrow (A \wedge B)$	
→۲. A		فرض
۳. B	۱، ۲،	M.P.
۴. $A \wedge B$	۲، ۳،	Conj
۵. $A \Rightarrow (A \wedge B)$	۲، ۴،	C.P.

به این مطلب باید توجه شود که تنها، سطری که توسط اصل اثبات شرطی استنتاج شده است برد یک فرض را پایان می‌دهد، و هرباراستفاده از قانون اثبات شرطی به پایان دادن برد یک فرض کمک می‌کند. زمانی که برد یک فرض پایان گرفت می‌گوییم: آن فرض بی‌اثر شده است، و دیگر هیچ سطر بعدی‌یی را نمی‌توان با مراجعه به آن یا هر سطر بین آن و سطر استنتاج شده از قانون شرطی‌یی که آن را بی‌اثر کرده، توجیه کرد. و تنها سطرهای واقع بین یک فرض با برد محدود و سطری که آن را بی‌اثر کرده، را می‌توان با مراجعه به آن فرض توجیه نمود. بعد از آن که فرضی با برد محدود وسطری که آن را بی‌اثر کرده، را می‌توان با مراجعه به آن فرض توجیه نمود. بعد از آن که فرضی با برد محدود بی‌اثر شد، می‌تواند فرض دیگری درنظر گرفته و سپس بی‌اثر شود. یا فرض با برد محدود دومی را می‌توان در داخل برد اولی نوشت. به این ترتیب بردهای مفروضات مختلف ممکن است پس از یکدیگر بیایند، یا یکی کاملاً داخل دیگری قرار گیرد.

اگر بُرد یک فرض تا انتهای یک اثبات نرسد، دراین صورت سطر آخر به آن فرض بستگی ندارد، بلکه ثابت شده است که به‌تنهایی از مقدمات اصلی نتیجه شده است. درنتیجه لازم نیست که خود را محدود به استفاده از تنها مقدمهای نتایج شرطی به‌عنوان مفروضات کنیم، و هر گزاره[19] را می‌توان به‌عنوان فرضی با برد محدود درنظر گرفت، زیرا سطر نهایی که همان نتیجه است همیشه خارج برد آن و مستقل از آن خواهد بود.

برهان زیر، برهان پیچیده‌تری است که شامل دو مفروض است (چون در این مورد اگر علامت پیکان شکسته را به کار بریم، دیگر لازم نیست که کلمهٔ «فرض» را بنویسیم، زیرا هر فرض به قدر کافی با سر پیکان مشخص می‌شود):

۱. $(A \vee B) \Rightarrow [(C \vee D) \Rightarrow E]$ $/\therefore\ A\ [(\Rightarrow C \wedge D) \Rightarrow E]$	
→۲. A	
۳. $A \vee B$	۲، Add
۴. $(C \vee D) \Rightarrow E$	۱، ۳، M.P.
→۵. $C \wedge D$	
۶. C	۵، simp
۷. $C \vee D$	۶، Add
۸. E	۴، ۷، M.P.
۹. $(C \wedge D) \Rightarrow E$	۵، ۸، C.P.
۱۰. $A \Rightarrow [(C \wedge D) \Rightarrow E]$	۲-۹، C.P.

در این اثبات، سطرهای ۲ تا ۹ در برد فرض اول قرار می‌گیرند، در حالی‌که سطرهای ۵، ۶، ۷، و ۸ در برد فرض دوم واقع می‌شوند. از این دو مثال واضح است که برد مفروض α در

یک اثبات، شامل تمام سطرهای α تا φ که در آن سطر بعد از φ به‌صورت $\alpha \Rightarrow \varphi$ است و از آن دنبالهٔ سطرها با استفاده از C.P. استنتاج شده، می‌باشد. در مثال قبل، مفروض دوم در برد مفروض اول به این علت قرار می‌گیرد که بین مفروض اول و سطر ۱۰ که از دنبالهٔ سطرهای ۲ تا ۹ با استفاده از C.P. استنتاج شده، واقع است.

زمانی‌که روش جدید نوشتن اثبات شرطی درستی را به کار می‌بریم برد هر مقدمهٔ اصلی تا پایان اثبات می‌رسد. این مقدمات اصلی را می‌توان با مفروضات اضافی به شرطی‌که برد آنها محدود باشد و به پایان اثبات نرسد، تکمیل کرد. هر سطر اثبات صوری[۲۰] درستی باید یا مقدمه یا مفروضی با برد محدود باشد، و یا باید از یک یا دو سطر قبل و با استفاده از یکی از قوانین استنتاج[۲۱] به‌درستی نتیجه شود، یا باید از دنباله‌ئی از سطرهای قبل و با استفاده از اصل اثبات شرطی به‌دست آید.

به این مطلب باید توجه شود که اصل تقویت شدهٔ اثبات شرطی شامل روش اثبات غیرمستقیم[۲۲] به‌عنوان حالتی خاص است، چه از آنجا که می‌توان هر مفروض برد محدودی را در اثبات شرطی درستی درنظر گرفت، می‌توانیم به‌عنوان مفروضمان نقیض[۲۳] نتیجهٔ استدلال را درنظر گیریم، و زمانی‌که تناقض[۲۴] یا کاذبی به‌دست آمد، می‌توانیم برای حاصل کردن نتیجهٔ مطلوب با توجه به آن کاذب و با استفاده از جمع[۲۵] و قیاس فاصل[۲۶] به اثبات ادامه بدهیم. چون این عمل انجام شد، می‌توانیم از قانون اثبات شرطی برای پایان دادن به برد آن مفروض استفاده کنیم و شرطیئی به‌دست آوریم که تالیش نتیجهٔ استدلال و مقدمش نقیض آن نتیجه است. و از چنین شرطیئی نتیجهٔ استدلال را با استفاده از استلزام[۲۷]، نقیض دوگانه[۲۸]، و صادق[۲۹] حاصل کنیم.

از این جابه بعد، به قانون تقویت شدهٔ اثبات شرطی، به‌طور ساده به‌عنوان قانون اثبات شرطی اشاره خواهیم کرد.

یادداشتها

* به شماره‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ برهان مراجعه شود.

1. The Strengthened Rule of Conditional Proof
2. Arguments
3. Conclutions
4. Form
5. Conditional Statements
6. Conditional Method
7. Validity
8. Antecedent
9. Premisses
10. Assumption
11. Deduce
12. Consequent
13. Sequence
14. Demonstrated Validity
15. Inference
16. Scope
17. Limited
18. Demonstration
19. Proposition
20. Formal Proof
21. Rules of Inference
22. Indirect Proof
23. Negation
24. Contradiction
25. Addition
26. Disjunctive Syllogism
27. Implication
28. Double Negation
29. Tautology

تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۶)

دراین شماره نیز به‌بررسی مجلهٔ آشتی با ریاضیات می‌پردازیم:

در مقالهٔ نظریه فاجعه[۲۱] چنین آمده که: دانشمندان به‌طورکلی دوگونه فرآیند در طبیعت شناخته‌اند: فرآیندهای پیوسته یا همواره، همچون گردش سیاره‌ها، یا جریان الکتریسیته در یک سیم؛ و فرآیندهای ناپیوسته یا ناگهانی که پدیده‌هایی مانند جداشدن ناگهانی یک تیر حمال تحت فشار در یک ساختمان، یا تقسیم سلولی در یک بافت درحال رشد، از آن‌جمله است.

رفتار فرآیندهای پیوسته به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال که ۳۰۰ سال پیش توسط نیوتن و لایب‌نیتز پایه گذاری شد، قابل مطالعه و شناخت است. ولی در مقابل، گونه‌ای از ریاضیات که به کمک آن شرح و بسط و شناخت پدیده‌های ناپیوسته ممکن باشد، دردست نبود.

به‌هر تقدیر اکنون مطالعات رنه‌توم[۲۲] استاد ریاضیات در انستیتو مطالعات عالی علمی پاریس، چنین نظریه‌ای را حاصل آورده است. تحقیقات و مطالعات توم نظریهٔ فاجعه‌ها نام گرفته‌است، زیرا پدیده‌هایی را بررسی می‌کند که به‌طور ناگهانی از یک گونه رفتار به گونه رفتار کاملاً متفاوتی جهش می‌کنند. (این پدیده‌ها لزوماً یک بلای ناگهانی نیست.)

این نظریه همچنان‌که در فیزیک و مهندسی قابل کارگیری است، در علوم اجتماعی و علوم زیستی نیز کاربردهایی اساسی را دارا می‌باشد.

نظریهٔ فاجعه‌ها در شاخهٔ توپولوژی از ریاضیات جای دارد. پدیده‌های مطرح شده در توپولوژی بیشتر از لحاظ وضع شکلی مورد توجه‌اند تا اندازه و شکل هندسی آنها، و سروکار با مشخصات و حالاتی است که تغییرات اندازه در آنها بی‌اثر است. بنابر نظریهٔ فاجعه‌ها، واقعه‌های ناپیوسته با شکلهای مشخصی قابل بیان می‌باشند.

شکلها، سیمای اساسی نظریهٔ فاجعه‌ها می‌باشند. رنه‌توم اثبات کرده است که هرچند تعداد پدیده‌های ناپیوسته در شاخه‌های مختلف علوم نامتناهی است، ولی فقط تعداد مشخصی فاجعه‌های اولیه از اشکال مختلف موجود هستند.

هنگامی‌که درگیر سه بعد فضا و یک بعد زمان هستیم، فاجعه‌های اولیه هفت‌تا می‌باشند که عبارت‌اند از: **فاجعهٔ چین**، که برای مثال، برای بیان شکست نور در قطرات باران و تشکیل رنگین‌کمان به کار می‌آید؛ **فاجعهٔ گوشه**، که برای مطالعهٔ وقایعی نظیر جنگ وگریز، عشق و تنفر، و اضطراب و آرامش در انسان و حیوان به کار می‌رود؛ **فاجعهٔ دم پرستو**، که برای به‌دست آوردن بینش جدیدی در طبیعت تقسیم سلولی در جنینها به کارگرفته‌شده است، **فاجعهٔ پروانه**، که برای پیشگویی عکس‌العملهای مشخص رشتهٔ اعصاب نامنظم انسانی به کار می‌آید؛ **فاجعهٔ هذلولوی**، که در تحلیل فرو ریختن پلها و پیشبرد وسایل آفتابی مفید است؛ **فاجعهٔ بیضوی**، که مدلی برای جریان مایعات به‌دست می‌دهد؛ و **فاجعهٔ سهموی**، که همچون مدلی در حل مسائل زبان‌شناسی به کار می‌آید.

غیاث الدین جمشید کاشانی آخرین خورشید ریاضی آسمان ایران کیست؟ در مقاله‌ای به‌همین نام[۲۳] چنین می‌خوانیم که کاشانی در سدهٔ نهم هجری (پانزدهم میلادی) می‌زیست. از کتاب (های) شناخته شدهٔ او به زبان فارسی «زیج خاقانی»، «مختصری در علم هیأت» و «شرح آلات رصد» و مشهورترین کتابهایی که به‌زبان عربی نوشته است «رسالهٔ محیطیّه»، «مفتاح‌الحساب» و «رسالهٔ وتر و جیب» است.

درهمین کتاب است که کاشانی کسرهای دهدهی را کشف کرده است (کشفی که در فرهنگ غرب، معمولاً به سیمون‌استون[۲۴] نسبت می‌دهند، درحالی‌که استون در سال ۱۵۴۸ میلادی به‌دنیا آمده است، یعنی درست ۱۲۱ سال بعد از تنظیم کتاب «مفتاح‌الحساب» به‌وسیلهٔ کاشانی). کاشانی در این کتاب، علاوه بر قانونهایی که برای محاسبهٔ جذر، محاسبهٔ سطح و حجم شکلهای هندسی، بررسی مثلثها و تنظیم جدولهای مثلثاتی، حل معادلهٔ درجه سوم، محاسبهٔ مجموع رشته‌های عددی و حتی تنظیم جدول وزن مخصوص جسمهای جامد و مایع می‌دهد، به ریاضیات کاربسته هم می‌پردازد و روش اندازه‌گیری طاقها و گنبدها را، که در معماری شرق به کار می‌رفت، مورد بررسی قرار می‌دهد. کاشانی در همین کتاب، ضریبهای بسط دوجمله‌ای و قانون $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ راکشف کرد.

در کتاب «رسالةالمحیطیه»ی خود به محاسبهٔ عدد π می‌پردازد و با محاسبهٔ محیط $۸۰۵۳۰۶۳۶۸ = ۳ \times ۲^{۲۸}$ ضلعی منتظم داخلی و خارجی و واسطهٔ عددی آنها عدد π را با ۱۷ رقم دهدهی به‌دست می‌دهد که تنها رقم آخر آن اشتباه است.

یکی از جالبترین کارهای او، محاسبهٔ سینوس یک درجه است که در رسالهٔ «وتروجیب» او آمده و درواقع توانسته است با حل معادلهٔ درجه‌سوم $۴x^۳ - ۳x + \sin ۳^\circ = ۰$ به‌نتیجهٔ موردنظر خود برسد.[۲۵]

درمقالهٔ مرگ یک ریاضی‌دان[۲۶] به مناسبت درگذشت[۲۷] استاد علامه دکتر غلامحسین مصاحب شرح حال مختصری از او به‌ترتیب زیر آمده است:

غلامحسین مصاحب در سال ۱۲۸۹ هجری شمسی در تهران متولد شد. در تهران، فرانسه، و انگلستان تحصیل کرد. در سال ۱۳۲۷ به اخذ درجهٔ دکتری از دانشگاه کیمبریج و به عضویت انجمن ریاضی لندن و انجمن فلسفی کیمبریج نایل گردید.

در سال ۱۳۰۶ وارد خدمت وزارت فرهنگ شد و تا سال ۱۳۳۲ کارمند آن وزارت (در سمتهای رئیس کل تعلیمات عالیه، مدیرکل فنی و معاون فنی) بود. درضمن مشاغل اداری، همواره به تألیف و تدریس اشتغال داشت. در سال ۱۳۴۵ مؤسسهٔ ریاضیات را در دانشگاه تربیت معلم[۲۸] تأسیس کرد و تا آخرین روز حیات خود به سمت استادی در آن مؤسسه اشتغال داشت.

اهم آثار وی به‌ترتیب تاریخ انتشار به شرح زیر است:

مجلهٔ ریاضیات عالی و مقدماتی (۱۳۰۹ - ۱۳۱۰).

جبر و مقابلهٔ خیام (تهران، ۱۳۱۷، ۲۹۰ صفحه) مشتمل بر متن عربی و ترجمهٔ فارسی رسالهٔ خیام در جبر و تاریخ ریاضیات تا زمان خیام، که در آن برای نخستین بار مقام علمی خیام مستنداً به فارسی زبانان شناسانیده شده است.

رسالهٔ

On Differentiation and Denjoy - Behaviour of Functions of Two Real Variables.

که در جلد چهل‌وششم (مورخ سال ۱۹۵۰) مجلهٔ انجمن فلسفی کیمبریج به طبع رسیده است.

مدخل منطق صورت (از انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۳۴، ۷۰۰ صفحه)، که نخستین کتاب فارسی در این علم است، و در مجلهٔ مشهور

Journal of Symbolic Logic

بر آن تقریظ نوشته‌اند (شمارهٔ چهارم جلد بیست‌ودوم، ۱۹۵۷).

حکیم عمرخیام به‌عنوان عالم جبر (انجمن آثار ملی، ۱۳۳۹، ۳۰۰ صفحه)، مشتمل بر اثری ناشناخته از خیام در ریاضیات.

دایرةالمعارف فارسی (جلد اول، ۱۳۴۵).

مدخل آنالیز ریاضی[۲۹] (۹۳۰ صفحه، چاپهای ۱۳۴۸، ۱۳۵۰، ۱۳۵۲).

دورهٔ تئوری مقدماتی اعداد که جلد اول آن در دو قسمت و در ۱۳۹۵ صفحه به چاپ رسیده و جلد دوم آن در دست انتشار است.[۳۰]

در مقالهٔ نظریهٔ بازی در ریاضیات[۳۱] چنین می‌خوانیم:

برای حل بسیاری از مسائل اقتصادی، نظامی، تولیدی و غیره

باید به تحلیل وضعیتی پرداخت که میان دو یا چند حریف وجود دارد. چنین وضعیتی را «وضعیت برخوردی» می‌نامند. اگر به‌یکی از بازیهای ورق توجه کنیم، این موضوع به‌روشنی ملاحظه می‌شود. بدیهی است در یک وضعیت برخوردی عمل هر یک از حریفان (بهتر است آنها را بازیکنان بنامیم) بستگی به عمل حریفان دیگر دارد. درعمل، حریفها یا بازیکنان رقیبان تجاری، صاحبان کارخانه و سرمایه و طراحان نظامی هستند.

به‌منظور تحلیل ریاضی یک وضعیت برخوردی در سالهای اخیر فصلی بر دفتر ریاضیات عملی به‌نام «نظریهٔ بازی[۳۲]» افزوده شده است. هدف اصلی در این نظریه یافتن عاقلانه‌ترین راه برای هر یک از بازیکنان در یک وضعیت برخوردی است. باید دانست که وضعیت برخوردی واقعی بسیار پیچیده است و تحلیل آن به‌لحاظ وجود عوامل ملازم متعدد، نیاز به بررسی و تحقیق عمیق دارد. برای تحلیل ریاضی وضعیت برخوردی واقعی باید برخی از عوامل ثانوی را حذف کرد و مدل صوری ساده‌ای بنا نمود. چنین مدلی را «بازی» می‌نامند.

میان یک بازی و یک وضعیت واقعی اختلاف بارزی وجود دارد. بازی همیشه براساس قواعد معین غیرقابل تخطّی هدایت می‌شود، درحالی‌که در وضعیت برخوردی واقعی ممکن است عملیات از چهارچوب یک سلسله قواعد مشخص خارج شود.

از زمانهای قدیم مردم از مدلهای صوری وضعیت برخوردی مانند بازیهای شطرنج، تخته‌نرد، بازیهای ورق و حتی بازیهای کودکان چون شیروخط و دوزبازی، به‌عنوان بازی و سرگرمی استفاده می‌کرده‌اند. درتمام این بازیها قواعد ویژه‌ای وجود دارد و درانتها هریک ازآنها «برنده»، «مساوی» یا «بازنده» می‌شود.

نظریهٔ بازی به‌معنی کلمهٔ امروزی نخست توسط بورل[۳۳] مطرح گردید. بورل در کتاب خود از حالت خاصی از قضیهٔ اصلی بازی استفاده کرد، اما از عهدهٔ اثبات آن برنیامد. در سال ۱۹۲۸ جان ون نیومن[۳۴] این قضیه را ثابت کرد. اما تا سال ۱۹۴۴ کمتر نامی از نظریهٔ بازی شنیده می‌شد. در این سال اثر تاریخی نیومن و مورگنسترن[۳۵] انتشار یافت.[۳۶] در این کتاب اساس ریاضی نظریهٔ بازی ارائه گردید و طریق استفاده از آن در اقتصاد مطرح شد. کتاب نیومن و مورگنسترن به‌زودی مورد استقبال ریاضی‌دانها و پژوهشگران مسائل تولیدی، مدیریت و نظامی قرارگرفت و در مدت کوتاهی نظریهٔ بازی از جنبهٔ نظری و عملی گسترش و توسعهٔ بسیار یافت. معلوم گردید که نظریهٔ بازی نه‌تنها قابل کارگیری در اقتصاد است، بلکه حتی در تحلیل استراتژیها و نقشه‌های نظامی نیز بسیار سودمند می‌باشد.

یکی از مقاله‌های خوب مجله مقالهٔ **تدریس ریاضیات و تلاشی برای بهترکردن آن**[۳۷] است. این مقاله راگروهی از اعضای انجمن ریاضی آمریکا نوشته‌اند و بنا به نوشتهٔ مترجم فارسی آن گرچه برای سیستم آموزشی آمریکا نوشته شده برای معلمان ایرانی نیز مفید است و دید آنها را گسترش می‌دهد. در زیر بعضی از فرازهای این مقاله را می‌آوریم.

معلم باید پیش‌از آغاز کلاسها به محتوای درس فکر کند و آن را با مطالبی اضافی ازکتابهای جنب درسی و مرجع و نکات تاریخی و کاربردهای جالب بیاراید.

باید در جلسهٔ اول عنوان و موضوع درس را اعلام و یادآوری‌کند که‌برای یادگرفتن آن درس به چه‌آگاهیهایی نیاز است.

روی تختهٔ سیاه نام خود و ساعاتی راکه در دفتر خواهد بود بنویسد.

روش خود را در مورد تکلیف شب، امتحانات، و نمره دادن توضیح دهد.

هدفهای کلاس را تشریح کند، و راجع‌به یادداشت برداشتن و اندازهٔ آن و زمانهای مناسب آن توضیح دهد. جای شاگردان را بداند و تکلیف شب آنها را شخصاً و یکی‌یکی به آنها بازگرداند. هنگامی‌که مطلبی برای کلاس آماده می‌کند به چند بخش بعدی هم نگاهی بیندازد، وکوشش داشته باشد که هر کلاس را با مطالبی شروع کند که دانشجویان با آنها آشنایی دارند، و یک‌مرتبه داخل مطالب تازه نشود.

زیاد بپرسد و از دانشجویان مختلف بپرسد، وحتی‌الامکان از سخنرانیهای طولانی خودداری کند. به‌موقع سر کلاس بیاید، درکلاس به چشم دانشجویان نگاه کند و برای در و دیوار درس ندهد. روشن و شمرده و با صدای بلند صحبت کند. صدایش یکنواخت نباشد و درضمن صحبت مواظب تغییر چهرهٔ دانشجویان باشد. به‌دانشجو فرصت فکر کردن بدهد به‌عبارت دیگر تمام وقت کلاس را باگفتن و شنیدن نگذراند. دانشجو را تشویق به پرسیدن کند. چون سؤالی مطرح شود ابتدا اطمینان حاصل کند که همه آن را شنیده‌اند و بعد به جواب آن بپردازد. حدس زدن را تشویق کند و سؤالهای بد و جوابهای نادرست را به مسخره نگیرد.

در کلاس درس تا آن‌جاکه می‌تواند و شرایط اجازه می‌دهد خودمانی باشد. خود را به مطالب درس علاقه‌مند نشان‌دهد و از گفتن لطیفهٔ به‌جا خودداری نکند. هرچند وقت یکبار لبخند بزند و هیچ‌وقت در کلاس عضبانی نشود و با دانشجویان مؤدب باشد و در صحبت خود از اشارات و نکته‌های تاریخی غافل نماند.

اگر اشتباهی کرد حالت دفاعی به‌خود نگیرد. از دانشجویان کمک بخواهد و باکمک آنها به تصحیح اشتباه بپردازد. اگر کسی سؤالی کرد که جوابش را نمی‌داند کوشش نکند که به‌نحوی ندانستن خود را بپوشاند بلکه سعی کند جواب را باکمک کلاس به‌دست آورد یا قول دهد که جواب آن را بعداً بیاورد.

کلاس درس را حتی‌الامکان نزدیک به وقت مقرر تمام کند و شاگردان را بعد از وقت کلاس در کلاس نگه ندارد. هر کار را خوب، با دقت وکامل انجام دهد.

مطالب نوشتنی را با دقت و آرامی بر تختهٔ سیاه بنویسد و آنچه راکه می‌نویسد با صدای بلند تکرار کند و تا آن‌جاکه می‌شود جلو نوشته نایستد. به‌طور کامل و دقیق، متن آنچه راکه می‌خواهد ثابت‌کند یا درباره‌اش حرف بزند بنویسد. برای تأکید نکته‌های مهم، خلاصهٔ آنها را روی تخته بنویسد، و وقتی مسأله‌ای را حل می‌کند صورت کامل یا مرجع آن را بنویسد. هیچ‌گاه مطلب نادرستی را، حتی هنگامی‌که می‌خواهد بعداً نادرستی آن را متذکر شود، ننویسد. بعد از کلاس، بسرعت بیرون نرود و بالاخره تختهٔ سیاه را برای معلم بعدی پاک کند.

به‌دانشجویان تکلیف شبانه دهد و مسائل آن را با دقت انتخاب کند و هنگام ورود به کلاس تکالیف را جمع کند و این کار را به آخر وقت موکول نکند. تکلیف شب را به‌عنوان قسمتی از نمرهٔ کلاس به‌حساب آورد.

درمورد امتحان روشی اتخاذ کند که سرنوشت دانش‌آموز تنها با یک امتحان معلوم نشود و به‌عبارت دیگر درطی سال به‌انجام امتحانهای متعدد بپردازد. درامتحان سؤالها را به‌روشنی و از آسان به مشکل انتخاب کند و نکته‌ای را مبهم نگذارد و به این ترتیب بهانه‌ای به‌دست دانش‌آموز ندهد. بین مسائلی که برای حل آنها تنها از فرمول استفاده می‌شود و مسائلی که جنبهٔ نظری یاکار بسته دارند تعادل ایجاد کند. از به‌هم ربط دادن سؤالات مختلف بپرهیزد. از تستی امتحان کردن نیز تاجایی که امکان دارد دوری کند. مسأله‌های داستانی بدهد. دانش‌آموزان را مجبور کند تعریفها را به کار برند. قبل از امتحان کردن با استفاده از همان ورقه‌ای که دانش‌آموز باید به کار برد مسأله‌های امتحان را حل کند (حتی بهتر است کس دیگری این‌کار را انجام دهد). وقت امتحان را به‌وضوح اعلام و روی آن پافشاری کند.

ورقه‌ها را بلافاصله تصحیح کرده به دانش‌آموزان بازگرداند. تا آن‌جاکه ممکن است ورقه‌ها را یکنواخت تصحیح کند. مسأله‌ها را یکی‌یکی تصحیح کند، یعنی اول مسألهٔ یک را در تمام ورقه‌ها تصحیح کرده بعد به مسألهٔ دوم بپردازد. فقط به‌جواب مسأله توجه نکند بلکه راه‌حل آن را نیز به‌دقت ملاحظه کند. اگر فرصت حل کامل مسائل امتحان را درکلاس ندارد حل آنها را موقع برگرداندن ورقه‌ها به‌دانش‌آموز بدهد.

برای شاگردان توضیح بدهد که چرا بعضی مطالب مهمتر از مطالب دیگراند. توجه در منظم نگهداشتن اطلاعات مربوط به کار دانشجو داشته باشد چه این کار نه‌تنهابه‌دادن نمرهٔ آخر سال کمک می‌کند بلکه درآینده هم به کار نوشتن توصیه‌نامه برای دانش‌آموز می‌آید و به‌دیگران نیز برای این‌قبیل کارها در غیاب معلم کمک می‌کند.

در مقالهٔ هندسه[۳۸] چنین می‌خوانیم که اگر مسیر تکامل ریاضیات را دنبال کنیم به‌روشنی می‌بینیم که عاملهای این تکامل را دو عنصر اصلی ریاضیات تشکیل می‌داده‌اند: عدد و هندسه. هندسهٔ تصویری که به این سؤال که چه رابطه‌ای بین یک شکل و تصویرش بر صفحه یا مقطع موجود است پاسخ می‌دهد با قضیهٔ دزارگ[۳۹] رونق گرفت. اما این هندسه با همان سرعت که بالید و شکوفا شد با شکفتن نوگل دیگری روبه پژمردگی گذاشت. رقیب نورسیده همان‌چیزی است که به آن هندسهٔ تحلیلی می‌گوییم. این هندسه پلی بین جبر و هندسه ایجاد کرده بود، و به‌عبارت دیگر از راه جبر خواص منحنیها را مورد بررسی قرار می‌داد.

هندسهٔ دیفرانسیلی جنبه‌های گوناگون مسأله‌ها را بدون محاسبهٔ شیب یا انحنا درنظر می‌گرفت. مسألهٔ مهم ژئودزی[۴۰] نیز یکی از نکته‌هایی بود که زیر نظر هندسهٔ دیفرانسیلی قرارداشت.

این هندسه علاوه بر مسألهٔ ژئودزی به بررسی مسأله‌های مهم دیگری نیز می‌پرداخت. بعضی از این مسأله‌ها عبارت بودند از: انحنای سطحها، نقشه‌برداری، کمترین مساحت محصور بین منحنیهای فضایی.

در قرن نوزدهم بار دیگر هندسهٔ تصویری باتوجه به کارهای مونژ[۴۱] و شاگردان و پیروانش از قبیل کارنو[۴۲]، برانشون[۴۳]، و پونسله[۴۴] به‌طور جدی پی‌گیری شد، تا اینکه با طلوع ستارهٔ جدیدی موسوم به هندسهٔ نااقلیدسی بار دیگر روبه افول گذاشت.

توپولوژی شاخه‌ای از هندسه است که در زمان حاضر با جدیت تمام روی آن کار می‌شود. مسألهٔ مهم توپولوژی عبارت است از هم‌ارزی توپولوژیکی، یعنی شناخت هم‌ارزی دو شکل ازنظر توپولوژی. این هم‌ارزی، اکثراً و به آسانی، با چشم تشخیص داده نمی‌شود.

یادداشتها

۲۱. Catastrophe Theory، همان مرجع سال‌دوم شمارهٔ ۶ صفحهٔ ۹۷، ترجمهٔ یحیی‌تابش

۲۲. Rene Thom

۲۳. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ اول صفحهٔ ۳، به قلم پرویز شهریاری

۲۴. مهندس فلاندری (۱۵۴۸ ـ ۱۶۲۰) مبدع کسرهای اعشاری، ربع مرکب و کارهایی در استاتیک و هیدرواستاتیک

۲۵. در شماره‌ای از مجله که این مقاله در آن است و در شرح حال غیاث‌الدین جمشید کاشانی به نقل از «دایرةالمعارف فارسی» آمده که کاشانی جیب (سینوس) یک درجه را در شمار ستینی برابر

۱ ۲ ۴۹ ۴۳ ۱۱ ۱۴ ۴۴ ۱۶ ۲۶ ۱۷

یافته‌است که به حساب اعشاری مساوی

۰/۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷۲۸۳۵۱

می‌شود، که هر هفده رقم آن درست است.

۲۶. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ اول صفحهٔ ۱۰۲.

۲۷. روز شنبه ۲۱ مهرماه ۱۳۵۸ هجری شمسی

۲۸. دانشسرای عالی سابق

۲۹. ظاهراً کلمهٔ «مدخل» واقع در نام کتاب مذکور در مقاله، بعداً برداشته شده زیرا در عنوان کتاب تنها **آنالیز ریاضی** آمده است، ضمناً چاپ چهارمی هم از این کتاب در آبان ماه ۱۳۵۶ انجام گرفته است.

۳۰. جلد دوم این کتاب در سه قسمت و در ۱۸۰۳ صفحه در اسفندماه ۱۳۵۸ توسط انتشارات سروش به چاپ رسیده‌است. دراین مجلد و در مطلبی تحت‌عنوان **یادداشت ناشر** در شرح حال مرحوم مصاحب چنین می‌خوانیم:

مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب در اولین لحظات بامداد روز شنبه ۲۱ مهرماه ۱۳۵۸ در حالی‌که آخرین صفحات این کتاب را از نظر خرده‌بین خود می‌گذرانید در میان یادداشتها و اوراق و لوازم کار خود و با داشتن قلم در دست در یک آن چشم از جهان فروبست و به سرمنزل جاوید شتافت. روانش شاد باد.

غلامحسین مصاحب زبانهای فارسی، فرانسه، انگلیسی و عربی را خیلی خوب می‌دانست و با زبان آلمانی نیز برای رفع احتیاج ترجمه‌های هندسی و تحلیل ریاضی آشنا بود و وسعت اطلاعات علمی قدیم و جدید وی کم‌نظیر بود. به‌همین جهت آثار علمی وی حتی آنهاکه مربوط به دوران جوانی اوست هنوز هم معادل ندارد با این‌همه او مطلقاً اهل ادعا نبود و فوق‌العاده فروتن و آزاده بود.

۳۱. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ دوم صفحهٔ ۱، بدون ذکر نام نویسنده.

۳۲. Game Theory

۳۳. امیل بورل «E. Borel»، ریاضی‌دان فرانسوی

۳۴. John Von Neumann، بیشتر با تلفظ فون نویمان

۳۵. Morgenstren

۳۶. به نام: Theory of Games and Economic Behavior

۳۷. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ دوم صفحهٔ ۷۹، ترجمهٔ شهریار شهریاری

۳۸. همان مرجع، سال سوم شمارهٔ سوم صفحهٔ ۱، ترجمهٔ هرمز شهریاری

۳۹. Gerard Desargues مهندس و آرشیتکت فرانسوی در قرن هفدهم که قضیه‌اش چنین است: در هر مثلث هر ضلع شکل اصلی با ضلع نظیر آن در مقطع، یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند و سه نقطهٔ به این ترتیب بدست آمده بر یک استقامت واقعند.

۴۰. Geodesy این مسئله عبارت‌است از تعیین کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ واقع بر یک سطح

۴۱. گاسپار مونژ «Gaspard Monge» (۱۷۴۶ ـ ۱۸۱۸) دانشمند فرانسوی و واضع هندسهٔ ترسیمی Descriptive Geometery

۴۲. لازار کارنو «Lazare Carnot» (۱۷۵۳ ـ ۱۸۲۳) دانشمند فرانسوی شاگرد مونژ و واضع هندسهٔ موقع و مقاله‌ای در مورد تئوری موربها

۴۳. Charles J. Brianchon (۱۷۸۵ ـ ۱۸۶۴)

۴۴. ژان ویکتور پونسله «Jean Victor Poncelet» (۱۷۸۸ ـ ۱۸۶۷) صاحب رسالهٔ خواص تصویری اشکال و واضع دو وسیلهٔ ریاضی اصل ثنویه و اصل پیوستگی.

تعیین دامنه و برد توابع (قسمت دوّم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

مورداستفاده دانش آموزان سالهای دوم، سوم و چهارم

در شمارهٔ قبل مجله با تعیین دامنه و برد توابع چندجمله‌ای، کسری، گنگ (اصم) آشنا شدیم. دراین شماره نیز تعیین دامنه و بردچندنوع تابع دیگررا بیان می‌کنیم.

۴ــ تعیین دامنه و برد توابع شامل جزء صحیح[10] (براکت):
توابع جزءصحیح (براکت) توابعی هستند که شامل عبارتی با علامت [ ] (علامت جزء صحیح) باشند. دامنه و برداین گونه توابع را با استفاده ازضوابط و قوانین جزء صحیح به دست می‌آوریم.

مثال ۱۴: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{x+[x-[x]]}{x+[x]+[-x]}$$

حل: می‌دانیم:

$$[x]\leqslant x<[x]+1$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$0\leqslant x-[x]<1$$

بنابراین به ازای هرعددحقیقی x همواره داریم:

$$[x-[x]]=0 \qquad (1)$$

همچنین می‌دانیم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in z \text{ (مجموعهٔ عددهای صحیح)}\\ -1 & x\notin z\end{cases} \qquad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) تابع بـه صورت زیر ساده می‌شود:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{x} & x\in z\\[2mm] \dfrac{x}{x-1} & x\notin z\end{cases}\Longrightarrow$$

$$y=\begin{cases}1 & x\in z-\{0\}\\[2mm] \dfrac{x}{x-1} & x\notin z\end{cases}\Longrightarrow D_f=R-\{0\}$$

تعیین برد تابع:

$$x\notin z:\ y=\frac{x}{x-1}\Longrightarrow xy-y=x\Longrightarrow$$

$$x(y-1)=y\Longrightarrow x=\frac{y}{y-1}\notin z\Longrightarrow y\neq 0,2$$

با توجه به ضابطهٔ اول تابع نتیجه می‌شود که اگر $x\in z-\{0\}$ باشد $y=1$ است. بنابراین اگر $x\notin z$ باشد $y\neq 1$ است.
بنابراین برد تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی مخالف صفر است:

$$R_f=R-\{0, 2\}$$

مثال ۱۵: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

$$y=f(x)=\frac{[x+1]+[-x]}{[1-x]+[x]}$$

---

10) Integral part functions

حل : برای‌تعیین دامنه و بردتابع ابتدا تابع را به شکل زیرمی‌نویسیم:

$$y=\frac{[x]+[-x]+۱}{[-x]+[x]+۱}\Longrightarrow$$

$$[-x]+[x]=\begin{cases}۰ & x\in z\\ -۱ & x\notin z\end{cases}$$

$$\Longrightarrow y=\begin{cases}۱ & x\in z\\ \text{مبهم}\ (\frac{۰}{۰}) & x\notin z\end{cases}\Longrightarrow$$

$$D_f=z\quad,\quad R_f=\{۱\}$$

مثال ۱۶: دامنه و برد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\frac{۲x+۱}{[۱-x]+[x+۱]}+\frac{[[x]-x]}{[x]+[-x]}$$

حل : برای‌تعیین دامنه وبردتابع ابتدا تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{۲x+۱}{[-x]+[x]+۲}+\frac{[[x]-x]}{[-x]+[x]}$$

می‌دانیم :

$$[x]\leqslant x<[x]+۱$$

و در نتیجه داریم :

$$-[x]-۱<-x\leqslant-[x]$$

$$\Longrightarrow -۱<[x]-x\leqslant ۰\Longrightarrow$$

$$[[x]-x]=\begin{cases}۰ & x\in z\\ -۱ & x\notin z\end{cases}$$

همچنین داریم:

$$[-x]+[x]=\begin{cases}۰ & x\in z\\ -۱ & x\notin z\end{cases}$$

باتوجه‌به رابطه‌های اخیرتابع‌به شکل زیر تحویل می‌شود:

$$y=\begin{cases}\frac{۲x+۱}{۲}+\frac{۰}{۰}\ (\text{مبهم}) & x\in z\\ ۲x+۲ & x\notin z\end{cases}$$

در این‌جا دامنه و برد تابع مشخص می‌شود:

$$D_f=R-z\quad,\quad R_f=R-z$$

دامنه و بردتابع مجموعهٔ عددهای حقیقی غیرصحیح است:

$$D_f=R_f=R-z$$

مثال ۱۷: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\left[\frac{x^۴+۲x^۲+۲}{x^۴+۴x^۲+۵}\right]+\frac{x-[x]}{[x+۱]+[۱-x]}$$

حل : با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

$$x^۴+۲x^۲+۲=(x^۴+۲x^۲+۱)+۱$$
$$=(x^۲+۱)^۲+۱>۰$$
$$x^۴+۴x^۲+۵=(x^۴+۴x^۲+۴)+۱$$
$$=(x^۲+۲)^۲+۱>۰$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود صورت و مخرج کسر

$$\frac{x^۴+۲x^۲+۲}{x^۴+۴x^۲+۵}$$

هردو مثبت وهمواره صورت کسرکوچکتر از مخرج آن است. بنابراین کسرفوق همواره بزرگترازصفروکوچکترازیك است:

$$۰<\frac{x^۴+۲x^۲+۲}{x^۴+۴x^۲+۵}<۱$$

بنابراین به ازای هرعددحقیقی x همواره داریم:

$$\left[\frac{x^4+2x^2+2}{x^4+4x^2+5}\right]=0$$

اینك کسر دوم را بررسی می کنیم:

$$y=\frac{x-[x]}{[x+1]+[1-x]}=$$

$$\frac{x-[x]}{[x]+[-x]+2}=\begin{cases}0 & x\in z\\ x-[x] & x\notin z\end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی است:

$$D_f=R$$

تعیین برد تابع:

می‌دانیم : $0\leqslant x-[x]<1$ و اگر x عددی صحیح نباشد داریم :

$$x\notin z \implies 0<x-[x]<1 \implies 0<y<1$$

از طرفی اگر $x\in z$ آنگاه $y=0$ و در نتیجه برد تابع چنین است: $R_f=[0,1)$

تمرین : دامنه و برد توابع با ضابطه‌های:

$$y=\frac{1}{[2x]-2x},$$

و

$$y=(-1)^{\frac{1}{[x-1]+[2-x]}}$$

را تعیین‌کنید.

۵ـ تعیین دامنه وبرد توابع‌شامل قدرمطلق[11]:

مثال ۱۸: دامنه وبرد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\frac{x+2}{|x|-2}$$

حل : تعیین دامنهٔ تابع :

$$|x|-2=0 \implies |x|=2 \implies x=\pm 2$$

$$\implies D_f=R-\{-2\ ,\ 2\}$$

برای‌تعیین بردتابع دوحالت درنظر می گیریم:

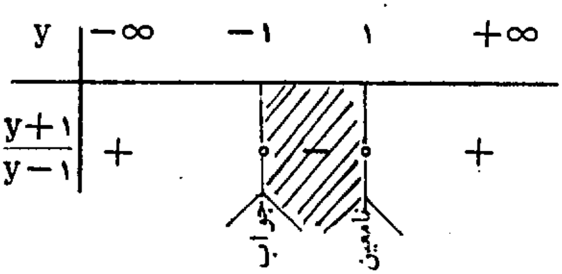
$$y=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-2} & x\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{x+2}{-x-2} & x<0\end{cases}\xrightarrow{x\neq -2}$$

$$y=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-2} & x\geqslant 0\\[2mm] -1 & x<0\end{cases}$$

$$x\geqslant 0 : y=\frac{x+2}{x-2} \implies xy-2y=x+2$$

$$\implies x(y-1)=2(y+1)$$

$$\implies x=\frac{2(y+1)}{y-1}\geqslant 0 \implies \frac{y+1}{y-1}\geqslant 0$$



$$\implies \begin{cases}x\geqslant 0\ :\ y\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)\\ x<0\ :\ y=-1\end{cases}$$

$$\implies R_f=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$$

مثال ۱۹ : دامنه وبرد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید.

11) Absolute value functions

$$y=f(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x+۱|-۴}}$$

حل : باتوجه به ضابطهٔ تابع برای حقیقی‌بودن y شرط زیر کافی می‌باشد:

$$|x+۱|-۴>۰ \Rightarrow |x+۱|>۴ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x+۱>۴\\x+۱<-۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>۳\\x<-۵\end{cases} \Rightarrow$$

$$D_f=(-\infty,-۵)\cup(۳,+\infty)$$

برای‌تعیین بردتابع ابتدا ازضابطهٔ آن نتیجه می‌شود: $y>۰$.

از طرف دیگر داریم:

$$y^۲=\frac{۱}{|x+۱|-۴}\xRightarrow{(y\neq ۰)}|x+۱|-۴=\frac{۱}{y^۲}$$

$$\Rightarrow |x+۱|=\frac{۱}{y^۲}+۴>۴ \Rightarrow \frac{۱}{y^۲}>۰$$

$$\Rightarrow y\in(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$$

از اشتـراك $y>۰$ و $y\in(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$ بـرد تابع به دست می‌آید:

$$R_f=(۰,+\infty)=R^+ \Rightarrow R_f=R^+$$

۶ـ تعیین دامنه وبرد توابع‌نمایی[۱۲]:

توابع نمایی را در حالت عمومی به صورت

$$y=a^{u(x)}$$

درنظرمی گیریم که در آن $a>۰$ و $u(x)$ تابعی‌از x می‌باشد. تعیین دامنه وبرد این‌نوع توابع بستگی‌به عبارت $u(x)$ دارد. در حالت خاص $a=e=۲/۷۱۸۲۸...$ داریم :

$$y=e^{u(x)}$$

برای این‌کـه تابع $y=a^{u(x)}$ مفهـوم بهتری پیداکند می‌توان آن را چنین نوشت :

$$y=e^{u(x)\log_e^a}$$

عبارت $\log_e^a$ را با نماد $\ln a$ نمایش می‌دهیم و درنتیجه داریم:

$$y=a^{u(x)}=e^{u(x)\ln a}$$

با این‌تعریف‌ثابت می‌شودکه بافرض‌حقیقی‌بودن عبارت $u(x)$ شرط $a>۰$ برای معین بودن توابع نمایی به صورت

$$y=a^{u(x)}$$

شرط کافی است. برای روشن‌شدن مطلب‌به بیان‌یك مثال اکتفا می‌کنیم. به عنوان مثالی ساده می‌توان‌تابع باضابطهٔ

$$y=f(x)=(\sqrt{۲})^{\sqrt{۱۲}}$$

را درنظر گرفت. تابع فوق‌را می‌توان چنین نوشت:

$$y=۲^{\sqrt{۳}}$$

برای تعیین دامنه و برد تابع کافی است بگوییم عدد $۲^{\sqrt{۳}}$ چه مفهومی‌دارد؟ ازآن‌جاکه توان ۲ یعنی $\sqrt{۳}$ عددی گنگ‌است، به همین دلیل نمی‌توان ازآن مفهومی برداشت‌کرد. از طرفی می‌دانیم تابع باضابطهٔ $y=e^x$ به ازای هرعددحقیقی x معین وتعریف شده‌است. زیرا تساوی زیر برقرار است:

$$y=e^x=\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^{nx}=۱+\frac{x}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots$$

بنابراین برای‌تعریف مناسبی برای $۲^{\sqrt{۳}}$ الزاماً بایدداشته‌باشیم:

$$۲^{\sqrt{۳}}=(e^a)^{\sqrt{۳}} \Rightarrow e^a=۲ \Rightarrow a=\ln ۲$$

درنتیجه ضابطهٔ‌تابع موردنظر را می‌توان‌به شکل زیرنوشت‌که دارای مفهوم باشد:

$$y=۲^{\sqrt{۳}}=e^{\sqrt{۳}\ln ۲} \Rightarrow \begin{vmatrix}D_f=R\\R_f=\{e^{\sqrt{۳}\ln ۲}\}\end{vmatrix}$$

12) Exponential functions

مثال ۲۰: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ

$$y=f(x)=2^{-x^{-2}}$$

را تعیین کنید.

حل : ابتدا تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=2^{-x^{-2}}=2^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}}}=e^{-x^{-2}\ln 2}$$

مشاهده می‌شود که اگر $x \to 0$ آنگاه :

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}}} \to 0$$

اما تابع در $x=0$ تعریف نشده است. بنابراین دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی به جز صفر می‌باشد:

$$D_f=R-\{0\}$$

تعیین برد تابع : ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود :

$$y>0$$

اینک x را برحسب y حل می‌کنیم: برای این منظور با توجه به $y>0$ لگاریتم طرفین را به دست می‌آوریم:

$$\log y=\frac{-1}{x^2}\log 2 \implies x^2=\frac{-\log 2}{\log y} \implies$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{\log 2}{-\log y}}$$

برای حقیقی بودن x باید داشته باشیم:

$$\log y<0 \qquad y>0$$

از شرایط اخیر حدود y تعیین می‌شود:

$$0<y<1$$

در این جا از اشتراک $y>0$ و $0<y<1$ برد تابع معین می‌شود:

$$R_f=(0,1)$$

مثال ۲۱: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ

$$y=f(x)=e^{\frac{-1}{\sqrt{x-[x]}}}$$

را تعیین کنید.

حل : می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$[x]\leqslant x<[x]+1$$

درنتیجه به ازای هر عدد حقیقی x خواهیم داشت:

$$0\leqslant x-[x]<1$$

مشاهده می‌شود که اگر $(x-[x])\to 0^+$ آنگاه

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{x-[x]}}}}\to 0^+$$

اما اگر $x\in Z$ آنگاه $x-[x]=0$ و درنتیجه تابع به ازای مجموعهٔ عددهای صحیح Z نامعین است و در نتیجه داریم:

$$D_f=R-Z$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y>0$$

اینک به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$y=e^{\frac{-1}{\sqrt{x-[x]}}} \implies \log_e^y=\frac{-1}{\sqrt{x-[x]}} \implies$$

$$\sqrt{x-[x]}=\frac{-1}{\log_e^y}=\frac{-\log e}{\log y}$$

طرف اول تساوی همواره مثبت است. بنابراین برای مثبت بودن طرف دوم الزاماً خواهیم داشت:

$$y>0 \quad , \quad \log y<0 \implies 0<y<1$$

در این جا از اشتراک $y>0$ و $0<y<1$ برد تابع معین می‌شود:

$$R_f=(0,1)$$

۷ـ تعیین دامنه و برد توابع لگاریتمی[13]:

توابع لگاریتمی‌را درحالت عمومی به شکل زیر درنظر می‌گیریم:

$$y=\log_a^{A(x)}$$

که دراین‌گونه توابع همواره داریم:

$$A(x)>0 \quad , \quad a\neq 1 \quad , \quad a>0$$

بنابراین برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی کافی است شرایط اخیررا برقرار کنیم.

مثال ۲۲ : دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیررا حساب کنید:

$$y=f(x)=\log\frac{x-2}{x+2}$$

حل : تعیین دامنه:

$$D_f=\left\{x\,|\,\frac{x-2}{x+2}>0\right\}$$

$$\frac{x-2}{x+2}>0$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{x+2}$	$+$		$-$	0	$+$

$$\Longrightarrow D_f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$$

برای‌تعیین بردتابع ابتدا x را برحسب y حل می‌کنیم، سپس

13) Logarithmic functions

با توجه به دامنهٔ تابع yهای موردقبول‌را معین می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{x+2}=10^y \Longrightarrow x-2=10^y\times x+2\times 10^y$$

$$\Longrightarrow x=\frac{2(1+10^y)}{1-10^y}\in D_f \Longrightarrow$$

$$\frac{2(1+10^y)}{1-10^y}>2 \quad \text{یا} \quad \frac{2(1+10^y)}{1-10^y}<-2$$

بنابراین اجتماع مجموعهٔ‌جوابهای‌نامعادله‌های اخیر بردتابع را تشکیل می‌دهد.

نامعادله‌های فوق‌را به شکل ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{10^y}{1-10^y}>0 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{1-10^y}<0$$

$$1-10^y=0 \Longrightarrow 10^y=1 \Longrightarrow y=0$$

y	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-10^y$	$+$	0	$-$

بنابراین اجتماع $y>0$ و $y<0$ بردتابع را تشکیل می‌دهد:

$$R_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=R-\{0\}$$

مثال ۲۳: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)}$$

حل : باتوجه به ضابطهٔ تابع برای‌تعیین دامنهٔ تابع کافی است مجموعهٔ‌جواب دستگاه‌نامعادله‌های زیر را به دست آوریم:

$$\begin{cases} 9-x^2>0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2<9 \\ \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2)\geqslant \log_{\frac{1}{2}}1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ \dfrac{\log(9-x^2)}{\log\frac{1}{2}} \geqslant \dfrac{\log 1}{\log\frac{1}{2}} \end{cases} \xrightarrow{(\log\frac{1}{2}<0)}$$

$$\begin{cases} -3<x<3 \\ \log(9-x^2) \leqslant \log 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ 9-x^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3<x<3 \\ x^2 \geqslant 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3<x<3 \\ x \geqslant 2\sqrt{2} \ \text{یا}\ x \leqslant -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$D_f=\{x \mid -3<x<3\} \cap \{x \mid x \geqslant 2\sqrt{2} \ \text{یا}\ x \leqslant -2\sqrt{2}\}$$

$$\Rightarrow D_f=(-3,-2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2},3)$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y \geqslant 0$$

اینك x را برحسب y حل می‌کنیم:

$$y^2=\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2) \Rightarrow 9-x^2=(\tfrac{1}{2})^{y^2}$$

$$x^2=9-(\tfrac{1}{2})^{y^2} \Rightarrow$$

$$|x|=\sqrt{9-(\tfrac{1}{2})^{y^2}} \in [2\sqrt{2},3)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} \leqslant \sqrt{9-(\tfrac{1}{2})^{y^2}} < 3$$

$$\Rightarrow 8 \leqslant 9-(\tfrac{1}{2})^{y^2} < 9$$

$$\Rightarrow -1 \leqslant -(\tfrac{1}{2})^{y^2} < 0$$

$$0 < (\tfrac{1}{2})^{y^2} \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$R_f=\{y \mid y \in R \ ,\ y \geqslant 0\} \Rightarrow R_f=[0,+\infty)$$

مثال ۳۴: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\sqrt{\log\frac{10x+10}{x^2-1}+\log\frac{x^2-1}{x+1}+\cos x}$$

حل: ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{\log\left(\frac{10(x+1)}{x^2-1}\right)\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)+\cos x}$$

$$\xrightarrow{x^2-1\neq 0} y=\sqrt{\log 10+\cos x}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{1+\cos x}$$

$$\xrightarrow{1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}} y=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

دراین‌جا با توجه به شرط:

$$x \neq \pm 1 \quad \text{و یا} \quad x^2-1 \neq 0$$

دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f=R-\{-1,1\}$$

تعیین برد تابع: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$y \geqslant 0$$

اینك با توجه به:

$$0 \leqslant \left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant 1$$

داریم:

$$0 \leqslant \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant \sqrt{2} \Rightarrow 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$$

حال باتوجه به دامنهٔ تابع نتیجه می‌شود که زوجهای مرتب

$$(-1\ ,\ f(1))\ ,\ (1\ ,\ f(1))$$

جزو مجموعهٔ f نمی‌باشند. بنابراین باید مقدار $f(\pm 1)$ را حساب کرده واز فاصلهٔ $[0,\sqrt{2}]$ حذف کنیم:

$$f(\pm 1)=\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pm 1}{2}\right)\right|=\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}$$

بنابراین در این‌جا بردتابع معین می‌شود:

$$R_f=\left\{y|0\leqslant y\leqslant\sqrt{2}\right\}-\left\{\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\right\}$$

۸ـ تعیین دامنه وبرد توابع مثلثاتی[14]:

توابع ساده مثلثاتی با ضابطهٔ

$$g(x)=\cos x \quad \text{یا} \quad f(x)=\sin x$$

دارای دامنهٔ R (مجموعهٔ عددهای‌حقیقی) می‌باشند و اگر

$$f(x)=tg x$$

باشد:

$$f(x)=tg x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad ,\quad \cos x=0 \implies$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\implies D_f=R-\left\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$$

و اگر $g(x)=cotg x$ باشد:

$$g(x)=\frac{\cos x}{\sin x}\ \text{و}\ \sin x=0\implies x=k\pi\implies$$

$$D_g=R-\{x|x=k\pi\}$$

تعیین برد توابع: اگر

$$f(x)=\cos x\quad \text{یا}\quad f(x)=\sin x$$

چون‌همواره $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ و $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ بنابراین داریم:

$$R_f=[-1,1]$$

14) Trigonometric functions

و اگر $g(x)=tg x$ یا $g(x)=cotg x$ تمام عددهای حقیقی R می‌باشد:

$$R_f=R$$

باید توجه داشت‌که معمولاً برای تعیین برد توابع مثلثاتی از مقادیرحداقل وحداکثرتوابع $\sin x$ و $\cos x$ استفاده می‌شود.

مثال ۲۵: دامنه وبرد تابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y=f(x)=\sin x+\cos x$$

حل: دامنهٔ هریك از توابع $\sin x$ و $\cos x$ مجموعهٔ عددهای‌حقیقی R است، بنابراین دامنهٔ مجموع این‌دوتابع R می‌باشد:

$$D_f=R$$

برای تعیین برد تابع از اتحاد:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

از آن‌جاکه می‌دانیم:

$$-1\leqslant\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$$

پس نتیجه می‌شود:

$$-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$$

$$\implies -\sqrt{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2}\implies$$

$$R_f=[-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}]$$

مثال ۲۶: دامنه وبردتابع با ضابطهٔ زیررا تعیین‌کنید:

$$y=f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x+\sqrt{1-\sin^4\pi x}$$

حل: ازآن‌جاکه فرجهٔ رادیکال زوج‌است پس باید

$\sin^4 \pi x \leqslant 0$ و یا $-\sin^4 \pi x \geqslant 0$

باشد.

اما همواره $\sin^4 \pi x > 0$ و در نتیجه تابع وقتی معین است که داشته باشیم:

$$-\sin^4 \pi x = 0 \Rightarrow \sin \pi x = 0 \Rightarrow$$

$$\pi x = k\pi \Rightarrow x = k \in Z$$

(k متعلق به مجموعهٔ عددهای صحیح است.) بنابراین دامنهٔ تابع، مجموعهٔ عددهای صحیح است: $D_f = Z$

با توجه به دامنه، ضابطهٔ تابع به شکل زیر تحویل می‌شود:

$$D_f = Z : y = \cos \pi x = \pm 1$$

در نتیجه برد تابع مجموعهٔ دوعضوی $\{-1, 1\}$ می‌باشد:

$$R_f = \{-1, 1\}$$

مثال ۲۷: دامنه و برد تابع باضابطهٔ زیررا تعیین کنید:

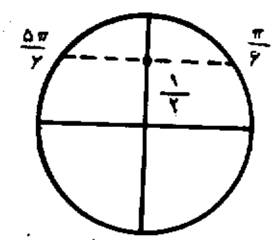
$$y = f(x) = \frac{2}{\sqrt{8\sin x - 4}}$$

حل: دامنهٔ تابع چنین است:

$$D_f = \{x \mid 8\sin x - 4 > 0\}$$

$$8\sin x - 4 > 0 \Rightarrow 8\sin x > 4 \Rightarrow$$

$$\sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow$$



با توجه به شکل داریم:

$$D_f = \left\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right\}$$

تعیین برد تابع: از ضابطه تابع نتیجه می‌شود:

$$y > 0$$

اینك $\sin x$ را ازضابطهٔ تابع برحسب y به‌دست‌می‌آوریم و سپس‌شرط $\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant 1$ را برقرار می‌کنیم:

$$y^2 = \frac{4}{8\sin x - 4} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2\sin x - 1}$$

$$2y^2 \sin x - y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{1 + y^2}{2y^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2y^2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{y^2} \leqslant 1$$

$$\frac{1}{y^2} \leqslant 1 \Rightarrow y^2 \geqslant 1 \Rightarrow$$

$$|y| \geqslant 1 \quad (y \geqslant 1 \text{ یا } y \leqslant -1)$$

از اشتراك $|y| \geqslant 1$ و $y > 0$ برد تابع معین می‌شود:

$$R_f = [1, +\infty)$$

مثال ۲۸: دامنه و بردتابع باضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y = f(x) = \sin(\log_2 \log_3 x)$$

حل: تعیین دامنه تابع:

$$\log_3 x > 0 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 1 \Rightarrow$$

$$x > 1 \Rightarrow D_f = (1, +\infty)$$

تعیین برد تابع:

$$|\sin(\log_2 \log_3 x)| \leqslant 1$$

$$\Rightarrow |y| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant y \leqslant 1$$

$$\Rightarrow R_f = [-1, 1]$$

ادامهٔ مطلب درشمارهٔ آینده ارائه خواهد شد.

طرح یک مسألهٔ جالب توجه دربارهٔ قوطیهای نگهدارندهٔ مواد غذایی و نوشابه‌ها

برگرفته شده از کتاب «معماهای ابوالهول»*

ترجمهٔ: حسن نصیرنیا

چنان‌که همه می‌دانیم استوانه، شکل متداول قوطیهای نگهدارندهٔ مواد غذایی و نوشابه است که در اندازه‌های بسیار متفاوت از باریک و بلند تا قطور و کوتاه ساخته می‌شود. فرض کنید یک تولید کنندهٔ قوطیهای فلزی می‌خواهد مقدار حلبی لازم (برای سطح جانبی و سطح دو قاعدهٔ استوانه) را به حداقل برساند. به سخن دیگر می‌خواهد ـ بی‌آنکه حجم قوطی تغییر کند، ظرف را طوری انتخاب کند که مساحتهای سطح جانبی و دو قاعدهٔ آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

یک رابطهٔ ساده میان طول استوانه و قطر آن وجود دارد که اگر این رابطه برقرار شود، مراد حاصل است. آیا شما آن را می‌دانید؟

پاسخ «طرح یک مسألهٔ جالب توجه ...»

لازمهٔ این‌که سطح یک استوانهٔ مستدیر قائم با یک حجم مشخص، کمترین مقدار مساحت را دارا باشد، این است که ارتفاع آن (استوانه) دقیقاً برابر قطرش باشد. اینک نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان این نتیجهٔ بسیار ساده را از یک واقعیت حتی ساده‌تر به دست آورد. اما پیش از آن، می‌خواهیم به ذکر برخی از علل عدم رعایت این تناسب در ساختن قوطیها و بشکه‌ها بپردازیم.

واضح‌ترین علت آن این است که سازندگان می‌خواهند هزینهٔ ساخت را به حداقل برسانند که البته این امر با به حداقل رساندن مساحت رویهٔ مصالح به کار رفته ملازم نیست. یکی از راههای کاهش هزینه و در عین حال تضمین دوام و استحکام مطلوب، آن است که بدنه‌های قوطی یا بشکه نسبت به دو سطح فوقانی و تحتانی آن از مواد ارزانتری ساخته شوند. طول درزها نیز از اقلامی است که بر هزینه اثر می‌گذارد. این ملاحظات سبب می‌شوند که طول قوطیها را بیشتر از عرض آنها بسازند. از سوی دیگر شکل ظاهریِ قوطی ممکن است میزان فروش را بالا ببرد؛ به این ترتیب که به‌نظر خریداران، قوطیهای درازتر از قوطیهای کوتاه‌تر هم حجم، حجم بیشتری دارند.

حال شکل استوانه‌ای با حداقل مساحت سطح و حجمی مفروض را با شکل منشور مربع القاعده‌ای با کمترین مقدار مساحت سطح و حجمی مفروض مرتبط می‌کنیم. چون جای هیچ شگفتی نیست که جواب مسأله یک مکعب باشد، تساوی ارتفاع و قطر استوانه‌ای با مساحت سطح حداقل تا حدی نیز طبیعی به‌نظر می‌رسد.

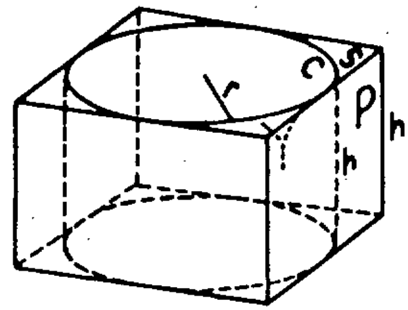
نخست یک پیکربندی واقع در صفحه را که شامل دایرهٔ C به شعاع r و یک مربع S محیط بر آن است درنظر می‌گیریم. اگر pc و Ps به ترتیب معرف محیطهای دایره و مربع باشند، خواهیم داشت:

$$\text{مساحت}\ (C) = \frac{r}{2}\, pc \qquad (1)$$

$$\text{مساحت}\ (S) = \frac{r}{2}\, ps$$

به‌طوری که ملاحظه می‌شود، می‌توان هریک از این شکلها را به مثلثهایی تقسیم کرد که قاعده‌های آنها بر محیط شکل و رأسهایشان در مرکز آن باشند. (در مورد دایره باید تعداد بسیار زیاد از مثلثهای بسیار باریک را در ذهن مجسم کرد.) همهٔ این مثلثها ارتفاعی برابر r دارند. با توجه به این نکات نتیجه می‌شود که: مساحت (C) : مساحت (S) = pc:ps

که نسبتهای فوق برابر $\pi/4$ است، ولی برای استدلال ما مورد نیاز نیست.



حال استوانهٔ مستدیر Y به شعاع r و ارتفاع h و منشور مربع القاعدهٔ p محیط بر آن را درنظر می‌گیریم. بر قاعدهٔ فوقانی و قاعدهٔ تحتانی آن همان پیکربندی مذکور را می‌بینیم. از این رو، قاعده‌ها و درنتیجه حجمهای این منشورها دارای نسبت pc:ps هستند. میان مساحتهای سطحهای آنها نیز همین نسبت برقرار است، چه، می‌توان با گسترانیدن وجوه جانبی آنها و تشکیل یک مستطیل به این نتیجه دست یافت. از این رو داریم:

$$\frac{\text{مساحت سطح } Y}{\text{مساحت سطح } P} = \frac{\text{حجم } Y}{\text{حجم } P}$$

بنابراین چنانچه بدانیم که درمیان همهٔ منشورهای مربع القاعدهٔ با حجم ثابت، منشوری که مساحت سطح آن کمترین مقدار باشد یک مکعب است، در آن صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که در میان همهٔ استوانه‌های مستدیر با یک حجم، استوانهٔ محاط در مکعب کمترین مساحت سطح را دارد.

حکم مربوط به مکعب را با استفاده از مبحث حسابان بسادگی می‌توان ثابت کرد و در آن صورت حکم اصلی مورد نظر ما، یعنی حکم مربوط به استوانه نیز بسادگی قابل حل است. اما ما راه حل دیگری ارائه می‌دهیم براساس این واقعیت که میانگین حسابی سه عدد مثبت از میانگین هندسی آنها بزرگتر است، مگر این‌که آن سه عدد برابر باشند. (برای آگاهی از این راه حل رجوع کنید به:

An Introduction to Inequalities, by Edwin Beckenbach & Richard Bellman, NML Vol. 3, P.53.)

با استفاده از این حکم نه‌تنها حداقل مساحت سطح برای منشورهای مربع القاعده را به‌دست می‌آوریم بلکه مساحت سطح متوازی السطوحهای قائم با یالهای اختیاری a و b و c را نیز به حداقل می‌رسانیم. مساحت سطح یک چنین جسمی برابر است با ۲(ab + ac + bc). حاصل‌ضرب سه جملهٔ درون پرانتز برابر V^2 است. بنابراین میانگین هندسی آنها تنها به V و درنتیجه به میانگین حسابی بستگی دارد و حاصل جمع‌شان تنها درصورتی کمترین مقدار را داراست که آنها همگی برابر باشند. این امر فقط زمانی صادق است که متوازی‌السطوح یک مکعب باشد.

فرض کنید می‌خواهیم جعبه‌ای به‌شکل منشور بسازیم که قاعده‌اش یک شش ضلعی منتظم باشد. آیا می‌توانید بگویید که نسبتهای ابعاد جعبه چه مقدار باید باشد تا مساحت سطح آن با حجم ثابت مفروض به حداقل برسد؟ پاسخ را در همین صفحه ملاحظه می‌کنید.

پاسخ بخش دوّم «طرح یک مسألهٔ جالب توجه ...»

ارتفاع منشور باید به اندازهٔ فاصلهٔ بین اضلاع موازی قاعدهٔ آن باشد. به عبارت کلی‌تر، اگر قاعدهٔ جعبه، یک چندضلعی محیط بر یک دایره باشد، منشور درصورتی حداقل سطح را خواهد داشت که ارتفاع آن با قطر این دایره برابر باشد.

* گاردنر، مارتین، **معماهای ابوالهول**، ترجمهٔ حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰، فصل ۶، نوار علامت «باربرپولیا»، (ص ۱۱۲).

تابع معکوس، تابعهای مثلثاتی (Arcها) (قسمت دوّم)

مورداستفاده دانش آموزان سالهای دوم، سوم وچهارم

● علی حسن‌زاده ماکویی

۳. خلاصه مطالب شمارهٔ گذشته.

(الف) مجموعهٔ مقادیر کمانهای اصلی (Arcهـا) عبارتند از:

$-\frac{\pi}{۲}\leqslant Arcsin(m)\leqslant\frac{\pi}{۲}, |m|\leqslant ۱$ (۱)

$\circ\leqslant Arccos(n)\leqslant\pi \quad , \quad |n|\leqslant ۱$ (۲)

$-\frac{\pi}{۲}< Arctg(t) <\frac{\pi}{۲} \quad , \quad t\in IR$ (۳)

$\circ< Arc\ cotg(q)<\pi \quad , \quad q\in IR$ (۴)

(۵)

$\circ\leqslant Arc\ sec\ (s)<\frac{\pi}{۲}\ , \ s\geqslant ۱$ (I)

$\frac{\pi}{۲}< Arc\ sec\ (s)\leqslant\pi\ , \ s\leqslant -۱$ (II)

(۶)

$\circ< Arc\ csc\ (c)\leqslant\frac{\pi}{۲}\ , \ c\geqslant ۱$ (I)

$-\frac{\pi}{۲}\leqslant Arc\ csc\ (c)<\circ\ , \ c\leqslant -۱$ (II)

(ب) مجموعهٔ‌مقادیر کمانهایی که‌به صورت arc هستند، به ترتیب عبارتند از:

$x=arcsin(m)\ , \ |m|\leqslant ۱ \implies$ (۱)

$x=۲k\pi+Arcsin(m)$ یا $+(\pi-Arcsin(m))$

$y=arccos(n)\ , \ |n|\leqslant ۱ \implies$ (۲)

$y=۲k\pi\pm Arccos(n)$

(۳)

$z=arctg(t)\ , \ t\in IR$ (مجموعهٔ عددهای حقیقی) $\implies$

$z=k\pi+Arc\ tg(t)$

$u=arc\ cotg(q)\ , \ q\in IR \implies$ (۴)

$u=k\pi+Arc\ cotg(q)$

$v=arc\ sec\ (s)\ , \ |s|\geqslant ۱ \implies$ (۵)

$v=۲k\pi\pm Arc\ sec\ (s)$

$w=arc\ csc\ (r)\ , \ |r|\geqslant ۱ \implies$ (۶)

$w=۲k\pi+Arc\ csc\ (r)$ یا $(\pi-Arc\ csc(r))$

۴. با توجه‌به مجموعهٔ مقادیر Arcها، رابطه‌های‌زیر را به‌آسانی می‌توان نتیجه‌گرفت:

$Arcsin(-m)=-Arcsin(m)$ (۱)

$Arccos(-n)=\pi-Arc\ cos(n)$ (۲)

$Arctg(-t)=-Arc\ tg(t)$ (۳)

$Arc\ cotg(-q)=\pi-Arc\ cotg(q)$ (۴)

$Arc\ sec\ (-s)=\pi-Arc\ sec(s)$ (۵)

$Arc\ csc\ (-r)=-Arc\ csc\ (r)$ (۶)

به مثالهای زیر توجه کنید:

(۱)

$$\text{Arc}\sin\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = -\frac{\pi}{۳} = -\text{Arc}\sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

(۲)

$$\text{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۵\pi}{۶} = \pi - \text{Arc}\cos\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

(۳)

$$\text{Arc}tg(-\sqrt{۳}) = -\frac{\pi}{۳} = -\text{Arc}tg(\sqrt{۳})$$

(۴)

$$\text{Arc}\,cotg(-\sqrt{۳}) = \frac{۵\pi}{۶} = \pi - \text{Arc}\,cotg(\sqrt{۳})$$

(۵)

$$\text{Arc sec}\,(-۲) = \frac{۲\pi}{۳} = \pi - \text{Arc sec}\,(۲)$$

(۶)

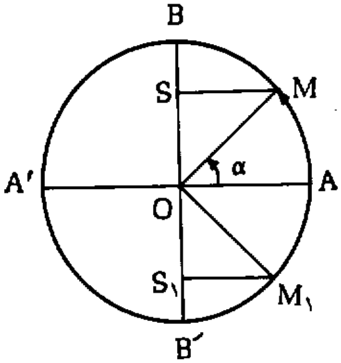
$$\text{Arc csc}\left(-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\right) = -\frac{\pi}{۳} = -\text{Arc csc}\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\right)$$

۵ . رسم کمانهای اصلی : هرگاه یکی از مقادیر نسبتهای مثلثاتی کمان اصلی معلوم باشد، با استفاده از جدول نسبتهای مثلثاتی کمانها، و رابطه‌های بین کمانهای‌قرینه ومکمل اندازهٔ کمان مزبوررا (به استثنای چند حالت‌خاص) می‌توان به طور تقریب تعیین‌کرد. اینك به وسیله چند مثال با روش ترسیم کمانهای مزبور آشنا می‌شویم.

(۱) رسم کمان اصلی :

$\alpha = \text{Arc}\sin(m)$, $|m| \leqslant ۱$

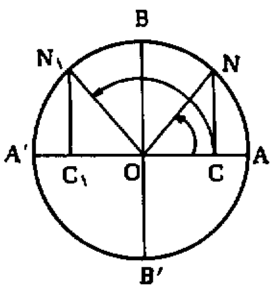
(الف) $m = \frac{۲}{۳}$ ، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور سینوسها درجهت مثبت (روی OB) طول OS را به اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ جدا ، سپس ازنقطهٔ S خطی موازی وهمجهت با OA (بخش مثبت محور کسینوسها) رسم کنیم تا دایره‌را در نقطهٔ M قطع کند، کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AM}$ همان کمان $\text{Arc}\sin(\frac{۲}{۳})$ است.



(ب) $m = -\frac{۳}{۴}$ ، طول $OS_۱$ را روی OB' به‌اندازهٔ $\frac{۳}{۴}$ جدا واز $S_۱$ خطی موازی و همجهت با OA رسم کنیم تا دایره‌را درنقطهٔ $M_۱$ قطع کند. کمان‌حادهٔ منفی $\widehat{AM_۱}$ همان کمان، $\text{Arc}\sin(-\frac{۳}{۴})$ است.

(۲) رسم کمان‌اصلی، $|n| \leqslant ۱$ و $\beta = \text{Arc}\cos(n)$.

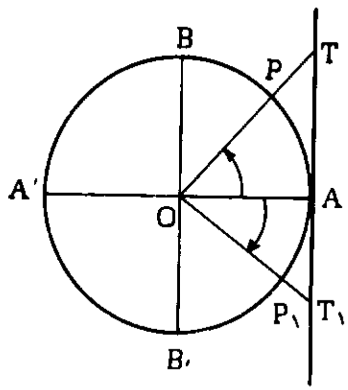
(الف) $n = \frac{۳}{۵}$ ، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور کسینوسها درجهت مثبت (روی OA) طول OC را به اندازهٔ $\frac{۳}{۵}$ جدا ، سپس ازنقطهٔ C خطی موازی وهمجهت با OB (بخش مثبت محور سینوسها) رسم کنیم. کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AN}$ همان‌کمان، $\text{Arc}\cos(\frac{۳}{۵})$ است.



(ب) $n=-\frac{۲}{۳}$ ، طول $OC_۱$ را روی OA' به‌اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ جدا سپس از $C_۱$ خطی موازی و همجهت با OB رسم کنیم، کمان منفرجهٔ مثبت $\widehat{AN_۱}$ همان کمان $\mathrm{Arc}\cos(\frac{-۲}{۳})$ است.

(۳) رسم کمان اصلی، $\gamma = \mathrm{Arc}\,tg(t)$.

(الف) $t=\frac{۶}{۵}$ ، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور تانژانتها در جهت مثبت طول AT را به اندازهٔ $\frac{۶}{۵}$ جدا، سپس از T به O وصل کنیم، کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AP}$ همان کمان ، $\mathrm{Arc}tg(\frac{۶}{۵})$ است.



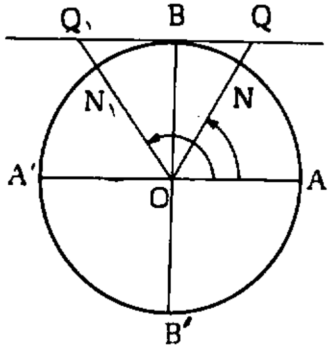
(ب) $t=-\frac{۳}{۵}$ ، طول $AT_۱$ را روی محور تانژانتها در جهت منفی به اندازه $\frac{۳}{۵}$ جدا، از $T_۱$ به مرکز دایره وصل کنیم، کمان حادهٔ منفی $\hat{AP}_۱$ همان کمان $\mathrm{Arc}tg(-\frac{۳}{۵})$ است.

(۴) رسم کمان اصلی، $\lambda = \mathrm{Arc}\cot g(q)$.

(الف) $q=\frac{۱}{۲}$ ، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور کتانژانتها درجهت مثبت طول BO را به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ جدا سپس از Q به مرکز دایره وصل کنیم ، کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AN}$ همان :

$\mathrm{Arc}\cot g(\frac{۱}{۲})$

است.

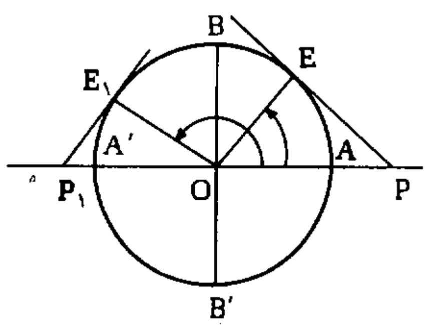


(ب) $q=-\frac{۳}{۴}$ ، روی محور کتانژانتها در جهت منفی طول، $BQ_۱$ را به‌اندازهٔ $\frac{۳}{۴}$ جدا ، سپس از نقطهٔ $Q_۱$ به مرکز دایره (O) وصل کنیم . کمان منفرجهٔ مثبت ، $\widehat{AN_۱}$ همان کمان $\mathrm{Arc}\cot g(\frac{-۳}{۴})$ است .

(۵) رسم کمان اصلی،

$\varphi = \mathrm{Arc}\sec(S)$ و $|S|\geqslant ۱$

(الف) $S=\frac{۳}{۲}$ در دایرهٔ مثلثاتی روی محور کسینوسها درجهت مثبت طول OP را به اندازهٔ $\frac{۳}{۲}$ جدا، سپس از نقطهٔ P مماس PE را بر ناحیهٔ اول دایره رسم کنیم ، کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AE}$ همان کمان $\mathrm{Arc}\sec(\frac{۳}{۲})$ است.

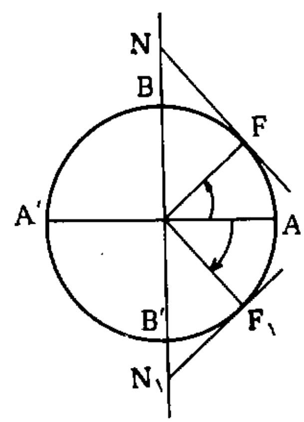


(ب) $S=\frac{-۴}{۳}$ روی‌محور کسینوسها در جهت‌منفی $OP_۱$ را به اندازهٔ $\frac{۴}{۳}$ جدا سپس از $P_۱$ مماس $P_۱E_۱$ را بر ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی رسم کنیم، کمان منفرجهٔ مثبت $\widehat{AE_۱}$ همان کمان $\text{Arc sec}\,(\frac{-۴}{۳})$ است.

(۶) رسم کمان اصلی،

$$\theta=\text{Arc csc}\,(r) \quad و \quad |r|\geqslant ۱$$

(الف) $r=\frac{۵}{۳}$ در دایرهٔ مثلثاتی روی محور سینوسها در جهت مثبت‌طول ON را به اندازهٔ $\frac{۵}{۳}$ جدا، سپس از نقطهٔ N مماس NF را بر ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی رسم کنیم، کمان حادهٔ مثبت $\widehat{AF}$ همان کمان، $\text{Arc csc}\,(\frac{۵}{۳})$ است.



(ب) $r=-\frac{۴}{۳}$ روی محور سینوسها در جهت منفی‌طول $ON_۱$ را به اندازهٔ $\frac{۴}{۳}$ جدا، سپس‌از $N_۱$ مماس $N_۱F_۱$ را بر ناحیهٔ‌چهارم دایرهٔ مثلثاتی‌رسم کنیم، کمان‌حادهٔ منفی $AF_۱$ همان کمان $\text{Arc csc}\,(-\frac{۴}{۳})$ است.

۶. **تابع معکوس تابعهای مثلثاتی.** باتوجه به تعریف تابع معکوس وشرط وجود آن در تابع، $y=f(x)$ به آسانی می‌توان نتیجه‌گرفت، هر گاه دامنهٔ هریك از تابعهای مثلثاتی با مجموعهٔ مقادیر (برد) Arc مربوطه‌اش برابر باشد، توابع Arcها، تابع معکوس‌تابعهای مثلثاتی هستند.

یعنی داریم:

$$m=\sin(\alpha) \quad و \quad -۱\leqslant m\leqslant ۱ \quad و \quad \frac{-\pi}{۲}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

$$\Longrightarrow \alpha=\sin^{-۱}(m)=\text{Arc}\sin(m)$$

$$n=\cos(\beta) \quad و \quad -۱\leqslant n\leqslant ۱$$

$$\circ\leqslant\beta\leqslant\pi \Longrightarrow \beta=\cos^{-۱}(n)=\text{Arc}\cos(n)$$

$$t=tg\gamma \quad و \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\frac{-\pi}{۲}<\gamma<\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \gamma=tg^{-۱}(t)=\text{Arc}\ tg(t)$$

$$q=cotg(\gamma) \quad و \quad q\in\mathbb{R}$$

$$\circ<\gamma<\pi \Longrightarrow \gamma=cotg^{-۱}(q)=\text{Arc}cotg(q)$$

$$s=\sec(\varphi) \quad و \quad s\geqslant ۱$$

$$\circ\leqslant\varphi<\frac{\pi}{۲} \text{ یا } s\leqslant -۱ \text{ و } \frac{\pi}{۲}<\varphi\leqslant\pi \Longrightarrow$$

$$\varphi=\sec^{-۱}(s)=\text{Arc sec}\,(s)$$

$$r=\csc(\theta) \quad و \quad r\geqslant ۱ \quad و \quad \circ<\theta\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

یا

$$r\leqslant -۱ \quad و \quad \frac{-\pi}{۲}\leqslant\theta<\circ \Longrightarrow$$

$$\theta=\csc^{-۱}(r)=\text{Arc}\csc(r)$$

چند مثال :

مجموعهٔ جواب x را چنان معین کنید که رابطه‌های زیر برقرار باشند:

(۱)

$$۳x = \text{Arc}\cos(n) - \frac{۳\pi}{۵}$$ و $|n|\leq ۱ \Rightarrow$

$$۰ \leq \text{Arc}\cos(n) \leq \pi \Rightarrow$$

$$۰\leq ۳x + \frac{۳\pi}{۵} \leq \pi \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{۵} \leq x \leq \frac{۲\pi}{۱۵}$$

(۲)

$$\alpha = ۳\,\text{Arc csc}(۲x-۱)$$

$$۰<\alpha\leq\frac{\pi}{۲}\Rightarrow$$

$$۰<\text{Arc csc}(۲x-۱)\leq\frac{\pi}{۶}\Rightarrow$$

$$۲x-۱\geq ۲ \Rightarrow x\geq\frac{۳}{۲}$$

(۳)

$$\beta = ۲\,\text{Arc tg}\left(\frac{۳-x}{۲x}\right)$$

$$\frac{\pi}{۲}\leq\beta<\pi \Rightarrow \frac{\pi}{۴}\leq \text{Arc tg}\left(\frac{۳-x}{۲x}\right)<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow$$

$$\frac{۳-x}{۲x}\geq ۱ \Rightarrow \frac{۳(۱-x)}{۲x}\geq ۰\Rightarrow$$

$$۰<x\leq ۱$$

(۴)

$$\varphi=\sqrt{\pi-۴\,\text{Arccotg}(x)}\Rightarrow$$

$$\pi - ۴\,\text{Arc cotg}(x)\geq ۰ \Rightarrow$$

$$\text{Arc cotg}(x)\leq\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x\geq ۱$$

(۵)

$$\theta=\sqrt{۳\,\text{Arccos}(۳x)-\pi}\Rightarrow$$

$$\pi\geq \text{Arc cos}(۳x)\geq\frac{\pi}{۳}\Rightarrow$$

$$-۱\leq ۳x\leq\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{-۱}{۳}\leq x\leq\frac{۱}{۶}$$

(۶) $۲\,\text{Arc sin}(x) > \sqrt{۱۰}$ (رادیان) $\Rightarrow$

$$\text{Arc sin}(x)\leq \frac{\pi}{۲}\Rightarrow$$

$$۲\,\text{Arc sin}(x)\leq\pi<\sqrt{۱۰}\Rightarrow$$

در نتیجه

(۷) $\frac{\pi}{۲}-۳\,\text{Arc cotg}(x)<۲$ (رادیان) $\Rightarrow$

$$\text{Arc cotg}(x) > \frac{\pi}{۶}-\frac{۲}{۳},$$

$$\text{Arc cotg}(x)>۰>\frac{\pi}{۶}-\frac{۲}{۳}\Rightarrow$$

درنتیجه، $x\in \mathbb{R}$ (مجموعهٔ عددهای حقیقی)

حاصل عبارتهای زیر را معین کنید:

(۸) $M=\cos\text{Arc cotg}\sin(\text{Arctg}(۲))\Rightarrow$

$\text{Arc tg}(۲)=\alpha\Rightarrow\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ و $\sin\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$،

$$\text{Arc cotg}\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)=\beta\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{۴}<\beta<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow M=\cos\beta=\frac{۲}{۳}$$

(۹) $\omega=\text{Arctg}(۳)+\text{Arc cotg}(۳)\Rightarrow$

$\text{Arc tg}(۳)=\alpha\Rightarrow tg\alpha=۳$ و

$\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ و $cotg\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=۳$

$$\text{Arc cotg}(۳)=\beta\Rightarrow$$

$cotg(\beta)=۳$ و $۰<\beta<\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}-\alpha=\beta\Rightarrow$

$$\omega=\frac{\pi}{۲}$$

تمرین : با استفاده از مثال‌فوق رابطهٔ

$$\text{Arc}\,tg(p)+\text{Arc}\,cotg(p)=\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad p\in IR$$

را نتیجه بگیرید.

(۱۰)

$$\theta=\text{Arc}\,sin\left(\frac{-4}{5}\right)+\text{Arc}\,cos\left(\frac{-4}{5}\right)\Longrightarrow$$

$$\text{Arc}\,sin\left(\frac{4}{5}\right)=\alpha \Longrightarrow \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad sin\alpha=\frac{4}{5}$$

$$\text{Arc}\,cos\left(\frac{4}{5}\right)=\beta \Longrightarrow$$

$$0<\beta<\frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad cos(\beta)=\frac{4}{5}=sin\alpha \Longrightarrow$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \text{Arc}\,sin\left(\frac{-4}{5}\right)=-\alpha$$

و

$$\text{Arc}\,cos\left(\frac{-4}{5}\right)=\pi-\beta \Longrightarrow$$

$$\theta=-\alpha+\pi-\beta=\pi-(\alpha+\beta)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

تمرین : با استفاده از مثال‌فوق رابطهٔ $|m|\leqslant 1$ و

$$\text{Arc}\,sin(m)+\text{Arc}\,cos(m)=\frac{\pi}{2}$$

را نتیجه بگیرید.

$$\varphi=\text{Arc}\,cos\left(\frac{-3}{5}\right)+\text{Arc}\,cos\left(\frac{-4}{5}\right) \quad (11)$$

$$\text{Arc}\,cos\left(\frac{3}{5}\right)=\alpha$$

و

$$\text{Arc}\,cos\left(\frac{4}{5}\right)=\beta=\text{Arc}\,sin\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\varphi=\pi-\alpha+\pi-\beta=2\pi-(\alpha+\beta)=\frac{3\pi}{2}$$

(۱۲)

$$\lambda=\text{Arc}\,tg(sin\varphi)+\text{Arc}\,cotg\,(sin\varphi)$$

$$\frac{-\pi}{2}<\varphi<0 \;,\; sin\varphi=-m \;,\; m>0 \Longrightarrow$$

$$\frac{-\pi}{2}<\text{Arc}\,tg(-m)<0 \quad \text{و}$$

$$\frac{\pi}{2}<\text{Arc}\,cotg(-m)<\pi$$

$$\text{Arc}\,tg(-m)=-\text{Arc}\,tg(m)$$

و

$$\text{Arc}\,cotg(-m)=\pi-\text{Arc}\,cotg(m)$$

$$\lambda=\pi-(\text{Arc}\,tg(m)+\text{Arc}\,cotg(m))$$

$$=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

تمرینهای قسمت دوم

مجموعهٔ جواب x را چنان معین‌کنید‌که رابطه‌های زیر برقرار باشند:

۱. $x=\text{Arc}\,sin\,(m)+\frac{2\pi}{3}\;,\;|m|\leqslant 1$

۲. $3x=2\text{Arc}\,cotg\,(q)-\frac{\pi}{5}$

۳. $\omega=2\text{Arc}\,\sec\,(3x-2)\;,\;0\leqslant\omega\leqslant\frac{2\pi}{3}$

۴. $\varphi=\text{Arc}\,\csc\left(\frac{2-x}{x}\right)\;,\;\frac{-\pi}{2}<\varphi<0$

۵. $\lambda=\sqrt{\pi+6\operatorname{Arc}\sin x}$

۶. $\theta=\sqrt{\pi-4\operatorname{Arc}tg 2x}$

۷. $\operatorname{Arc}tg x>\sqrt{3}$

۸. $\operatorname{Arc}cotg(x)<3$

۹. $\operatorname{Arc}\cos(x)>2$

۱۰. $-\frac{\pi}{3}<\operatorname{Arc}\sin x<1$

۱۱. $\operatorname{Arc}tg\left(\frac{2-x}{1+x}\right)\geqslant\frac{\pi}{4}$

۱۲. $\frac{\pi}{4}\leqslant \operatorname{Arc}cotg\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)\leqslant\frac{3\pi}{4}$

حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱۳. $A=\cos \operatorname{Arc}tg\sin(\operatorname{Arc}cotg(-\sqrt{7}))$

۱۴. $\alpha=\operatorname{Arc}\sin(\operatorname{Arc}tg(\frac{\sqrt{3}}{3}))+\operatorname{Arc}\cos(\operatorname{Arc}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}))$

۱۵. $B=\sin\operatorname{Arc}\sin\cos\left(\frac{11\pi}{7}\right)$

۱۶. $C=\frac{\sqrt{1-n^2}}{\cos(\operatorname{Arc}\sin n)}\ ,\ |n|\leqslant 1$

راهنمایی و جواب تمرینهای قسمت دوم

۱. $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}$ ۲. $\frac{-\pi}{15}<x<\frac{3\pi}{5}$

۳. $x\geqslant\frac{4}{3}$ ۴. $x<0$

۵. $\frac{-1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ ۶. $x\leqslant\frac{1}{2}$

۷. (رادیان) $\operatorname{Arc}tg x<\frac{\pi}{2}<\sqrt{3} \Longrightarrow$

مجموعهٔ جواب x تهی است

۸. $x>cotg(3)$ (واحد کمان در $cotg(3)$، رادیان است)

۹. $-1\leqslant x<\cos(2)$

۱۰. $\frac{-\sqrt{3}}{2}<x<\sin(1)$

۱۱. $\frac{2-x}{1+x}\geqslant 1 \Longrightarrow \frac{1-2x}{1+x}\geqslant 0 \Longrightarrow$

$-1<x\leqslant\frac{1}{2}$

۱۲. $-1\leqslant\frac{2x+1}{3x-1}\leqslant 1 \Longrightarrow$

$\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^2\leqslant 1 \Longrightarrow x\leqslant 0$ یا $x\geqslant 2$

۱۳. $\alpha=\operatorname{Arc}cotg(-\sqrt{7})$,

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \Longrightarrow A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۱۴. $\alpha=\operatorname{Arc}\sin(\frac{\pi}{6})+\operatorname{Arc}\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{2}$

۱۵.

$\cos(\frac{11\pi}{7})=\cos(\frac{3\pi}{7})=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{7})=\sin(\frac{\pi}{14})$

$\Longrightarrow B=\sin\operatorname{Arc}\sin(\frac{\pi}{14}) \Longrightarrow B=\frac{\pi}{14}$

۱۶.

$\alpha=\operatorname{Arc}\sin(n) \Longrightarrow \sin\alpha=n\ ,\ \frac{-\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-n^2} \Longrightarrow C=1$

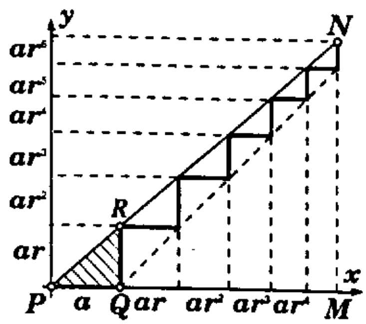
مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۵)

از Mathematics Teachers:

ترجمهٔ نغمه شریک‌زاده

تصور دکارتی

اگر سری هندسی با جملهٔ اول a و قدر نسبت r ($a>0$ ، $0<r<1$) را در دستگاه مختصات دکارتی نمایش دهیم (شکل ۱)، تساوی زیر از تشابه مثلثهای $\Delta PQR \sim \Delta PMN$ آشکار است.



شکل ۱

$$\frac{a}{ar} = \frac{a + ar + \dots + ar^{n-1}}{ar + \dots + ar^{n-1} + ar^{n}}$$

بنابراین در مورد مجموع:

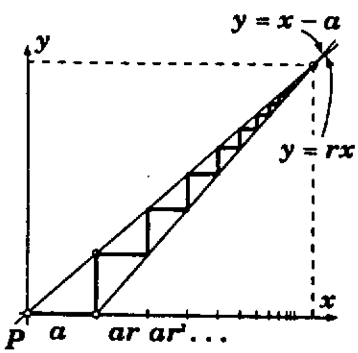
$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1}$$

داریم:

$$\frac{a}{ar} = \frac{S_n}{S_n - a + ar^{n}}$$

از این تساوی می‌توانیم تساوی زیر را محاسبه کنیم:

$$S_n = a \cdot \frac{r^{n} - 1}{r - 1}$$



شکل ۲

در مورد سری هندسی نامتناهی داریم (شکل ۲):

$$a + ar + ar^{2} + \dots = \frac{a}{1 - r}$$

زیرا $a/(1-r)$ مختص x نقطهٔ تقاطع خطوط مستقیم $y = rx$ و $y = x - a$ است.

مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در هندسهٔ فضایی

قسمت اوّل

● پرویز شهریاری

۱. ورود به مطلب

«جسم از همه به احساس نزدیکتر است، سپس سطح، بعدخط و سرآخر، دورتر از همهٔ اینها، نقطه. ولی به عقل چیزی نزدیکتر است که از بخشهای کمتری نسبت به دیگر چیزهای مشخص، تشکیل شده باشد؛ هرچیزی که ساده‌تر باشد، به عقل نزدیکتر است. به‌این ترتیب، به‌جایی می‌رسیم که دربارهٔ چیزی بیندیشیم که برای وجود آن، هیچ جزیی دخالت نکرده باشد. به این ترتیب، از لحاظ عقلی، در ردیفی که به دست می‌آید، نقطه در جای نخست قرارگرفته است، سپس خط، بعد سطح و درجای آخر جسم. باوجود این، وقتی که با یک دانش‌آموز سروکار داریم، از آن جاکه در سالهای نخست یادگیری، بیشتر به جانبی که محسوس باشد تمایل دارد، ردیفی را به کار می‌بریم که متناظر بااحساس است، ولی در تألیف یک اثر علمی، از ردیفی که عقلانی‌تر است، استفاده می‌کنیم. در نتیجه، آموزش از جسم محسوس و قابل لمس آغاز می‌شود، سپس این جسم از همهٔ آن چه که آن را محسوس می‌کند، جدا و منتزع می‌شود، بعد به سطح و خط و سرانجام به نقطه پرداخته می‌شود. بنابراین، بهتر این است که کار خود را، از احساس و در مسیر تجزیه آغاز کنیم تا به نقطه برسیم، سپس، به ردیفی بپردازیم که متناظر باعقل است، یعنی به ترکیب.»

ابونصر فارابی (۲۵۹ ـ ۳۳۹ هـ. ق.)

امروز، نزدیک به یازده سده بعداز این مربی و روش شناس بزرگ ایرانی، آموزش هندسه، براساس همین اصل آموزشی فارابی قرار دارد. ما در سالهای پیش‌از دبیرستان، با بسیاری از جسمهای هندسی (مثل مکعب، مکعب مستطیل، هرم، منشور، کره) آشنا می‌شویم ولی برای آن که با مفهومها، تعریفها و اصل موضوعهای هندسهٔ فضایی، به‌صورتی دقیق و منظم، آشنا شویم، کار با بسیاری از این جسمها را فرامی‌گیریم: (محاسبهٔ حجم، مساحت، سطح جانبی، ...). اگر به‌تاریخ ریاضیات هم مراجعه کنیم، متوجه می‌شویم که بشر هم، به همین ترتیب، به آگاهیهای هندسی دست یافته‌است و، البته در این راه، طبیعت و نیازهای زندگی، راهنما و انگیزه کار او بوده‌است. لازم بود برای ادامهٔ زندگی، میزان محصول کشاورزی برآورد شود و انبارهای مناسب برای ذخیرهٔ آنها ساخته شود، ولی برای این منظور، باید بتوان حجم انبارها را ارزیابی کرد و، برای ساختن آنها، مقدار مصالحی راکه لازم است، فراهم آورد. در مرحله‌های بعدی، بازرگانی و کشتیرانی، نیازهای محاسبه‌ای تازه‌ای را مطرح کرد و، در کنار آن، ساختن معبدها، قلعه‌ها و کاخهای بزرگ، مهندسان و معمارانی را می‌طلبید که در کار محاسبه و شناخت جسمهای هندسی، آگاه‌تر و داناتر باشند. حتی در شرایط امروزی هم که ریاضیات بی‌اندازه پیش رفته است، نیاز، انگیزهٔ پیشرفت ریاضیات و ریاضیات وسیله‌ای برای حل دشواریهای دانشهای دیگر است. وقتی که فدوروف برای تعیین انواع بلورهای ممکن مطالعه می‌کرد، ناچار شد، ابتدا بلورشناسی راکنار بگذارد و به بررسی جسمهای هندسی متقارن

پردازد. او در هندسه، و بدون رابطه با بلورشناسی، همهٔ گونه‌های جسمهای متقارن را پیدا کرد. مسالهٔ فدوروف ۲۳۰ جواب داشت و اینها همان‌گونه‌های ممکن بلورها بودند.

باهمهٔ اینهاباید اعتراف کنیم که، اغلب ما، نخستین درسهای هندسهٔ فضایی رادر دبیرستان (جایی که به قول فارابی، باید هندسه را به شیوهٔ عقلانی یادگرفت)، با دشواری آغاز می‌کنیم، و این، ناشی از دو علت است: اول بغرنجی خود هندسهٔ فضایی که نیاز به تجسم دارد، باید شکلهای فضایی را روی صفحه رسم کرد، باید بتوان در روی شکلی که رسم شده است، بخش قابل دیدن را که روبروی ماست، از بخش پنهانی که در «پشت» جسم قرار دارد، تشخیص داد، باید خطهای راستی راکه بازاویهٔ حاده یا منفرجه به هم رسیده‌اند، قائمه به حساب آورد و بسیاری چیزهای دیگر. ولی اشکال دوم، به نحوهٔ برخورد ما با هندسهٔ فضایی مربوط می‌شود. در کتابهای درسی، برای درک مفهومهای اصل هندسهٔ فضایی و اصل موضوعهای آن، تلاش اندکی شده است که، در مقایسه با هندسهٔ روی صفحه، بسیار ناقص است. البته، این وضع، کاملاً طبیعی است، چراکه صفحه‌های محدود کتابهای درسی و ساعتهای محدودی که برای تدریس آنها درنظر گرفته‌شده‌است، فرصتی برای طرح این موضوعها، به‌نحوی که شایسته باشد، به‌دست نمی‌دهد.

این مقاله، برای دانش‌آموزان علاقه‌مندی تهیه شده‌است که می‌خواهند، این کمبود را، جبران کنند و در تصورهای فضایی و در رسم شکلهای فضایی مهارت بیشتری به‌دست آورند. متن را با دقت بخوانید، به پرسشها، با دقت پاسخ دهید و مسأله‌ها را به‌طور کامل و تا آخر حل‌کنید. شکلها را روشن و دقیق رسم‌کنید؛ خطهای راستی راکه درمیدان دیدشما قرارداوند، از خطهای راستی که درپشت شکل پنهان شده‌اند، جداکنید (بهتراست، خطهای راست پنهان را، نقطه چین رسم کنید)؛ مسأله‌های نمونه حل شده‌اند، هم به حل و هم به شکلها توجه کنید؛ به یاد داشته باشید که رسم درست شکل، کار شما را در استدلال و در حل مسأله ساده می‌کند. در ضمن، این مقاله می‌تواند به دبیران هندسه هم کمک کند تا درس خود را بر مبنای مستحکمتر و علمیتری قرار دهند.

۲. مفهومهای اصلی و اصل موضوعهای هندسهٔ فضایی

۱. در هندسهٔ دبیرستانی، چهار مفهوم اساسی مورد استفاده قرار می‌گیرد که تعریفی برای آنها نیامده است: **نقطه، خط راست، صفحه، فاصلهٔ بین دو نقطه**. گاهی هم، مفهومهایی از مجموعه‌ها، به‌عنوان مبانی ریاضیات عمومی، به یاری طلبیده می‌شود. بقیهٔ مفهومهای هندسی، همراه با تعریف‌اند. در هندسهٔ دبیرستانی، دربارهٔ شکل، کم و بیش، به این صورت گفته می‌شود: هرمجموعه‌ای از نقطه‌ها را شکل گویند. خط راست و صفحه، نمونه‌های از شکل هستند که، تصور آنها، برای همهٔ ما روشن است.

مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی که در هندسهٔ فضایی مورداستفاده‌اند، معمولاً فضا نامیده می‌شود. هرشکلی ـ و مثلاً خط راست یاصفحه ـ زیر مجموعه‌ای است از فضا. هر صفحه‌ای در فضا جا می‌گیرد، ولی نمی‌تواند برآن منطبق شود. هرخط راستی در صفحه جامی‌گیرد، ولی نمی‌تواند تمامی صفحه‌را پرکند.

۲. در هندسهٔ دبیرستانی، بسیاری از اصل موضوعها آمده است؛ مثلاً اصل موضوع مربوط به خط راست (از هر دونقطه، یک و تنها یک خط راست می‌گذرد) و همچنین، اصل موضوعهای مربوط به فاصله.

اکنون فرض می‌کنیم، همهٔ اصل موضوعهای هندسهٔ مسطحه، برای هر صفحه‌ای از فضا برقرار باشد. این توافق به ما امکان می‌دهد، همهٔ قضیه‌های هندسهٔ مسطحه را تنظیم کنیم و آنها را، برای هر صفحه‌ای از فضا به‌کار بریم. ولی بجز اصل موضوعهای هندسهٔ مسطحه، به اصل موضوعهای تازه‌ای، برای بیان ویژگیهای اصلی صفحه، نیاز داریم.

اصل موضوع ۱. از هر سه نقطه‌ای که روی یک خط راست نباشند، می‌توان یک صفحه، و تنها یک صفحه، عبور داد (اصل موضوع صفحه).

این اصل موضوع را می‌توان به کمک سه میلهٔ نوک تیز قائم و یک مقوا مجسم کرد. صفحه‌ای راکه از سه نقطهٔ A ، B و C گذشته باشد [$C \notin (AB)$] ، بانماد (ABC) نشان می‌دهند.

اصل موضوع ۲. خط راستی که از دو نقطهٔ واقع برصفحه بگذرد، براین صفحه قرار دارد (اصل موضوع خط راست و صفحه).

اگر خط راست a برصفحهٔ α منطبق باشد، بانماد $a \subset \alpha$ نشان داده‌می‌شود.

اصل موضوع خط راست وصفحه، به ما امکان می‌دهد تا، در عمل، بتوانیم مسطح بودن سطح هر فراورده‌ای را مورد تحقیق قرار دهیم. لبهٔ خط کش دقیقی را، درجهتهای مختلف، روی سطح فراوردهٔ موردنظر قرار می‌دهیم و تحقیق می‌کنیم، آیا موردی پیدا می‌شود که بین لبهٔ خط کش و سطح، روزنه‌ای وجود داشته باشد!

خط راست می‌تواند تنها یک نقطهٔ مشترک با صفحه داشته‌باشد. وضع، برای هر خط راستی که شامل نقطه‌ای از صفحه و نقطه‌ای در بیرون صفحه باشد، چنین است. در این حالت گویند، خط راست صفحه را قطع کرده است.

اصل موضوع ۳. اگر دو صفحهٔ مختلف در نقطه‌ای مشترک باشند، آن وقت دریک خط راست مشترک خواهند بود (اصل موضوع برخورد دو صفحه).

دو صفحه‌ای را که دریک خط راست مشترک باشند، صفحه‌های متقاطع گویند. به‌عنوان نمونه‌ای از دو صفحهٔ متقاطع، می‌توان دو دیوار مجاور اطاق را درنظر گرفت.

اصل موضوعها، ویژگیهای اصلی فضای فیزیکی را منعکس می‌کنند. این ویژگیها را، بشر، درطول هزاران سال مشاهده کرده است. بنابراین، هندسهٔ فضایی دبیرستانی، برپایهٔ تجربهٔ زندگی انسانها قرار دارد و به همین مناسبت، نتیجه گیریهای هندسهٔ فضایی کاربرد گسترده‌ای در عمل پیدا می‌کنند.

پرسشها و مسأله‌ها

۱. کدام‌یک از این شکلها، صفحه یا بخشی از یک صفحه‌اند: ۱) دایره، ۲) مربع، ۳) مکعب، ۴) کره، ۵) متوازی‌الاضلاع، ۶) متوازی‌السطوح، ۷) مکعب مستطیل، ۸) خط شکسته، ۹) زاویه، ۱۰) اجتماعی از سه نیم خط راست با مبداء مشترک.

۲. مفهومهای تازه‌ای از هندسه را نام ببرید که بتوان آنها را تعریف کرد. این تعریفها را تنظیم کنید.

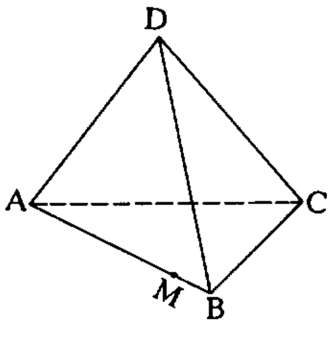
۳. برای تعریف ۱) دایره، ۲) خط شکسته، ۳) نیم خط راست و ۴) خطهای راست موازی، از کدام مفهومهای اصلی هندسه استفاده می‌شود؟

۴. این گزاره‌ها را بااستفاده از نمادهای $\in$ و $\notin$ بنویسید: ۱) نقطهٔ M به صفحهٔ α تعلق دارد؛ ۲) نقطهٔ B به صفحهٔ α تعلق ندارد؛ ۳) صفحهٔ β از نقطهٔ P می‌گذرد؛ ۴) صفحهٔ β از نقطهٔ Q نمی‌گذرد؛ ۵) خط راست a ازنقطهٔ A می‌گذرد؛ ۶) خطهای راست a و b، از نقطهٔ C می‌گذرند.

۵. ۱) صفحهٔ α و متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض‌اند. آیا ممکن است صفحهٔ α، تنها از سه رأس متوازی‌الاضلاع بگذرد؟ ۲) دو نقطه از محیط دایره و مرکز آن، برصفحه‌ای قرار دارند، آیا درست است بگوییم: هر نقطه‌ای از محیط دایره برصفحه واقع است؟

۶. ۱) آیا از چهار نقطهٔ دلخواه فضا، می‌توان صفحه‌ای گذراند؟ ۲) چرا تکیه گاه دوربین عکاسی را، سه پایه می‌سازند، نه دو پایه یا چهارپایه؟

۷. در شکل ۱، هرمی با قاعدهٔ مثلثی داده شده است (یک چهار وجهی) با استفاده از نام رأسها، وجه‌های آن را چگونه نشان دهیم؟



شکل ۱

۸. با دراختیار داشتن یک صفحهٔ واقعی، چگونه می‌توان کیفیت یک خط کش را تحقیق کرد؟ این تحقیق برچه اساسی است؟

۹. نقطهٔ M روی پاره‌خط راست AB از چهار وجهی ABCD (شکل ۱) داده‌شده است. بااستفاده از نمادهای $\subset$ و $\not\subset$ نشان دهید: ۱) خط راست AB متعلق به صفحهٔ ABC است، ۲) خط راست CM برصفحهٔ ABC است، ۳) خط راست DM روی صفحهٔ ABC نیست.

۱۰. فصل مشترک صفحه‌هایی را نام ببرید که از وجه‌های چهاروجهی ABCD (شکل ۱) می‌گذرند. صفحه‌ای که از نقطه‌های C ، D و M می‌گذرد، از کدام وجه چهار وجهی می‌گذرد؟ آن را چگونه نشان می‌دهند؟ فصل مشترک این صفحه‌را، باوجه‌های دیگر چهاروجهی مشخص کنید.

۱۱. دو صفحهٔ α و β که برهم منطبق نیستند، از نقطه‌های A و B می‌گذرند. ثابت کنید: $\alpha \cap \beta = (AB)$.

۱۲. در چهاروجهی ABCD ، نقطه‌های $M \in [AB]$ و $N \in [AD]$ را درنظر می‌گیریم. مطلوب است فصل مشترک صفحه‌های: ۱) ABD و CMN ، ۲) CMN و ABC ، ۳) CMN و ADC.

۱۳. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را روی یک صفحه نشان دهید و دو نقطهٔ دلخواه M و N را، در درون وجه ABCD انتخاب کنید. فصل مشترک این صفحه‌ها را مشخص کنید: ۱) ABC و A_1MN ؛ ۲) B_1MN و BCC_1 ؛ ۳) C_1MN و CC_1D.

۱۴. ۱) با چه‌شرطی، دوصفحهٔ MAB و MDC متقاطع‌اند؟ ۲) فصلی مشترک صفحه‌های ABD و ACD کدام است؟

۳. نتیجه‌های حاصل از اصل موضوعها

برخی نتیجه‌های حاصل از این اصل موضوعها را ثابت می‌کنیم. این نتیجه‌ها، برای اثبات قضیه‌ها و حل مسأله‌ها، اهمیت زیادی دارند.

نتیجهٔ ۱. از یک خط‌راست و نقطه‌ای که متعلق به آن نیست، همیشه می‌توان یک صفحه، و تنها یک صفحه، عبور داد.

اثبات. خط‌راست a و نقطه M ، واقع در بیرون آن را درنظر می‌گیریم. دونقطهٔ B و C را روی خط راست a انتخاب می‌کنیم. ازنقطه‌های M ، B و C صفحه‌ای می‌گذرانیم (اصل موضوع صفحه)؛ درضمن، خط راست a ، روی این صفحه‌است (اصل موضوع خط راست و صفحه). به این ترتیب، وجود صفحه‌ای که از a و M می‌گذرد، روشن شد. این صفحه را α می‌نامیم و ثابت می‌کنیم، منحصر به فرد است. در واقع، هرصفحه‌ای که از خط راست a و نقطه M بگذرد، باید شامل نقطه‌های B و C و M باشد. ولی از این سه نقطه، بیش از یک صفحه عبور نمی‌کند (اصل موضوع صفحه).

نتیجهٔ ۲. از دو خط راست متقاطع، می‌توان یک صفحه، و تنها یک صفحه، عبور داد.

اثبات. این نتیجه، کاملاً شبیه اثبات نتیجهٔ ۱ است. خودتان این اثبات را توضیح دهید.

پیش‌از آن‌که به نتیجهٔ دیگری بپردازیم، آنچه را دربارهٔ خطهای راست موازی، درهندسهٔ مسطحه خوانده‌ایم، به یاد بیاورید، چراکه، برای مطالعهٔ درس «توازی در فضا» اهمیت دارد. تعریفی که برای خطهای راست موازی در هندسهٔ مسطحه دیده‌ایم، در هندسهٔ فضایی هم به قوت خودباقی است: **دو خط راست a و b را موازی گوییم، وقتی که دریک صفحه باشند، نقطهٔ مشترکی نداشته باشند و برهم منطبق نباشند.** در هندسهٔ مسطحه، بااصل موضوع توازی آشنا شده‌ایم: **از هر نقطهٔ صفحه، نمی‌توان بیش‌از یک خط راست، موازی با خط راست مفروض رسم کرد.** اصل موضوع توازی، برای هر صفحه‌ای از فضا درست است.

نتیجهٔ ۳. از دوخط راست‌موازی، می‌توان یک صفحهٔ منحصر به فرد عبور داد.

اثبات. وجود صفحه، نتیجه‌ای است از تعریف خطهای راست موازی. اکنون فرض می‌کنیم، از این دو خط راست، صفحهٔ دیگری هم گذشته‌باشد. روی یکی از آنها، نقطه‌های A و B ، و روی دیگری نقطهٔ C را درنظر می‌گیریم؛ معلوم می‌شود که از سه نقطهٔ A

و B و C ، دو صفحه گذشته است؛ ولی این، اصل موضوع صفحه را نقض می‌کند.

مسأله. ثابت کنید، از هر نقطهٔ فضا، می‌توان تنها یک خط راست، موازی با خط راست مفروض رسم کرد.

حل. خط راست a و نقطهٔ M رادرنظر می‌گیریم. دو حالت پیش می‌آید: الف) $M \notin a$. خط راست مجهول باید روی صفحهٔ α، شامل خط راست a و نقطهٔ M، باشد. باتوجه به نتیجهٔ ۱، صفحهٔ α وجود دارد و منحصر به فرد است. از هندسهٔ مسطحه می‌دانیم، در این صفحه، تنها یک خط راست b وجود دارد که از M می‌گذرد و با خط راست a موازی است. ب) $M \in a$. در این حالت، تنها خط راستی که از M بگذرد و با a موازی باشد، خود خط راست a است.

پرسشها و مسأله‌ها

۱۵. نقطهٔ M روی [AB] از چهار وجهی ABCD قرار دارد. چند صفحه می‌توان عبور داد: ۱) از (DC) و M ؛ ۲) از (AB) و M ؟

۱۶. چهار وجهی ABCD را رسم کنید و خط راست a را طوری درنظر بگیرید که یالهای AD و CD را قطع کند. فصل مشترک صفحه‌ای را که از خط راست a و نقطهٔ B گذشته‌است: ۱) با (ABD)؛ ۲) با (BCD) پیدا کنید.

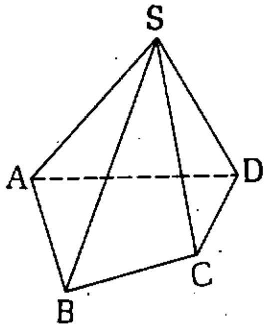
۱۷. خط راست a و نقطهٔ M مفروض‌اند. چند صفحه می‌توان از این خط راست و نقطه گذراند؟

۱۸. ۱) چهار نقطه داده‌شده‌اند که بر صفحه واقع نیستند. ثابت کنید، نمی‌توان بین این چهار نقطه، سه نقطه پیدا کرد که بر یک خط راست واقع باشند؛ ۲) آیا عکس این حکم درست است؟

۱۹. دو خط راست داده‌شده‌اند که در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده‌اند. ۱) ثابت کنید، هرخط راستی که این دو خط راست را قطع کند و از نقطهٔ O نگذرد، بااین دو خط راست دریک صفحه قرار دارد؛ ۲) آیا اگر جملهٔ «از نقطهٔ O نگذرد» را حذف کنیم، بازهم به گزارهٔ درستی می‌رسیم؟

۲۰. مجموعه‌ای از نیم خطهای راست، که آغازی مشترک دارند، در اختیار داریم و می‌دانیم هیچ سه نیم خطی روی یک صفحه نیستند. چند صفحه می‌توان رسم کرد، به نحوی که هرکدام از آنها، شامل دونیم خط راست باشند. به شرطی که تعداد نیم خطهای راست ۱) ۳، ۲) ۴، ۳) n باشد؟

۲۱. هرم SABCD را، باقاعدهٔ چهارضلعی رسم کنید (شکل ۲). ۱) فصل مشترک قاعدهٔ ABCD را با صفحه‌هایی پیدا کنید که از SA و SC، یا از SB و SD می‌گذرند، ۲) فصل مشترک دو صفحهٔ اخیر را پیدا کنید.



شکل ۲

۲۲. ۱) خط شکستهٔ ABCD داده شده است؛ درضمن $M = (AC) \cap (BD)$. ثابت کنید، این خط شکسته، شکلی مسطحه است؛ ۲) نجاری می‌خواهد به کمک دو نخ تحقیق کند، آیا میز چهار پایه‌ای را که ساخته است، روی کف اطاق، استوار می‌ایستد یا نه؟ چگونه؟

۲۳. دو خط راست موازی و مختلف داده‌شده‌اند. ثابت کنید، همهٔ خطهای راستی که هر دو خط راست مفروض را قطع کرده‌اند، روی یک صفحه قرار دارند.

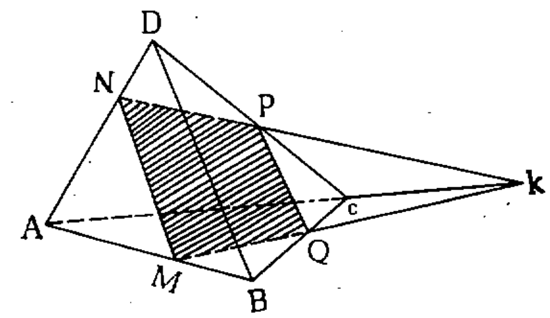
۴. ساختن مقطع چندوجهیها و حل مسأله‌های مربوط به آنها

تصور چندوجهی را در هندسهٔ دبیرستانی، به‌عنوان یک جسم هندسی که سطح آن به‌وسیلهٔ چند ضلعیها پوشیده‌شده باشد، به‌دست آورده‌اید. فصل مشترک یک چندوجهی، و مثلاً چهار وجهی ABCD (شکل ۱) را، باصفحهٔ α درنظر می‌گیریم؛ این فصل

مشترک، ممکن است مجموعه‌ای تهی، یک نقطه، یک خط راست و یا یک چند ضلعی باشد. اگر فصل مشترک چندوجهی باصفحه، یک چند ضلعی باشد، این چند ضلعی را، **مقطع چندوجهی** گویند. در این جا، دومسأله‌ای را که به ساختن مقطع یک چندوجهی بایک صفحه مربوط می‌شوند، حل کرده‌ایم. اصطلاح «ساختن»، در این جا هم، به همان معنایی است که در هندسهٔ مسطحه به کار می‌رود. «ساختن» یا «رسم» باید تنها به کمک خط‌کش و پرگار انجام گیرد.

مسألهٔ ۱. روی یالهای AB ،AD و CD از چهاروجهی ABCD (شکل ۳)، به ترتیب، نقطه‌های M ،N و P را انتخاب کرده‌ایم، به‌نحوی‌که خطهای راست NP و AC باهم موازی نباشند. مقطع چهار وجهی را با صفحه‌ای پیدا کنید که از این نقطه‌ها می‌گذرد.

حل. صفحه‌ای را که از نقطه‌های M ،N و P می‌گذرد، α می‌نامیم. برای ساختن مقطع، کافی است فصل مشترک صفحهٔ α را با وجه‌های چهاروجهی پیدا کنیم. از اصل موضوع برخورد دو صفحه و اصل موضوع خط راست و صفحه استفاده می‌کنیم، در این صورت، پیدا کردن فصل مشترک یک وجه با صفحهٔ α، منجزبه پیدا کردن دو نقطه‌ای می‌شود که هم به صفحهٔ α و هم به‌صفحهٔ این وجه تعلق داشته‌باشند. باتوجه به این نکته، پاره‌خط راست NP، فصل مشترک‌وجه DAC باصفحه α و، همچنین، پاره‌خط راست MN، فصل مشترک صفحهٔ α باوجه ABD را رسم می‌کنیم. ولی در صفحهٔ ABC، تنها نقطهٔ M را می‌شناسیم که به‌صفحهٔ α تعلق دارد. نقطهٔ دوم، عبارت است از نقطهٔ K که در محل برخورد خطهای



شکل ۳

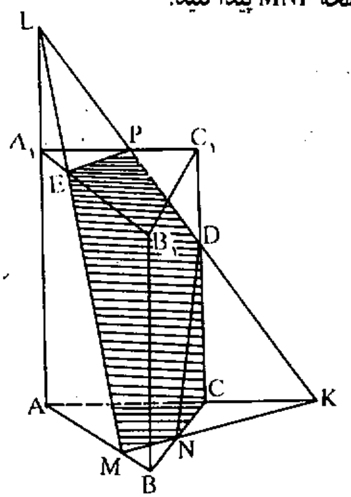
راست NP و AC قرار دارد؛ از این دوخط راست، NP روی صفحهٔ α و AC روی صفحهٔ ABC است (هر دو خط راست، متعلق به‌صفحهٔ ABC هستند و، بنا به شرط مسأله، باهم موازی نیستند). بارسم خط راست MK، نقطهٔ Q، برخورد آن را با یال BC پیدا می‌کنیم. به این ترتیب، Q رأس چهارم مقطع مجهول MNPQ است.

صورت مسأله و حل آن را به‌صورت نمادی تنظیم می‌کنیم.

می‌دانیم: $ABCD = \Phi$ یک چهار وجهی است و $M \in [AB]$، $N \in [AD]$، $P \in [CD]$ و $(NP) \nparallel (AC)$. مطلوب است: $\Phi \cap (MNP)$:

حل. ۱) $[NP]$؛ ۲) $[MN]$؛ ۳) $K = (NP) \cap (AC)$؛ ۴) $Q = (MK) \cap (BC)$؛ ۵) $[PQ]$؛ چهارضلعی MNPQ مقطع مجهول است.

مسألهٔ ۲. روی یالهای AB ،BC و A_1C_1 از منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ (شکل ۴)، به‌ترتیب، نقطه‌های M ،N و P داده شده است: درضمن، خط راست MN باخط راست AC موازی نیست. مقطع منشور را باصفحهٔ MNP پیدا کنید.



شکل ۴

بخشی از راه حل مسأله را نمی‌آوریم، زیرا هیچ اختلافی با حل

مسألهٔ ۱ ندارد. $\alpha = (MNP)$ می‌گیریم. فصل مشترک α با وجه ABC عبارت است از پاره‌خط راست MN. نقطهٔ P روی صفحهٔ α و روی صفحهٔ وجه ACC_1A_1 است. همین دوصفحه، درنقطهٔ K، محل برخورد خطهای راست MN و AC، به‌هم می‌رسند. با رسم‌خط‌راست KP، نقطه‌های

$$D = (KP) \cap (CC_1),\ L = (KP) \cap (AA_1)$$

به‌دست‌می‌آید. نقطهٔ E، محل برخوردخط راست LM ویال A_1B_1 است. پنج ضلعی MNDPE، مقطع مجهول است.

پرسشها و مسأله‌ها

۲۴. تعداد ضلعهای مقطع ۱) چهار وجهی، ۲) منشور با قاعدهٔ مثلثی، چه‌عددی می‌تواند باشد؟

۲۵. چهاروجهی ABCD داده‌شده‌است. می‌خواهیم مقطع آن را باصفحه‌ای پیداکنیم که از نقطه‌های ۱) $M \in [AB]$، $N \in [BC]$، $P \in [BD]$؛ ۲) B، D، $Q \in [AC]$؛ ۳) $R \in [DC]$، $N \in [BC]$؛ $Q \in [AC]$ گذشته است.

۲۶. ۱) مقطع چهاروجهی ABCD را باصفحه‌ای که از نقطه‌های B، $M \in [AD]$ و $N \in [DC]$ می‌گذرد، پیداکنید؛ ۲) مساحت این مقطع را به‌دست آورید، به‌شرطی که طول هریک از یالهای چند وجهی برابر a و نقطه‌های M و N در وسط یالهای متناظر باشند.

۲۷. ۱) مقطع چهاروجهی ABCD را باصفحه‌ای که از یال DC و نقطهٔ M واقع در درون وجه ABC می‌گذرد، پیداکنید؛ ۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به‌شرطی که هر یال چهار وجهی برابر a باشد و (CM) از وسط [AB] بگذرد.

۲۸. چهاروجهی ABCD مفروض است. مقطع آن را با صفحه‌ای پیداکنید که از خط راست DD_1 و نقطهٔ M واقع در درون وجه ADC گذشته است (D_1، نقطه‌ای از یال DC است).

۲۹. صفحهٔ α به‌وسیلهٔ سه نقطه‌ای که، به ترتیب، روی یالهای DA، DB و DC از چهاروجهی ABCD قرار دارند، مشخص‌شده‌است. اگر M نقطه‌ای در درون وجه ABC باشد، نقطهٔ برخورد صفحهٔ α را باخط راست DM پیداکنید.

۳۰. منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ مفروض است. مقطع این منشور را باصفحه‌ای که از رأس B و نقطه‌های M و N، به ترتیب، متعلق به یالهای A_1B_1 و CC_1 می‌گذرد، پیداکنید.

۳۱. مطلوب‌است مقطع‌منشورقائم $ABCA_1B_1C_1$، باصفحهٔ MNP، به‌شرطی‌که $M\in[AA_1]$، $N\in[BB_1]$، $P\in[A_1C_1]$.

۳۲. ۱) مقطع منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ را با صفحه‌ای پیدا کنید که از خط راست AB و نقطهٔ K واقع در درون پاره‌خط راست AC گذشته‌است؛ ۲) محیط و مساحت این مقطع را پیداکنید، به‌شرطی که طول هریال منشور برابر a باشد.

۳۳. صفحهٔ α به‌وسیلهٔ نقطه‌های M، N و P، به‌ترتیب، متعلق به یالهای AA_1، BB_1 و CC_1 از منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ مشخص شده‌است. نقطهٔ L، در درون وجه $A_1B_1C_1$ است. نقطهٔ برخورد صفحهٔ α را با خط راست CL پیداکنید.

ادامه دارد...

ادب ریاضی

ما در عصری زندگی می‌کنیم که سرعت تغییر چنان است که شاید هرگز به این بزرگی نبوده است. ما چگونه جوانان را برای این سرعت تغییر آماده کنیم؟ چگونه مراقبت کنیم که بیش از حد «متخصص» نشوند، و در مسیر خود، در شیاری نیفتند که از آن بیرون نتوانند آمد؟ من همیشه این گفته را پسندیده‌ام که چنین شیاری در حکم گوری است، اما درازتر؛ آماده بودن برای تبعیت از دگرگونیها خیلی اهمیّت دارد.

فرض و اسطوره در فیزیک نظری. هرمان باندی

رضا منصوری. احمد بیرشک

طرح و حل مسائل اساسی ریـاضی

بـه روشهای مقدماتی (۵)

یک مساله مشهور هندسه

از :
100 Great Problems of Elementary Mathematics
By Heinrich Dörrie

« مسألهٔ مالفاتی »

رسم سه دایره در مثلثی معلوم، چنان‌که هریک از آنها به دو دایرهٔ دیگر و دوضلع مثلث مماس باشد.

مسألـهٔ مشهور فـوق تـوسط **مالفاتی** « Malfatti » (۱۸۰۷ ــ ۱۷۳۱) ریاضی‌دان ایتالیایی درسال ۱۸۰۳ مطرح و در جلد دهم

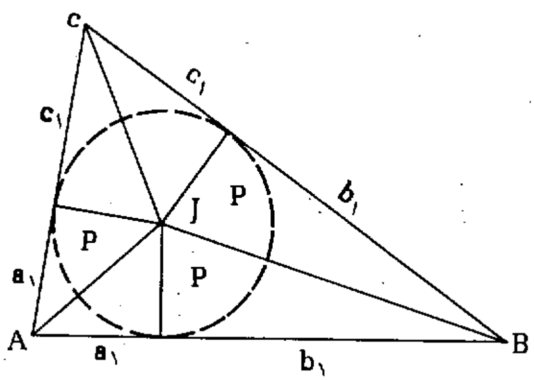
Memorie di Matematica e di Fisica della Societá italiana delle Scienze

حل‌شده. راه‌حل‌جبری ــ هندسی مزبور را، فی‌المثل، می‌توان در جلد ۱۲۳

Ostwald's *Klassiker der exakten Wisse – nschaften*

یافت. راه‌حل‌صرفاً هندسی‌مسألهٔ‌مالفاتی که‌توسط **یاکوب اشتاینر** «Steiner Jakob» درسال ۱۸۲۶ بدون اثبات ارائـه شد، نیز درآن‌جا توصیف و اثبات شده است. در اینجا منحصراً بـه شرح راه‌حل‌کاملاً ساده‌ای‌که توسط **شل باخ** Schellbach در جلـد ۴۵ « *Crelle's Journal* » بـه چـاپ رسیده، می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم ABC مثلث مفروض‌با اضلاع a، b، c، محیط ۲s و زوایای α، β، γ، باشد . فرض می‌کنیم دوایـر مالفاتی مورد جستجو (کـه بـه اضلاع زوایـای α، β، γ مماس‌اند) B، D، R، مراکزشان P، Q، R واشعه‌شان p، q، r باشند. فرض می‌کنیم مماسهای از زوایای A، B، C به B، D، R به ترتیب u، v، w باشند.



Z، دایرهٔ محاط در مثلث موردبحث‌را درنظرمی گیریم. فرض می‌کنیم مرکز آن J وشعاع‌آن ρ بـاشد، و مماسهای از زوایای A، B، C برآن به ترتیب a_1، b_1، c_1 باشند. از سه تساوی :

$$b_1+c_1=a \quad c_1+a_1=b, \quad a_1+b_1=c$$

مقادیر

$$a_1=s-a \quad b_1=s-b\,, \quad c_1=s-c$$

را به دست می‌آوریم.

از آن‌جا که نقاط P و J بر نیمساز زاویهٔ α واقعند، از قضیهٔ مربوط به شعاع نتیجه می‌شود که:

$$p/\rho=u/a_1 \quad \text{یا} \quad p=\frac{\rho}{a_1}u$$

به همین ترتیب $q=\frac{\rho}{b_1}v$ را به دست می‌آوریم.

نقاط تماس B و D با AB را U و V می‌نامیم و

$$UV=t$$

را محاسبه می‌کنیم. از آن‌جا که PF، عمود وارد از P بر QV، برابر t است، از مثلث قائم‌الزاویهٔ PQF نتیجه می‌شود که:

$$PQ^2=PF^2+FQ^2$$

یا

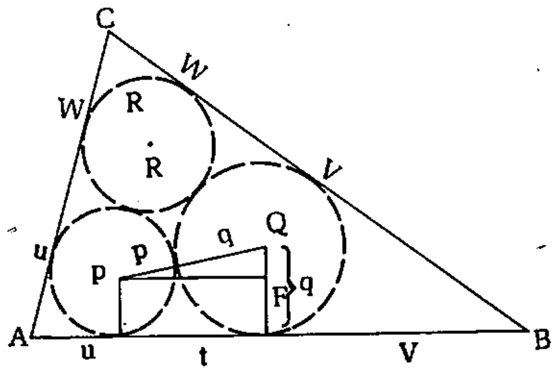
$$(p+q)^2=t^2+(p-q)^2$$

و از آن:

$$UV=t=2\sqrt{pq}$$

در این‌صورت اگر مقادیری را که در فوق برای p و q به دست آوردیم، در این‌جا قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$t=2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{\rho^2}{a_1b_1}}$$



اما می‌دانیم که:

$$\rho^2=a_1b_1c_1/s$$

این رابطه مقدار t را به صورت زیر ساده می‌کند:

$$UV=t=2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{uv}$$

از آن‌جا که ضلع AB از مثلث مورد بحث از سه پاره‌خط AU، BV، و UV ترکیب شده است، معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$u+v+2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{uv}=c$$

به همین‌طریق در مورد BC و CA، دو ضلع دیگر مثلث، به دست می‌آوریم:

$$v+w+2\sqrt{\frac{a_1}{s}}\sqrt{vw}=a$$

و

$$w+u+2\sqrt{\frac{b_1}{s}}\sqrt{wu}=b$$

با در نظر گرفتن نیم محیط مثلث به عنوان واحد طول، روابط به گونه‌ای ساده‌تر زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} v+w+2\sqrt{a_1}\sqrt{vw}=a \\ w+u+2\sqrt{b_1}\sqrt{wu}=b \\ u+v+2\sqrt{c_1}\sqrt{uv}=c \end{cases} \qquad (1)$$

اکنون کسرهای سرهٔ a، b، c، u، v، w را به‌صورت مربعات سینوسهای شش‌زاویهٔ حادهٔ λ، μ، ν، ψ، φ، χ در نظر می‌گیریم:

$$\sin^2\lambda=a\,,\quad \sin^2\mu=b\,,\quad \sin^2\nu=c\,,$$

$$\sin^2\psi=\mu\,,\quad \sin^2\varphi=\nu\,,\quad \sin^2\chi=w$$

در این‌صورت (از آن‌جا که $a+a_1=s=1$، $b+b_1=1$، $c+c_1=1$) نیز:

$$cos^2\lambda = a_1\ ,\quad cos^2\mu = b_1\ ,\quad cos^2\nu = c_1$$

و سه معادلهٔ به دست آمدهٔ (۱) ، به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{cases} sin^2\varphi + sin^2\chi + 2\,sin\varphi\, sin\chi\, cos\lambda = sin^2\lambda \\ sin^2\chi + sin^2\psi + 2\,sin\chi\, sin\psi\, cos\mu = sin^2\mu \\ sin^2\psi + sin^2\varphi + 2\,sin\psi\, sin\varphi\, cos\nu = sin^2\nu \end{cases}$$

اکنون، بـه عنوان مثال، اولین این معادله‌هارا مورد بـررسی قرار می‌دهیم! این معادله‌چیزی جزعبارت مثلثاتی‌رابطهٔ‌معروف $(\varphi+\chi=\lambda)$ بین زوایای φ و χی دو رأس یك مثلث و λ ، زاویهٔ‌خارجی رأس سوم آن نیست. اگر، فی‌المثل، چنین مثلثی رابا دایرهٔ محیطی‌به قطر ۱ درنظر بگیریم، در این صورت سه ضلع آن $sin\varphi$ ، $sin\chi$ ، $sin\lambda$ می‌باشند، وقضیهٔ کسینوسهارابطهٔ زیر را به دست می‌دهد:

$$sin^2\lambda = sin^2\varphi + sin^2\chi + 2\,sin\varphi\, sin\chi\, cos\lambda$$

دراین صورت از (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\varphi+\chi=\lambda\ ,\quad \chi+\psi=\mu\ ,\quad \psi+\varphi=\nu$$

و ازآنها ، با $\sigma = \frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$

$$\psi=\sigma-\lambda\ ,\quad \varphi=\sigma-\mu\ ,\quad \chi=\sigma-\nu$$

وبه این‌ترتیب ترسیم سادهٔ زیررا به دست می‌آوریم:

۱. سه زاویهٔ λ ، μ ، νیی را،که مربعهای‌سینوس آنها مساوی‌اضلاع مثلث مفروض‌اند (ودر آن‌نصف محیط مثلث‌واحد طول است) رسم می‌کنیم.

۲. نیم مجموع سه زاویهٔ λ ، μ ، ν ، یعنی:

$$\sigma = \frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$$

و سه زاویهٔ جدید

$$\psi=\sigma-\lambda\ ,\quad \varphi=\sigma-\mu\ ,\quad \chi=\sigma-\nu$$

را رسم می‌کنیم.

۳. مربعهای سینوس سه‌زاویهٔ ψ، φ، χ را رسم‌می‌کنیم. اینها مماسهای از رئوس مثلث مفروض بـه سه دایرهٔ مالفاتی می‌باشند.

تبصره : اگـر بخواهیم :

$$m = sin^2 w$$

مربع سینوس‌زاویهٔ مفروض w، یازاویهٔ w (که مربع سینوس آن‌برابرm است)را رسم کنیم، به طریق زیرعمل می‌کنیم:

نیم‌دایرهٔ G به قطر $HK=1$ را رسم می‌کنیم. زاویـهٔ معلومw رادر K برKH رسم‌کرده از L نقطهٔ‌تقاطع‌ضلع‌آزاد آن‌با G عمود LM رابر HK وارد می‌کنیم. در این صورت

$$HM = m = sin^2 w$$

برعکس، اگر m معلوم ویافتن w لازم باشد:

$$HM = m$$

را بر HK رسم‌کرده از M عمودی‌بر HK اخراج کرده آن راتا L ، تقاطعش‌با G امتداد داده LK را امتداد می‌دهیم. در این‌صورت $\sphericalangle HKL = w$.

اثبات. از مثلث قائم‌الزاویهٔ HML نتیجه می‌شود که :

$$m = HM = HL \times sin HLM = HL\, sin\, w$$

واز مثلث قائم‌الزاویهٔ HKL

$$HL = HK\, sin\, w = sin\, w$$

در نتیجه:

$$m = sin^2 w$$

عمود مشترک دوخط متنافر

محمد ابراهیم گیتی‌زاده

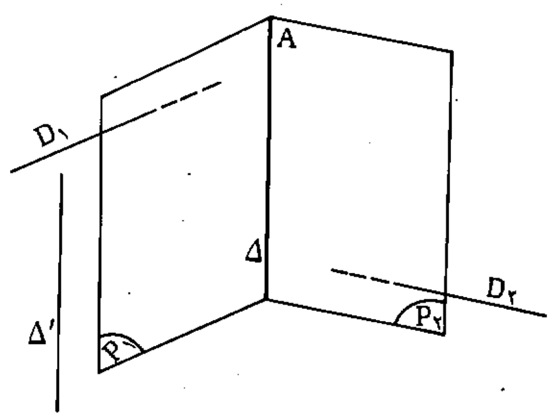
★قابل استفادهٔ دانش آموزان سال چهارم ریاضی

۱- می‌دانیم که ازهرنقطهٔ دلخواه A می‌توان خطی‌رسم کرد که بردوخط متنافرمعلوم، مانند D_1 و D_2 ، عمود باشد. این خط، که آن‌را Δ می‌نامیم، فصل مشترك دوصفحه، مانند P_1 و P_2 ، است که ازنقطهٔ A بریکی‌از این دوخط عمود می‌شوند، آن‌گاه هرخط دیگر، مثل Δ' ، که به موازات Δ رسم‌شود، بر دوخط متنافرمفروض عمود خواهدبود. بنابراین، می‌توان خط Δ را راستای کلیهٔخطوطی اختیارکردکه بردوخط متنافر عمود می‌شوند.

$$(P_1 \perp D_1) \wedge (P_2 \perp D_2) ،\ (P_1 \cap P_2) = \Delta \implies$$

$$(\Delta \perp D_1) \wedge (\Delta \perp D_2)$$

$$(\Delta' \| \Delta) \implies (\Delta' \perp D_1) \wedge (\Delta' \perp D_2)$$



در هندسه تحلیلی، راستای کلیهٔ خطوط عمود بردو خط متنافر D_1 و D_2 را می‌توان‌راستای‌حاصل‌ضرب برونی‌دو بردار هادی‌این دوخط اختیارکرد. مثلاً، دوبردار هادی‌دوخط D_1 و D_2 با معادله‌های:

$$D_1 : x - 5 = \frac{y+2}{2} = -z - 1$$

$$D_2 : \frac{x-1}{2} = y + 1 = z$$

به ترتیب:

$$\vec{v}_2(2 , 1 , 1) \quad \text{و} \quad \vec{v}_1(1 , 2 , -1)$$

می‌باشند، و راستای هرخطی‌که براین دو خط عمود می‌شود راستای بردار زیر است:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{w}_1(3 , -3 , -3)$$

یا

$$\vec{w}(1 , -1 , -1)$$

مثال. معادله‌های خطی را بنویسیدکه از مبدأ مختصات بگذرد و بردوخط Δ_1 و Δ_2 ، با معادله‌های زیر، عمود باشد.

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{3} = 2y = z$$

$$\Delta_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = -z + 1$$

حل. بردارهای هادی این‌دوخط به ترتیب عبارتنداز:

$$\vec{a}_1(3, \frac{1}{2}, 1) \ ,\ \vec{a}_2(2, 2, -1)$$

راستای هر خطی که بر این دو خط عمود باشد راستای بردار زیر است:

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = \vec{a}\left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right) \quad \text{یا} \quad \vec{u}(-1, 2, 2)$$

و معادله‌های خطی که از نقطهٔ $O(0,0,0)$ در راستای بردار

$$\vec{u}(-1, 2, 2)$$

رسم می‌شود به صورت زیر نوشته می‌شوند:

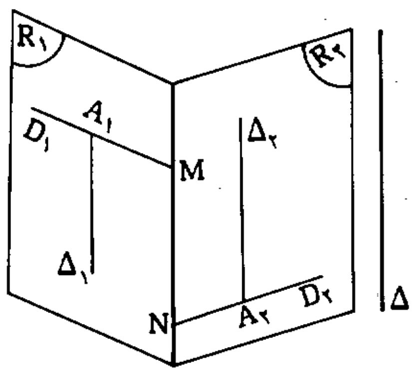
$$-x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

۲ـ عمود مشترک دوخط متنافر: خطی که بر دو خط متنافر D_1 و D_2 عمود باشد و این دو خط را قطع کند عمود مشترک این دو خط نامیده می‌شود. بنابراین، در بین خطوط بی‌شماری که می‌توانند بر دو خط متنافر عمود باشند، تنها خطی که با هر دو متقاطع می‌باشد عمود مشترک آنها است. برای این که بر شرط متقاطع بودن عمود مشترک با دو خط متنافر تأکید شده باشد، معمولاً آن را به صورت یک پاره‌خط که دو سر آن بر روی دو خط متنافر قرار دارد، نشان می‌دهند. این پاره‌خط، کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط متنافر است، یعنی طول آن از طول هر پاره‌خط دیگر که بر دو خط متنافر متکی باشد کوچکتر است.

۳ـ طریقه تعیین عمود مشترک دو خط متنافر و معادله‌های آن: پس از آن که راستای خطوط عمود بر دو خط متنافر را یافتیم، باید به حل مسأله زیر بپردازیم تا عمود مشترک دو خط متنافر به دست آید.

مسأله ـ سه خط D_1 و D_2 و Δ، که دو به دو نسبت به هم متنافر می‌باشند، معلومند. خطی رسم کنید که با Δ موازی بوده دو خط D_1 و D_2 را قطع کند.

حل . بر دو خط D_1 و D_2 به ترتیب دو صفحه R_1 و R_2 را چنان می‌گذرانیم که با خط Δ موازی باشند. بدین ترتیب که از نقطهٔ دلخواه A_1 واقع بر خط D_1 و از نقطه اختیاری A_2 واقع بر خط D_2 دو خط Δ_1 و Δ_2 را به موازات خط Δ رسم می‌کنیم. دو خط متقاطع D_1 و Δ_1 صفحه R_1 و دو خط D_2 و Δ_2 صفحه R_2 را تشکیل می‌دهند. فصل مشترک این دو صفحه، که با خط Δ موازی می‌باشد، و دو خط D_1 و D_2 را به ترتیب در نقاط M و N قطع می‌کند، جواب مسأله است. در حقیقت نقطه M محل تلاقی صفحه R_2 و خط D_1 و نقطه N محل برخورد صفحه R_1 و خط D_2 است.



مثال ۱ـ مطلوب است تعیین معادله‌های خطی که با راستای

$$\vec{w}(1, -1, -1)$$

موازی بوده دو خط D_1 و D_2 با معادله‌های زیر را قطع کند.

$$D_1: \ x-5 = \frac{y+2}{2} = -z-1$$

$$D_2: \ \frac{x-1}{2} = y+1 = z$$

حل . از نقطه دلخواه $A_1(5, -2, -1)$ واقع بر خط D_1 خط Δ_1 را هم راستا با بردار $\vec{w}$ مرور می‌دهیم. دو خط متقاطع D_1 و Δ_1 صفحه R_1 را تشکیل می‌دهند که بردار نرمال آن حاصل‌ضرب برونی دو بردار هادی این دو خط، یعنی:

$$\vec{w}(1,-1,-1) \quad \text{و} \quad \vec{v}_1(1,2,-1)$$

است:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{w} = \vec{u}_1(-3,0,-3) \text{ یا } \vec{w}_1(1,0,1)$$

$$\begin{cases} \vec{w}_1(1,0,1) \\ A_1(5,-2,-1) \end{cases} \Longrightarrow R_1 : x+y-4=0$$

به همین ترتیب صفحه R_2 را چنان رسم می‌کنیم که شامل خط D_2 وخط Δ_2 هم‌راستا با بردار $\vec{w}$ باشد:

$$\begin{cases} \vec{v}_2 \wedge \vec{w} = \vec{u}_2(0,3,-3) \text{ یا } \vec{w}_2(0,1,-1) \\ A_2(1,-1,0) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow R_2 : y-z+1=0$$

خط مطلوب، فصل مشترك دوصفحهٔ R_1 و R_2 با معادله‌های زیر است:

$$\begin{cases} x+z-4=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

که معادله کانونیك آن به صورت زیر می‌باشد:

$$4-x=y+1=z$$

اگر خواسته باشیم قطعه‌ای از این خط را که به‌دوخط متنافر متکی می‌باشد، مشخص کنیم، کافی است مختصات نقاط تلاقی خط D_2 باصفحه R_1 وخط D_1 با صفحهٔ R_2 را به دست آوریم:

$$D_2 : \begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases} \text{ و } R_1 : x+z-4=0$$

$$2t+1+t-4=0 \Longrightarrow t=1 \Longrightarrow$$

$$M(3\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

$$D_1 : \begin{cases} x=k+5 \\ y=2k-2 \\ z=-k-1 \end{cases} \text{ و } R_2 : y-z+1=0$$

$$2k-2+k+1+1=0 \Longrightarrow k=0 \Longrightarrow$$

$$N(5\ ,\ -2\ ,\ -1)$$

وجواب مسأله قطعه‌خط MN است.

مثال ۲ - معادله‌های عمود مشترك‌دوخط متنافر D_1 و D_2 را با معادله‌های زیر پیدا کنید:

$$D_1 : x-5=\frac{y+2}{2}=-z-1$$

$$D_2 : \frac{x-1}{2}=y+1=z$$

حل . ازآن جاکه در مثال ۱ ، بردار

$$\vec{w}(1\ ,\ -1\ ,\ -1)$$

راستای خطوط عمود بر دو خط D_1 و D_2 و قطعه خط MN هم‌راستا با بردار $\vec{w}$ و متقاطع با دوخط مفروض‌است، این‌قطعه خط‌همان عمود مشترك‌دوخط متنافر D_1 و D_2 می‌باشد و معادلهٔ MN معادلهٔ‌عمود مشترك‌خطوط D_1 و D_2 است.

۴- تعیین عمود مشترك دوخط متنافر به طریقه دیگر: در این‌طریقه، عمود مشترك‌دوخط متنافر D_1 و D_2 با عملیات زیر به دست می‌آید:

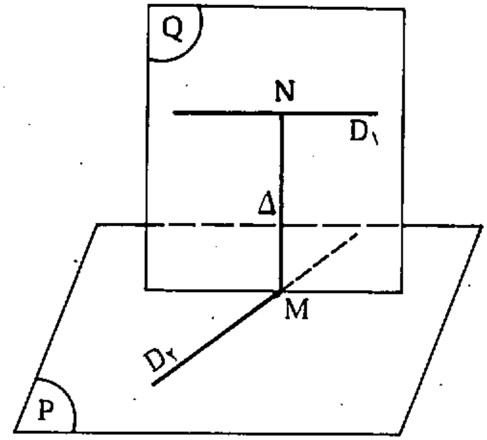
الف - برخط D_2 صفحه P را بـه موازات خط D_1 می‌گذرانیم.

ب - صفحه Q را به نحوی رسم می‌کنیم‌که شامل خط D_1 بوده وبرصفحه P عمودباشد. این‌صفحه، صفحهٔ مصورخط D_1 برروی‌صفحه P است وفصل مشترك‌آن با صفحه P تصویر خط D_1 می‌باشد، که دراین‌جا باخودخط D_1 موازی است.

ج- نقطه‌تلاقی‌خط D_2 وصفحه Q رابه دست‌آورده M می‌نامیم.

د - ازنقطه M ، خط Δ رابـرصفحهٔ P عمود می‌کنیم. این‌خط درصفحهٔ Q واقع‌می‌شود وباخط D_1 متقاطع‌است.

ه ـ نقطه تلاقی دوخط Δ و $D_۱$ را به دست می‌آوریم و آن‌را N می‌نامیم. پاره‌خط MN عمود مشترک مطلوب است.



مثال ـ معادله‌های عمود مشترک دو خط متنافر زیر را به طریقه دوم پیدا کنید:

$$D_۱:\ x-۵=\frac{y+۲}{۲}=-z-۱$$

$$D_۲:\ \frac{x-۱}{۲}=y+۱=z$$

حل ـ مسأله‌را به ترتیب فوق حل می‌کنیم:

الف ـ تعیین معادله‌صفحه P که شامل‌خط $D_۲$ وموازی با خط $D_۱$ است:

بردارهای هادی دو خط $D_۲$ و $D_۱$:

$$\vec{v}_۱(۱,۲,-۱) \text{ و } \vec{v}_۲(۲,۱,۱)$$

امتداد بردار نرمال صفحهٔ P:

$$\vec{v}_۱\wedge\vec{v}_۲=\vec{w}_۱(۳,-۳,-۳)$$

یا

$$\vec{w}(۱,-۱,-۱)$$

نقطه‌ای از خط $D_۲$ و ازآن‌جا نقطه‌ای ازصفحه P:

$$A(۱,-۱,۰)$$

معادلهٔ صفحهٔ P:

$$۱(x-۱)-۱(y+۱)-۱(z-۰)=۰$$

$$P:\ x-y-z-۲=۰$$

ب ـ تعیین معادلهٔ صفحه Q که شامل خط $D_۱$ وعمود برصفحه P است:

$\vec{v}_۱(۱,۲,-۱)$ بردار هادی خط $D_۱$

$\vec{w}(۱,-۱,-۱)$ بردار نرمال صفحه P

$$\vec{v}_۱\wedge\vec{w}=\vec{u}_۱(-۳,۰,-۳)$$

یا

$\vec{w}_۱(۱,۰,۱)$ بردار نرمال صفحه Q

نقطه‌ای ازخط $D_۱$ و درنتیجه نقطه‌ای ازصفحهٔ Q :

$$B(۵,-۲,-۱)$$

$$۱(x-۵)+۰(y+۲)+۱(z+۱)=۰$$

$$Q:\ x+z-۴=۰$$

ج ـ تعیین مختصات نقطه برخورد خط $D_۲$ وصفحه Q:

$$D_۲:\ \begin{cases}x=۲t+۱\\ y=t-۱\\ z=t\end{cases}\qquad Q:\ x+z-۴=۰$$

$$۲t+۱+t-۴=۰\ \Longrightarrow\ t=۱\ \Longrightarrow$$

$$M(۳,۰,۱)$$

د ـ معادله‌های‌خط Δ که از نقطهٔ $M(۳,۰,۱)$ برصفحهٔ P عمود می‌شود:

بردار نرمال‌صفحه P و بردار هادی‌خط Δ :

$$\vec{w}(۱,-۱,-۱)$$

$$\Delta:\ x-۳=-y=-z+۱$$

ه ـ مختصات نقطه تلاقی دوخط D_1 و Δ:

$$D_1 : \begin{cases} x = k+5 \\ y = 2k-2 \\ z = -k-1 \end{cases} \qquad \Delta : \begin{cases} x = k'+3 \\ y = -k' \\ z = -k'+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k+5 = k'+3 \\ 2k-2 = -k' \\ -k-1 = -k'+1 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا جواب متوافق $k=0$ و $k'=2$ واز آن‌جا $N(5,-2,-1)$ بــه دست می‌آید و پاره خط MN عمود مشترك دوخط متنافر D_1 و D_2 است. معادلهٔ MN به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$MN(-2,2,2) \text{ و } M(3,0,1)$$

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$$

$$MN : 3-x = y = z-1$$

۵ـ کوتاه‌ترین فاصله بین دوخط متنافر: چنانچه قبلاً گفته شد، طول پاره‌خط عمود مشترك، کوتاه‌ترین فاصله بین‌دوخط متنافر است. برای دو خط متنافر D_1وD_2 ، بامعادله‌های مفروضشان، این فاصله برابراست با:

$$MN = \sqrt{(5-3)^2+(-2-0)^2+(-1-1)^2} = 2\sqrt{3}$$

چنانچه فقط محاسبهٔ کوتاه‌ترین فـاصله بین دوخط متنافر منظور باشد، کافی‌است بر یکی‌از دوخط صفحه‌ای به موازات خط دیگر مرور داده فاصله یك نقطه دلخواه از خط اخیررا تا این صفحه به دست آورد. در مثال بالا، صفحه P برخط D_2 گذشته وباخط D_1 موازی‌است. بنابراین، اگرنقطهٔ دلخواه ازخط D_1 را $A(5,-2,-1)$ اختیار کنیم، کوتاه‌ترین فاصله بین‌دوخط متنافر D_1 و D_2 ، فاصله‌نقطهٔ A ازصفحه P می‌شود:

$$P : x-y-z-2=0 \quad \text{و} \quad A(5,-2,-1)$$

$$d = MN = \frac{|5-(-2)-(-1)-2|}{\sqrt{1+1+1}} = 2\sqrt{3}$$

۶ـ تعیین‌عمود مشترك‌دوخط متنافرعمود برهم: درحالت خاصی که دوخط متنافر برهم عمودهستند، چون برهرخطمی توان صفحه‌ای گذراند کــه برخط دیگر عمود باشد، فصل مشترك دو صفحه‌ای که بدین‌طریق‌رسم می‌شوند عمود مشترك‌مطلوب‌خواهد بود.

مثال ۱ - عمود مشترك دوخط D_1 و D_2 را بامعادله‌های زیر پیدا کنید:

$$D_1 : \frac{x-1}{2} = -y-1 = z$$

$$D_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{-z-2}{2}$$

حل - بردارهای هادی این دوخط عبارتنداز:

$$\vec{v_1}(2,-1,1) \quad , \quad \vec{v_2}(3,4,-2)$$

چون

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 2\times 3 - 1\times 4 + 1(-2) = 0$$

دوخط برهم عمودند.

ازنقطهٔ $A_1(1,-1,0)$ واقع‌برخط D_1، صفحهٔ P را برخط D_2 عمود می‌کنیم (خط D_1 برصفحه P منطبق‌می‌شود):

$\vec{v_2}(3,4,-2)$ بردار نرمال صفحه P

$A_1(1,-1,0)$ نقطه‌ای از صفحه P

$$3(x-1)+4(y+1)-2(z-0)=0$$

$$P : 3x+4y-2z+1=0$$

ازنقطهٔ $A_2(0,1,-2)$ واقع‌برخط D_2، صفحه Q را برخط D_1 عمود می‌کنیم (خط D_2 برصفحه Q منطبق می‌شود):

$$\vec{v_1}(2,-1,1) \quad \text{و} \quad A_2(0,1,-2)$$

$$۲(x-۰)-۱(y-۱)+۱(z+۲)=۰$$

$$Q:\ ۲x-y+z+۳=۰$$

خط Δ به معادله‌های زیر، عمود مشترك مطلوب است.

$$\Delta:\begin{cases}۳x+۴y-۲z+۱=۰\\ ۲x-y+z+۳=۰\end{cases}$$

تمرین: در مثال ۱ ، اولاً ــ معادله‌هــای کانونیك عمود مشترك‌را به دست‌آورید. ثانیاً ــ عمود مشترك را به صورت یك پاره‌خط نشان‌دهید وکوتاه‌ترین‌فاصله‌بین دوخط $D_۱$ و $D_۲$ را تعیین‌کنید.

مثال ۲ ــ عمود مشترك‌محور ox وخط D به معادله‌های زیررا پیداکنید:

$$D:\begin{cases}x=۱\\ \dfrac{y-۳}{۲}=z+۱\end{cases}$$

حل ــ بردار هادی خط D ، بردار

$$\vec{v}(۰\ ,\ ۲\ ,\ ۱)$$

است، پس‌خط D برمحور ox عموداست. صفحه‌ای‌که برخط D می گذرد وبرمحور ox عمود می‌شود این محور را درنقطهٔ

$$M(۱\ ,\ ۰\ ,\ ۰)$$

که نقطه‌ای‌از عمود مشترك‌است قطع می‌کند. نقطه دیگر عمود مشترك‌راکه برخط D واقع است، می‌توانیم به طریقه‌های زیر تعیین‌کنیم:

اولاً ــ برمحور ox صفحه‌ای می‌گذرانیم که برخط D عمودباشد. می‌توان بردارنرمال این‌صفحه را بردار

$$\vec{v}(۰\ ,\ ۲\ ,\ ۱)$$

و نقطه‌ای از این‌صفحه راکه برمحور ox واقع است

$$O(۰\ ,\ ۰\ ,\ ۰)$$

اختیار کرد، بنابراین:

$$۰(x-۰)+۲(y-۰)+۱(z-۰)=۰$$

$$۲y+z=۰$$

نقطه تلاقی این‌صفحه بــاخط D نقطهٔ $N(۱,۱,-۲)$ می‌شود. چرا؟

ثانیاً ــ برخط D نقطهٔ

$$N(۱\ ,\ ۲t+۳\ ,\ t-۱)$$

را به طریقی‌تعیین می‌کنیم‌که MN بر D عمود باشد:

$$\overrightarrow{MN}(۰\ ,\ ۲t+۳\ ,\ t-۱)\quad و\quad \vec{v}(۰,۲,۱)$$

$$\overrightarrow{MN}\perp\vec{v}\Longrightarrow\overrightarrow{MN}\cdot\vec{v}=۰\Longrightarrow$$

$$۲(۲t+۳)+t-۱=۰$$

$$t=-۱\Longrightarrow N(۱,۱,-۲)$$

ثالثاً ــ نقطهٔ N را چنان می‌یابیم‌که طول $MN=f(t)$ مینیمم باشد:

$$M(۱,۰,۰)\ و\ N(۱,۲t+۳,t-۱)$$

$$MN=f(t)=\sqrt{(۲t+۳)^۲+(t-۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۵t^۲+۱۰t+۱۰}$$

$$f'(t)=\frac{۱۰t+۱۰}{۲\sqrt{۵t^۲+۱۰t+۱۰}}$$

$$f'(t)=۰\Longrightarrow t=-۱\Longrightarrow N(۰,۱,-۲)$$

تمرین : قطعه خط MN که درآن

$$M(۱,۰,۰)\ و\ N(۰,۱,-۲)$$

است عمود مشترك مطلوب می‌باشد. معادله‌های کانونیك آن را بنویسید.

مسائل زیر را حل کنید:

۱ ــ معادله‌های عمود مشترک دو خط D_1 و D_2 را با معادله‌های زیر تعیین کنید و کوتاه‌ترین فاصله بین آنها را به دست آورید.

$$D_1:\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=-y-4\\ z=5\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases}x-2=\dfrac{y+1}{2}\\ z=1\end{cases}$$

راهنمایی ــ دو خط بر هم عمودند و عمود مشترک به موازات محور oz است.

۲ــ معادله‌های عمود مشترک محور oz و خط D به معادله‌های زیر را پیدا کنید:

$$D:\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=-y-4\\ z=0\end{cases}$$

راهنمایی ــ خط D بر صفحه xoy منطبق و مبدأ مختصات یک نقطه از عمود مشترک است.

۳ــ خط D به معادله‌های زیر مفروض است:

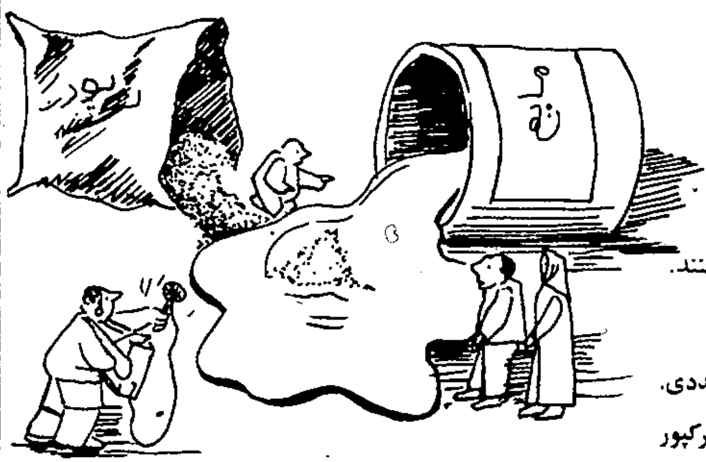
$$D:\begin{cases}x=2t+6\\ y=4t-2\\ z=t\sqrt{2}-2\sqrt{2}\end{cases}$$

اولاً ــ مختصات نقطهٔ M تصویر نقطهٔ O (مبدأ مختصات) را بر روی خط D تعیین کنید.

ثانیاً ــ معادله‌های خط Δ را به طریقی بیابید که با محور ox زاویهٔ $60°$ تشکیل داده پاره‌خط OM عمود مشترک دو خط متنافر D و Δ باشد.

تفریح اندیشه ۲

جواب در صفحهٔ ۹۶



از یک محصول به دو صورت مایع و پودر استفاده می‌شود. در یک تحقیق، نتایج زیر به‌دست آمده است:

$\frac{1}{3}$ از همهٔ اشخاص مورد سؤال پودر مصرف نمی‌کنند.

$\frac{2}{7}$ از همهٔ اشخاص مورد سؤال مایع به کار نمی‌برند.

۴۲۷ نفر مایع و پودر را توأماً مورد استفاده قرار می‌دهند.

$\frac{1}{5}$ از مجموع سؤال شوندگان از این محصول استفاده نمی‌کنند.

در این تحقیق چند نفر مورد سؤال قرار گرفته‌اند؟

از کتاب بازیهای عددی.

ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

مرکزیاب دایره

این وسیله یک طرح ابتکاری است که می‌تواند براحتی مرکز دایره را پیدا کند. طرز ساخت و چگونگی کار این وسیله به شرح زیر می‌باشد:

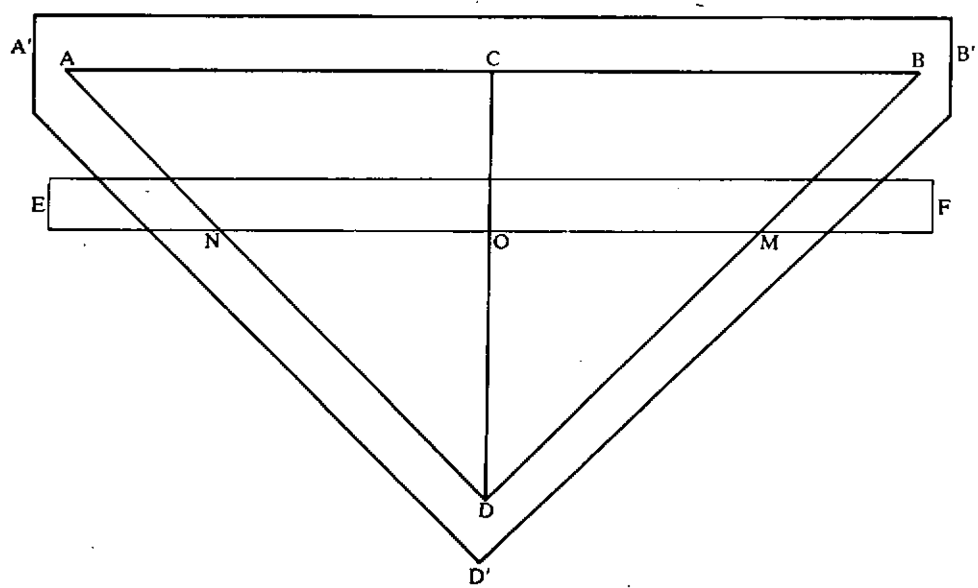
بر طبق شکل پاره‌خط AB به‌اندازه دلخواه انتخاب می‌شود. سپس پاره‌خط CD که به اندازهٔ نصف AB است بر وسط آن یعنی نقطهٔ C عمود می‌شود. بدین ترتیب سه مثلث به‌دست می‌آید که هرسه قائم الزاویهٔ متساوی الساقین هستند. مثلثهای: ΔABD , ΔADC , ΔDCB

البته در ساخت وسیله پاره‌خطهای CD و AD و BD به‌صورت شیارهایی درمی‌آیند و پاره‌خطهای B′D′ ، A′B′ و A′D′ لبه‌های چوب یا مقوا و یا هر جنسی که وسیله از آن ساخته می‌شود، می‌باشند. در شکل یک بازوی متحرک (EF) بر روی وسیله مشاهده می‌شود. این بازوی متحرک به طریقی روی شیار CD وصل می‌شود که بتواند حرکت کند (درجهت بالا به پایین و به‌عکس). این بازو باید بر شیار CD به‌حالت دو خط عمود برهم قرار گیرد. این بازو در هر نقطه‌ای از شیار CD که قرار گیرد حالت خاصی ایجاد می‌کند.

به‌عنوان مثال درحالتی که در شکل دیده می‌شود: $OD = OM = ON$.

حال برای پیدا کردن مرکز دایره باید این وسیله را روی کاغذ گذاشته و طوری آن را جابه‌جا کنیم که نقطهٔ D (محل تقاطع سه شیار) و نیز جاهایی که بازوی متحرک دوشیار BD و AD را قطع می‌کند (در اینجا M و N) روی محیط قرار گیرند به این ترتیب چون قبلاً ذکر کردیم: $OD = OM = ON$، گویی سه شعاع دایره یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند، پس آن نقطه مرکز دایره است (نقطهٔ O). از بهترین جنسی که برای این وسیله می‌توان انتخاب کرد، جنس نقاله‌ها یا گونیاهای امروزی است.

طرح از: الهه تاجیک و مریم رفعتی. کلاس اول دبیرستان فرزانگان منطقهٔ ۱۴



معرفی کتاب

جبر پایه (۴)

مؤلف محمدهاشم رستمی
ناشر انتشارات مدرسه

بررسیهای صاحب نظران و تجربهٔ چندین ساله نشان داده است، دانش‌آموزانی دورهٔ دبیرستان را با موفقیت کامل پشت سر گذاشته، به‌راحتی در رشتهٔ دلخواه خود در دانشگاهها پذیرفته می‌شوند، که مطالب کتب درسی را به‌خوبی فرا گرفته، بر همهٔ نکات و ظرایف در ارتباط با هر مطلب درسی، احاطهٔ کامل پیدا کرده باشند. و این درصورتی امکان پذیر است که کتابهای کمک آموزشی لازم که تأمین‌کننده اهداف فوق است، در اختیار آنان قرار داشته باشد. کتاب جبر پایه (این مجلد برای دانش آموزان سال چهارم رشتهٔ علوم تجربی و ریاضی فیزیک و داوطلبان کنکور) به‌همین منظور تألیف گردیده است.

در این کتاب پس از ارائه هر قسمت از درس، مطالب تکمیلی مربوط به آن قسمت، و نمونه‌هایی از مسائل امتحانات نهایی سال چهارم رشتهٔ علوم تجربی و نمونه‌هایی از تستهای کنکورهای سراسری در ارتباط با آن مطلب حل شده است. پس از آن نیز تمرینهایی وجود دارد که شامل سؤالهای امتحانات نهایی سال چهارم رشتهٔ علوم تجربی استانها و سراسر کشور می‌باشد. با حل این تمرینها مطلب درسی به‌صورت کامل فرا گرفته می‌شود و در ذهن تثبیت می‌گردد.

کتاب جبر پایه (۴) علاوه بر مطالب درسی و تکمیلی شامل دو مجموعه زیر است:

۱ - مجموعهٔ کامل سؤالهای امتحانات نهایی سال چهارم رشتهٔ علوم تجربی استانها و سراسر کشور از سال ۱۳۵۷ تا سال ۱۳۷۰ که هر سؤال امتحانی در مبحث مربوط به خود آمده است.

۲ - بیش از ۸۳۰ تست با پاسخ (در فصل هفتم کتاب) که این تستها به ترتیب فصلهای کتاب تنظیم شده است تا دانش‌آموزان پس از حل تمرینهای مربوط به هر مطلب از هر فصل، تستهای مربوط به آن مطلب را حل نمایند. این تستها شامل تستهای کنکورهای سراسری وزارت علوم و آموزش عالی در رشتهٔ علوم تجربی از سال ۱۳۵۸ تا سال ۱۳۷۱ و سؤالهای کنکور رشته‌های پزشکی دانشگاه آزاد اسلامی ایران از سال ۱۳۶۴ تا سال ۱۳۷۰ می‌باشد.

بخشهای مختلف کتاب جبر پایه از جمله: مشتق، مقاطع مخروطی، انتگرال و ... برای دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی فیزیک نیز کاملاً قابل استفاده است.

این کتاب یار و مددکاری صدیق برای استادان و آموزندگان محترم ریاضی نیز می‌باشد.

کتاب جبر پایه به‌صورت خودآموز تألیف گردیده است تا هر دانش‌آموزی در هر نقطه‌ای از کشور بدون اینکه نیازمند شرکت در کلاسهای تقویتی و کنکور باشد، با مطالعهٔ آن بتواند آمادگی لازم برای موفقیت در اتمام دورهٔ دبیرستان و ورود به دانشگاه را پیدا نماید.

جنگ ریاضی دبیرستان البرز

به کوشش: غلامرضا یاسی‌پور، سیدحسین سید موسوی

جُنگ ریاضی مجموعه‌ای از مقاله‌ها و مسائل ریاضی و کامپیوتر به گونه‌ای است که دانش‌آموز دبیرستان را به کار آید و زمینهٔ مطالعه‌ای به دبیر ریاضی دبیرستان بدهد. تهیه کنندگان جُنگ بر این بوده‌اند که مطالب جنگ درعین ساده بودن بدیع باشد و بعید نباشد و به‌همین خاطر مطالبی را اختیار کرده‌اند که درعین چنان بودن و چنین نبودن با بیانی آسانگیر همراه باشد.

پیشگفتار جنگ به طرح سه سؤال اصلی ریاضیات که: سرچشمهٔ ریاضیات چیست؟ ریاضیات خود چیست؟ و به کجا می‌رود، پرداخته و در پاسخ به آنها با اختصار ساخته است.

مقالهٔ خلاصة الحساب آن در شرح زندگی شیخ بهائی و تشریح کتاب معروف او با همین نام است.

در مقالهٔ: با آرکها آشتی کنیم با مسائل و مشکلات مسائل مربوط به آرکها مواجه می‌شویم و گرهی چند از آنها را با دست تدبیر باز می‌کنیم.

در مقالهٔ: میزگردی با دو ریاضی‌دان کشور به بحث دربارهٔ ریاضیات ترکیبیاتی و موارد کاربرد آن، نیز آغاز و انجام نسبی و آینده و اهمیّت آن می‌نشینیم.

مقالهٔ: بررسی معادلهٔ $|x-a| + |x-b| = b$ به بررسی این معادله با استفاده از مفهوم هندسی قدر مطلق عددهای حقیقی می‌پردازد، و مقالهٔ: آیا آموزش با کامپیوتر مضر است؟ که از آنِ پ. ر. هالموس است با برنامه‌های خوب و پاسخهای بی‌موقع می‌سازد.

مقالهٔ: معرفی یک فارغ‌التحصیل برجستهٔ البرز در معرفی دکتر لطفعلی عسکری زاده ریاضی‌دان ایرانی و واضع منطق فازی است.

مقاله‌های دیگر جُنگ عبارتند از: روش کلی محاسبهٔ انتگرال معین توابع وارون، الگوریتم محاسبهٔ بزرگترین مقسوم علیه مشترک بدون انجام عمل تقسیم، معضل کنکور و پی‌آمدهای آن، مقدمه‌ای بر رمزشناسی، و معرفی کتاب.

جنگ با طرح مسائلی برای دانش‌آموزان اول تا چهارم دبیرستان پایان می‌یابد.

فرمولهای ریاضیات: جبر، حساب، هندسه، آنالیز ریاضی و ریاضیات جدید
ترجمه و تنظیم از: غلامرضا یاسی‌پور؛ ناشر انتشارات مدبر.

در این کتاب با فرمولهای جبر، حساب، دنباله‌ها، مشتقات، انتگرالها، انتگرالهای خطی، انتگرالهای سطحی، سریها و حاصل ضربها، سری اعداد، سری توابع، حاصل ضربهای نامتناهی، اعداد و توابع مختلط، توابع متعالی، توابع هذلولوی، تابع گاما، توابع بسل، توابع ابر هندسی هم جریان، منطق ریاضی، مجموعه‌ها، گروه‌ها، حلقه، میدان، رابطه، تابع، ماتریس، نظریهٔ اعداد، آمار، احتمال و ... آشنا می‌شوید.

در مقدمهٔ کتاب چنین آمده که: اگر ریاضیات را آموختن اندیشیدن نه آموختن اندیشه‌ها بدانیم و اگر ریاضی‌دان را خلّاق نه حافظ فرمول بخوانیم دراین صورت، دیگر به حفظ فرمولها و دستورهای ریاضی رغبتی نشان نخواهیم داد و درنتیجه به جُنگها و مراجعی که حاوی این دستورها باشند نیازمند می‌شویم و دیگر ذهن خود را برای دربر داشتن آنها گران بار نخواهیم کرد.

فرمولهای کتاب، همان‌گونه که مؤلفین محترم آن نیز خاطر نشان کرده‌اند، از میان فرمولهای معروف و غالباً در ریاضیات به کار رفته انتخاب و برای دانش‌آموزان دبیرستان، دانشجویان دانشگاه، مهندسان و دانشمندان درنظر گرفته شده‌اند و خوانندهٔ کتاب می‌تواند برای توضیح بیشتر آنها به کتابهای تخصصی‌تر مراجعه کند.

مجموعهٔ مقاله‌ها و مسائل ریاضی
جلد اول: تنظیم از غلامرضا یاسی‌پور
ناشر انتشارات مدبر

در جلد اول مجموعه با مقاله‌های: مصاحبه با استاد پرویز شهریاری، توابع و نمودارهای آن، معرفی کتاب «من ریاضی‌دانم» هندسهٔ فضایی، هندسهٔ تصویری، مثلثات، ماتریسها، منطق و زبان، نظریهٔ گرافها، نظریهٔ بازیها، فرهنگ ریاضیات، ابن هیثم ریاضی‌دان اسلامی، نیوتن و اندیشهٔ ریاضی زمان ما، فرهنگ ریاضیات، مسائل ریاضی، و نکته‌های ریاضی برمی‌خوریم و با آثار و نوشته‌های کسانی چون: موسی آذرنوش، پرویز شهریاری، محمد هاشم رستمی، احمد قندهاری، حمید رضا امیری، سیدحسین سید موسوی، محمد رضا هاشمی موسوی، نغمهٔ شریک زاده، و غلامرضا یاسی‌پور آشنا می‌شویم.

مجموعه هم به طرح مطالب تازهٔ ریاضیات می‌پردازد و هم مطالب قدیمیتر آن را با قالبی نو بیان می‌کند. از تاریخ ریاضیات و کاربرد آن سخن می‌گوید و وسیلهٔ آشنایی خواننده را با ریاضی‌دانهای معاصر فراهم می‌آورد.

مجموعه نشریه‌ای است برای دانش‌آموز دبیرستان و دانشجوی دانشگاه، که علاوه بر آن‌که می‌تواند مورد استفادهٔ معلم و دبیر ریاضی قرار گیرد به کار تمام کسانی که به نحوی از انحا با ریاضیات تعلیمی سروکار دارند نیز می‌آید.

با داشتن مجلدات مجموعه مجموعه‌ای غنی از مقاله‌ها و مسائل ریاضی در اختیار خواهید داشت.

آشنایی با ریاضیات جدید
محمد رجبی طرخورانی، سیدحسین سید موسوی
ناشر مبتکران

مطالب کتاب ریاضیات جدید سال سوم ریاضی فیزیک را دربر می‌گیرد و چهار فصل آن عبارتند از: فضاهای برداری، آنالیز ترکیبی، احتمال، و جبر بول و کاربردی از آن.

کتاب، بنا به روایتی که در مقدمهٔ آن مذکور افتاده، به‌گونه‌ای تهیه شده که نه‌تنها دانش‌آموزان برای تعمیق مطالب درسی آن از آن بهره برند، بلکه دبیران نیز مطالب بیشتری برای آموزش موضوعات مورد بحث کتاب درسی در اختیار داشته باشند.

اغلب مسائل شناخته شدهٔ آنالیز ترکیبی، فضای برداری، جبر بول و احتمال مطرح شده‌اند و علاوه بر آن تعدادی مسأله نیز به‌عنوان تمرین برای خواننده درنظر گرفته شده است.

در قسمت توصیه‌های یک استاد آنالیز ریاضی چنین آمده که اغلب دانش‌آموزان مسألهٔ «شمارش» را تا حدی به این دلیل مشکل می‌یابند که در سایر دروس ریاضیات مقدماتی، به‌انواع مسائل کلیشه‌ای از قبیل «معادلهٔ $x^2 - 5x - 6 = 0$ را حل کنید»، «از xsinx مشتق بگیرید» و غیره عادت کرده‌اند. مسائلی چنین را می‌توان با به خاطر سپردن قواعدی معین و بدون هیچ تفکری مستقل حل کرد، و آنگاه توضیح توصیه‌های لازم آورده شده است.

یکی از جنبه‌های مهم کتاب جنبهٔ خودآموز بودن آن است.

کاربردهای بی‌نهایت لیوزیپین
منوچهر میثاقیان   مرکز نشر دانشگاهی

خوانندهٔ این کتاب ممکن است دانش‌آموزی تازه آشنا با ریاضیات یا فردی باشد که بیشتر دانسته‌های خود را به کناری نهاده و به بوتهٔ فراموشی سپرده است. از سوی دیگر، کتاب، جز فصل اولش، جنبهٔ ریاضی دارد، یعنی عرضهٔ دقیق مطالبی است تاحدی انتزاعی. بنابراین، خواننده‌ای که موضوع کتاب را جالب می‌یابد، باید آمادگی داشته باشد تا کمی فکرش را به کار اندازد و با فکر کردن روی بعضی مطالب، گاهی بعضی از مسائل را حل کند.

کتاب براساس گفته‌ای از داوید هیلبرت که ریاضیات را به مثابهٔ «دانش بی‌نهایتها» تعریف می‌کند نگاشته شده است. قضایای جالب ریاضی با نتایج جالب سایر حوزه‌های دانش تفاوت دارند، زیراگذشته از زیبایی و شگفت‌انگیزی مطالبی که بیان می‌کنند «سیمایی جاودانه» دارند و همواره جزئی از رشتهٔ نامتناهی نتایجند. هیلبرت در مورد بی‌نهایت بر این است که این فکر در همهٔ اعصار، ژرف‌ترین تحرک را در اندیشهٔ آدمی به وجود آورده است و کار کانتور را وارد کردن بشر به بهشت بی‌نهایت توصیف می‌کند.

کتاب گذشته از پیشگفتار مؤلف و فصل ۱ آن که در مورد بی‌نهایتهای متداول و بی‌نهایتهای ریاضی است پنج فصل دیگر دارد که به‌ترتیب عبارتند از: از اعداد طبیعی تا $\sqrt{2}$، از $\sqrt{2}$ تا ترامتناهی، زیگزاگها: به‌سوی حد اگر حد وجود داشته باشد،

مستطیل زرین جاودان، ترسیمها و برهانها. در آخر آن نیز حل مسأله‌ها و کتابنامه آمده است.

کتاب برای دانش‌آموزان دبیرستان و دبیران ریاضی و فیزیک و اشخاص علاقه‌مند به ریاضیات مفید است و خواندنش را بخصوص به این افراد توصیه می‌کنیم.

نخستین گام در جبر و آنالیز

تألیف: حسین هاشمی، محمدرضا پوررنگی، رامین منوری

ناشر انتشارات علوی

در نظام آموزشی مطلوب علاوه بر برنامهٔ مصوب که حداقلِ آموزش فراگیر را مشخص می‌کند، آموزشهای غیررسمی نیز که تکمیل کنندهٔ آموزش رسمی است اهمیت ویژه‌ای دارد زیرا از یک سو امکان تقویت پایهٔ علمی دانش‌آموزان را در هر گروهی که باشند فراهم می‌کند و از سوی دیگر امکان رشد و شکوفایی استعدادهای برجسته را فراهم می‌سازد. از جمله لوازم اساسی حرکت در این مسیر نشر کتابهای آموزشی ارزنده است؛ کتاب نخستین گام در جبر و آنالیز از جملهٔ این‌گونه کتابهاست.

در این کتاب کلیهٔ مطالب اساسی دروس جبر و آنالیز دورهٔ دبیرستان به‌شیوه‌ای ساده و دقیق بیان شده است. توضیحات و مثالها نیز به گونه‌ای است که خواننده درکی صحیح از مطالب پیدا می‌کند. در این اثر مؤلفان بیشتر به ایده بخشیدن در درک مفاهیم علاقه نشان داده‌اند و تلاش کرده‌اند تا مطالب از جنبه شهودی خوبی برخوردار باشد، و نیز سعی نموده‌اند تا روشهای گوناگون حل مسائل به خواننده آموزش داده شود. به نظر می‌رسد اعتقاد مؤلفان بر این بوده است که صرفِ ارائه دقیق مطالب یا حل مسائل خوب جهت فراگیری کفایت نمی‌کند، لذا با تلفیقی زیبا از هر دو جنبه، مطالعهٔ کتاب را هم آموزنده‌تر و هم جذابتر کرده‌اند.

با این تفاصیل می‌توان گفت این مجموعه یکی از کتابهای سودمند برای دانش آموزان سالهای آخر دبیرستان است که می‌توان از آن به‌عنوان کتابی مکمل کتابهای درسی استفاده کرد. داوطلبان کنکور نیز می‌توانند از آن بهره‌های فراوان برند.

تفریح اندیشه ۳



مسأله ـ ۷۳ مرغ در ۷۳ روز ۷۳ دوجین تخم می‌کنند و نیز می‌دانیم ۳۷ مرغ در ۳۷ روز ۳۷ کیلو دانه می‌خورند. برای به‌دست آوردن یک دوجین تخم مرغ چند کیلو دانه لازم است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

جواب نامه‌ها

آقای رضا معنوی دانش‌آموز سال سوم ریاضی (گرگان)

ضمن تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «مفاهیم جبرکلیدی» به عرض می‌رسانیم که معیار یک مقالهٔ خوب و قابل چاپ ازنظر هیأت تحریریهٔ مجلهٔ برهان تازگی و کامل بودن مطالب آن است. و قصد تکرار و یا برداشت مستقیم از کتابهای درسی و دیگر کتابهای موجود نیست. امید است با در نظر گرفتن معیارهای فوق مقاله‌های بعدی خود را ارائه دهید. موفقیت و پیروزی هرچه بیشتر شما را از خداوند منان خواستاریم.

خانم معصومه آهنگران فراهانی دانش‌آموز سال دوم ریاضی (اراک)

با تشکر از دو مسأله ارسالی شما درصورت لزوم در جای مناسب از آنان استفاده خواهد شد.

آقای سید مسعود جلالی کاشانی دانش آموز سال دوم ریاضی (کاشان)

با تشکر از مسائل ارسالی شما امید است در شماره‌های آیندهٔ مجله از آنان استفاده کنیم.

آقای مهدی شاطری (اصفهان)

با تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که ایراد شما در رابطه با مقالهٔ مندرج در شمارهٔ ۴ مجله به جا است ولی این طریق نوشتن فقط به خاطر رعایت کردن سبک کتابهای درسی فعلی بوده است.

آقای یوسف محمدی پورنوین دانش‌آموز سال دوم ریاضی (تبریز)

با تشکر از تستهای ارسالی شما درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای علی کاویانی دانش‌آموز سال سوم ریاضی (گرگان)

از مقالهٔ ارسالی شما بسیار سپاسگزاریم. امید است برای شماره‌های آیندهٔ مجله از آن استفاده کنیم.

آقای محمد صالح نانبیان دانش آموز سال دوم دبیرستان (مشهد)

از مقاله و مسائل ارسالی شما متشکریم. ولی باید به‌عرض برسانیم که مسائل ارسالی باید با حل کامل ارائه شود و در غیر این‌صورت امکان درج آنان نیست. همچنین در رابطه با بخش جدید در باغ تجربه‌ها باید بگوییم که این بخش می تواند لااقل برای برخی از خوانندگان انگیزه‌ها و جهشهایی را برای نیل به پژوهش و تحقیق ایجاد کند که امید است بیان تجربه‌های معلمین و استادان و دانش‌آموزان موفق رهگشا و راهنمایی برای خوانندگان عزیز باشد. همچنین متذکر می‌شویم که مجلهٔ ریاضی برهان یک مجلهٔ تعلیمی و آموزشی در جنبه‌های مختلف ریاضیات دبیرستانی است.

آقای حسن عطاردی دانش‌آموز سال سوم تجربی (گناباد)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما باید به عرض برسانیم که مسائل ارسال شده باید همراه با حل کامل ارائه شوند تا درصورت مناسب بودن آنان چه ازنظر طرح و چه ازنظر حل، در یکی از شماره‌های آیندهٔ مجله به نام خودتان به چاپ برسد.

آقای مهرداد ناصرنژاد (آمل)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که مسائل باید همراه با حل ارائه شوند. و ضرورتاً باید منبع و یا مأخذ آن نیز ذکر شود.

آقای جمال معروفی دانش آموز سال دوم ریاضی (آذربایجان غربی)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما در رابطه با «تثلیث زاویه با استفاده از خط کش و پرگار» به‌عرض می‌رسانیم که این مسأله و مسائلی نظیر آن مانند تربیع دایره و تضعیف مکعب ازنظر جواب ممتنع می‌باشند و امتناع آن را نیز می‌توانید در اکثر کتب معتبر ریاضی مشاهده کنید. البته برای حل تقریبی هریک از این گونه مسائل روشهای بسیاری موجود است که ازنظر عملی بسیار دقیق و خطای آن قابل اغماض است. بنابراین با توجه به اثبات امتناع هر یک از مسائل فوق نتیجه می‌شود که هر روشی که در رابطه با حل این گونه مسائل ارائه شود روش تقریبی است. درهر صورت تلاش شما تحسین آمیز است و موفقیت شما باعث شادمانی می‌باشد.

آقای امیر پاشامیربهاء دانش آموز سال دوم ریاضی (تهران)

با تشکر از مسأله ارسالی شما، امید است که در شماره‌های آیندهٔ مجله در قسمت مسائل از آن استفاده کنیم.

آقای عبدالرضا حیدری دانش آموز سال چهارم ریاضی (یزد)

با تشکر از مسائل ارسالی شما، امید است از آن در شماره‌های بعدی مجله استفاده شود.

آقای حسین اصلانی دانش آموز سال دوم (تبریز)

با عرض سلام و تشکر متقابل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری ارائه دهید تا مورد استفادهٔ دانش آموزان قرار گیرد. با این حال درصورت امکان از مسائل شما استفاده خواهد شد.

آقای وحید فرشاد دانش آموز سال چهارم ریاضی (تبریز)

با تشکر از شما برای حل مسائل مسابقه‌ای و طرح و حل چند مسأله، به عرض می‌رسانیم که پس از بررسی لازم، از مسائل ارسالی شما درصورت لزوم استفاده خواهد شد.

آقای محمد رضا پویا دانش آموز سال سوم ریاضی (مشهد)

ضمن تشکر از دو مسائل ارسالی شما باید به عرض برسانیم که سعی کنید مسائلی را که ارائه می‌دهید بیشتر جنبهٔ طراحی و یا مفهومی داشته باشند و یا از منابع معتبر استخراج شده باشند تا مورد استفادهٔ دانش آموزان دبیرستان قرار گیرد. ضمناً مسأله‌یی را که برای آن درخواست راهنمایی کرده بودید یک معادله نیست و یک عبارت جبری است، زیرا فاقد تساوی است. امید است که در طرح و عنوان مسائل بیشتر دقت شود.

خانم نسرین محمد زاده دانش آموز سال سوم ریاضی (بابل)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما باید به عرض برسانیم که سعی کنید مسائلی راکه طرح و یا از منبعی برداشت می‌کنید در زمینهٔ ریاضیات دبیرستانی باشد و حتماً پاسخ مسائل را به‌طور تشریحی ارائه دهید.

آقای محمد قدرتی دانش آموز سال دوم ریاضی (بجنورد)

ضمن تشکر از مسأله ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که دستگاه‌هایی به شکل عمومی:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = m \\ x + \sqrt{y} = n \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \begin{cases} x^2 + y = m \\ x + y^2 = n \end{cases}$$

منسوب به خیام است ولی در اصل از شیخ بهایی بوده است.

آقای مزدک نعمتیان (تهران)

ضمن عرض سلام و تشکر از توجه شما باید به عرض برسانیم که مجلهٔ ریاضی برهان همیشه از مقاله‌ها و مسائل و مطالب جدید و متنوع در سطح دانش آموزان دبیرستان استقبال می‌کند.

آقای مهدی احمدی اصل (تبریز)

با تشکر از شما برای ارسال دو مسأله با حل، امید است از آنان در آینده استفاده کنیم.

آقای کاظم ابام دانش‌آموز سال دوم ریاضی (بوکان)

با تشکر از مسألهٔ ارسالی شما، درصورت لزوم از آن استفاده خواهد شد.

آقای مهدی وحیدی دانش‌آموز سال دوم ریاضی (تهران)

با تشکر از مسألهٔ ارسالی شما امید است که در شماره‌های آیندهٔ مجله از آن استفاده کنیم.

آقای جعفر نوّابی دانش‌آموز سال اول (بروجرد)

ضمن تشکر از مقالهٔ شما در رابطه با اثبات هندسی اتحادهای جبری، به‌اطلاع می‌رسانیم که متأسفانه فقط اثبات هندسی اتحاد مربع قابل قبول است که این نوع اثبات را می‌توان در برخی از کتب خصوصاً کتب تاریخی مشاهده کرد. ضمن آرزوی موفقیت برای شما در انتظار مقاله‌های بعدی نیز هستیم.

خانم لیدا حامد سنگری دانش‌آموز سال دوم ریاضی (اصفهان)

ضمن عرض سلام از مسألهٔ ارسالی شما تشکر می‌کنیم. امید است از آن درآینده استفاده شود. همچنین متذکر می‌شویم که عموماً اگر بخواهیم از مسأله‌یی ارسالی استفاده کنیم، حتماً نام نویسندهٔ آن را قید خواهیم کرد.

آقای علی محمدی مقدم

ضمن تشکر از همکاری شما با مجلهٔ ریاضی برهان تقاضا می‌شود که مطالب ارسالی را به‌صورتی کاملتر همراه با شکل، یا به‌صورت تست تنظیم و مدون فرمایید تا برای درج در مجله مورد استفاده قرار گیرد.

آقای علی بهرامی زاده دانش‌آموز سال دوم ریاضی (نیشابور)

ضمن عرض تشکر از ارسال دو مسألهٔ حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم که درصورت لزوم از مسائل شما استفاده خواهد شد.

آقای عباس زوّار دانش‌آموز سال سوم ریاضی (تکاب)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که هدف مجلهٔ برهان آموزش و تعلیم ریاضیات دبیرستانی است. در هر صورت اگر در به ثمر رساندن این هدف موفق شویم امید است که جایی برای آموزش کامپیوتر و نظایر آن باز شود.

آقای هادی جمشیدی کارگر (بجنورد)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که پاسخ گویی به سؤالهای ریاضی دانش‌آموزان جزو هدفهای مجلهٔ ریاضی برهان نیست و با توجه به حجم کاری روزافزون مجله امکان آن نیز بعید به‌نظر می‌رسد. به‌هرحال برای راهنمایی شما می‌توانیم کتاب تئوری اعداد دکتر غلامحسین مصاحب و یا تئوری اعداد دکتر نارنجانی و یا تئوری اعداد سید حسین سید موسوی را پیشنهاد کنیم.

آقای سیدجواد حسینی (تهران)

ضمن تشکر و قدردانی از زحمات بی‌دریغ شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «چگونگی تدریس مبحث مشتق» به عرض می‌رسانیم که اولاً: لازمهٔ تدریس هر مبحث ریاضی در ابتدا آموزش مفاهیم بنیادی و قراردادها و پیش نیازهای آن است که پس از القای این مطالب می‌توان وارد عملیات مورد لزوم برای آن مبحث شد. به‌عنوان مثال اگر مبحث مورد نظر مشتق (یا رشد لحظه‌ای) باشد ابتدا باید به انگیزه‌های تاریخی آن اشاره‌ای شود و سپس وارد مفاهیم بنیادی آن شد و پس از آن باید علائم و قراردادها و فرمولهای آن را عنوان کرد. و درصورت لزوم به پیش نیاز آن که مبحث حدّ است از طریقی مثلاً دنباله‌ها اشاره‌ای کرد. و در آخر اعمال مربوط به آن و نتایج و کاربردهای آن را ارائه داد. در این جا با توجه به موارد اخیر نتیجه می‌شود که مقالهٔ شما فقط شامل قسمت آخر یعنی عملیات مشتق است که کتاب درسی از این نظر تقریباً کامل است و مشکل اساسی

دانش‌آموزان نمی‌باشد. و مشکل آنان بیشتر در انگیزه و فهم مشتق می‌باشد، که اگر در این زمینه مطالب جدید و متنوعی ارائه شود بسیار مورد تقدیر و توجه قرار خواهد گرفت. ضمن آرزوی موفقیت بیشتر و روزافزون در انتظار مقاله‌های بعدی شما هستیم.

آقای مسعود ساروی (گروه ریاضی دانشگاه پیام نور ساری)

ضمن تقدیر از ارسال مقالهٔ شما تحت عنوان «محاسبهٔ $\sum_{r=1}^{n} r^k$ برای هر K صحیح و مثبت» به عرض می‌رسانیم که این مقاله در نوزدهمین کنفرانس ریاضی که در دانشگاه گیلان برگزار شده بود جزو مقاله‌های اختصاصی ارائه شد و به نام ارائه دهندهٔ آن نیز در شمارهٔ مسلسل ۱۶ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی صفحهٔ ۵۶ به چاپ رسید که در این جا نتیجه نهایی آن مقاله که یک دترمینان مرتبهٔ nام است را جهت اطلاع عموم می‌آوریم:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

$$S_k = \sum_{r=1}^{n} r^k$$

$$S_k = \frac{n+1}{(k+1)!}$$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & (n+1)-1 \\
3 & 3 & 0 & 0 & 0 \dots & (n+1)^2-1 \\
4 & 6 & 4 & 0 & 0 \dots & (n+1)^3-1 \\
5 & 10 & 10 & 5 & 0 \dots & (n+1)^4-1 \\
\dots & & & & & \dots \\
K+1 & \dots & & & & (n+1)^k-1
\end{array}$$

تفریح اندیشه ۴

مربع سحرآمیز زیر به‌نظر ساده می‌رسد، اما در واقع مربع سحرآمیزی بسیار غیرمعمول است. چون عددهای آن را به‌طور افقی، قائم، یا قطری جمع کنیم نتیجه: ۲۶۴ است.

18	99	86	61
66	81	98	19
91	16	69	88
89	68	11	96

در مربع سحرآمیز ۴ در ۴ای چون این مربع، می‌توان این انتظار را نیز داشت که چهار مربع گوشه‌ای، چهار مربع داخلی، و هریک از چهار مربع نیز به‌همان مجموع سحرآمیز برسند. تا این جا چیز شگفت‌انگیزی موجود نیست.

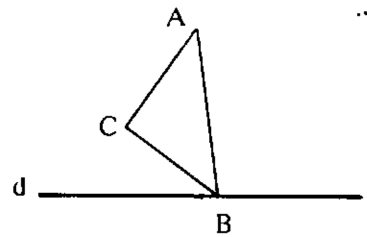
دراین‌صورت، چه چیز بخصوص سحرآمیزی در مورد این مربع موجود است؟ این دقیقاً همان چیزی است که باید آن را بیابید.

جواب در صفحهٔ ۹۶

مسائل مسابقه‌ای برهان ۷

● محمد هاشم رستمی

۱ ـ نقطهٔ ثابت A و خط d که از نقطه A نمی‌گذرد، مفروض‌اند. مکان هندسی رأس زاویهٔ قائمه C از مثلث متساوی‌الساقین ABC را تعیین کنید که وترش AB و رأس B از آن روی خط ثابت d تغییر مکان می‌دهد.



۲ ـ نقاط (۱+ ، ۱ـ ، ۰) A و (۰ و ۱ـ و ۲) B و صفحه $P: x - 2y - 2z - 3 = 0$ مفروض‌اند.

الف ـ مشخص سازید که نقاط A و B در یک طرف صفحهٔ P واقع‌اند یا در دوطرف آن.

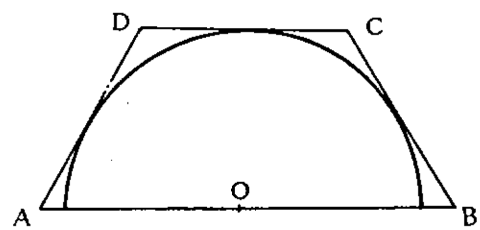
ب ـ نقطه‌ای روی صفحهٔ P بیابید که تفاضل فاصله‌اش از نقاط A و B بیشترین مقدار ممکن باشد.

ج ـ نقطه‌ای روی صفحهٔ P تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B کمترین مقدار ممکن باشد.

مسئله‌ای از المپیادهای بین‌المللی ریاضی

مرکز دایره‌ای بر ضلع AB از چهار ضلعی محاطی ABCD قرار دارد. سه ضلع دیگر چهار ضلعی بر این دایره مماسند.

ثابت کنید که: $AD + BC = AB$



بیست و ششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۵

ادب ریاضی

منطق ریاضیِ پئانو، کلیهٔ قضیه‌های درعین حال پیچیدهٔ ریاضیات را، به کمک کمترین تعداد ممکن علامتهای قراردادی نمایش می‌دهد، که البته ترجمهٔ آنها به زبان معمولی خسته کننده خواهد بود، اما این عمل به معنای یک نوع ساده نویسی و تلخیص یا یک روش تندنویسی نیست، بلکه امکان می‌دهد تا قانونهای مربوط به این علامتها و تبدیل جمله‌ها، مورد بررسی قرار گیرند.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه، پرویز شهریاری

قضیهٔ دوبواریموند براین است که: «اگر رشتهٔ بی‌نهایتی از تابعهای صعودی داشته باشیم، همیشه یک تابع صعودی وجود دارد که از هریک از این تابعها بزرگتر است»، و به این ترتیب لزوم اعداد ترانسفینی یا ترامتناهی را آشکار کرده است، چه به این ترتیب مشخص می‌شود که رشتهٔ اعداد صحیح برای شمردن رشتهٔ تابعهای فوق کافی نیست و به عبارت دیگر مجموعهٔ تابعها، مجموعه‌ای قابل شمارش نمی‌باشد.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه، پرویز شهریاری

حل مسائل مسابقه‌ای برهان(۵)

۱ ـ بدون بسط و با استفاده از خواص دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{vmatrix}$$

$$= 0 + x \times (-x) \times z \times (-z) = x^2z^2$$

(در ماتریس اوّلی چون دو سطر ماتریس با هم برابر است پس مقدار دترمینان آن صفر است.)

[راه حل از مهرداد کاظمیان کلاس دوّم ریاضی (اصفهان)]

۲ ـ تابعی چند ضابطه‌ای چنان تعریف کنید که نمودار حاصل از آن کلمهٔ «برهان» را در صفحهٔ مختصات دکارتی رسم کند.

راه حل اول از: محسن عطاردی از شهرستان گناباد

$$f(x)=\begin{cases} y=2 & \text{اگر } x=12 ,\ 8\le x\le 10 ,\ 1\le x\le 4 \\ y=4 & \text{اگر } 10\le x\le 14 ,\ 5\le x\le 9 ,\ x=2.5 \\ y=5 & \text{اگر } 7\le x\le 9 \\ x=14 & \text{اگر } 4\le y\le 5 \\ x=10 & \text{اگر } 2\le y\le 5 \\ x=9 & \text{اگر } 4\le y\le 5 \\ x=8 & \text{اگر } 4\le y\le 5 \\ x=7 & \text{اگر } 4\le y\le 5 \\ x=5 & \text{اگر } 4\le y\le 10 \\ x=4 & \text{اگر } 2\le y\le 4 \\ x=1 & \text{اگر } 2\le y\le 4 \end{cases}$$

راه حل دوم از: شهریار لطفی، سال چهارم ریاضی (شهرستان خوی)

$$\begin{cases} \dfrac{5x-68}{2x-27} & 11.5\le x<13.5 \\ -\sqrt{\dfrac{9}{4}-(x-10)^2}+3 & 10\le x\le 11.5 \\ (y-4)^2=-2\left(x-\dfrac{19}{2}\right) & 7\le x\le 9.5 \\ 4\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+(y-4)^2=1 & 7\le x\le 8 \\ \dfrac{5x-30}{2x-9} & 4.5\le x\le 7 \\ -\sqrt{\dfrac{9}{4}-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2}+3 & 1\le x\le 4 \\ 1.5 & x=12.5 \\ 2.5 & x=2.5 \end{cases}$$

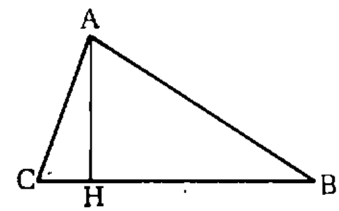
مسائل برای حل

● هندسه: محمد هاشم رستمی
● ریاضیات جدید: حمید رضا امیری
● جبر و مثلثات: احمد قندهاری و محمدرضا هاشمی

مسائل ریاضیات سال اول ریاضی

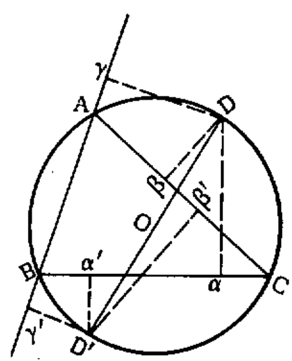
۱ـ درمثلث ABC، اگر AB>AC و AH ارتفاع نظیر رأس A باشد، ثابت کنید که:

$$H\hat{A}B > H\hat{A}C$$



۲ـ ثابت کنید که خطوط سمسون مربوط به دوسر هر قطر از دایرهٔ محیطی یك مثلث، برهم عمودند.

تعریف خط سمسون ـ تصاویر هر نقطه از دایرهٔ محیطی یك مثلث روی اضلاع یا امتداد اضلاع آن مثلث سه نقطه‌اند واقع بریك خط راست، که این خط راست را خط سمسون نظیر آن نقطه می‌نامند.



۳ـ هر گاه گزاره‌های

$(\sim r \vee \sim p)$ و $(q \Longrightarrow r)$ و $(p \Longrightarrow q)$

دارای ارزش درست باشند، ارزش گزارهٔ

$$r \Longleftrightarrow (\sim r \vee p) \Longrightarrow q$$

را تعیین کنید.

۴ـ برای ۳ مجموعهٔ دلخواه A و B و C ثابت کنید:

$$(C \cap [(A-B) \cup B]) \cup (A \cup B) = (A \cup B)$$

۵ـ هر گاه:

$$A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$$

اولاً ـ یك افراز برای مجموعهٔ A بنویسید که دوعضوی باشد ثانیاً ـ اگر این مجموعه ۲۴ زیر مجموعه از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ B کمتر داشته باشد معین کنید B چند عضوی است.

۶ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u} = \frac{u}{s} = \frac{s}{t} \\ x = 8u \\ x+y+z+u+s+t = 15\frac{3}{4} \end{cases}$$

(بهروز بیرامی دانش‌آموز رشته ریاضی شهرستان نقده)

۷ـ معادله:

$$(x-1)m^2+(x+1)m+(6-2x)=0$$

را حل و بحث کنید.

۸ـ دستگاه مقابل را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ y+z+t=9 \\ z+t+x=8 \\ t+x+y=7 \end{cases}$$

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ در مثلث ABC ،

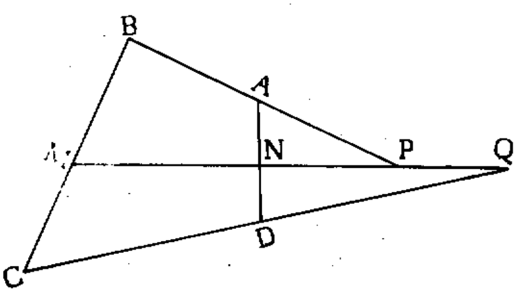
$AC=15cm$ و $AB=14cm$ ، $BC=13cm$

است. دایره‌ای که مرکز آن روی ضلع AB واقع است در نقاط D و E بر اضلاع AC و BC مماس می‌باشد. مساحت قطاع ODE را به دست آورید.

فرستنده: آقای محمدعلی سلحشور دبیر ریاضی از اصفهان

۲ـ چهارضلعی ABCD مفروض است. نقاط M و N به ترتیب وسط ضلعهای مقابل BC و DA می‌باشند. خط راست MN امتداد ضلعهای AB و CD را به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QD}{QC}$$



۳ـ هرگاه رابطهٔ R روی مجموعهٔ A یک رابطهٔ هم‌ارزی باشد ثابت کنید R^{-1} نیز یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۴ـ خاصیت یک به یکی و پوشایی‌را برای تابع با ضابطهٔ زیر بررسی کنید:

$$f: IR^2 \to IR^2$$

$$f(x,y)=\left(\frac{2x-6}{x+2}, \frac{y+4}{2y-1}\right)$$

۵ـ در گروه $(G,*)$ هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x,y \in G, \quad (x*y)^2=x^2*y^2$$

ثابت کنید $(G,*)$ آبلی است.

۶ـ به روش برداری ثابت کنید در هرمتوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

۷ـ نقاط $A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}6\\0\end{vmatrix}$ دو رأس مثلث قائم‌الزاویه ABC می‌باشد که مساحت آن (۱۲) است اگر **AB یک ضلع** زاویه‌قائمه باشد، مختصات رأس(C) را بیابید. (چهار جواب)

۸ـ نامعادله مقابل را حل کنید:

$$2x^3-7x^2+3x<0$$

۹ـ اگر $tg\,x=2$ باشد حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$A=\frac{45(\sin^5 x+\cos^5 x+\sin x)}{\sin^3 x+\cos^3 x}$$

(جواد محمدپور دانش‌آموز رشته ریاضی لنگرود)

۱۰ـ اگر $\cos x=\frac{b}{a}$ و $a\neq 0$ و x حاده باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{2}{\sin x}$$

(اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشتهٔ تجربی آمل)

۱۱ــ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$(\sin x+۱)(\sin x+۶)(\sin x+۲)(\sin x-۳)=-۸۴$$

(محمد قدرتی دانش‌آموز رشته ریاضی بجنورد)

مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ــ نقطهٔ برخورد AA' و BB' و CC' ، نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC را O می‌نامیم.

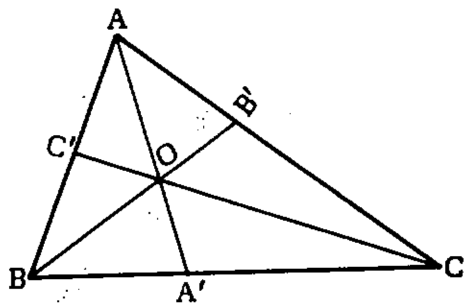
اولاً ــ اندازهٔ پاره‌خطهای OA و OB و OC را برحسب اندازهٔ اضلاع مثلث به دست آورید.

ثانیاً ــ ثابت کنید که:

$$\frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=۲$$

ثالثاً ــ ثابت کنید که:

$$OA\cdot OB\cdot OC=۴Rr^۲$$



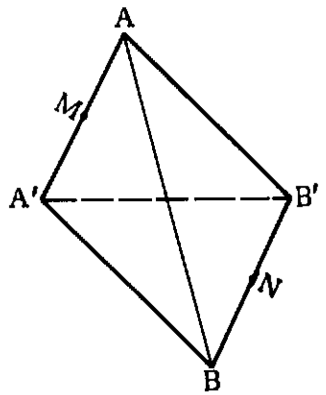
۲ــ چهار وجهی $AA'BB'$ را که در آن

$$AB=A'B'=AB'=A'B$$

است، درنظر می‌گیریم.

الف ــ ثابت کنید که AA' و BB' برهم عمودند.

ب ــ ثابت کنید که پاره خط MN که وسطهای پاره‌خطهای AA' و BB' را به هم‌وصل می‌کند عمود مشترک این دو پاره‌خط است.



۳ــ هرگاه بردارهای v_1 ، v_2 ، ... و v_n از فضای برداری v مستقل‌خطی باشند ثابت کنید هرزیر مجموعه از این مجموعه بردارها نیز مستقل‌خطی است.

۴ــ هرگاه داشته باشیم:

$$T=xy+xz+x'yz$$

اولاً ــ جدول ارزشی را برای عبارت بولی T معین کنید.

ثانیاً ــ آن را ساده کرده و توسط عضوهای منطقی رسم کنید.

۵ــ درجعبه A، ۴ مهره قرمز و ۲ مهره سبز ودرجعبهٔ B، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره سبز موجود است. ازهرجعبه ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال آنکه : الف) هر ۴ مهرهٔ خارج‌شده همرنگ باشند، ب) ۳ مهره از ۴ مهرهٔ خارج شده قرمز باشند.

۶ــ درتابع باضابطهٔ $y=(x-۱)(x^۲+mx+۲)$، m راچنان‌بیابید تاعرض ماکزیمم یا عرض مینیمم تابع برابر صفر باشد.

۷ــ به‌ازای مقادیرمختلف m درتعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^۳-۳x+۱-m=۰$ به کمک رسم‌منحنی بحث کنید.

۸ــ ثابت کنید:

$$A=\cos\frac{\pi}{۱۱}+\cos\frac{۳\pi}{۱۱}+\cos\frac{۵\pi}{۱۱}+\cos\frac{۷\pi}{۱۱}+\cos\frac{۹\pi}{۱۱}=\frac{۱}{۲}$$

(جواد محمدپور دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی لنگرود)

۹ـ معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x=(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3$

(ادریس عبادی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی مشهد)

ب) $\cos 2(x+\frac{\pi}{3})+4\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{5}{2}$

(رضا نصیری دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی استان زنجان)

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ بردارهای:

$$\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

مفروضند.

اولاً ـ اندازهٔ جبری تصویر بردار $\vec{u}$ روی بردار $\vec{v}$ را محاسبه کنید.

ثانیاً ـ بردار $\vec{u}$ را به دو بردار $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ چنان تجزیه کنید که:

$$\vec{u}_2 \perp \vec{v} \quad \text{و} \quad \vec{u}_1 \parallel \vec{v}$$

باشند.

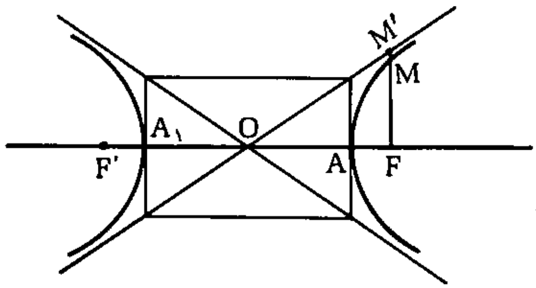
۲ـ وضع خط $D: \begin{cases} x=0 \\ y-z=2 \end{cases}$ را نسبت به هریك از محورهای مختصات تعیین کنید.

۳ـ معادله دایره‌ای را بنویسید که شعاعش برابر ۴ است، از نقطهٔ $M(4,0)$ می‌گذرد و بر دایرهٔ

$$C: x^2+y^2-2x+2y=0$$

عمود است.

۴ـ از کانون F یك هذلولی، عمودی برمحور کانونی آن (در یك طرف محور) اخراج می‌کنیم تا هذلولی را در نقطهٔ M و مجانب را در نقطهٔ M' قطع کند. ثابت کنید که اندازهٔ پاره‌خط MM' برابر است با شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث تشکیل‌شده از مجانبها و خط مماس در یك رأس هذلولی.



۵ـ درستی استنتاج زیر را بررسی کنید:

$$1)\ (p \Rightarrow \sim r) \ \wedge$$
$$2)\ (\sim p \wedge r) \Rightarrow q \ \wedge$$
$$3)\ (\sim t \wedge r)$$

$$\therefore \quad t \Leftrightarrow \sim q$$

۶ـ در تقسیم عددی بر ۲۵، باقیمانده مکعب خارج قسمت است. این عدد را معین کنید.

۷ـ هرگاه p عددی اول و بزرگتر از ۵ باشد ثابت کنید p^4-1 بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.

۸ـ هرگاه $[a,b]=c$ و $(a,b)=d$ ثابت کنید:

$$(a+b\,,\,c)=d$$

۹ـ هرگاه A ماتریسی وارون‌پذیر بوده و داشته باشیم $A'A=AA'$ ثابت کنید:

$$(A'A^{-1})'=(A'A^{-1})^{-1}$$

۱۰ـ تابع با ضابطهٔ:

$$a,b,c>0 \text{ و } c\neq 0,\ y=\frac{ax^2+b}{cx}$$

را چنان مشخص کنید تا حاصل ضرب طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع برابر ۱ — و قدرمطلق تفاضل مقادیر اکسترمم منحنی تابع برابر (۴) باشد.

۱۱ـ خط $y=m$ منحنی تابع با ضابطهٔ:

$$y=\frac{x^2-2x+5}{2x-1}$$

را در نقاط A و B وخط $x=1$ را درنقطهٔ M قطع می‌کند.

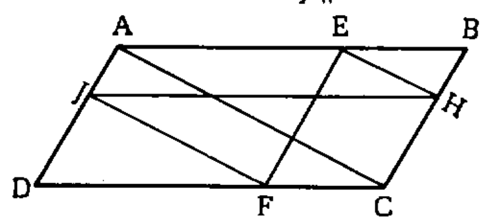
اولاً ـ ثابت کنید معادله مکان‌هندسی نقطه P وسط AB از نقاط مشخص منحنی تابع فوق می گذرد. ثانیاً ـ مطلوب است تعیین معادله مکان‌هندسی نقطه N مزدوج توافقی نقطه M نسبت به دو نقطه A و B.

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ در متوازی الاضلاع ABCD:

$EH \parallel AC$ و $FJ \parallel AC$ و $EF \parallel AD$

است. ثابت کنید که $HJ \parallel AB$ است.



۲ـ در مثلث ABC:

$\hat{A}=60^\circ$ و $AC=8cm$ و $AB=12cm$

است. اندازهٔ ارتفاع AH را به دست آورید.

۳ـ اگر درمعادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، یکی از ریشه‌ها m برابر دیگری باشد حاصل عبارت $A=x_1^2-2x_2^3$ را حساب کنید (m مخالف صفر و x_1 و x_2 ریشه‌های معادله فرض می‌شوند).

(رضا نصیری دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی استان زنجان)

۴ـ چهارعددطبیعی متوالی پیدا کنید که مکعب یکی از آنان برابر مجموع مکعبات سه‌عدد دیگر باشد (مسئله‌چندجواب دارد).

(بهادر طالبی دانش‌آموز تبریز)

۵ـ اگر m برابر جملهٔ mام یک تصاعدحسابی با p برابر جملهٔ pام آن برابر باشد با توجه به شرط $m\neq p$ ثابت کنید جملهٔ $(m+p)$ام آن برابر صفر است.

(محمد قدرتی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی بجنورد)

۶ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sqrt{\log_{\sqrt{5}}^{x^2}}+\sqrt{\log_{25}^{x}}=4+\sqrt{2}$$

(حسن ولی‌زاده دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی مهاباد)

۷ـ مقدار عبارت زیر را تعیین کنید:

$$A=3tg130^\circ-2cotg140^\circ-tg230^\circ-5tg310^\circ+cotg40^\circ-4tg50^\circ$$

$$B=\cos\left(Arc\cos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+Arc\,tg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)+Arc\,cotg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+Arc\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

۸ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sin x-\cos x-\sin x\cos x+1=0$$

(مسائل ۷ و ۸ اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشتهٔ تجربی آمل)

مسائل ریاضیات سوم تجربی

۱ـ نقاط:

$A(0\,,3)$ و $B(-2\,,1)$ و $C(3\,,0)$

رئوس مثلث ABC مفروضند. قرینهٔ مرکزی مثلث ABC

نسبت به رأس A را پیدا کنید و اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل این مثلث را حساب کنید.

۲ــ مثلث قائم الزاویهٔ $ABC\ (\hat{A}=90^\circ)$ مفروض است. اگر $AB=10$ و $AC=24$ باشد.

اولاً ــ حجم کرهٔ حاصل از دوران دایرهٔ محیطی این مثلث حول وتر مثلث را محاسبه کنید.

ثانیاً ــ سطح قطاعی از این کره را که زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌اش 60° است به دست آورید.

۳ــ نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و M نقطه‌ای دلخواه از خط راست AB می‌باشد، ثابت کنید:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2(\overline{OA}^2+\overline{OM}^2)$$

(محمد قدرتی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی بجنورد)

۴ــ حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

(رشید مقدسی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی شیروان)

۵ــ ثابت کنید شرط آنکه خط:

$$ax+by+c=0$$

برمنحنی نمایش تابع با ضابطهٔ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

مماس گردد چنین است: $a^4+b^4=c^2$

(حسن ولی‌زاده دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی مهاباد)

۶ــ اگر $x+y+z=k\pi$ ثابت کنید:

$$tg x+tg y+tg z=tg x\, tg y\, tg z$$

(محمد قدرتی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی بجنورد)

۷ــ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$2\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{2}=2$$

(کاوه بذرافکن دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی تهران)

۸ــ حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$$A=tg10^\circ tg50^\circ-tg10^\circ tg70^\circ+tg50^\circ tg70^\circ$$

(کاظم ایام دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی بوکان)

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ــ معادلهٔ مکان‌هندسی مرکز تقارن منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ:

$$f(x)=\frac{1-12mx}{4x-3m}$$

به ازای مقادیر مختلف m کدام است؟

۲ــ نقاط:

$$F'(2+2\sqrt{3},-3)\ \text{و}\ F(2-2\sqrt{3},-3)$$

کانونهای یك هذلولی متساوی القطرین می‌باشند. معادلهٔ این هذلولی را بنویسید.

۳ــ اندازهٔ سطح محصور بین دو سهمی به معادلات:

$$y^2=k^2x\ \text{و}\ x^2=k^2y$$

برابر ۷۲ است، مقدار $|k|$ را پیدا کنید.

۴ــ مقدار:

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} cotg^m 2x\, cosec^2 2x\, dx$$

برابر $\frac{1}{14}$ است، مقدار m را حساب کنید.

۵ــ به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ:

$$m(1+\sin x+\cos x)=3\cos x+2$$

دارای جواب است؟

حل مسائل برهان شمارهٔ ۶

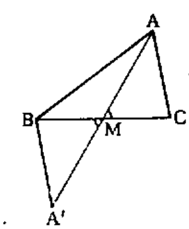
حل مسائل سال اول

۱- میانهٔ AM را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم. از A' به B وصل می‌کنیم. دومثلث $MA'B$ و MAC به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین متساویند زیرا:

$$A\hat{M}C = A'\hat{M}B \quad و \quad MA' = MA \quad و \quad MB = MC$$

است. از تساوی این دومثلث نتیجه می‌شود که:

$$M\hat{A}'B = M\hat{A}C \quad و \quad A'B = AC$$



اما بنابه فرض $AB > AC$ است پس $AB > A'B$ می‌باشد لذا در مثلث ABA' داریم:

$$B\hat{A}'M > B\hat{A}M$$

که اگر به جای $B\hat{A}'M$ مساویش $M\hat{A}C$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$M\hat{A}C > B\hat{A}M$$

و یا:

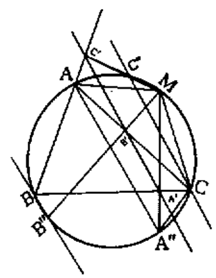
$$M\hat{A}B < M\hat{A}C$$

با توجه به این مسأله می‌توان گفت که: در مثلث غیر متساوی‌الساقین در یک‌رأس، میانهٔ نظیر آن رأس باضلع بزرگتر، زاویه‌ای می‌سازد که این زاویه، کوچکتر است از زاویه‌ای که با ضلع کوچکتر می‌سازد.

$$\Delta ABC : M \in BC \quad و \quad MB = MC \quad و \quad AB > AC$$

$$\Longrightarrow M\hat{A}B < M\hat{A}C$$

۲- می‌دانیم که نقاط A' و B' و C' که تصاویر نقطهٔ M از دایرهٔ محیطی مثلث به ترتیب روی اضلاع BC و AC و AB می‌باشند، سه‌نقطه‌اند واقع بر یک‌خط راست که این خط راست $A'B'C'$ را خط سمسن نظیر نقطهٔ M می‌نامند.



از M به رأسهای A و C و از رأس C به نقطهٔ A'' وصل می‌کنیم. در چهار ضلعیهای محاطی:

$$MB'A'B \quad و \quad MAA''C$$

داریم:

$$A\hat{A}''M = A\hat{C}M \qquad (۱)$$

و

$$B'\hat{A}'M = B'\hat{C}M \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$A\hat{A}''M = B'\hat{A}'M'$$

در نتیجه خط AA'' با خط سمسن نظیر نقطهٔ M یعنی با خط $A'B'C'$ موازی است.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که خطهای BB'' و CC'' نیز باخط $A'B'C'$ موازی می‌باشند.

۳- چون $p \Longleftrightarrow q$ گزاره‌ای‌درست‌است لذا $p \equiv q$ از طرفی چون $(p \wedge q)$ نادرست است پس $p \equiv q \equiv F$ پس:

$$p \equiv F \to \sim p \equiv T \to [q \Longleftrightarrow \underbrace{(\sim p \vee s)}_{T}] \equiv F$$

$$p \equiv F \to (p \Longrightarrow r) \equiv T$$

وچون گزارهٔ دو شرطی دارای دو مؤلفه یکی درست وطرف دیگرنادرست‌است پس درکل نادرست‌است.

-۴

الف) $A - B = \{x \in IR \mid ۵ < x\}$

ب) $B - A = \{x \in IR \mid x < ۲\}$

ج) $B' = \{x \in IR \mid x > ۵\} \Longrightarrow B' - A = \varnothing$

د) $A' = \{x \in IR \mid x < ۲\} \Longrightarrow A' \cap B' = \varnothing$

-۵

$$\frac{۱}{۵x - y - ۱} = A \quad و \quad \frac{۱}{۳x + ۲y - ۱۱} = B$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} ۴ \\ -۵ \end{matrix} \begin{cases} ۴A + ۵B = ۲ \\ ۳A + ۴B = \frac{۳۱}{۲۰} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ۱۶A + ۲۰B = ۸ \\ -۱۵A - ۲۰B = -\frac{۳۱}{۴} \end{cases} \Longrightarrow$$

$A=۸-\frac{۳۱}{۴} \Rightarrow \boxed{A=\frac{۱}{۴}} \Rightarrow \boxed{B=\frac{۱}{۵}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۵x-y-۱}=\frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳x+۲y-۱۱}=\frac{۱}{۵} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵x-y-۱=۴ \\ ۳x+۲y-۱۱=۵ \end{cases} \Rightarrow ۲\begin{cases} ۵x-y=۵ \\ ۳x+۲y=۱۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۰x-۲y=۱۰ \\ ۳x+۲y=۱۶ \end{cases} \Rightarrow ۱۳x=۲۶$$

$$\Rightarrow \boxed{x=۲} \Rightarrow \boxed{y=۵}$$

۶-

$$\begin{cases} (\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲ \geqslant ۰ \\ (\sqrt{b}-\sqrt{c})^۲ \geqslant ۰ \\ (\sqrt{c}-\sqrt{a})^۲ \geqslant ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-۲\sqrt{ab} \geqslant ۰ \\ b+c-۲\sqrt{bc} \geqslant ۰ \\ c+a-۲\sqrt{ac} \geqslant ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b) \geqslant ۲\sqrt{ab} \\ (b+c) \geqslant ۲\sqrt{bc} \\ (c+a) \geqslant ۲\sqrt{ac} \end{cases}$$

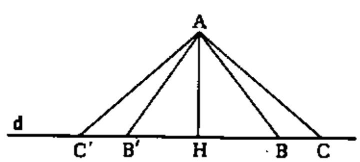
چون دوطرف مثبت‌اند طرفین‌را در هم‌ضرب می‌کنیم:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant ۸\sqrt{a^۲b^۲c^۲}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant ۸abc$$

حل تشریحی تستهای سال اول

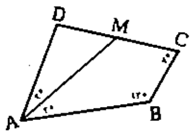
۱- گزینهٔ (۳) جواب‌است. زیرا اگر ازنقطهٔ A عمود AH را برخط d فـرود آوریم $AH=۴$ است و در نتیجه مجموعهٔ نقاطی ازخط d که در رابطهٔ $۵ \leqslant AM \leqslant ۶$ صدق می‌کنند. دو پاره‌خط مساوی‌درطرفین‌نقطهٔ H را تشکیل می‌دهند.



۲- گزینهٔ (۴) جواب است زیرا:

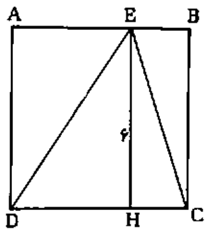
$D\hat{A}B=۶۰°$ و با $D\hat{A}M=۳۰°$ است. از آن‌جا:

$$A\hat{D}M=۳۶۰-(۶۰+۱۳۰+۷۰)=۱۰۰°$$



۳- گزینهٔ (۲) جواب است زیرا مساحت مثلث EDC برابراست‌با $\frac{۱}{۲}DC \times EH$ یعنی:

$$S_{EDC}=\frac{۱}{۲}\times ۶ \times ۶ = ۱۸cm^۲$$



نکته: باید توجه داشت‌که اندازهٔ مساحت مثلث EDC به اندازهٔ پاره‌خط $EB=۲$ بستگی نـدارد زیرا نقطهٔ E برهر نقطه‌ای ازخط AB منطبق‌باشد ارتفاع نظیر ضلع DC از مثلث EDC مقداری ثابت‌برابر ۶ سانتی‌متر می‌باشد.

۴- گزینهٔ (۲) صحیح‌است زیرا:

گزاره‌های $(p \vee q)$ و $(p \Longleftrightarrow q)$ هردو درست بوده پس $p \equiv q \equiv T$ و چون تالی گزارهٔ $p \Longrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$، یعنی‌گزارهٔ p درست‌است پس‌ارزش این‌گزاره همواره درست است.

۵- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

اگر مثلاً فرض‌کنیم:

$A=\{۱,۲,۳,۴\}$

$B=\{۱,۲,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۸,۹\}$

هیچ‌یك از مواردقبل برقرار نیست.

۶- گزینه ۳ درست است زیـرا $a>b$ طرفین را در $b^۲>۰$ ضرب می‌کنیم:
$ab^۲>b^۳$

۷-

$$\frac{a^۶-b^۶}{(a+b)^۲(a^۳-b^۳)}=\frac{(a^۳+b^۳)(a^۳-b^۳)}{(a+b)^۲(a^۳-b^۳)}$$

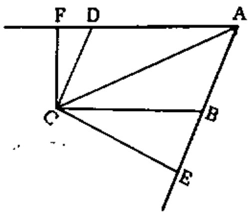
$$=\frac{(۲\sqrt{۲})^۳+۲\sqrt{۲}}{(۳\sqrt{۲})^۳}=\frac{۱۸\sqrt{۲}}{۵۴\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱- در متوازی‌الاضلاع ABCD، $AB=CD$ و $BC=AD$ است و دو مثلث قـائم‌الزاویهٔ BCE و CDF متشابهند زیرا: $\hat{B}_۱=\hat{D}_۱$ است لذا داریم:

$$\frac{BC}{CD}=\frac{BE}{DF} \Longrightarrow BC \cdot DF = CD \cdot BE \Longrightarrow$$

$$AD \cdot DF = AB \cdot BE \qquad (۱)$$



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACE می‌توان نوشت:

$$AC^۲=AE^۲+EC^۲ \Longrightarrow$$

$$AC^۲=(AB+BE)^۲+EC^۲ \Longrightarrow$$

$$AC^۲=AB^۲+BE^۲+۲AB \cdot BE+EC^۲$$

$$BE^۲+EC^۲=BC^۲=AD^۲ \Longrightarrow$$

$$AC^۲=AB^۲+AB \cdot BE+AD^۲+AB \cdot BE$$

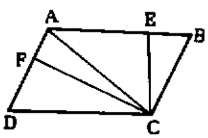
$$AC^۲=AB^۲+AB \cdot BE+AD^۲+AD \cdot DF \Longrightarrow$$

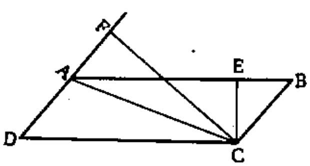
$$AC^۲=AB(AB+BE)+AD(AD+DF) \Longrightarrow$$

$$AC^۲=AB \cdot AE+AD \cdot AF$$

درصورتی‌که AC قطر کوچك‌متوازی‌الاضلاع ABCD باشد (شکل‌زیر)، درحالتی‌که نقاط E و F روی‌اضلاع‌متوازی‌الاضلاع قرار داشته‌باشند رابطهٔ فوق تغییر نمی‌کند و درحالتی که یکی‌از دونقطهٔ E یا F در امتداد یك ضلع متوازی‌الاضلاع واقع شود رابطه به صورت زیر درمی‌آید (نقطهٔ F در امتداد ضلع AD است).

$$AC^۲=AB \cdot AE-AD \cdot AF$$

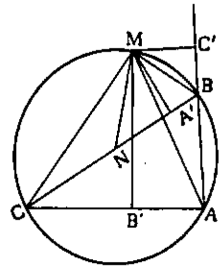




۲- روی‌پاره‌خط BC نقطهٔ N را چنان‌اختیارمی‌کنیم که:

$M\hat{N}B = M\hat{C}A$

باشد. دراین صورت داریم:



$$\Delta BMN \sim \Delta AMC : M\hat{B}N = M\hat{A}C$$

$$M\hat{N}B=M\hat{C}A \Rightarrow \frac{BN}{MA'}=\frac{AC}{MB'} \qquad (۱)$$

$$\Delta MCN \sim \Delta AMB : M\hat{C}N = M\hat{A}B$$

$$M\hat{N}C = 180 - M\hat{N}B = 180 - M\hat{C}A = M\hat{B}A$$

$$\Rightarrow \frac{CN}{MA'} = \frac{AB}{MC'} \qquad (۲)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{BN}{MA'}+\frac{CN}{MA'}=\frac{AC}{MB'}+\frac{AB}{MC'} \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{MA'}=\frac{AC}{MB'}+\frac{AB}{MC'}$$

۳-

فرض کنیم $(x,y)\in(R\cap R^{-1}) \Rightarrow$

$(x,y)\in R \wedge (x,y)\in R^{-1}$

تعریف وارون $\Longrightarrow (y,x)\in R^{-1}\wedge(y,x)\in R$

تعریف اشتراك $\Longrightarrow (y,x)\in(R\cap R^{-1})$

پس $(R\cap R^{-1})$ دارای خاصیت تقارنی است.

و به همین‌صورت ثابت می‌شود $(R\cup R^{-1})$ نیزدارای خاصیت‌تقارنی است.

۴- برای‌اینکه رابطهٔ R خاصیت پادتقارنی داشته‌باشد می‌بایست:

$$\forall x,y\in \mathbb{R},\ (xRy\wedge yRx)\Rightarrow x=y$$

پس فرض می‌کنیم xRy و yRx وثابت می‌کنیم $x=y$

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow ax+by=c \wedge ay+bx=c$$

$$\Rightarrow ax+by=ay+bx \Rightarrow$$

$$(a-b)x=(a-b)y$$

وشرط اینکه ازتساوی اخیربه تساوی $x=y$ برسیم آن است که بتوانیم طرفین‌را بر $(a-b)$ تقسیم کنیم که ایجاب‌می‌کند،

$$a\neq b$$

- اثبات پوشایی تابع:

$$f: N^2 \to N$$

$$f(a,b)=2^{a-1}(2b-1)$$

درصفحهٔ ۳۲، مثال ۱۴ ازهمین شماره اثبات شده است. حال به بررسی‌خاصیت یك‌به‌یكی این تابع می‌پردازیم.

$$f(a_1,b_1)=f(a_2,b_2)\Rightarrow$$

$$2^{a_1-1}(2b_1-1)=2^{a_2-1}(2b_2-1)\Rightarrow$$

$$\frac{2^{a_1-1}}{2^{a_2-1}}=\frac{2b_2-1}{2b_1-1}\Rightarrow 2^{a_1-a_2}=\frac{2b_2-1}{2b_1-1}$$

سمت راست تساوی اخیرتقسیم دو عدد فرد بریکدیگر است که حاصل همواره فرد است و سمت چپ تساوی اگر $a_1\neq a_2$ به صورت‌توانی از ۲ بوده و زوج‌است واین‌غیرممکن‌است پس:

$a_1=a_2$ یا $a_1-a_2=0$ یا $2^{a_1-a_2}=1$ پس:

$$\frac{2b_2-1}{2b_1-1}=1 \Rightarrow 2b_2-1=2b_1-1$$

$$\Rightarrow b_2=b_1$$

بنابراین $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$ یعنی‌تابع یك‌به یك است.

۵- $x'^{10}=a \quad x''^{10}=b$

$$x'^{10}+x''^{10}=k$$

$$\Rightarrow a+b=k$$

طرفین را بتوان ۳ می‌رسانیم:

$$a^3+b^3+3ab(a+b)=k^3$$

$$\underbrace{x'^{30}+x''^{30}}+3x'^{10}\cdot x''^{10}(x'^{10}+x''^{10})=k^3$$

$$S_{30}+3(x'x'')^{10}(k)=k^3$$

$$S_{30}+3(-1)^{10}(k)=k^3\Rightarrow$$

$$\boxed{S_{30}=k^3-3k}$$

۶- $a^{\lg x}$ و $a^{\lg y}$ و $a^{\lg z}$ تصاعد هندسی می‌سازند پس می‌توان نوشت:

$$(a^{\lg y})^2=a^{\lg x}\times a^{\lg z}$$

$$a^{2\lg y}=a^{\lg x+\lg z}\Rightarrow 2\lg y=\lg x+\lg z$$

$$\Rightarrow \lg y^2=\lg x\cdot z$$

$$\Rightarrow y^2=x\cdot z$$

۷- به ترتیب داریم:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}$$

$$\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\Rightarrow$$

$$\sin\frac{2\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\sin\frac{2\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}\Rightarrow$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=4\cos^3\frac{\pi}{10}-3\cos\frac{\pi}{10}$$

چون $\cos\frac{\pi}{10}\neq 0$ است، بنابراین پس از تقسیم طرفین تساوی فوق بر $\cos\frac{\pi}{10}$ وتبدیلهای لازم خواهیم داشت:

$$4\sin^2\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$$

وبا توجه‌به $\sin\frac{\pi}{10}>0$ داریم:

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

۸- حداکثرمقدار سمت‌چپ معادله برابراست‌با ۲ وآن وقتی است که هم $\sin x=1$ وهم $\sin 5x=1$ باشد. حداقل مقدار سمت‌راست معادلـه هم برابر ۲ می‌باشد، بـه شرطی‌که $\cos x=0$ باشد. بنابراین معادله وقتی برقراراست که دستگاه توأم زیر جواب داشته‌باشد.

$$\begin{cases}\sin 5x=1\\ \sin x=1\\ \cos x=0\end{cases}$$

ازحل معادله‌های دستگاه و اشتراك آنها خواهیم داشت:

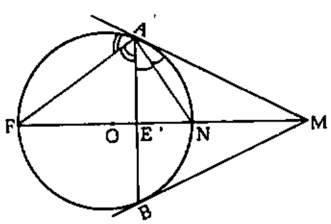
$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

حل‌تشریحی تستهای سال دوم ریاضی

۱- اگر از نقطهٔ A به نقاط N و F وصل‌کنیم خطوط AN و AF نیمسازهای درونی و برونی زاویهٔ A از مثلث AME می‌باشد بنابراین داریم:

$$\frac{FM}{FE}=\frac{NM}{NE}$$

پس گزینهٔ (۲) درست است.



۲- مساحت قطاع $\alpha°$ در یك دایره به شعاع R برابر است با:

$$S_{\text{قطاع } \alpha°}=\frac{\pi R^2\alpha°}{360°}$$

پس:

$$3\pi=\frac{\pi R^2\times 30}{360}\Rightarrow$$

$$R^2=36\Rightarrow R=6\Rightarrow 2R=12$$

لذا گزینهٔ (۳) جواب است.

۳ـ گزینهٔ (۲) درست است زیرا:

$$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5\times4\times3!}{3!\times2!}=\frac{20}{2}=10$$

۴ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

قبلاً درشماره‌های قبل مجله ثابت کردیم هر رابطهٔ تک‌عضوی به انتفای مقدم دارای دوخاصیت پادتقارنی و تعدی می‌باشد.

۵ـ گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$$IR^{+2}=\{(x,y)\mid x\in IR^+\wedge y\in IR^+\}$$

تابع پوشا نیست زیرا:

$$\forall y\in IR^+\ ;\ \sqrt{y}>0 \quad \text{و} \quad \forall x\in IR^+\ \sqrt{x}>0$$

و در نهایت $\forall x,y\in IR^+ ,\ (\sqrt{x},\sqrt{y})\in IR^{+2}$ پس هیچگاه IR^{-2} پوشیده نخواهندشد ازطرفی

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)\Rightarrow$$

$$(\sqrt{x_1},\sqrt{y_1})=(\sqrt{x_2},\sqrt{y_2})\Rightarrow$$

$$x_1=x_2\wedge y_1=y_2\Rightarrow(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

تابع یک‌به‌یک است.

۶ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$$\forall x\in N\ ,\ x\geqslant 1\Rightarrow$$

$$\forall x\in N\ ,\ x*1=1*x=\mathrm{Max}\{1,x\}=x$$

۷ـ

$$S_n=2n(3n+1)$$

$$n=1\Rightarrow S_1=a_1=2(3+1)=8\Rightarrow a_1=8$$

$$\begin{cases}S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\\ S_n=2n(3n+1)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{n}{2}(a_1+a_n)=2n(3n+1)$$

$$a_1+a_n=4(3n+1)$$

$$8+a_n=12n+4\Rightarrow a_n=12n-4$$

۸ـ $\lg_3 2$ عددی است بین صفر و یک مانند عدد $\left(\frac{2}{3}\right)$

بیشترین مقدار عددی مانند $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin\alpha}$ وقتی است که $\sin\alpha$ مساوی (۱ –) باشد همچنین $\left(\lg_3 2\right)^{\sin\alpha}$ وقتی بیشترین مقدار را پیدا می‌کند که $\sin\alpha$ مساوی ۱ – باشد پس:

$$\left(\lg_3 2\right)^{-1}=\frac{1}{\lg_3 2}=\lg_2 3$$

۹ـ گزینهٔ (ب) صحیح است. زیرا داریم:

$$\frac{\sin nx}{1+\cos nx}=\frac{2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}{2\cos^2\frac{nx}{2}}\quad\left(x\neq\frac{2k\pi+\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\cos\frac{nx}{2}}=tg\frac{nx}{2}$$

۱۰ـ گزینهٔ (الف) صحیح است، زیرا داریم:

$$\sqrt[4]{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\sqrt[4]{\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}}=\sqrt{\left|\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\right|}$$

درنتیجه به دست می‌آید:

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}}\sqrt{\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\right|}$$

$$=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\right|$$

چون انتهای x درناحیهٔ اول است بنابراین همواره داریم:

$$\cos\frac{x}{2}\geqslant\sin\frac{x}{2}\geqslant 0$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\geqslant 0$$

پس خواهیم داشت:

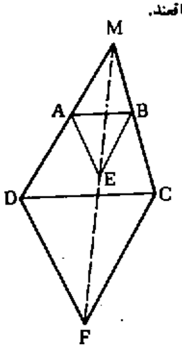
$$\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}\right|=\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$$

حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ـ دو مثلث ABE و DCF نسبت به مرکز تجانس M و نسبت تجانس $\frac{AB}{DC}$ مجانس یکدیگرند. زیرا:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{DC}=\frac{AE}{DF}=\frac{ME}{MF}=K$$

است. پس نقطهٔ E مجانس نقطهٔ F نسبت به مرکز تجانس M و نسبت تجانس ثابت $\frac{AB}{CD}$ می‌باشد بنابراین نقاط E و F و M روی یک خط راست واقعند.



به بیان دیگر می‌توان گفت که اگر از نقطهٔ F به نقطهٔ E وصل کنیم خط FE از نقطهٔ ثابت M می‌گذرد، زیرا:

$$DF=CD \quad \text{و} \quad AE=AB \quad \text{و} \quad AE\parallel DF$$

است . پس اگر نقطهٔ تقاطع FE با ساق AD نقطه‌ای مانند M′ باشد داریم:

$$\frac{M'A}{M'D}=\frac{AE}{DF}=\frac{AB}{CD}$$

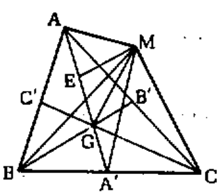
و چون $\frac{MA}{MD}=\frac{AB}{CD}$ است پس نقطهٔ M′ برنقطهٔ M منطبق است. بنابراین FE از M می‌گذرد یعنی سه‌نقطهٔ F و E و M روی‌یک خط‌راست قرار دارند.

۲ـ در مثلث ABC نقطهٔ برخورد میانه‌های AA′ و BB′ و CC′ را G و وسط پاره خط AG را E می‌نامیم. در مثلثهای MBC و MEA′ و MAG داریم:

$$MB^2+MC^2=2MA'^2+\frac{1}{2}BC^2 \quad (1)$$

$$MA'^2+ME^2=2MG^2+\frac{1}{2}EA'^2 \quad (2)$$

$$MA^2+MG^2=2ME^2+\frac{1}{2}AG^2 \quad (3)$$



ازجمع رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{1}{2}BC^2+\frac{3}{2}AG^2$$

به همین‌ترتیب اگر برای میانه‌های BB′ و CC′ نظیر رابطهٔ فوق‌را بنویسیم وسه‌رابطه‌را باهم جمع‌کنیم داریم:

$$3(MA^2+MB^2+MC^2)$$

$$=9MG^2+\frac{1}{3}(BC^2+CA^2+AB^2)+$$
$$\frac{2}{3}(GA^2+GB^2+GC^2)$$

اما:

$$AB^2+AC^2+BC^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$$

است. پس:

$$MA^2+MB^2+MC^2$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

۳- فرض کنیم v_1 ، v_2 ، ... و v_n ، بردارهایی از فضای برداری V باشند و بردارهای:

$$(p<n)\; v_p\,,\,\dots\,,\,v_2\,,\,v_1$$

p بردار وابسته خطی از این n بردار باشند پس ترکیبی‌خطی از این p بردار مساوی با بردارصفر وجود دارد به قسمی که لااقل یکی‌از ضرایب آن ناصفر است.

$$(1)\quad a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_pv_p=\vec{0}$$
$$\exists\; a_i\neq 0 \quad 1\leqslant i\leqslant p$$
$$(1)\Longrightarrow a_1v_1+\dots+a_pv_p+0v_{p+1}+0v_{p+2}+\dots+0v_n=\vec{0}\qquad(2)$$

رابطهٔ (۲) همان رابطهٔ (۱) است با این تفاوت که رابطهٔ (۲) نشان‌دهندهٔ ترکیبی‌خطی از n بردار v_1 تا v_n است که مساوی با بردار صفراست و لااقل یك ضریب مخالف‌صفر از a_1 تا a_p درآن یافت می‌شود پس این بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

۴- دراین مسأله $n(s)=12!$ حال درهرقسمت به‌دنبال $n(A)$ هستیم:

الف) $n(A)=\binom{10}{4}\times 4!\times 2!\times 6! \Longrightarrow$

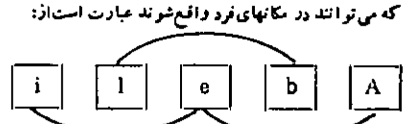
$$p(A)=\frac{\binom{10}{4}\times 4!\times 2!\times 6!}{12!}$$

(اول تعدادحالاتی که می‌توان ۴نفررا از بین ۱۰ نفر(غیردو برادر) انتخاب کرد سپس جایگشتهای آن چهارنفر و دو برادر و ۶ نفر باقی‌مانده).

ب) $n(A)=11!\times 2! \Longrightarrow p(A)=\frac{11!\times 2!}{12!}$

(دوبرادر را یك‌نفر فرض‌کرده با ۱۰نفردیگر ۱۱نفر می‌شوند که ۱۱! جایگشت‌دارند و ۲! نیز دوبرادر).

۵- حروف باصدا درکلمهٔ Abeli (درصورت‌مسأله به غلط Abcli چاپ‌شده) عبارتنداز A و e و i وتعداد حالاتی که می‌توانند در مکانهای فرد واقع‌شوند عبارت است‌از:



که ۳! حروف با صدا و ۲! حروف بی‌صدا جایگشت دارند

پس:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3!\times 2!}{5!}$$

۶- هردونفر می‌توانند یك‌حالت دست دادن با یکدیگر را ایجادکنند پس n نفر به $\binom{n}{2}$ طریق می‌توانند با هم‌دست بدهند پس:

$$\binom{n}{2}=28 \Longrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!}=28 \Longrightarrow$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}=28$$
$$n(n-1)=56 \Longrightarrow \boxed{n=8}$$

۷- $y=\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$

مجانب قائم: $x=-\frac{b'}{a'}=-\frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \boxed{b'=\frac{1}{2}a'}$$

مجانب‌افقی: $y=\frac{a}{a'}=1 \Longrightarrow \boxed{a=a'}$

$A\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{در تابع}} -1=\frac{b}{b'} \Longrightarrow b=-b'$

$$\Longrightarrow \boxed{b=-\frac{1}{2}a'}$$

$$\Longrightarrow y=\frac{ax+b}{a'x+b'}=\frac{a'x-\frac{1}{2}a'}{a'x+\frac{1}{2}a'}$$
$$=\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}=\frac{2x-1}{2x+1}\Longrightarrow \boxed{y=\frac{2x-1}{2x+1}}$$

خط قائم $m=-\frac{1}{4} \Longrightarrow$ مماس $m=4$

$$y'=\frac{4}{(2x+1)^2}=\frac{4}{1}\Longrightarrow$$
$$(2x+1)^2=1\Longrightarrow 2x+1=\pm 1$$
$$2x=-1\pm 1\Longrightarrow$$
$$2x=0\Longrightarrow x=0\Longrightarrow A\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$$
$$2x=-2\Longrightarrow x=-1\Longrightarrow B\begin{vmatrix}-1\\3\end{vmatrix}$$

۸-

$$y=\frac{x^2+4\sqrt{2}}{x}\Longrightarrow y'=\frac{x^2-4\sqrt{2}}{x^2}$$

پای قائم $N\begin{vmatrix}\alpha\\ \dfrac{\alpha^2+4\sqrt{2}}{\alpha}\end{vmatrix}$

$\Longrightarrow$ مماس $m=\dfrac{\alpha^2-4\sqrt{2}}{\alpha^2}$

$\Longrightarrow$ قائم $m=\dfrac{-\alpha^2}{\alpha^2-4\sqrt{2}}$

$$y-y_N=m(x-x_N)$$
$$y-\frac{\alpha^2+4\sqrt{2}}{\alpha}=\frac{-\alpha^2}{\alpha^2-4\sqrt{2}}(x-\alpha)$$

معادلهٔ قائم درنقطهٔ N

$O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ دراین معادله قرار می‌دهیم $\longrightarrow$

$$0-\frac{\alpha^2+4\sqrt{2}}{\alpha}=\frac{-\alpha^2}{\alpha^2-4\sqrt{2}}(0-\alpha)$$
$$\frac{\alpha^2+4\sqrt{2}}{\alpha}=\frac{-\alpha^3}{\alpha^2-4\sqrt{2}}\Longrightarrow$$
$$\alpha^4-32=-\alpha^4 \Longrightarrow \alpha^4=16$$

طولهای پای قائم $\boxed{\alpha=\pm 2}$

$\alpha=2$ یا $\alpha=-2$

$y=(\sqrt{2}+1)x$ معادله خط قائم

توجه‌کنید که خط قائم یك‌خط است ولـی در دو نقطه برمنحنی عمود است.

۹- الف) معادلـه را بر $\cos^2x$ کـه مخالف صفر فرض می‌شود تقسیم می‌کنیم، پس‌خواهیم داشت:

$$m\,tg^2x-(4m+1)tg\,x+1=0\qquad(1)$$
$$tg\,x=\frac{4m+1\pm\sqrt{\Delta}}{2m}$$
$$\Delta=(4m+1)^2-4m=16m^2+1+8m-4m$$
$$\Delta=16m^2+4m+1\Longrightarrow \Delta>0$$

Δ همواره مثبت است، پس معادله به ازای تمام مقادیر m بجز $m=0$ جواب دارد. پس شرط وجود جواب چنین است:

$$m\in \mathbb{R}-\{0\}$$

ب) ریشه‌های معادله‌را باتوجه به شرط مسأله (ریشه‌ها بین ۰ و 2π).

$$y+\pi\;،\;y\;،\;\pi+x\;،\;x$$

در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$x+(\pi+x)+y+(\pi+y)=\frac{9\pi}{2}$$

$$2x+2y=\frac{9\pi}{2}-2\pi=\frac{5\pi}{2}$$

$$x+y=\frac{5\pi}{4} \Rightarrow x+y=\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$tg(x+y)=tg(\pi+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow tg(x+y)=tg\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{tgx+tgy}{1-tgx\,tgy}=1$$

(رابطه‌ای بین ریشه‌ها وضرایب معادله (۱))

$$\begin{cases} tgx+tgy=\frac{4m+1}{m} \\ tgx\,tgy=\frac{1}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4m+1}{m}}{1-\frac{1}{m}}=1 \overset{(m\neq 0)}{\Longrightarrow} \frac{4m+1}{m-1}=1$$

$$\Rightarrow 4m+1=m-1 \Rightarrow 3m=-2$$

$$\Rightarrow m=\frac{-2}{3}$$

حل تشریحی تستهای سال سوم ریاضی

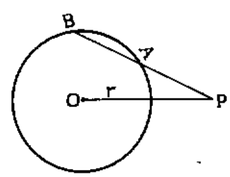
۱ـ گزینهٔ (۲) درست‌است زیرا داریم:

$$PA\cdot PB=d^2-R^2 \Rightarrow$$

$$PA(2PA)=25-9=16$$

$$2PA^2=16 \Rightarrow PA^2=8 \Rightarrow$$

$$PA=2\sqrt{2}=AB$$



۲ـ گزینهٔ (۲) درست‌است زیرا این‌رابطه وقتی برقرار است‌که مثلث در رأس B قائم‌الزاویه باشد.

$$(p-a)(p-c)=p(p-b) \Rightarrow$$

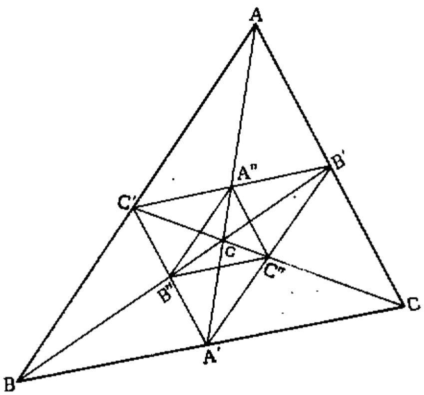
$$\frac{b+c-a}{2}\times\frac{a+b-c}{2}=\frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+c-b}{2} \Rightarrow b^2-(c-a)^2=(a+c)^2-b^2$$

$$\Rightarrow b^2=a^2+c^2 \Rightarrow \hat{B}=90^\circ$$

۳ـ گزینهٔ (۴) درست است. زیرا مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC نسبت به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است و مثلث $A''B''C''$ نیز مجانس مثلث $A'B'C'$ نسبت به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ می‌باشد بنابراین مثلث $A''B''C''$ مجانس مثلث ABC نسبت به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $\frac{1}{4}$ می‌باشد:

$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=-\frac{1}{2} \text{ و } \frac{\overline{GA''}}{\overline{GA'}}=-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{GA''}}{\overline{GA}}=(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{\overline{GA''}}{\overline{GA}}=\frac{1}{4}$$



۴ـ گزینهٔ (۱) درست است. زیرا اگر حجم مخروط ایجاد شده در بالا را V_1 وحجم مخروط اولی را V فرض کنیم داریم:

$$\frac{V_1}{V}=(\frac{SH'}{SH})^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V}=(\frac{k}{h})^3=\frac{k^3}{h^3}$$

۵ـ گزینهٔ (۳) جواب تست می‌باشد زیرا:

اگر Q روی IR را درنظر بگیریم دراین صورت ضرب اسکالر در Q بسته نیست:

$\sqrt{2}\in IR$ ، $1\in Q$ ولی $1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\notin Q$

۶ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$p(\text{رو})=\frac{1}{4} \Rightarrow p(\text{پشت})=\frac{3}{4}$$

با توجه به فرمول دوجمله‌ای داریم:

$$\binom{5}{3}\times(\frac{1}{4})^3\times(\frac{3}{4})^{5-3}=10\times\frac{1}{64}\times\frac{3^2}{4^2}$$

$$=\frac{90}{1024}$$

۷ـ گزینهٔ (۳) صحیح‌است. زیرا:

بنابرحل مسألهٔ ۴ قسمت الف) داریم:

تعداد حالاتی که دقیقاً ۳ مدادبین دوخودکار است $=\binom{8}{3}\times 3!\times 2!\times 5!=$

۸ـ

$$D_f=[-1,1] \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant +1$$

$$D_{f(2x-3)}:\begin{cases} -1\leqslant 2x-3\leqslant +1 \\ 2\leqslant 2x\leqslant 4 \\ 1\leqslant x\leqslant 2 \Rightarrow D_{f(2x-3)}=[1,2] \end{cases}$$

۹ـ

$$y=x^3-3x$$

$$y'=3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$M\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix} \quad N\begin{vmatrix}+1\\-2\end{vmatrix}$$

اگر جای نقاط را مشخص کنیم، وخطوط را رسم کنیم مستطیلی به دست می‌آید که طولش ۴ وعرضش ۲ است پس:

$$S=8$$

۱۰ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا داریم:

$$x+y=\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=m \Rightarrow$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{m}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\frac{m}{\sqrt{2}}|\leqslant 1$$

$$|m|\leqslant\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

۱۱ـ گزینهٔ (۳) صحیح‌است، زیرا داریم:

$$\text{Arccos}(1-2x^4)=\alpha \quad \text{و} \quad \text{Arcsin}(x^4)=\beta$$

$$\cos\alpha=1-2x^4 \ ,\ \sin\beta=x^4 \ ,\ \alpha=2\beta$$

$$\cos\alpha=\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta \Rightarrow$$

$$1-2x^4=1-2x^8$$

$$x^8-x^4=0 \Rightarrow x^4(x^4-1)=0 \Rightarrow$$

$x=0$ یا $x=\pm 1$

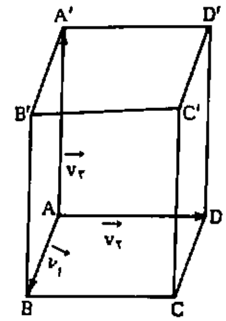
حل مسائل ریاضیات چهارم ریاضی

۱ـ می‌دانیم که قدر مطلق عدد حاصلضرب $\vec{V_1}\vec{V_2}\vec{V_3}$ برابر با عدد حجم متوازی‌السطوحی است که ابعادش:

$$|\vec{V_3}| \text{ و } |\vec{V_2}| \text{ و } |\vec{V_1}|$$

باشد. حال اگر $|\vec{V_1}|$ و $|\vec{V_2}|$ را ابعاد قاعده فرض کنیم،

متوازی‌السطوح قائم، و ارتفاعش $|\vec{v_3}|$ است پس :



$S = |\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}|$ قاعده

$= |\vec{v_1}| \cdot |\vec{v_2}|\, |\sin(\vec{v_1}, \vec{v_2})|$

$\Rightarrow$ قاعده $S = 3\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$

$v = 18 \times 5 = 90 \Rightarrow$ حجم متوازی‌السطوح

$|\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3}| = 90$

۲ـ نقطهٔ موردنظر را $M(0,y,0)$ فرض می‌کنیم و فاصلهٔ نقطهٔ M از صفحهٔ P را محاسبه می‌کنیم و مساوی اندازهٔ پاره‌خط MA قرار می‌دهیم.

$A(2, 3, -1)$ و $M(0, y, 0)$

$P: 2\sqrt{2}x - z - 9 = 0$

$$MH = \frac{|0-0-9|}{\sqrt{8+1}} = 3$$

$$MA = \sqrt{(0-2)^2 + (y-3)^2 + (0+1)^2}$$

$$MA = \sqrt{(y-3)^2 + 5}$$

$$MH = MA \Rightarrow 3 = \sqrt{(y-3)^2 + 5} \Rightarrow$$

$$(y-3)^2 = 4 \Rightarrow y - 3 = \pm 2 \Rightarrow$$

$y = 1$ و $y = +5 \Rightarrow$

نقاط جواب مسأله :

$M_1(0, 1, 0)$ و $M_2(0, 5, 0)$

۳ـ مختصات مرکز اصلی سه‌دایره را پیدا می‌کنیم (مرکز دایرهٔ مطلوب) و طول مماس مرسوم از این‌نقطه بریکی از سه دایره را به‌دست می‌آوریم (شعاع دایره مطلوب). سپس با معلوم بودن مختصات مرکز و شعاع دایره معادله دایرهٔ اصلی را می‌نویسیم:

$c_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

$c_2: x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

$c_3: x^2 + y^2 + 4y = 0$

$\Delta_1: c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow 4x + 4y - 5 = 0$

$\Delta_2: c_3 - c_2 = 0 \Rightarrow -2x + 6y - 1 = 0$

$$\begin{cases} \Delta_1 & 4x + 4y - 5 = 0 \\ \Delta_2 & -2x + 6y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\omega\left(\frac{13}{16}, \frac{7}{16}\right)$ مرکز اصلی سه دایره

$P\omega/c_1 = c_1\left(\frac{13}{16}, \frac{7}{16}\right)$

$$= \left(\frac{13}{16} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{16} - 3\right)^2 - 4 = \frac{666}{256} = \omega T^2$$

$\Rightarrow \omega T = R = \frac{3\sqrt{74}}{16}$ شعاع دایرهٔ اصلی

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{13}{16}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{16}\right)^2 = \frac{666}{256} = \frac{333}{128}$$

$$\boxed{\left(x - \frac{13}{16}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{16}\right)^2 = \frac{333}{128}}$$

معادلهٔ دایرهٔ اصلی سه‌دایره

۴ـ

1) $(\sim p \wedge r) \Rightarrow q \quad \wedge$

2) $(r \wedge s) \quad \wedge$

3) $\sim (s \Rightarrow q) \equiv s \wedge \sim q$

$\therefore \sim p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim s)$

4) $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ — از ۱ وعطف مقدمات

5) r — از ۲ وحذف عاطف

از ۴ و ۵ وانتزاع

6) $(\sim p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow p)$

7) $\sim q$ — از ۳ وحذف عاطف

8) p — از ۶ و ۷ وانتزاع

9) $p \vee (r \Rightarrow \sim s) \equiv \sim p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim s)$

از ۸ و ادخال فاصل

۵ـ درحلقهٔ $R = \{0\}$ صفرحلقه ویك‌حلقه برهم منطبقند! حال فرض کنیم F یك میدان باشد پس یك حلقهٔ جابجایی می‌باشد لذا طبق قضیهٔ کتاب کافی است ثابت کنیم در F قانون حذف برقرار است:

(می‌دانیم درمیدان F هرعضو مخالف‌صفر وارون دارد)

$\forall a, b, c \in F \ ، \ ab = ac \Rightarrow$

$a^{-1}ab = a^{-1}ac \Rightarrow \underline{b = c}$

در F قانون‌حذف برقرار است لذا طبق‌قضیهٔ کتاب، یك حوزهٔ صحیح است.

۶ـ می‌دانیم در حالت کلی:

$4^{4k+r} \overset{10}{\equiv} 4^r$ و $3^{4k+r} \overset{10}{\equiv} 3^r$ و $2^{4k+r} \overset{10}{\equiv} 2^r$

حال اگر n مضرب ۴ باشد پس 3n و 5n نیز مضرب ۴ هستند.

$$\left.\begin{array}{l} 3^{3n+1} \overset{10}{\equiv} 3^1 \\ 2^{5n+3} \overset{10}{\equiv} 2^3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$3^{3n+1} \times 2^{5n+3} \overset{10}{\equiv} 24 \overset{10}{\equiv} 4$$

$$4^{n+1} \overset{10}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow A \overset{10}{\equiv} 4 + 4 = 8$$

۷ـ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یك‌ماتریس متعامد باشد.

بنابراین $A^{-1} = A'$ درنتیجه:

$$\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

چون A متعامد است، بنابراین:

$|A| = -1$ یا $|A| = 1$

پس دوحالت درنظر می‌گیریم:

حالت ۱) $|A| = 1$ دراین صورت:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

پس ماتریسهای متعامدی که $|A| = +1$ به صورت زیر می‌باشند:

$$A = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر داریم :

$|A| = a^2 + c^2$

پس $a^2 + c^2 = 1$ و لذا $a = \cos\alpha$ و $c = \sin\alpha$. پس A به صورت زیر می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

حالت۲) $|A| = -1$ که به طریق مشابه ثابت‌می‌شود A به صورت زیراست:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

(حل ازکتاب‌آشنایی با ماتریسها تألیف‌سیدحسین سیدموسوی)

۸ـ $x^2 - 5x - 2 = 0$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d} = -\frac{5}{2}$$

به توان ۲ می‌رسانیم

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+2\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)=\frac{25}{4}$$

$$\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}+2\left(\frac{\gamma+\beta+\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right)=\frac{25}{4}$$

$$\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}+2\left(\frac{0}{-\frac{d}{a}}\right)=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=\frac{25}{4} \qquad (I)$$

طرفین معادله را بر x^3 تقسیم می‌کنیم:

$$1-\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}=0$$

در معادله جدید به‌جای x یکبار α و یکبار β و یکبار γ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 1-\frac{5}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha^3}=0 \\ 1-\frac{5}{\beta^2}-\frac{2}{\beta^3}=0 \\ 1-\frac{5}{\gamma^2}-\frac{2}{\gamma^3}=0 \end{cases}$$

$$3-5(\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2})-2(\alpha^{-3}+\beta^{-3}+\gamma^{-3})=0$$

$$3-5\left(\frac{25}{4}\right)=2(\alpha^{-3}+\beta^{-3}+\gamma^{-3}) \Rightarrow$$

$$\alpha^{-3}+\beta^{-3}+\gamma^{-3}=-\frac{113}{8}$$

۹-

$$I=\int\frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}dx \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$I=\int\frac{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}{\sin^5 x}dx$$

$$=\int\frac{2\sin x\cos x\sqrt{2\sin x\cos x}}{\sin^5 x}dx$$

صورت کسر را در $\cos x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$I=\int\frac{2\cos x\sqrt{2\sin x\cos x}}{\sin^4 x}dx$$

$$I=\int\frac{2\cos^2 x\sqrt{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}}{\sin^4 x}dx$$

$$=\int\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}\times\frac{1}{\sin^2 x}\sqrt{2\,tg x}\,dx$$

$$I=2\sqrt{2}\int cotg^2 x(1+cotg^2 x)\times\frac{1}{\sqrt{cotg x}}dx$$

$$u=cotg x \Rightarrow du=-(1+cotg^2 x)dx$$

$$I=-2\sqrt{2}\int\frac{u^2du}{\sqrt{u}}$$

$$=-2\sqrt{2}\int u^{\frac{3}{2}}du=-2\sqrt{2}\times\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c$$

$$=-2\sqrt{2}\times\frac{cotg^{\frac{5}{2}}x}{\frac{5}{2}}+c$$

$$=-\frac{4\sqrt{2}}{5}cotg^2 x\sqrt{cotg x}+c$$

حل تشریحی تستهای سال چهارم ریاضی

۱- گزینهٔ (۳) جواب است زیرا:

$$M(5,\tfrac{\pi}{6}) \text{ و } N(12,\alpha) \text{ و } MN=13$$

$$MN^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\theta-\theta') \Rightarrow$$

$$169=25+144-120\cos(\alpha-\tfrac{\pi}{6}) \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha-\tfrac{\pi}{6})=0 \Rightarrow$$

$$\alpha-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3} \text{ و } \alpha-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{3}$$

راه دیگر: داریم $12^2+5^2=13^2$ پس مثلث OMN در رأس O قائم الزاویه است یعنی $M\hat{O}N=90°$ است لذا:

$$\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3} \text{ و } \alpha=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{-\pi}{3}$$

۲- گزینهٔ (۲) جواب است زیرا:

$$\vec{v_1}(2,-1,3) \text{ و } \vec{v_2}'(-2,3,0)$$

$$\vec{R}=\vec{v_2}+\vec{v_1}(0,2,3)$$

$$\vec{d}=\vec{v_2}-\vec{v_1}(-4,4,-3)$$

$$Pr\frac{\vec{R}}{\vec{d}}=\frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}=\frac{0+8-9}{\sqrt{16+16+9}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{41}}=\frac{-\sqrt{41}}{41}$$

۳- گزینهٔ (۳) جواب است زیرا:

$$D: 2x-1=y+3=-3z \Rightarrow$$

$$D: \frac{x-\frac{1}{2}}{3}=\frac{y+3}{6}=\frac{z}{-2} \Rightarrow$$

$$\vec{v_1}(3,6,-2) \text{ و } \vec{v_2}(1,-1,2) \Rightarrow$$

$\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}(10,-8,-9)$ بردار نرمال صفحه

$A(\frac{1}{2},-3,0)\in D$ یک نقطه از خط D،

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$10(x-\tfrac{1}{2})-8(y+3)-9z=0 \Rightarrow$$

$$10x-8y-9z-29=0$$

راه دیگر: مختصات نقطهٔ $(\frac{1}{2},-3,0)$ که نقطه‌ای از خط D است، فقط در گزینهٔ (۳) صدق می‌کند زیرا صفحه‌ای که شامل خط D باشد هر نقطه‌ای از این خط را در برمی‌گیرد. پس گزینهٔ (۳) جواب است.

۴- گزینهٔ (۴) جواب است زیرا اگر H پای عمود مرسوم از نقطهٔ A برمحور xها باشد داریم:

$$AH=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

۵- می‌دانیم که اگر:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=K$$

ونقطهٔ O وسط پاره‌خط MM' باشد داریم:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=K^2$$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}-\overline{OA}}=\frac{K^2}{1-K^2} \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\frac{K^2}{1-K^2}$$

پس گزینهٔ (۲) جواب است.

۶-

$$c: 2x^2+2y^2-3x+4y=0 \Rightarrow$$

$$c: x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y=0$$

$$c': x^2+y^2+x-y=1$$

محور اصلی دو دایره $\Delta: x^2+y^2+x-y-1-$

$$(x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2}x-3y-1=0$$

$\Delta: 5x-6y-2=0$ معادلهٔ محور اصلی دو دایره

$$M(a+2,\ 2a-1)$$

$$5(a+2)-6(2a-1)-2=0 \quad (\text{در معادلهٔ محور اصلی})$$

$$\Longrightarrow a=2$$

پس گزینهٔ (۲) جواب است. در ازای مقدار بدست آمده a، نقطهٔ $M(4,3)$ به دست می‌آید که خارج هر دو دایره واقع است.

۷ـ محور کانونی بیضی به معادلهٔ:

$$4x^2+9y^2+16x-18y-23=0$$

خط $y=1$ است که موازی محور xها است (زیرا در معادلهٔ بیضی ضریب x^2 کوچکتر از ضریب y^2 است، $9>4$).

$$f'_x=8x+16=0 \Longrightarrow x=-2$$

محور ناکانونی بیضی

$$f'_y=18y-18=0 \Longrightarrow y=1$$

محور کانونی بیضی

پس $F\left|\begin{matrix}\alpha\pm c\\ \beta\end{matrix}\right.$ یعنی عرض کانون بیضی برابر ۱ می‌باشد

و بین چهار گزینهٔ داده‌شده فقط در گزینهٔ (۳) عرض کانون داده شده ۱ است. پس این گزینه درست است.

۸ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

گزارهٔ $[(p\wedge q)\Longrightarrow p]$ یک استلزام منطقی و همیشه درست است و چون این گزاره تالی گزارهٔ داده‌شده در صورت تست است پس آن گزاره که عکس‌نقیضش را خواسته‌ایم همیشه درست است و لذا عکس‌نقیض آن نیز باید همیشه درست باشد که فقط $p \Longrightarrow p$ دارای ارزش همیشه درست است.

۹ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

در Z_8 مقسوم علیه صفر وجود دارد ($2\otimes 4=0$) پس طبق تعریف نمی‌تواند حوزهٔ صحیح باشد.

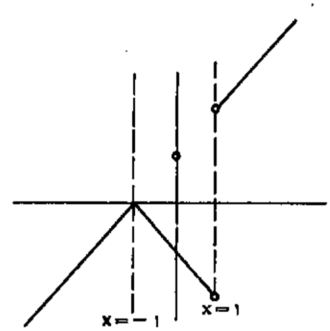
۱۰ـ گزینهٔ (۴) صحیح است.

شروع کرانهای بالای مجموعهٔ A، عدد ۱۰ و شروع کرانهای پایین A، عدد ۵− است.

۱۱ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

ماتریس A یک ماتریس متعامد است (دوران به اندازه ۹۰°) و می‌دانیم تبدیلهای متعامد طول و زاویه را ثابت نگه می‌دارند پس شکل تبدیل‌یافته کاملاً قابل انطباق بر شکل قبل است.

۱۲ـ



$$-1<x<+1 \Longrightarrow y=\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}$$

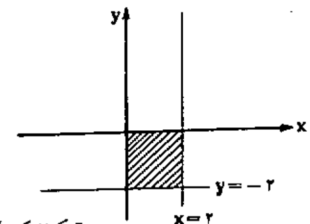
$$\Longrightarrow y=-x-1$$

$$x>1 \quad \text{یا} \quad x<-1 \Longrightarrow y=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$\Longrightarrow y=x+1$$

۱۳ـ

$$\begin{cases}|x-1|\leqslant 1 \Longrightarrow \\ |y+1|\leqslant 1 \Longrightarrow\end{cases} \begin{cases}-1\leqslant x-1\leqslant 1\\ -1\leqslant y+1\leqslant 1\end{cases}$$



$$\Longrightarrow \begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ -2\leqslant y\leqslant 0\end{cases}$$

نمودار یک مربع است

حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ در مثلث ABC، $EF\parallel AB$ است پس:

$$\frac{EF}{AB}=\frac{CF}{CB} \qquad (1)$$

و در مثلث BDC، $EF\parallel CD$ است پس:

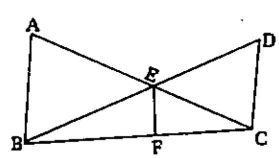
$$\frac{EF}{CD}=\frac{BF}{BC} \qquad (2)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{CF+BF}{BC}$$

$$\Longrightarrow \frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{BC}{BC}=1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EF}$$



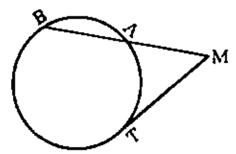
۲ـ می‌دانیم که:

$$MT^2=MA\cdot MB$$

اما:

$$MA=8 \quad \text{و} \quad MA=AB \Longrightarrow MB=16$$

$$\Longrightarrow MT^2=8\times 16=128 \Longrightarrow MT=8\sqrt{2}$$



۳ـ الف) در معادلهٔ $x=-1$ را قرار می‌دهیم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$x=-1 : 25^{-1}=3+m\times 5^{-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{25}=3+\frac{m}{5}$$

$$\frac{m}{5}=\frac{1}{25}-3=\frac{1-75}{25}=\frac{-74}{25}$$

$$\Longrightarrow m=\frac{-74}{5}=-14/8$$

ب)

$$25^x=3+m5^x \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$(5^x)^2-m(5^x)-3=0$$

$$5^x=y : y^2-my-3=0 \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\Delta_y=m^2+12>0$$

مبین معادله همواره مثبت است. پس معادلهٔ (۲) به ازای همهٔ مقادیر m دارای جواب است. اما داریم:

$$y=5^x \Longrightarrow x=\log_5 y$$

پس باید داشته باشیم: $y>0$.

از آنجا که معادلهٔ (۲) به ازای هر مقدار m دارای یک ریشهٔ مثبت است پس معادلهٔ (۱) نیز به ازای همهٔ مقادیر m لااقل دارای یک جواب است.

ج)

$$m=2 : 25^x=3+2\times 5^x \Longrightarrow$$

$$(5^x)^2-2(5^x)-3=0$$

با فرض $y=5^x$ داریم:

$$y^2-2y-3=0 \Longrightarrow$$

$$y=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2 \Longrightarrow$$

$$y=3 \quad \text{یا} \quad y=-1$$

$$y=5^x \Longrightarrow x=\log_5 y \quad (y>0)$$

جواب $y=-1$ قابل قبول نیست زیرا داریم: $y>0$.

$$y=3 : x=\log_5 3 \Longrightarrow \text{مجموعهٔ جواب معادله}=\{\log_5 3\}$$

۴ـ درصورتی که a_1 و u_1 به ترتیب جمله‌های اول و d و q قدرنسبتهای تصاعدحسابی و هندسی باشند، با توجه به فرض مسأله و فرمولهای زیر:

جملهٔ عمومی تصاعدحسابی $a_n=a_1+(n-1)d$

جملهٔ عمومی تصاعدهندسی $u_n=u_1q^{n-1}$

داریم:

$$\begin{cases} x=a_1+4d=u_1q^4\\ y=a_1+16d=u_1q^{16}\\ z=a_1+36d=u_1q^{36}\end{cases}$$

ودر نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x-y=-12d\\ y-z=-20d\\ z-x=32d\end{cases}$$

وبا استفاده از رابطه‌های اخیر داریم:

$$x^{y-z}\cdot y^{z-x}\cdot z^{x-y}$$
$$=(u_1q^4)^{-20d}(u_1q^{16})^{32d}(u_1q^{36})^{-12d}$$
$$=q^{-20d+32d-12d}\cdot u^{-80d+512d-432d}$$
$$=1\times 1=1$$

۵−

$$tg\alpha\, x^2-(tg^2\alpha+3)x+3tg\alpha=0$$
$$\Delta=(tg^2\alpha+3)^2-12tg^2\alpha$$
$$=tg^4\alpha+6tg^2\alpha+9-12tg^2\alpha$$
$$=tg^4\alpha-6tg^2\alpha+9$$
$$=(tg^2\alpha-3)^2$$

پس داریم:

$$x=\frac{tg^2\alpha+3\pm(tg^2\alpha-3)}{2tg\alpha}$$

$$x=\frac{tg^2\alpha+3+tg^2\alpha-3}{2tg\alpha}=\frac{2tg^2\alpha}{2tg\alpha}\overset{(tg\alpha\neq 0)}{=\!=}tg\alpha$$

و یا:

$$x=\frac{tg^2\alpha+3-tg^2\alpha+3}{2tg\alpha}=\frac{6}{2tg\alpha}=\frac{3}{tg\alpha}=3cotg\alpha$$

۶− از فرض:

$$(1+\sin x)(\sin x+\cos x)\neq 0$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{1-\sin x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x}$$
$$(1-\sin x)(1+\sin x)$$
$$=(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)$$
$$1-\sin^2 x=\sin^2 x-\cos^2 x$$
$$1-(1-\cos^2 x)=1-\cos^2 x-\cos^2 x$$
$$3\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{3}$$

$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$$
$$x=2k\pi\pm Arc\cos\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$x\simeq 2k\pi\pm 54/74$$

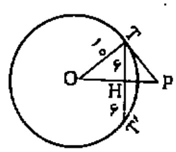
یا

$$x\simeq 2k\pi\pm 125/26$$

حل تشریحی تستهای سال دوم تجربی

۱− گزینهٔ (۲) جواب است زیرا داریم:

$$TT'=12\Rightarrow HT=6\Rightarrow OH=8\Rightarrow$$
$$OT^2=OH\cdot OP\Rightarrow$$
$$100=8\times OP\Rightarrow OP=12/5$$
$$PT=\sqrt{12/5^2-100}=7/5$$



۲− اگر $a=2\sqrt{3}$ و $b=4$ و $c=2$ سانتی‌متر باشد، کوچکترین ضلع AB است و زاویهٔ مقابل به آن زاویهٔ C می‌باشد. پس:

$$\cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{12+16-4}{16\sqrt{3}}$$
$$=\frac{24\sqrt{3}}{16\times 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$$

پس گزینهٔ (۱) جواب است.

۳− گزینهٔ (۲) درست‌است زیرا داریم:

$S=$ شش‌ضلعی منتظم محیط بردایرهٔبه شعاع R

$$\frac{1}{2}nC'_nR=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}R\times R=2\sqrt{3}R^2$$

۴− عبارت $\frac{(1-x^3)^5}{\sqrt{x^3}}$ وقتی معین است که داشته باشیم:

$$x>0 \quad \text{یا} \quad x^3>0$$

و همچنین وقتی منفی است که داشته باشیم:

$$1-x^3<0\Rightarrow x^3>1\Rightarrow x>1$$

بنابراین از اشتراک $x>0$ و $x>1$ داریم: $x>1$.

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵− گزینهٔ (۲) صحیح است. زیرا داریم:

$$\log_y^x=\frac{\log_c^x}{\log_c^y}\Rightarrow 2\log_{x^2}^{(a^2+c^2)}$$

$$=\frac{2\log(a^2+c^2)}{\log x^2}=\frac{2\log(a^2+c^2)}{2\log x}$$
$$=\log_x^{(a^2+c^2)}$$

به همین ترتیب داریم:

$$2\log_{x^2}^{b^2}=\log_x^{b^2}$$

و

$$8\log_{x^8}^{(c^2-a^2)}=\log_x^{(c^2-a^2)}.$$

و با توجه به واسطهٔ حسابی داریم:

$$\log_x^{(c^2-a^2)}+\log_x^{(c^2-a^2)}=2\log_x^{b^2}$$
$$\Rightarrow \log_x^{(c^2-a^2)}=\log_x^{b^2}$$
$$\Rightarrow c^4-a^4=b^4 \Rightarrow a^4+b^4=c^4$$

۶− شرط ریشهٔ مضاعف چنین است:

$$\Delta'=(3b)^2-9ac=0$$
$$\Delta'=9b^2-9ac=0\Rightarrow$$
$$9(b^2-ac)=0\Rightarrow b^2-ac=0$$

بنابراین a وb وc تشکیل یك تصاعدهندسی می‌دهندزیرا:

$$b^2=ac$$

پس گزینه (۲) صحیح است.

۷− گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا داریم:

$$Arc\cos\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0\Rightarrow$$
$$x-\frac{\pi}{3}=k\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

۸− گزینهٔ (۳) صحیح‌است زیرا درصورت‌عبارت:

$$\log\left(tg\frac{\pi}{4}\right)$$

وجود داردکه داریم:

$$\log\left(tg\frac{\pi}{4}\right)=\log 1=0$$

پس صورت عبارت p صفر ومخرج آن عدداست‌که در نتیجه خواهیم داشت: $p=0$ وتنها گزینهٔ (۳) برابر صفر است:

$$\log\sin\frac{\pi}{2}=\log 1=0$$

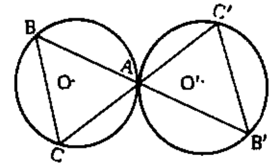
حل مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱− دودایره به شعاعهای برابرکه درنقطه A مماس برونی باشند قرینهٔ مرکزی یکدیگرندکه مرکز تقارن همان نقطهٔ تماس دو دایره است، هرخطی‌که از مرکزتقارن این دو دایره رسم شود و دو دایره‌را در دونقطه مانند B و B' یا C و C' قطع کند نقاط B و B' و همچنین دو نقطهٔ C و C' قرینه مرکزی

یکدیگرند بنابراین :

$$BC \parallel B'C' \quad \text{و} \quad BC = B'C'$$

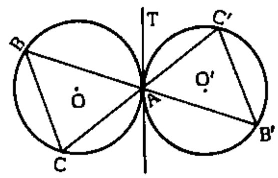
است، زیرا قرینه مرکزی هر پاره‌خط با خود آن پاره‌خط مساوی است. وازطرفی قرینه مرکزی هرخط راست خطی راست موازی خود آن خط است.



راه دیگر: اگرمماس مشترک داخلی این دودایره را رسم کنیم به آسانی ثابت می‌شود که :

$$\hat{B} = \hat{B}' \quad \text{و} \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

است وازآن‌جا ثابت می گردد که دومثلث ABC و A'B'C' باهم برابرند.



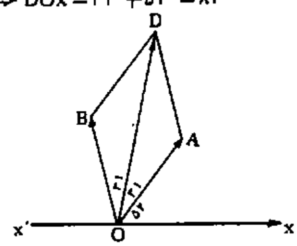
۲ــ چون اندازه‌های دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ باهم برابرند پس بـردار $\overrightarrow{OD}$ یعنی بـرایند این دوبردار نیمساز زاویـهٔ $A\hat{O}B$ می‌باشد اما:

$$A\hat{O}x = ۵۲^\circ \quad \text{و} \quad B\hat{O}x = ۱۱۴^\circ$$

$$\Longrightarrow B\hat{O}A = B\hat{O}x - A\hat{O}x = ۱۱۴ - ۵۲ = ۶۲^\circ$$

$$\Longrightarrow D\hat{O}B = \frac{۱}{۲} A\hat{O}B = \frac{۶۲}{۲} = ۳۱^\circ$$

$$\Longrightarrow D\hat{O}x = ۳۱^\circ + ۵۲^\circ = ۸۳^\circ$$



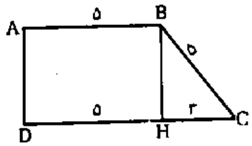
۳ــ اولاًــ از رأس B عمود BH را برقاعدهٔ CD فرود می‌آوریم داریم:

$$CH = ۸ - ۵ = ۳ \quad \text{و} \quad BC = ۵ \Longrightarrow$$

$$BH^۲ = BC^۲ - CH^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶$$

$$\Longrightarrow BH = ۴$$

$$\Longrightarrow AD = ۴$$ اندازهٔ ساق قائم ذوزنقه

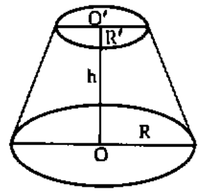


ثانیاًــ حجم مخروط ناقص که شعاعهای دوقاعده‌اش R و R' و ارتفاعش h باشد برابر است با:

$$v = \frac{h}{۳}(\pi R^۲ + \pi R'^۲ + \pi RR')$$

از آن‌جا :

$$v = \frac{۴}{۳}(۲۵\pi + ۶۴\pi + ۴۰\pi) = ۱۷۲\pi$$



۴ــ درتابع f(x) ابتدا x را به g(x) تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۱}{x+۱} \xrightarrow{x \to g(x)}$$

$$f(g(x)) = \frac{۱}{g(x)+۱} \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{x^۲}{x^۲+۱} \qquad (۲)$$

بنابراین از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$fog(x) = \frac{۱}{g(x)+۱} = \frac{x^۲}{x^۲+۱} \Longrightarrow$$

$$\frac{۱}{g(x)+۱} = \frac{x^۲}{x^۲+۱}$$

$$g(x)+۱ = \frac{x^۲+۱}{x^۲} \Longrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x^۲+۱}{x^۲} - ۱ = \frac{۱}{x^۲}$$

اینک ضابطه gof(x) رابه دست می‌آوریم:

$$gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{۱}{x+۱}\right)$$

$$= \frac{۱}{\left(\frac{۱}{x+۱}\right)^۲} \overset{(x \neq -۱)}{=} (x+۱)^۲$$

بنابراین داریم: $D_{gof} = IR - \{-۱\}$.

۵ــ الف) با جایگزین کردن x = ۱ عبارت فوق به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آید. بنابراین باید عامل ابهام (x − ۱) را پس‌از تجزیهٔ صورت ومخرج حذف کرد:

$$\lim_{x \to ۱} \left(\frac{x^۳ - ۳x + ۲}{(x^۵ - ۱)^۲}\right) =$$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{(x-۱)(x^۲+x-۲)}{(x-۱)^۲(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)^۲}$$

با جایگزین کردن x = ۱ در عبارت فوق باز هم حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ پیش خواهد آمد که مجدداً رفع ابهام می‌کنیم:

$$= \lim_{x \to ۱} \frac{(x-۱)(x+۲)}{(x-۱)(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)^۲}$$

پس از رفع ابهام داریم :

$$= \lim_{x \to ۱} \frac{x+۲}{(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)^۲} = \frac{۳}{۲۵}$$

ب)
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^n + n}{x^{n+۱} + x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^n(۱ + \frac{n}{x^n})}{x^n(x + \frac{x}{x^n})} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱ + \frac{n}{x^n}}{x + \frac{۱}{x^{n-۱}}}$$

چون $x \to \pm\infty$ عبارتهای $\frac{n}{x^n}$ و $\frac{۱}{x^{n-۱}}$ به‌صفرمیل می‌کنند، پس داریم :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱}{x} = ۰$$

۶ ــ الف) اگر طرفین معادله را در $۲\sin\frac{\pi}{۵}$ ضرب کنیم وسپس تمام جمله‌ها را به مجموع تبدیل کنیم، صحت اتحاد مسلم می‌شود.

ب) در اتحاد فوق x = ۰ را اختیار می‌کنیم که دراین صورت نتیجهٔ زیرحاصل خواهدشد:

$$\sin\frac{\pi}{۵} + \sin\frac{۳\pi}{۵} = \sin\frac{۲\pi}{۵} + \sin\frac{۴\pi}{۵}$$

اگرطرفین رابطهٔ اخیر را به صورت ضرب تبدیل کنیم، پس‌از ساده‌کردن به تساوی زیر خواهیم رسید :

$$\sin\frac{۳\pi}{۵} = \sin\frac{۲\pi}{۵}$$

و از این تساوی داریم:

$$۳\sin\frac{\pi}{۵} - ۴\sin^۳\frac{\pi}{۵} = ۲\sin\frac{\pi}{۵}\cos\frac{\pi}{۵}$$

و چون $\sin\frac{\pi}{۵} \neq ۰$ است، طرفین آن را به $\sin\frac{\pi}{۵}$ ساده

می‌کنیم :

$$۲-۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۵}=۲\cos\frac{\pi}{۵}$$

$$۲-۲(۱-\cos^{۲}\frac{\pi}{۵})=۲\cos\frac{\pi}{۵}$$

اینک از این رابطه مقدار $\cos\frac{\pi}{۵}$ به دست خواهد آمد:

$$\cos\frac{\pi}{۵}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$$

۷ـ باتوجه به اتحاد زیر:

$$\sin x+\sin(x+\frac{۲\pi}{۵})+\sin(x+\frac{۴\pi}{۵})$$

$$=\sin(x+\frac{\pi}{۵})+\sin(x+\frac{۳\pi}{۵})$$

می‌توان معادلهٔ مفروض‌را چنین نوشت:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۵})+\sin(x+\frac{۳\pi}{۵})=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$$

باتبدیل سمت‌چپ معادله‌به صورت ضرب به معادلهٔ سادهٔ زیر خواهیم رسید :

$$\sin(x+\frac{۲\pi}{۵})=\frac{۱}{۲}$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=۲k\pi+\frac{۱۳\pi}{۳۰} \\ x=۲k\pi-\frac{۷\pi}{۳۰} \end{array}\right.$$

حل تشریحی تستهای سال سوم تجربی

۱ـ گزینهٔ (۴) جواب است زیرا:

$$G\left| \begin{array}{l} x=\frac{x_C+x_A+x_B}{۳}=\frac{۰+۰+۳}{۳}=۱ \\ y=\frac{y_C+y_A+y_B}{۳}=\frac{۰+۳+۰}{۳}=۱ \end{array}\right.$$

$$OG=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

۲ـ گزینهٔ (۱) جواب است زیرا:

$$(\vec{a}+۲\vec{b})(\vec{a}-۳\vec{b})=|\vec{a}|^{۲}-۶|\vec{b}|^{۲}-\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=(۴)^{۲}-۶(۳)^{۲}-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$=۱۶-۵۴-۴\times۳\times\cos\frac{\pi}{۲}=-۳۸$$

۳ـ گزینهٔ (۲) جواب‌است زیرا طبق دستور اولر داریم:

$$F+S=A+۲ \Longrightarrow ۱۲+S=۳۰+۲$$

$$\Longrightarrow S=۲۰$$

۴ـ گزینهٔ (۲) جواب است. زیرا اگر شعاع قاعدهٔ مشترک استوانه دوار ومخروط دوار را R وارتفاع استوانه را h و استوانه مخروط‌را h' فرض کنیم داریم:

$$v=\pi R^{۲}h=۳v'=۳\times\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h' \Longrightarrow$$

$$h=h' \Longrightarrow \frac{h}{h'}=۱$$

۵ـ گزینهٔ (۳) صحیح‌است زیرا داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-۱}{x+۱}>۰ \\ \log\frac{x-۱}{x+۱}\geqslant۰ \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x<-۱ \text{ یا } x>۱ \\ \frac{x-۱}{x+۱}\geqslant۱ \Longrightarrow \frac{x-۱}{x+۱}-۱\geqslant۰ \Longrightarrow x<-۱ \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{x-۱}{x+۱}-۱=\frac{x-۱-x-۱}{x+۱}=\frac{-۲}{x+۱}\geqslant۰ \Longrightarrow x<-۱\right)$$

ازاشتراک ($x<-۱$ یا $x>۱$) و $x<-۱$ نتیجه می‌شود:

$x<-۱$

۶ـ گزینهٔ (۲) صحیح‌است زیرا داریم:

$$fog(x)=(x+\frac{۱}{x})^{۳}-۳(x+\frac{۱}{x})+۳(x+\frac{۱}{x})$$

$$=(x+\frac{۱}{x})^{۳} \qquad (۱)$$

$$f(x)=x^{۳}-۱ \Longrightarrow \qquad (۲)$$

$$f(g(x))=g^{۳}(x)-۱ \Longrightarrow fog(x)=g^{۳}(x)-۱$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$g^{۳}(x)-۱=(x+\frac{۱}{x})^{۳}$$

$$g^{۳}(x)=(x+\frac{۱}{x})^{۳}+۱ \Longrightarrow$$

$$g(x)=\sqrt[۳]{(x+\frac{۱}{x})^{۳}+۱}$$

$$gof(x)=\sqrt[۳]{(x^{۳}-۱+\frac{۱}{x^{۳}-۱})^{۳}+۱}$$

$$\Longrightarrow gof(۰)=\sqrt[۳]{(-۲)^{۳}+۱}$$

$$gof(۰)=-\sqrt[۳]{۷}$$

۷ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا از شرایط پیوستگی داریم :

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$$\left(\lim_{x\to a^{+}} f(x)=\lim_{x\to a^{-}} f(x)=f(a)\right) \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x^{۲}-۴}{۲-x}\right)=c$$

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{(x-۲)(x+۲)}{-(x-۲)}\right)\overset{\text{(رفع ابهام)}}{=\!=\!=}$$

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x+۲}{-۱}\right)=-۴=c \Longrightarrow c=-۴$$

۸ـ گزینهٔ (۱) صحیح است. زیرا داریم:

$$f'(x)=-۲x_M=۰$$

$x_M=۰$ (طول نقطهٔ ماکزیمم) $\Longrightarrow f(۰)=۱$

$$\Longrightarrow M\left|\begin{array}{l}۰\\۱\end{array}\right.$$ مختصات نقطهٔ ماکزیمم

می‌دانیم مرکز تقارن توابع درجهٔ‌سوم نقطهٔ عطف‌آنان می‌باشد بنابراین مرکز تقارن تابع:

$$g(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۱$$

نقطهٔ عطف آن است‌که طول‌آن چنین است:

$$x_p=-\frac{-۳}{۳}=۱$$

$y_p=g(۱)=۲ \Longrightarrow p(۱,۲)$ (مختصات نقطهٔ عطف)

$$g'(x)=۳x^{۲}-۶x+۳ \Longrightarrow$$

$$g'(۱)=۰ \Longrightarrow m=۰$$

(معادلهٔ خط‌مماس)

$$y-y_p=m(x-x_p) \Longrightarrow y-۲=۰$$

اگر d فاصلهٔ نقطهٔ M ازخط مماس‌باشد، داریم:

$$d=\frac{|۱(۱)-۲|}{\sqrt{۱}}=۱ \Longrightarrow \boxed{d=۱}$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ مرکز تقارن منحنی‌نمایش‌تابع هموگرافیک باضابطهٔ

$$y=\frac{x}{x-۱} \quad \text{و یا} \quad xy=x+y$$

محل تلاقی مجانبهای آن است :

$$I(۱\ ,\ ۱)$$

و مختصات مرکز تقارن بیضی به معادلهٔ:

$$f(x,y)=۳x^{۲}+۹y^{۲}-۱۲x-۳۶y+۲=۰$$

از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$\omega\left|\begin{array}{l} f'_x(x,y)=۰ \\ f'_y(x,y)=۰ \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\omega\begin{vmatrix} 6x-12=0 \\ 18y-36=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \omega(2\,,\,2)$$

اینک فاصلهٔ $I\omega$ را تعیین می‌کنیم:

$$I\omega=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$

۲ـ برای تعیین دامنه و بردتابع $fog(x)$ ابتدا باید ضابطهٔ آن‌را مشخص کنیم. برای این منظور ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$gof(x)=g(f(x))=g\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1+x}{\sqrt{1+x}}$$

$$1-\frac{1}{x+1}=t \Rightarrow \frac{1}{x+1}=1-t \Rightarrow$$

$$x+1=\frac{1}{1-t} \Rightarrow x=\frac{1}{1-t}-1$$

$$x=\frac{t}{1-t}\ :\ g(t)=\frac{1+\frac{t}{1-t}}{\sqrt{1+\frac{t}{1-t}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{1-t}}{\sqrt{\frac{1}{1-t}}}=\frac{\sqrt{1-t}}{1-t}$$

t متغیر ظاهری است، بنابراین ضابطهٔ $g(x)$ چنین است:

$$g(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}$$

اینک ضابطهٔ $fog(x)$ را می‌نویسیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+1}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}}{\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}+1}\ \overset{(x\neq 1)}{=\!=}\ \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+1-x}$$

$$y=fog(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+1-x}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$$

تعیین دامنهٔ تابع fog:

$$\begin{cases} x\neq 1 \\ 1-x\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow x<1$$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,1)$$

تعیین بردتابع fog: ازضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود:

$$1+\sqrt{1-x}=\frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-x}=\frac{1}{y}-1=\frac{1-y}{y}>$$

$$\frac{1-y}{y}>0 \Rightarrow 0<y<1 \Rightarrow$$

$$R_{fog}=(0\,,\,1)$$

۳ـ اگر تابع اولیهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)$ را به $F(x)$ نمایش‌دهیم، بدیهی‌است مشتق تابع‌باضابطهٔ $F(x)$ همان تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. پس‌برای تعیین‌ضریب زاویهٔ‌خط مماس برمنحنی نمایش تابع F در نقطه‌ای روی محور عرضها کافی است $f(0)$ را حساب کنیم:

$$m=f(0)=0 \quad \text{(ضریب زاویهٔ خط مماس)}$$

ازشرط این‌که عرض اکسترمم تابع‌اولیهٔ تابع f برابر $\frac{-1}{9}$ است نتیجه می‌شود:

$$F(0)=\frac{-1}{9}$$

$$F(x)=\int\frac{x^9dx}{\sqrt[5]{x^5-1}}$$

$$x^5-1=u \Rightarrow x^5=u+1$$

$$\Rightarrow 5x^4dx=du$$

$$F(x)=\int\frac{x^5\cdot x^4dx}{\sqrt[5]{x^5-1}}=\frac{1}{5}\int\frac{x^5(5x^4)dx}{\sqrt[5]{x^5-1}}$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{(u+1)du}{\sqrt[5]{u}}$$

$$F(x)=\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{5}}(u+1)du$$

$$=\frac{1}{5}\int(u^{\frac{4}{5}}+u^{-\frac{1}{5}})du$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{9}u^{\frac{9}{5}}+\frac{5}{4}u^{\frac{4}{5}}\right)+c$$

$$F(x)=\frac{1}{9}(x^5-1)^{\frac{9}{5}}+\frac{1}{4}(x^5-1)^{\frac{4}{5}}+c$$

$$F(0)=\frac{-1}{9}\ :\ F(0)=\frac{1}{9}(0-1)^{\frac{9}{5}}$$

$$+\frac{1}{4}(0-1)^{\frac{4}{5}}+c=\frac{-1}{9} \Rightarrow c=-\frac{1}{4}:$$

$$F(x)=\frac{1}{9}(x^5-1)^{\frac{9}{5}}+\frac{1}{4}(x^5-1)^{\frac{4}{5}}-\frac{1}{4}$$

۴ـ الف)

$$\cos x\sin x-m\cos^2x=\frac{1-m}{2}$$

$$2\sin x\cos x-2m\cos^2x=1-m$$

$$\sin 2x-m(2\cos^2x-1)=1 \Rightarrow$$

$$\sin 2x-m\cos 2x=1$$

با توجه به اتحادهای مثلثاتی:

$$\cos 2x=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} \text{ و } \sin 2x=\frac{2tgx}{1+tg^2x}$$

داریم:

$$\left(\frac{2tgx}{1+tg^2x}\right)-m\left(\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}\right)=1 \Rightarrow$$

$$2tgx-m+m\,tg^2x=1+tg^2x$$

$$(m-1)tg^2x+2tgx-(m+1)=0$$

از معادلهٔ اخیر داریم:

$$tgx=1 \quad \text{یا} \quad tgx=\frac{1+m}{1-m}=tg\alpha$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

یا

$$x=k\pi+\alpha\ \left(\alpha=Arctg\frac{1+m}{1-m}\right)$$

بنابراین معادله همواره دارای جواب $k\pi+\frac{\pi}{4}$ است و به m بستگی ندارد.

ب) $m=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$:

$$tgx=\frac{1+m}{1-m}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$tgx=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

پس مجموعهٔ جوابهای معادله چنین است:

$$R=\left\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{4},\ x=k\pi+\frac{\pi}{3}\right\}$$

۵ـ می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

وهمچنین برای هرمثلث‌به اضلاع a و b و c داریم:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A\ ,\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

ازتقسیم دو رابطهٔ اخیر داریم:

$$\frac{2S}{a^2}=\frac{bc\sin A}{b^2+c^2-2bc\cos A}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow 2bc\sin A+2\sqrt{3}\,bc\cos A=\sqrt{3}(b^2+c^2)$$

$$\sin A+\sqrt{3}\cos A=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{2bc}$$

(معادلهٔ کلاسیك نوع اول)

$$\sin A+tg60^\circ\cos A=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{2bc}$$

$$\sin A+\frac{\sin 60^\circ\cos A}{\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{2bc}\Longrightarrow$$

$$\frac{\sin(A+60^\circ)}{\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{2bc}$$

$$\sin(A+60^\circ)=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{4bc}\qquad(1)$$

طرف دوم تساوی (1) نشان می‌دهد که $A+60^\circ$ از 180° کمتراست ودر نتیجه خواهیم داشت:

$$60^\circ<A+60<180^\circ\Longrightarrow$$

$$0<\sin(A+60)\leqslant 1\Longrightarrow$$

$$0<\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2)}{4bc}\leqslant 1\Longrightarrow$$

$$\sqrt{3}(b^2+c^2)\leqslant 4bc$$

$$\sqrt{3}(b+c)^2-2\sqrt{3}bc\leqslant 4bc\Longrightarrow$$

$$\sqrt{3}(b+c)^2\leqslant 2(2+\sqrt{3})bc$$

$$\frac{(b+c)^2}{2bc}\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Longrightarrow$$

$$\frac{(b+c)^2}{2bc}\leqslant\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\qquad\text{(شرط جواب)}$$

از تساوی (1) زاویهٔ A به دست می‌آید (یك و یا دو جواب برای A). برای محاسبهٔ دو زاویهٔ دیگر $\hat{B}$ و $\hat{C}$ داریم:

$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{C}=\pi-A\\ \dfrac{b}{\sin\hat{B}}=\dfrac{c}{\sin\hat{C}}\end{cases}\qquad(2)$$

$$\Longrightarrow\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}=\frac{b}{c}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه نتیجه می‌شود که:

$$tg\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=\frac{b-c}{b+c}\,cotg\frac{\hat{A}}{2}\qquad(3)$$

از معادلهٔ (3) $tg\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ ودر نتیجه $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ به دست می‌آید واز دستگاه (2) زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ حاصل می‌شود.

برای محاسبهٔ ضلع a نیز از تساوی:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

استفاده می‌کنیم.

حل تشریحی تستهای ریاضیات سال چهارم تجربی

۱- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا داریم:

$$f(x)=\log_2\frac{4-x^2}{2+x}=\log_2\frac{(2-x)(2+x)}{2+x}$$

$$x\neq-2:\ f(x)=\log_2(2-x)\Longrightarrow$$

$$2-x>0\Longrightarrow x<2$$

از اشتراك $x\neq-2$ و $x<2$ داریم:

$$DF=(-\infty,-2)\cup(-2,2)$$

۲- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا بـا تبدیل x به $\frac{1}{x}$ دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}2f(\frac{1}{x^5})+f(x^5)=\frac{1}{x}\\ f(\frac{1}{x^5})+2f(x^5)=x\end{cases}\Longrightarrow$$

$$f(x^5)=\frac{2x}{3}-\frac{1}{3x}$$

$$x^5=t\Longrightarrow x=\sqrt[5]{t}$$

$$f(t)=\frac{2\sqrt[5]{t}}{3}-\frac{1}{3\sqrt[5]{t}}\Longrightarrow$$

$$f(x)=\frac{2\sqrt[5]{x}}{3}-\frac{1}{3\sqrt[5]{x}}\ \text{و}\ g(x)=\frac{1}{x}$$

$$fog(x)=\frac{2}{3\sqrt[5]{x}}-\frac{\sqrt[5]{x}}{3}\Longrightarrow$$

$$fog(-1)=\frac{-2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{-1}{3}$$

۳- گزینه (۲) صحیح است. زیرا می‌دانیم:

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+x}{2x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x^5+4x^7-1}{x^7+x^5+x^2}\right)=\frac{1}{2}\times4=2$$

۴- از شرایط پیوستگی داریم:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to0}(2x^4+k)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 2x}{x^2}\right)=f(0)=k$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}4\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=4$$

$$\Longrightarrow k=4$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

۵- می‌دانیم ریشه‌های حقیقی مشتق تابع درجهٔ سوم طولهای ماکزیمم و مینیمم را می‌دهد:

$$y'=3x^2+2mx+1=0\Longrightarrow$$

$$x_M+x_m=\frac{-2m}{3}$$

از طرفی مرکز تقارن تـابع هموگرافیك، محل تلاقی مجانبهای آن است:

$$I\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

بنابراین طول مرکز تقارن تابع $y=\frac{2x-1}{3x+1}$ برابر $\frac{-1}{3}$ است ودر نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{-2m}{3}=\frac{-1}{3}\Longrightarrow m=\frac{1}{2}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۶- به ترتیب داریم:

$$\frac{\cos B-\cos C}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\cos B+\cos C}$$

$$(\cos B-\cos C)(\cos B+\cos C)$$

$$=(1-\cos A)(1+\cos A)$$

$$\cos^2B-\cos^2C=1-\cos^2A\Longrightarrow$$

$$1-\cos^2A+1-\cos^2B=1-\cos^2C$$

$$\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C\Longrightarrow$$

$$\frac{\sin^2A}{4R^2}+\frac{\sin^2B}{4R^2}=\frac{\sin^2C}{4R^2}$$

$$\left(\frac{\sin A}{2R}\right)^2+\left(\frac{\sin B}{2R}\right)^2=\left(\frac{\sin C}{2R}\right)^2\Longrightarrow$$

$$a^2+b^2=c^2\qquad\text{(مثلث قائم‌الزاویه)}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۷- معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$m(\sin x+\cos x)+\cos x=\sin x+2$$

(معادله کلاسیك نوع اول)

$$(m-1)\sin x+(m+1)\cos x=2$$

$$\Delta=(m+1)^2+(m-1)^2-4$$

$$=m^2+2m+1+m^2-2m+1-4$$

$$\Delta=2m^2-2<0\Longrightarrow$$

$$m^2<1\Longrightarrow-1<m<1$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

حل ـ اگر او آخرین ۵ ریال را در مغازه پنجم خرج نمی‌کرد برایش ۵ ریال بیشتر از وقت خروجش از این مغازه باقی می‌ماند، و این نصف آن مبلغی است که او به‌هنگام ورود به مغازه پنجم داشته است. پس اگر از آخرین مغازه شروع کنیم که پس از آن دیگر مهرداد هیچ پولی نداشته است، خواهیم داشت:

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ پنجم داشته است:

$۲(۰ + ۵) = ۱۰$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ چهارم داشته است:

$۲(۱۰ + ۵) = ۳۰$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ سوم داشته است:

$۲(۳۰ + ۵) = ۷۰$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ دوم داشته است:

$۲(۷۰ + ۵) = ۱۵۰$

مبلغی که مهرداد هنگام ورود به مغازهٔ اول داشته است:

$۲(۱۵۰ + ۵) = ۳۱۰$

پس پولی را که مهرداد قبل از خرید داشته است ۳۱۰ ریال است.

جواب ۲

اشخاص مورد سؤال به چهار دسته تقسیم می‌شوند:

آنهائیکه از محصول استفاده نمی‌کنند A:

عدّه‌ای که آن را فقط به‌صورت مایع بکار می‌برند B:

تعدادی که از محصول به هر دوصورت استفاده می‌کنند C:

عده‌ای که آن را فقط به‌صورت پودر بکار می‌برند D:

بموجب داده‌ها داریم:

$A + D = \frac{۲}{۷}$ کلّ افراد مورد سؤال. و $A + B = \frac{۱}{۳}$ کلّ افراد مورد سؤال. و $A = \frac{۱}{۵}$ کلّ افراد مورد سؤال. و $C = ۴۲۷$. از آنجا:

$$B = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۱۵} \quad و \quad D = \frac{۲}{۷} - \frac{۱}{۱۵} = \frac{۳}{۳۵} \quad و$$

$$A + B + D = \frac{۴۴}{۱۰۵} \Rightarrow C = \frac{۶۱}{۱۰۵}$$

$$۴۲۷ : \frac{۶۱}{۱۰۵} = \frac{۴۲۷ \times ۱۰۵}{۶۱} = ۷۳۵$$

پس تمام افراد مورد سؤال ۷۳۵ نفر می‌باشند.

جواب ۳

به‌طور متوسط ۷۳ مرغ در یک روز یک دوجین تخم می‌کنند و ۳۷ مرغ یک کیلو دانه را در یک روز می‌خورند برای برداشتن یک دوجین تخم مرغ در یک روز لازم‌است که ۷۳ مرغ در یک روز دانه بخورند برای این منظور $\frac{۷۳}{۳۷}$ کیلو دانه لازم است که آن کمی کمتر از دوکیلو می‌شود

جواب ۴

مربع سحرآمیز مورد بحث چون سر و ته شود باز هم می‌تواند مربع سحرآمیز خوانده شود.

In the name of God

Borhan
VOL.2. No.3
Serial numbers; 7
Aug 1993

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

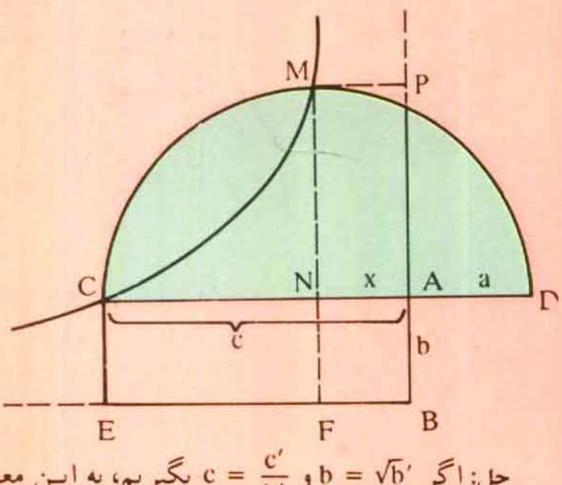
1. The first word — editor
2. You, too, may be successful in your mathematics lessons — Parviz Shahriari
3. Differential and integral (2) — Ahmad Ghandehari
4. Instruction of translation of mathematics articles — Hamid Reza Amiri
5. Conditional Proof — Gholam Reza Yassipour
6. Fundamental concepts and axioms in solid geometry(1) — Parviz Shariari
7. A brief history of Persian mathematics Journals (6)
8. Short articles of authentic mathematics journals (5) — Nagmeh Sharikzadeh
9. An interesting problem about ... — Hassan Nassiri
10. Inverse function of trigonometric function — Ali Hassan Zadeh Makooi
11. Solving a fundamental problem of mathematics by elementary methods (5)
12. Common perpendicular of two skew lines — M.A. Gitizadeh
13. Determination of domain and range of a function (2) — M.R. Hashemi
14. Centre finder of a circle
15. Books introduction
16. Answer to letters
17. Contest problems
18. Solutions of contest problems
19. Problems — Amiri, Ghandehari, Rostami, Hashemi
20. Solutions and hints of problems of No. 6. — Amiri, Ghandehari, Rostami, Hashemi

روش حکیم عمر خیام، برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم

خیام (سدهٔ پنجم هجری قمری ـ سدهٔ یازدهم میلادی)، اهل نیشابور خراسان، یکی از بزرگترین دانشمندان مسلمان ایرانی، نوشته‌هایی در زمینهٔ ریاضیات، اخترشناسی، فیزیک و شعر و عرفان از خود باقی گذاشته و تقویم جلالی یا ملکشاهی را تنظیم کرده است. مسأله‌ای که در این جا می‌آید، از کتاب «الجبر و المقابلة» او برداشته شده است.

با فرض مثبت بودن ضریبهای a، b' و c'، مطلوب است حل معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^3 + ax^2 + b'x = c'$$



حل: اگر $b = \sqrt{b'}$ و $c = \frac{c'}{b'}$ بگیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$x^3 + ax^2 + b^2x = b^2c \ (*)$$

مستطیل ABEC را با ضلعهای $|AB| = b$ و $|AC| = c$ می‌سازیم و پاره‌خط راست CA را به‌اندازهٔ $|AD| = a$ امتداد می‌دهیم. شاخه‌ای از هذلولی متساوی‌الساقینی را رسم می‌کنیم که از نقطهٔ C بگذرد و خطهای راست AB و BE مجانبهای آن باشند. اگر این هذلولی، نیم دایره «به قطر [CD] را در M قطع کند، آن‌وقت طول پاره‌خط راست AN (N، پای عمودی است که از M بر [CD] فرود آمده است)، برابر x.

اثبات: دو مستطیل MPBF و ABEC مساحتهایی برابر دارند (چرا؟)، بنابراین دو مستطیل MPAN و NFEC هم ارزند، یعنی:

$$\frac{|MN|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|AN|} \qquad (1)$$

ولی $|MN|^2 = |DN| . |NC|$، بنابراین:

$$\frac{|MN|^2}{|NC|^2} = \frac{|DN| . |NC|}{|NC|^2} = \frac{|DN|}{|NC|} \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{|AB|^2}{|AN|^2} = \frac{|DN|}{|NC|} \Rightarrow |NC| . |AB|^2 = |DN| . |AN|^2$$

و یا $(c - x)b^2 = (a + x)x^2$ که بعد از منظم کردن، به‌همان معادلهٔ (*) می‌رسیم.

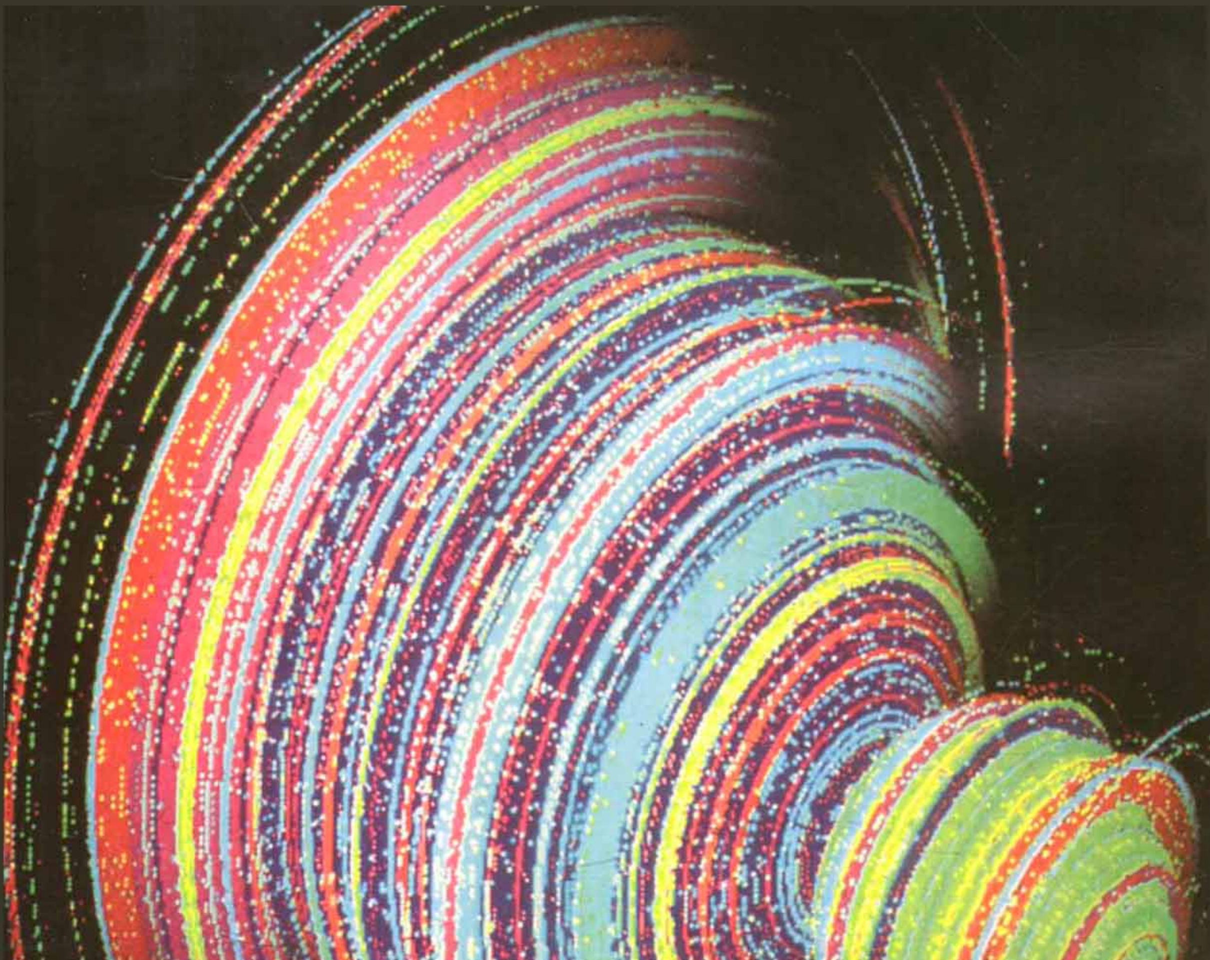
خیام، با پیدا کردن یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم (و اغلب به‌طریق هندسی و با استفاده از مقطعهای مخروطی)، معادله را حل شده می‌پنداشت و به جست و جوی ریشهٔ احتمالی دیگر نمی‌رفت. خیام به ریشه‌های منفی معادله هم، توجهی نداشت.

مجله ریاضی

برهان

برای دانش‌آموزان دبیرستان

۸



سال سوم، پاییز ۱۳۷۲، شمارهٔ اول، بهاء ۱۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

سال سوّم، پاییز ۱۳۷۲، شماره اول

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

• حرف اول

• شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۸)/ پرویز شهریاری ۲

• مشتق‌پذیری/ احمد قندهاری ۵

• آموزش ترجمه متون ریاضی/ حمیدرضا امیری ۱۳

• در باغ تجربه‌ها ۱۹

• تابع معکوس تابعهای مثلثاتی قسمت سوم/ علی‌حسن‌زاده ماکویی ۲۶

• تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۷) ۳۱

• فاصله یک نقطه از یک مجموعه نقاط/ دکتر احمد شرف‌الدین ۴۰

• مفهوم‌های اصلی و اصل موضوعها در هندسه فضایی (قسمت دوم)/ پرویز شهریاری ۴۳

• روش برهان خُلف/ غلامرضا یاسی‌پور ۴۶

• حلقه و میدان/ حمیدرضا امیری ۴۸

• پارادوکس وصیت شگفت‌انگیز/ حسن نصیرنیا ۵۸

• تعیین دامنه و برد توابع (قسمت سوم)/سیدمحمدرضا هاشمی ۶۰

• مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۶)/ غلامرضا یاسی‌پور ۶۶

• طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۶) ۷۰

• تحقیقی پیرامون عدد پی/ احسان رضایی ۷۴

• جواب نامه‌ها ۷۷

• حل مسائل مسابقه‌ای برهان (۶) ۸۰

• مسائل مسابقه‌ای/ سیدمحمدرضا هاشمی ۸۱

• مسائل برای حل ۸۲

• حل مسائل برهان ۷ ۸۷

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه بهرام چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷، ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، فاکس ۸۸۲۰۵۹۹

حرف اول

عزیزان دانش‌آموز، آیا تاکنون فکر کرده‌اید وظیفه چیست؟

آیا شما هم وظیفه‌ای را بردوش خود احساس می‌کنید؟ اگر جواب مثبت است، وظیفهٔ اصلی شما چیست؟ چگونه و تا چه‌حدّ به وظیفهٔ خود عمل می‌کنید؟ آیا تاکنون وظیفهٔ خود را باوظایف دیگران مقایسه کرده‌اید؟ کدام راحت‌تر است؟

یقین دارم با من هم‌عقیده‌اید که شما هم مانند دیگر اقشار جامعه وظیفه‌ای بر دوش دارید که به نحواحسن باید آن را انجام دهید، خوشبختانه وظیفه شما شاید راحت‌ترین و دلچسب‌ترین وظایف موجود در جامعه است؛ درس‌خواندن و فراگیری علم.

البته هستند عزیزانی که به دلایل مختلف در کنار تحصیل کار هم می‌کنند. اما شما دوست عزیز که تنها وظیفه‌ات درس‌خواندن است، آیا به این وظیفه بخوبی عمل می‌کنی؟ چه کاری و چه وظیفه‌ای راحت‌تر از درس‌خواندن، آن هم برای خودت و آیندهٔ خودت. کاری که تمام بزرگان دین ما نیز در این زمینه مشوق شما هستند، جامعه نیز ارزش والایی برای آن قائل است و تو در انجام این وظیفه از تمامی امکانات جامعه و بیت‌المال از جمله وجود باارزش معلم، محیط آموزشی و زحمات پدر و مادر، برخوردار هستی. پس اگر به وظیفه‌ات عمل نکنی به همهٔ مردم خیانت کرده‌ای و این خیانتی است نابخشودنی.

اگر هر شخص در هرمقام و جایی که واقع است، وظیفه‌ای را که بر عهده دارد به نحواحسن به انجام برساند جامعه هیچ‌وقت دچار کمبود و مشکل نخواهد شد، شما هم یکی از اجزاء و ارکان بسیار مهمّ این جامعه هستید و آیندهٔ امّت اسلامی با آیندهٔ شما گره خورده است.

قبلاً گفتیم (در شمارهٔ قبل) که انجام وظیفه، باید به سمت رضای خدا میل کند و اگر چنین باشد اثرات آن دلپذیرتر و ماندنی‌تر است.

امّا چه کنیم که به وظیفهٔ‌مان کاملاً عمل کنیم و چگونه برنامه‌ریزی کنیم تا دانش‌آموزی موفق باشیم. این بحثی است که ـ ان‌شاءا... ـ در شماره‌های بعد به آن خواهیم پرداخت.

در این‌جا از شما عزیزان تقاضا دارم نظرات و پیشنهادات خود را برای ما نوشته و ارسال کنید تا بهتر بتوانیم وظیفه مهم دانش‌آموزی را شناسایی کرده و راه رسیدن به هدف که همانا انجام این وظیفه است را هموار کنیم تا رهروان این راه بهتر بتوانند در آن قدم بزنند.

سردبیر

شما هم مـــی‌توانــید در درس ریاضی خود موفق باشید (۸)

پرویز شهریاری

روش یادگیری در کلاس درس

راست بایستید و سعی کنید هر دو دست خود را چندبار و با هم، حرکت دهید، ولی یکی از دستها را بالا و پایین و دیگری را به راست و چپ ببرید ... حق با شماست. کار دشواری است. دستها تسلیم ارادهٔ شما نمی‌شوند؛ حرکتها مخلوط می‌شوند: یا هر دو دست بالا و پایین می‌روند و یا هر دو به راست و چپ حرکت می‌کنند... اگر کسی بخواهد؛ مثلاً" بیست بار پشت سرهم، این حرکت دستها را، درست و بدون اشتباه، انجام دهد، باید ساعتها و روزها تمرین کند و تازه من تردید دارم به نتیجهٔ مطلوب برسد. چرا؟ به ظاهر دشواری از این جا ناشی می‌شود که مغز آدمی نمی‌تواند یا عادت نکرده است، به طور هم زمان، به دو موضوع متفاوت بیندیشد: وقتی به نوع حرکت دست راست می‌اندیشید؛ دست چپ هم از همان اندیشه یا اراده پیروی می‌کند و برعکس.

وقتی در کلاس، جذب سخنان دبیر خود شده‌اید و همهٔ «هوش و حواس» شما متوجه حرفهای اوست، تقریباً" هیچ صدای دیگری را نمی‌شنوید، در حالی که سر و صدای کم و بیش یکنواخت بازی بچه‌ها در حیاط مدرسه و یا عبور اتومبیلها درخیابان، به طور دائم وجود دارد. ولی اگر به سخنان دبیر خود بی‌علاقه باشید، با آن که موجهای حاصل از صدای او به گوش شما می‌رسد، آنها را نمی‌شنوید...

فیلم مورد علاقهٔ خود را تماشا می‌کنید. تلفن زنگ می‌زند و ناچار می‌شوید؛ گوشی را بردارید و با دوست خود صحبت کنید. ضمن مکالمهٔ تلفنی به تلویزیون نگاه می‌کنید. ولی شما که حواستان متوجهٔ سخنان آن طرف سیم تلفن می‌باشد؛ دیگر گفت و شنودهای فیلم تلویزیونی را نمی‌شنوید؛ و اگر، ضمن تلفن، به فیلم توجه کنید، آن وقت جمله‌هایی از حرفهای دوستتان را از دست می‌دهید...

در زبان فارسی ضرب‌المثل جالبی وجود دارد که «بایک دست نمی‌توان دو هندوانه برداشت»

به گمان من ، این ضرب‌المثل، اشاره‌ای به همین حقیقت دارد که: «به طور همزمان و با هم، نمی‌توان دو کار را انجام داد». ذهن آدمی، دریک لحظه تنها به یک چیز و یک نقطه توجه دارد و ـ جز در مورد برخی آدمهای استثنایی (که بسیار نادرند)ـ نمی‌تواند در عین حال به دو کار متفاوت بپردازد. مغز ما نمی‌تواند دو فرمان مختلف را، همزمان صادر کند که مثلاً"، هم درست بنویسیم و هم درست بشنویم. البته، این موضوع، شامل کارهایی نمی‌شود که غریزی‌اند و یا به صورت عادت درآمده‌اند، مثل نفس کشیدن و یا راه رفتن. شما می‌توانید، ضمن راه رفتن صحبت بکنید، ولی اگر بخواهید از عرض یک خیابان شلوغ بگذرید، اغلب ناچار می‌شوید حرف خود را قطع کنید، چراکه، ضمن عبور ازعرض خیابان، دیگر از عادت خود پیروی نمی‌کنید و باید حواستان جمع باشد تا با اتومبیلی برخورد نکنید. توصیه می‌کنند، اگر فکر ناراحت کننده‌ای شما را آزار می‌دهد و مانع خواب شما می‌شود، به طور مثال، از ده هزار آغاز کنید و عددها را از بالا به پایین، شمرده و روشن نام ببرید: ده هزار، نه هزارو نه صدو نود ونه، نه هزارو نه صدو نودو هشت،... و به شما اطمینان می‌دهند که، در میانه‌های شمارش، خواب به سراغ شما می‌آید. می‌دانید چرا؟ شما در نام بردن عددها، از پایین به بالا، عادت کرده‌اید و اغلب نیازی به تمرکز اندیشهٔ خود ندارید، ولی وقتی از بالا به پایین می‌شمارید، باید حواس و فکر خود را

متمرکز کنید تا دچار اشتباه نشوید: این جا عادت کمک زیادی به شما نمی‌کند. چون فکر نمی‌تواند در دو جای مختلف متمرکز شود، به ناچار از فکر آزار دهنده‌ای که موجب بی‌خوابی شما شده بود، دور می‌شوید و آرام آرام، خواب به سراغ شما می‌آید.

کسانی که به اندازهٔ کافی کار می‌کنند، دائم در اندیشهٔ کار خود هستند و وقتی را به بطالت نمی‌گذرانند، خیلی کمتر از آدمهای بی‌کار، به پزشک مراجعه می‌کنند. بدن آدمی زنده است و هر جزء و هر اندام بدن ـ هر چند کوچک باشد ـ باز هم مجموعه‌ای از سلولهای زنده راتشکیل می‌دهد. هر مجموعهٔ زنده، ضمن تلاش و تکاپو، منجر به برخوردهایی در عنصرهای خود می‌شود و آثار ناشی از این تماسها و برخوردها، به نحوی خود را نشان می‌دهند. یکی از آثار تماس سلولهای بدن آدمی با یکدیگر و با دنیای خارج، احساس درد یا احساس سوزش وخارش است. شما هم اکنون که این مقاله را می‌خوانید، نوشته را کنار بگذارید و تمام حواس خود را به این نکته متوجه کنید که، مثلاً «نوک دماغ شما می‌خارده. اگر اندک زمانی، با تمام حواس خود، به آن بیندیشید، متوجه می‌شوید که، در واقع هم، نوک دماغ شما می‌خارد. «بیماران خیالی» بسیارند و گونه‌های متفاوت دارند، ولی یکی از این گونه‌ها بی‌کارانی هستند که به طور دائم، به سلامتی خود می‌اندیشند و «درد» ها و «سوزش» های مختلفی را در اندامهای بدن خود «کشف» می‌کنند.

همین اصل روان شناسی است که باید، ضمن یادگیری، مورد توجه قرار گیرد. به چه منظور به مدرسه می‌روید؟ چرا در کلاس درس حاضر می‌شوید؟ مگر نمی‌شود، آنچه را که می‌خواهید و علاقه‌مندید، ضمن مطالعه و پیش خود به دست آورید؟ کتابها، جزوه‌ها و رساله‌های راهنما در اختیار شماست... پس مدرسه و کلاس چه نقشی دارد؟

۱ ـ حقیقت این است که همه چیز رانمی‌توان در کتاب درسی و یا کتابهای دیگر پیدا کرد. گذشته از این، ضمن پرسشهای دانش‌آموزان ویا بیانهای درست و نادرستی که از زبان دانش‌آموزان مختلف جاری می‌شود، خیلی چیزها می‌توان آموخت.

۲ ـ هنوز عادت نشده‌است که معلمان و نویسندگان کتابهای درسی یا کمک درسی، سعی کنند همهٔ تجربه‌های دوران طولانی کار خود را به روی کاغذ بیاورند و در اختیار ما بگذارند.

تازه این خاطره‌نویسی هم، تمامی مشکل را حل نمی‌کند. هر معلم آزموده، سر کلاس درس، به مناسبت بحثی که پیش می‌آید یا به مناسبت اشتباهی که یک دانش‌آموز در حل مسأله‌ای مرتکب می‌شود، می‌تواند با یک جمله یا یک اشاره و یا یک خاطره کوتاه، دشواریهای زیادی را از ذهن شما دور کند و مسیر روشنی را دربرابر شما بگذارد که با خواندن چند کتاب، به آن نرسید.

همین اشاره‌ها و نکته‌های کوتاه معلم است که وجود مدرسه و کلاس را مفید و لازم می‌سازد. وگرنه، برای حل یک مسأله، یا درک مضمون یک درس، یا به دست آوردن مجموعه‌ای از پرسشها و مسأله‌ها، می‌توانید به کتاب و جزوه‌ها مراجعه کنید و، در واقع، نیازی به معلم و کلاس نداشته باشید.

اگر چنین است، باید تمام توجه شما در کلاس درس، متوجه شکار همین نکته‌ها و اشاره‌ها باشد و این، البته، با یادداشت کردن آنچه معلم روی تخته می‌نویسد، منافات دارد. و باید گفت که رونویسی از نوشته‌های روی تخته، به صورت عادتی برای بیشتر دانش‌آموزان درآمده است.

وقتی شما به تخته نگاه می‌کنید و آنچه را که بر آن نقش بسته است، در دفتر خود وارد می‌کنید، به خصوص که همیشه در نگرانی پاک شدن نوشته‌های تختهٔ سیاه به سر می‌برید، نمی‌توانید دربارهٔ آنچه می‌نویسید بیندیشید و، بدتر از آن، نمی‌توانید سخنان معلم را بشنوید و درک کنید.

اگر به نوشته یا خط معلم علاقه دارید، می‌توانید دوربینی با خود داشته باشید و هر بار که تخته پراز نوشته شد، عکسی از آن بگیرید! ولی در واقع، این نوشته‌ها یا عکسها، تنها می‌توانند جنبهٔ یادگاری داشته باشند، ولی به یادگیری ریاضیات هیچ ربطی ندارند.

۳ ـ اگر عادت کرده‌اید: وقتی معلم درس می‌دهد، با عجله (و به طور طبیعی، بدون فکر)، همهٔ گفته‌ها و نوشته‌های او را در دفتر خود وارد کنید، باید مطمئن باشید که از درس معلم، اگر نگوییم هیچ بهره‌ای نبرده‌اید، بهرهٔ بسیار کمی برده‌اید.

ذهن و اندیشهٔ شمانمی‌تواند، در عین حال، هم متوجهٔ تختهٔ سیاه و نوشتن سریع نقش و نگارهای روی آن، در دفترچه باشد و هم

اشاره‌های پر ارزش معلم را بشنود و درک کند. و چنین است که با ارزشترین چیز را، چیزی راکه فلسفهٔ وجودی مدرسه و کلاس بر اساس آن نهاده شده است، از دست می‌دهد.

سرکلاس فقط گوش کنید. با تمام وجود خود گوش کنید. سعی کنید هر واژه‌ای راکه از زبان معلم بیرون می‌آید، درک و هضم کنید. تنها در این صورت است که می‌توانید درس را یاد بگیرید، با دشواریهای ذهنی و استدلالی خود آشنا شوید، نقص روشهای کار خود را پیدا کنید... و، در ضمن، به موقع بپرسید، به موقع اعتراض کنید و،در نتیجه، به اشاره‌ها و نکته‌های گرانبهای معلم دست یابید.

البته می‌توانید (حتی باید) دفترچه‌ای جلوی روی خود داشته باشید، ولی در آن تنها برخی واژه‌ها را بنویسید همین قدر که به کمک آنها بتوانید، در منزل، سخنان معلم را به یاد آورید. تنها صورت مسأله‌هایی راکه معلم، به عنوان نمونه، درکلاس حل می‌کند، در دفتر خود بنویسید و بعد، با تمام وجود خود، به راه حلی که معلم ارائه می‌دهد توجه کنید و حل دوبارهٔ این مسأله‌ها را به زمانی واگذارید که به منزل رسیده‌اید.

به عنوان نمونه بحث کلاس مربوط به لگاریتم است. مطلب برای شما تازگی دارد. شما، بدون این که چشم از دبیر خود بردارید، با دقت به سخنان او گوش می‌دهید. در پایان درس، این چند واژه یا رابطهٔ پراکنده را بر دفتر خود نوشته‌اید:

لگاریتم = عکس عمل توان؛ مبناهای مختلف؛ عدد غیر مثبت و لگاریتم

مبنای بین صفر و یک، مبنای بزرگتر از واحد

$a^{\log_a x} = X$ ، (a و $x > ۰$)

لگاریتم حاصل ضرب؛ ... تمرین در صفحهٔ ... از شمارهٔ ...

و یا وقتی سرکلاس مثلثات نشسته‌اید:

سینوس و تانژانت مجموع سه کمان، $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{۲}$ (یا π)، ۳α و ۵α و ۷α ؛...

تمرین در صفحهٔ ... از شمارهٔ...

شاید کسی، جز خود شما، از این اشاره‌ها چیزی سر در نیاورد، ولی این مهم نیست، مهم این است که با این اشاره‌های کوتاه بتوانید تمامی درسی راکه معلم داده است، به یاد آورید. این که با این اشاره‌ها چه کنید، می‌ماند برای کار در منزل که دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد.

در کلاس درس ریاضی (و البته، نه تنها ریاضی)، سراپا گوش باشید. سعی کنید حتی یک جمله یا یک واژهٔ درس را از دست ندهید. به موقع بپرسید. تنها برخی اشاره‌ها را یادداشت کنید (و صورت مسأله‌های نمونه را). ترتیبی بدهید وقتی از کلاس بیرون می‌آیید، درس تازه را به طور کامل فهمیده باشید.

سر کلاس و موقع درس معلم، خود را به صورت منشی و تندنویس در یک مجلس سخنرانی، در نیاورید. با دقت گوش کنید تا با ظرایف کار و نکته‌های گرهی و آموزنده آشنا شوید. انتقال نوشته‌های روی تختهٔ سیاه به دفترچهٔ شما، هیچ سودی ندارد، حتی به بهتر شدن خط شما هم کمک نمی‌کند، چراکه همه چیز را با عجله و همراه با دل واپسی می‌نویسید.

تا بعد

ادب ریاضی

اینشتاین نشان داده است که هندسهٔ اقلیدسی باید کنار گذاشته شود، او بر اساس نظریهٔ جاذبی خویش، با پرسشهای کیهان شناسانه‌ای سروکار دارد و نشان می‌دهد که وجود یک عالم متناهی ممکن است. به علاوه، تمام نتایجی که از اخترشناسی حاصل آمده است، با این اصل که عالم بیضوی است، کاملا" سازگار است. تأسیس ما دایر بر آن که عالم متناهی است به دو جهت است یعنی راجع است به بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ.

اما احتمالا" هنوز مسألهٔ عمده این است که نامتناهی جای برحقی را در تفکرات ما اشغال کرده است و نقش یک مفهوم ضروری را ایفا می‌کند.

دیوید هیلبرت

فلسفهٔ ریاضی، حسین ضیائی و دیگران

مشتق‌پذیری

● احمد قندهاری

اگر تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته و $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجود و متناهی باشد، این حدّ را مشتق تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در x_0 گویند و آن رابا نماد $f'(x_0)$ نشان می‌دهند. دراین‌صورت‌می‌گویند این‌تابع در $x = x_0$ مشتق‌پذیر است.

می‌دانیم: $f'(x_0)$ برابر ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ است.(۱)

اگر $x - x_0$ را h فرض کنیم و تابع f در x_0 مشتق‌پذیر باشد می‌توان نوشت:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

مشتق چپ و مشتق راست

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ به‌شرطی‌که موجودباشد رامشتق راست تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ درنقطهٔ x_0 گویند وآن را به‌صورت $f'_+(x_0)$ نشان می‌دهند:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'_+(x_0)$ راضریب زاویهٔ خط مماس برمنحنی‌تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در طرف راست نقطه x_0 گویند.

و $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ به‌شرطی که‌موجودباشد را مشتق چپ تابع به معادله $y = f(x)$ در نقطهٔ x_0 گویند وآن‌را به‌صورت $f'_-(x_0)$ نشان می‌دهند.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'_-(x_0)$ را ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در طرف چپ نقطهٔ x_0 گویند.

تعریف: اگر تابع $y = f(x)$ در $x = x_0$ پیوسته باشد و مشتق راست در این نقطه با مشتق چپ در این نقطه برابر و متناهی باشد، آنگاه می‌گویند، تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ در $x = x_0$ مشتق‌پذیر است.

مسأله ۱: مشتق‌تابع‌به‌معادلهٔ $f(x) = x^2 - x$ را درنقطهٔ $x_0 = 1$ به کمک تعریف بیابید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است زیرا:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

ثانیاً:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x = 1 = f'(1)$$

پس این تابع در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است.

مسأله ۲: مشتق پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = |x^2 - 2x|$ را در نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 2$ بررسی کنید و نمودار تابع و خطوط مماس در نقاط $x_0 = 2$ و $x_0 = 0$ را رسم کنید همچنین نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 2$ پیوسته است زیرا:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$$

ثانیاً: مشتق‌پذیری تابع فوق را در نقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^2 - 2x| - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x| \times |x-2|}{x}$$

مشتق راست:

الف) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| \times |x-2|}{x} = \lim_{x\to 0^+} |x-2| = 2 = f'_+(0)$

مشتق چپ:

ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| \times |x-2|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -|x-2| = -2 = f'_-(0)$

پس این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

حال مشتق‌پذیری تابع فوق را در نقطهٔ $x_0 = 2$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{|x^2 - 2x| - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{|x-2| \times |x|}{x-2}$$

مشتق راست:

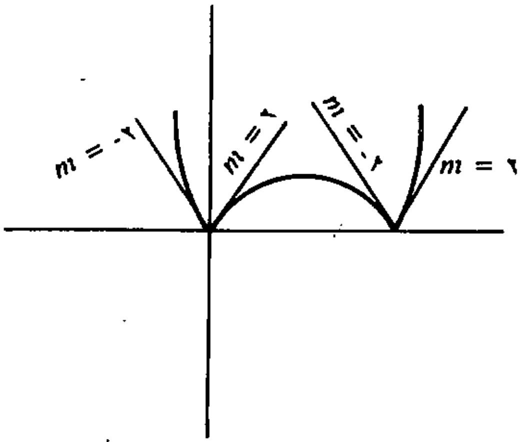
الف) $\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2| \times |x|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} |x| = 2 = f'_+(2)$

مشتق چپ:

ب) $\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2| \times |x|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -|x| = -2 = f'_-(2)$

پس این تابع در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر نیست.

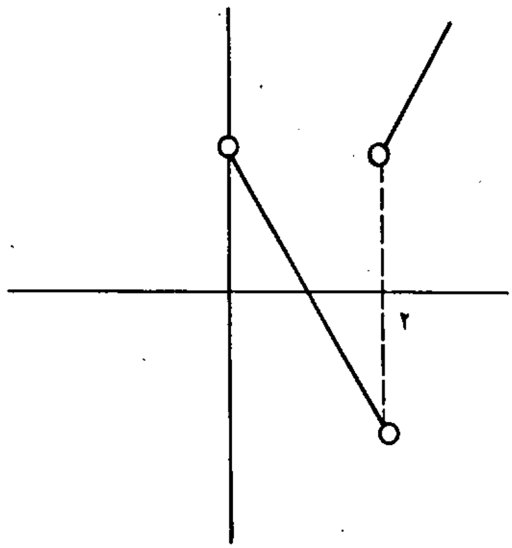
نمودار تابع به معادلهٔ: $y = |x^2 - 2x|$ چنین است.



$$y = f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \le 0 \text{ یا } x \ge 2 \\ -x^2 + 2x & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 0 \text{ یا } x > 2 \\ -2x + 2 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

نمودار تابع مشتق چنین است:



مسأله ۳: مشتق‌پذیری تابع به‌معادلهٔ

$$f(x)=\begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ 2x^2 - 2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

را در $x_0 = 1$ بررسی کنید. و نمودار تابع و نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است، زیرا:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

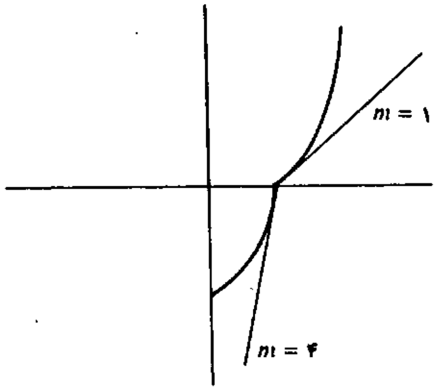
ثانیاً: مشتق‌پذیری این تابع را در $x_0 = 1$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 = f'_+(1)$$

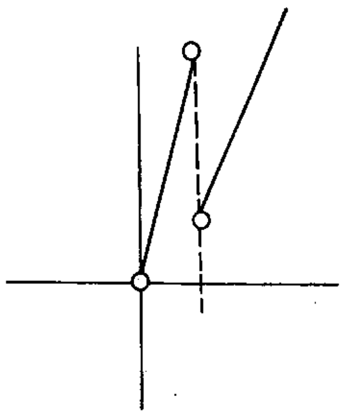
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 4 = f'_-(1)$$

پس این تابع در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

نمودار تابع فوق چنین است:



نمودار تابع مشتق: $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 1 \\ 4x & 0 < x < 1 \end{cases}$ چنین است:



مسأله ۴: مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ: $f(x) = x^3 + x$ را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید و خط مماس را دقیقاً رسم کنید.

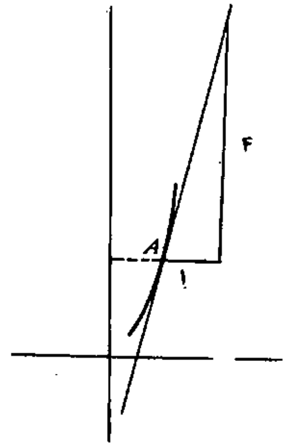
حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است، زیرا:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

ثانیاً:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x - 1}$$

$= 4 = f'(1) = m \,:\,$ مماس در A



مسأله ۵: مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید و خط مماس را دقیقاً رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است، زیرا:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \sqrt{3}$$

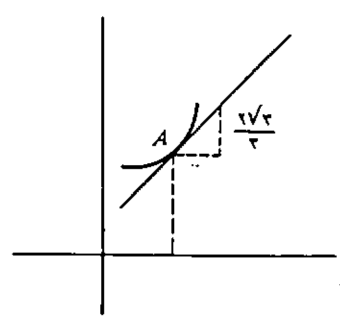
ثانیاً:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{3}}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = f'(1) = m$$

مماس در A:



مسأله ٦: مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = \frac{2x}{x^2 - x + 2}$ را در نقطهٔ $x_0 = 2$ بررسی کنید و خط مماس را دقیقاً رسم کنید.

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 2$ پیوسته است، زیرا:

$$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

ثانیاً:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2x}{x^2 - x + 2} - 1}{x - 2} =$$

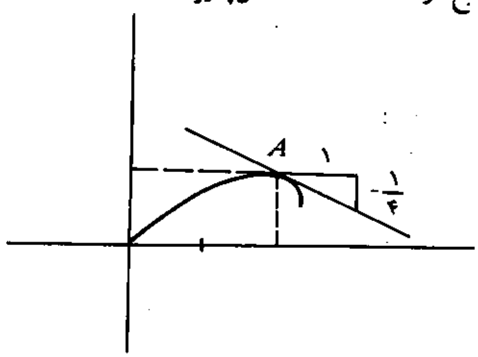
$$\lim_{x \to 2} \frac{-x^2 + 3x - 2}{(x - 2)(x^2 - x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 - x + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x - 1)}{x^2 - x + 2} = -\frac{1}{4}$$

$$= f'(2) = m$$: مماس در A

پس این تابع در نقطهٔ $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است.

$A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$



مسأله ۷: مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x) = \cos \sqrt[3]{x^2}$ را در نقطهٔ $x_0 = 2$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در $x_0 = 2$ پیوسته است، زیرا:

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \cos\sqrt[3]{4}$$

ثانیاً:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cos\sqrt[3]{x^2}-\cos\sqrt[3]{4}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2\sin\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{4}}{2}\sin\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{2}}{x-2}$$

توجه:

$$x\to 2 \Rightarrow \sin\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{2} \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4x^2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(3\sqrt[3]{4})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(-\sin\sqrt[3]{4})\times\frac{x+2}{3\sqrt[3]{4}}=\frac{-4\sin\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{4}}=f'(2)$$

پس این تابع در $x_0=2$ مشتق‌پذیر است.

مسأله ۸ : مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نقطهٔ $x_0=0$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در $x_0=0$ پیوسته است، زیرا:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$$

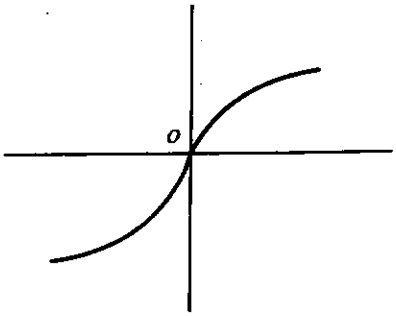
ثانیاً:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{(0^\pm)^2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty=f'(0)$$

چون $f'(0)=+\infty$، می‌گوییم این تابع در $x_0=0$ مشتق‌پذیر نیست.

شکل منحنی و خط مماس در $x_0=0$ چنین است:



تعریف: هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته باشد و مشتقهای راست و چپ در نقطهٔ x_0 نامتناهی و هم‌علامت باشند، نقطهٔ x_0 را نقطهٔ عطف منحنی می‌گوییم.

مسأله ۹ : مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را در نقطهٔ $x_0=0$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در نقطهٔ $x_0=0$ پیوسته است، زیرا:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$$

ثانیاً:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$$

مشتق راست:

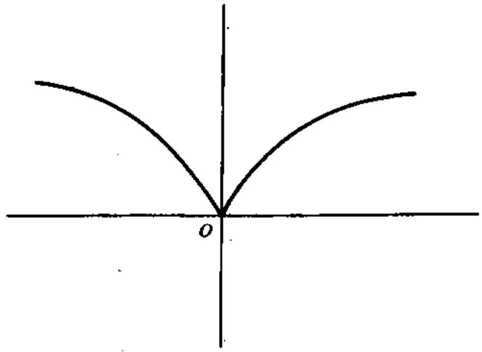
الف) $x\to 0^+\Rightarrow\lim\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty=f'_+(0)$

مشتق چپ:

ب) $x \to 0^- \Rightarrow \lim \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^-}} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty = f'_-(0)$

بنابراین، این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

نمودار تابع و خطوط مماس چنین است:



توجه: دو نیم مماس چپ و راست در نقطهٔ $x_0 = 0$ برهم منطبقند.

تعریف: هرگاه تابع f در نقطهٔ x_0 پیوسته باشد و مشتقهای راست وچپ در نقطهٔ x_0 نامتناهی و مختلف‌العلامه باشند، نقطهٔ x_0 را نقطهٔ بازگشت منحنی تابع گوییم. البته نقطهٔ بازگشت نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم نسبی منحنی است (ثابت می‌شود).

مسأله ۱۰ : مشتق‌پذیری تابع

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

را در $x_0 = 0$ بررسی کنید.

حل: اولاً این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است، زیرا:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

ثانیاً: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\cos\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$

$\Rightarrow$ عددهای نامشخص در فاصلهٔ $[-1 \text{ و } 1] =$

پس $f'(0)$ دراین تابع برابر عددی نامشخص درفاصلهٔ $[-1 \text{ و } 1]$ است بنابراین تابع فوق در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

مسأله ۱۱ : در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^3 & x \geq 2 \\ bx^2 + 2 & x \leq 2 \end{cases}$، a و b را چنان‌بیابید تا تابع در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر باشد.

حل: اولاً تابع فوق باید در $x_0 = 2$ پیوسته باشد پس باید در $x_0 = 2$، حد داشته باشد.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 8a \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4b + 2 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{8a = 4b + 2} \qquad (1)$$

ثانیاً: تابع فوق در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است پس مشتقات راست و چپ باید مساوی باشند:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{ax^3 - 8a}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{a(x^3 - 8)}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{a(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} a(x^2 + 2x + 4) =$$

$$\boxed{12a = f'_+(2)}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{bx^2 + 2 - 4b - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{b(x^2 - 4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{b(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} b(x + 2) = \boxed{4b = f'_-(2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{12a = 4b} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} 8a = 4b + 2 \\ 12a = 4b \end{cases} \Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{b = -\frac{3}{2}}$$

پس تابع f به‌صورت:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^3 & x \geq 2 \\ -\frac{3}{2}x^2 + 2 & x \leq 2 \end{cases}$$

می‌باشد.

مساله ۱۲ : تابع به معادلهٔ

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 + a & x \geq 0 \\ bx^2 + cx - 1 & x < 0 \end{cases}$$

مفروض است. اگر $f''(0)$ وجود داشته باشد (یعنی تابع: $f'(x)$ در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر باشد) a و b و c را بیابید.

حل: اولاً تابع f و تابع f' باید در $x_0 = 0$ پیوسته باشند، پس باید در $x_0 = 0$ حدّ داشته باشند.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 4x & x \geq 0 \\ 2bx + c & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = c \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

ثانیاً: تابع $f'(x)$ باید در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر باشد.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x^3 - 4x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (4x^2 - 4) =$$

$$-4 = f''_+(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2bx + c - c}{x} = 2b = f''_-(0)$$

$$\Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

نقطهٔ زاویه‌دار

تعریف: اگر تابع f در فاصلهٔ (a,b) پیوسته باشد و $a < x_0 < b$. اگر مشتقهای راست و چپ در نقطهٔ x_0 موجود، غیرمساوی و متناهی باشد یا حداکثر یکی از مشتقهای راست یا چپ نامتناهی باشد، در این صورت نقطهٔ به طول x_0 را نقطه زاویه‌دار منحنی گوییم.

مساله ۱۳ : مشتق‌پذیری تابع به معادلهٔ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ -x^2 - x & x < 0 \end{cases}$$

را در $x_0 = 0$ بررسی کنید.

آیا در این تابع نقطهٔ $x_0 = 0$ یک نقطهٔ زاویه‌دار است؟

حل: اولاً: این تابع در $x_0 = 0$ پیوسته است، زیرا:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

ثانیاً:

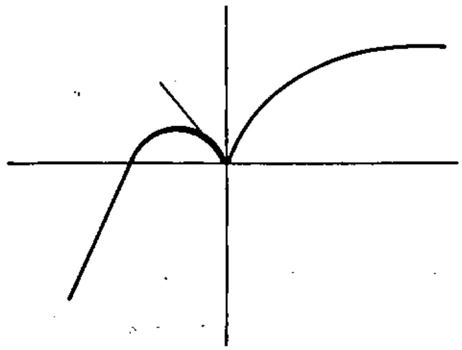
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty = f'_+(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 - x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-x - 1) = -1 = f'_-(0)$$

نتیجه: این تابع در $x_0 = 0$ مشتق‌پذیر نیست و بنا به تعریف فوق

نقطهٔ $x_0 = 0$ نقطهٔ زاویه‌دار است.

نمودار تابع و نیم‌خطهای مماس چنین است:



چند نکته

۱ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = [x]$ در نقاط $x_0 \in Z$، حدّ ندارد، پیوسته نیست و مشتق‌پذیر هم نمی‌باشد.

۲ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = [x]$ در نقاط $x_0 \in (R - Z)$، حدّ دارد، پیوسته است و مشتق‌پذیر هم می‌باشد ولی مشتق آن صفر است.

۳ـ تابع $f(x) = |x - a|$، در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

۴ـ تابع به‌معادلهٔ $f(x) = |(x - a)^{n+1}(x - b)^{2n}|$، $n \in N$ در $x = a$ و در $x = b$ مشتق‌پذیر است.

۵ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt[2n+1]{(x - a)}$، $n \in N$ در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

۶ـ تابع به‌معادلهٔ $f(x) = (x - a)^{n+1} \sqrt[2n+1]{x - a}$، $n \in N$، در $x = a$ مشتق‌پذیر است.

۷ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt[2n]{x - a}$، $n \in N$ در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

۸ـ تابع به معادلهٔ $f(x) = (x - a)^{n+1} (\sqrt[2n]{x - a})$، $n \in N$، در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

۹ـ در نمودارها در هر نقطهٔ که خط مماس بر منحنی موازی محور yها باشد، تابع آن نمودار در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱۰ـ در نمودارهایی که زاویه‌دار باشد، تابع آن نمودار در نقطهٔ زاویه‌دار مشتق‌پذیر نیست.

۱ـ در فصل (۶) کتاب جبر سال سوم ریاضی (تحت عنوان تعبیر هندسی مشتق) اثبات شده است.

تفریح اندیشه ۱

با در دست داشتن چهار گزارهٔ زیر، نتیجه‌ای چنان بگیرید که اولاً: استدلالتان درست باشد، ثانیاً: هر چهارگزاره برای آن نتیجه لازم باشند.

تمام وکلای دادگستری ثروتمندند.

شعرا حساس‌اند.

مسعود وکیل دادگستری است.

هیچ آدم حساسی ثروتمند نیست.

در نتیجه: ...



جواب در صفحهٔ ۹۶

آموزش ترجمه متون ریاضی (۴)

ترجمه: حمید رضاامیری

Surds

Certain numbers of the set of numbers defined by $\sqrt{x}$, for $x \in Z^+$, have exact numerical values, e.g. $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, ... Other numbers of the set, e.g. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, cannot be written as numerically exact quantities, and it is frequently more convenient to leave them in their basic $\sqrt{x}$ form. As such, these numbers are called *surds*, and expressions involving them are called *surd expressions*. It is desirable to write such expressions in their simplest form. The examples below indicate how one should proceed. Two basic rules, derived from the rules of indices, are employed:

$$(\sqrt{x}) \times (\sqrt{y}) = \sqrt{(xy)} \quad [\text{from } x^{1/2}y^{1/2} = (xy)^{1/2}],$$

and

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)} \quad \left[\text{from } \frac{x^{1/2}}{y^{1/2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}\right]$$

اعداد گنگ

تنها اعداد مشخصی از مجموعهٔ اعداد تعریف شده توسط $\sqrt{x}$ برای هر $x \in Z^+$، دارای مقادیر عددی درست می‌باشند، مانند $\sqrt{۱}$، $\sqrt{۴}$، $\sqrt{۹}$، $\sqrt{۱۶}$، $\sqrt{۲۵}$ و ..... تعداد دیگری از اعداد این مجموعه مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$ به‌صورت کمیتهای درستِ عددی نوشته نمی‌شوند، و غالباً مناسبتر است آنها را به شکل اصلی خودشان یعنی $\sqrt{x}$ نمایش دهیم. چنین اعدادی را گنگ می‌نامیم، و عبارات شامل آنها را عبارات **گنگ** می‌نامند. شایسته است که چنین عباراتی به شکل ساده شدهٔ خودشان نوشته شوند. مثالهایی که در زیر آمده است چگونگی این روش را نشان می‌دهند. دو قاعدهٔ اساسِ حاصل‌از دستورات مربوط به نماها (دراین دومثال) به کار رفته‌اند:

$$(\sqrt{x}) \times (\sqrt{y}) = \sqrt{xy} \quad [\text{از دستور } x^{۱/۲}y^{۱/۲} = (xy)^{۱/۲}]$$ و

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \quad \left[\text{از دستور } \frac{x^{۱/۲}}{y^{۱/۲}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{۱/۲}\right]$$

Example 7 Reduce the following surd expressions to their simplest form:
(a) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$, (b) $2\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{2})$, (c) $(2\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} + 2)$,
(d) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5}$.

(a) $\frac{1}{3}\sqrt{18} = \frac{1}{3}\sqrt{(9 \times 2)} = \frac{1}{3}3\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
(b) $2\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(4\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(5\sqrt{2}) = 20$.
(c) $(2\sqrt{5} + 1)(3\sqrt{5} + 2) = 6 \times 5 + 7\sqrt{5} + 2 = 32 + 7\sqrt{5}$.
(d) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

مثال ۷

عباراتِ گنگ زیر را به‌ساده‌ترین شکل خود بیان کنید:

(الف) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۸}$ ، (ب) $۲\sqrt{۲}(\sqrt{۳۲} + \sqrt{۲})$

(پ) $(۲\sqrt{۵} + ۱)(۳\sqrt{۵} + ۲)$

(ت) $\sqrt{۲۰} + \sqrt{۴۵} - \sqrt{۸۰} + \sqrt{۵}$

(الف) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۸} = \frac{۱}{۳}\sqrt{(۹ \times ۲)} = \frac{۱}{۳}۳\sqrt{۲} = \sqrt{۲}$

(ب) $۲\sqrt{۲}(\sqrt{۳۲} + \sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}(۴\sqrt{۲} + \sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}(۵\sqrt{۲}) = ۲۰$

(پ) $(۲\sqrt{۵} + ۱)(۳\sqrt{۵} + ۲) = ۶ \times ۵ + ۷\sqrt{۵} + ۲ = ۳۲ + ۷\sqrt{۵}$

(ت) $\sqrt{۲۰} + \sqrt{۴۵} - \sqrt{۸۰} + \sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۵} - ۴\sqrt{۵} + \sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵}$

Example 8 We remove the surds from the denominator in the following surd expressions (this process is called rationalising the denominator):

(a) $\frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3.2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

We make use here of the identity

$$(x - y)(x + y) \equiv x^2 - y^2.$$

Multiplying numerator and denominator by $\sqrt{2} + 1$, we obtain

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} . \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

(c) $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5} - \sqrt{3}} . \frac{(2\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(2\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{15} + 2.3}{20 - 3} = \frac{4\sqrt{15} + 6}{17}$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$.

Rationalising each term, we obtain

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2} = 3.$$

مثال ۸

در عبارات گنگ زیر اعداد گنگ را از مخرج کسر حذف می‌کنیم (این روش گویا کردن مخرج کسر نام دارد):

(الف) $\frac{۲}{\sqrt{۱۸}} = \frac{۲}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳ \times ۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$

(ب) $\frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱}$

در این‌جا می‌توانیم ازاتحاد $(x - y)(x + y) \equiv x^۲ - y^۲$ استفاده کنیم. صورت و مخرج کسر را در $(۱ + \sqrt{۲})$ ضرب کرده، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱} . \frac{\sqrt{۲} + ۱}{\sqrt{۲} + ۱} = \frac{\sqrt{۲} + ۱}{۲ - ۱} = \sqrt{۲} + ۱$$

(پ) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵} - \sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵} - \sqrt{۳}} . \frac{۲\sqrt{۵} + \sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵} + \sqrt{۳}} =$

$$\frac{۴\sqrt{۱۵} + ۲ \times ۳}{۲۰ - ۳} = \frac{۴\sqrt{۱۵} + ۶}{۱۷}$$

(ت) $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} - ۱} + \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} + ۱}$

هر دو کسر را با هم گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳} + ۱)}{(\sqrt{۳} - ۱)(\sqrt{۳} + ۱)} + \frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳} - ۱)}{(\sqrt{۳} + ۱)(\sqrt{۳} - ۱)} =$$

$$\frac{۳ + \sqrt{۳}}{۲} + \frac{۳ - \sqrt{۳}}{۲} = ۳$$

Logarithms

The term 'logarithm' is an alternative word for an index or power of a given positive number base. For example, since $2^3 = 8$, we define the index 3 to be the logarithm of 8 to the base 2 and write

$$3 = \log_2 8.$$

Further, using the rule of negative indices, $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$ and we may write

$$\log_{1/3} 9 = -2.$$

The base of a logarithm may be any positive number. The tables of common logarithms, which are sometimes used for calculations, have base 10. It is usual, when using common logarithms, to omit the base 10, and write log or lg. In general,

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

لگاریتمها

کلمهٔ «لگاریتم» مفهوم دیگری است برای نمایش نما یا توان یک مبنای مثبت. برای مثال، نظر به این‌که $۸ = ۲^۳$، ما نمای ۳ را لگاریتم ۸ در مبنای ۲ تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم: $\log_۲^۸ = ۳$

به‌علاوه، می‌توانیم از دستور نماهای منفی نیز استفاده کرده و مثلاً برای $۹ = (\frac{۱}{۳})^{-۲}$ می‌نویسیم: $\log_{\frac{۱}{۳}}^۹ = -۲$

مبنای یک لگاریتم می‌تواند هر عدد مثبتی باشد. جداول لگاریتمهای اعشاری، که معمولاً برای محاسبات مورداستفاده قرار می‌گیرند، دارای مبنای ۱۰ هستند. معمولاً، برای استفاده از لگاریتم اعشاری، مبنای ۱۰ را حذف کرده، و آن را به‌صورت log یا lg می‌نویسیم. در حالت کلّی:

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a^y = x$$

Example 9 Express in logarithmic form (a) $5^2 = 25$, (b) $2^5 = 32$, (c) $6^0 = 1$, (d) $(\frac{1}{5})^{-3} = 125$, (e) $10^{-2} = 0{\cdot}01$.

(a) $5^2 = 25 \Rightarrow 2 = \log_5 25$.
(b) $2^5 = 32 \Rightarrow 5 = \log_2 32$.
(c) $6^0 = 1 \Rightarrow 0 = \log_6 1$.
(d) $(\frac{1}{5})^{-3} = 125 \Rightarrow -3 = \log_{1/5} 125$.
(e) $10^{-2} = 0{\cdot}01 \Rightarrow -2 = \log_{10} 0{\cdot}01$.

مثال ۹

(تساویها را) به شکل لگاریتمی نشان دهید:

(الف) $۵^{۲} = ۲۵$، (ب) $۲^{۵} = ۳۲$، (پ) $۶^{۰} = ۱$، (ت) $(\frac{۱}{۵})^{-۳} = ۱۲۵$، (ث) $۱۰^{-۲} = ۰/۰۱$

(الف) $۵^{۲} = ۲۵ \Rightarrow \log_{۵}^{۲۵} = ۲$

(ب) $۲^{۵} = ۳۲ \Rightarrow \log_{۲}^{۳۲} = ۵$

(پ) $۶^{۰} = ۱ \Rightarrow \log_{۶}^{۱} = ۰$

(ت) $(\frac{۱}{۵})^{-۳} = ۱۲۵ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۵}}^{۱۲۵} = -۳$

(ث) $۱۰^{-۲} = ۰/۰۱ \Rightarrow \log_{۱۰}^{۰/۰۱} = -۲$

Example 10 Evaluate (a) $\log_4 64$, (b) $\log_{10} 0{\cdot}001$, (c) $\log_{1/2} 4$.

(a) Let $x = \log_4 64 \Rightarrow 4^x = 64 = 4^3$.
Comparing indices gives $x = 3$.
(b) Let $y = \log_{10} 0{\cdot}001, \Rightarrow 10^y = 0{\cdot}001 = 10^{-3}$.
Therefore,

$$y = -3.$$

(c) Let $z = \log_{1/2} 4 \Rightarrow (\frac{1}{2})^z = 4 = 2^2 = (\frac{1}{2})^{-2}$.
Therefore,

$$z = -2.$$

مثال ۱۰

محاسبه کنید:

(الف) $\log_{۴}^{۶۴}$ (ب) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱}$ (پ) $\log_{\frac{۱}{۲}}^{۴}$

(الف) فرض کنیم: $\log_{۴}^{۶۴} = x \Rightarrow ۴^{x} = ۶۴ = ۴^{۳}$

بامقایسهٔ نماها خواهیم داشت $x = ۳$.

(ب) فرض کنیم: $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} = y \Rightarrow ۱۰^{y} = ۰/۰۰۱ = ۱۰^{-۳}$

بنابراین $y = -۳$.

(پ) فرض کنیم: $\log_{\frac{۱}{۲}}^{۴} = z \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{z} = ۴ = ۲^{۲} = (\frac{۱}{۲})^{-۲}$

بنابراین $z = -۲$.

Example 11 Express in index form (a) $\log_5 125 = 3$, (b) $\log_{10} 100 = 2$, (c) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$, (d) $\log_a 1 = 0$, (e) $\log_x y = z$.

(a) $\log_5 125 = 3 \Rightarrow 5^3 = 125$.
(b) $\log_{10} 100 = 2 \Rightarrow 10^2 = 100$.
(c) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2} \Rightarrow 36^{1/2} = 6$.
(d) $\log_a 1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1$.
(e) $\log_x y = z \Rightarrow x^z = y$.

مثال ۱۱

(تساویها را) به شکل نمایی نشان دهید:

(الف) $\log_{۵}^{۱۲۵} = ۳$ (ب) $\log_{۱۰}^{۱۰۰} = ۲$ (پ) $\log_{۳۶}^{۶} = \frac{۱}{۲}$

(ت) $\log_{a}^{۱} = ۰$ (ث) $\log_{x}^{y} = z$

(الف) $\log_{۵}^{۱۲۵} = ۳ \Rightarrow ۵^{۳} = ۱۲۵$

(ب) $\log_{۱۰}^{۱۰۰} = ۲ \Rightarrow ۱۰^{۲} = ۱۰۰$

(پ) $\log_{۳۶}^{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow (۳۶)^{۱/۲} = ۶$

(ت) $\log_{a}^{۱} = ۰ \Rightarrow a^{۰} = ۱$

(ث) $\log_{x}^{y} = z \Rightarrow x^{z} = y$

Rules of logarithms

(1) Addition of logarithms
If $\log_a x = m$ and $\log_a y = n$, then $x = a^m$, $y = a^n$ and

$$xy = a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$\Rightarrow \log_a(xy) = m + n.$$

Therefore,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

(2) Subtraction of logarithms
Similarly,

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Hence,

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

(3) Logarithm of powers of numbers

$$x^p = (a^m)^p = a^{mp}.$$

Hence,

$$\log_a x^p = mp = p \log_a x.$$

Therefore,

$$\log_a x^p = p \log_a x.$$

(4) Change of base of a logarithm

$$\log_a x = m \Rightarrow a^m = x.$$
$$\log_b x = \log_b(a^m) = m \log_b a$$
$$\Rightarrow \log_b x = (\log_a x) \times (\log_b a),$$

قواعد لگاریتمها

(۱) جمع لگاریتمها

اگرقراردهیم $\log_a^x = m$ و $\log_a^y = n$ دراین‌صورت
$x = a^m$ ، $y = a^n$ و

$$xy = a^m \times a^n = a^{m+n} \Rightarrow \log_a^{(xy)} = m + n$$

بنابراین

$$\boxed{\log_a^{(xy)} \equiv \log_a^x + \log_a^y}$$

(۲) تفریق لگاریتمها

(باتوجه به قرارداد بالا) به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

بنابراین :

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) \equiv \log_a^x - \log_a^y}$$

(۳) لگاریتم از اعداد توانی

$$x^p \equiv (a^m)^p = a^{mp}$$

بنابراین :

$$\log_a^{x^p} = mp = p \log_a^x$$

پس :

$$\boxed{\log_a^{x^p} = p \log_a^x}$$

(۴) تغییر مبنای یک لگاریتم

$$\log_a^x \equiv m \Rightarrow a^m = x$$

$$\log_b^x \equiv \log_b(a^m) = m \log_b^a$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_b^x \equiv (\log_a^x) \times (\log_b^a)}$$

i.e. to change the base of a logarithm of x from a to b we multiply by $\log_b a$.
If in this result we replace x by a, we get

$$\log_b a = (\log_a a) \times (\log_b a).$$

Dividing by $\log_b a$, given that this is non-zero,

$$\Rightarrow 1 = \log_a a,$$

and, if $x = b$,

$$\log_b b = 1 = (\log_a b) \times (\log_b a).$$

یعنی، برای تغییر مبنای لگاریتم x از مبنای a به b آن را در $\log_b^a$ ضرب می‌کنیم.

هرگاه در این نتیجه‌گیری جای x را با a تعویض کنیم، خواهیم داشت:

$$\log_b^a \equiv \log_a^a \times \log_b^a$$

باتقسیم طرفین بر $\log_b^a$، که مخالف صفر است :

$$\Rightarrow \log_a^a = ۱$$

و ، اگر $x = b$:

$$\log_b^b \equiv ۱ \equiv (\log_a^b) \times (\log_b^a)$$

Example 12 Simplify

(a) $4 \log_a 2 + 2 \log_a 3$,

(b) $\log_{10}\left(\frac{15}{64}\right) - 2 \log_{10}\left(\frac{5}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{16}{9}\right)$.

(c) $3 \log_a x + 2 \log_a y - \log_a z$.

(a) $4 \log_a 2 + 2 \log_a 3 = \log_a 2^4 + \log_a 3^2$ by rule (3),
$= \log_a 16 + \log_a 9 = \log_a 144$ by rule (1).

(b) $\log_{10}\left(\frac{15}{64}\right) - 2 \log_{10}\left(\frac{5}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{16}{9}\right)$

$= \log_{10}\left(\frac{15}{64}\right) - \log_{10}\left(\frac{5^2}{3^2}\right) + \log_{10}\left(\frac{16}{9}\right)$ by rule (3),

$= \log_{10}\left(\frac{15}{64} \times \frac{9}{25} \times \frac{16}{9}\right)$ by rules (1) and (2),

$= \log_{10}\left(\frac{3}{20}\right)$.

(c) $3 \log_a x + 2 \log_a y - \log_a z$
$= \log_a x^3 + \log_a y^2 - \log_a z$ by rule (3),
$= \log_a\left(\frac{x^3y^3}{z}\right)$ by rules (1) and (2).

مثال ۱۲

(عبارات زیر را) ساده کنید :

(الف) $۴\log_{a}^{۲} + ۲\log_{a}^{۳}$

(ب) $\log_{۱۰}^{(\frac{۱۵}{۶۴})} - ۲\log_{۱۰}^{(\frac{۳}{۵})} + \log_{۱۰}^{(\frac{۱۶}{۹})}$

(پ) $۳\log_{a}^{x} + ۲\log_{a}^{y} - \log_{a}^{z}$

(الف) $۴\log_{a}^{۲} + ۲\log_{a}^{۳} = \log_{a}^{۲^{۴}} + \log_{a}^{۳^{۲}}$ با توجه به قاعده (۳)

$\log_{a}^{۱۶} + \log_{a}^{۹} = \log_{a}^{۱۴۴}$

(ب) $\log_{۱۰}^{(\frac{۱۵}{۶۴})} - ۲\log_{۱۰}^{(\frac{۵}{۳})} + \log_{۱۰}^{(\frac{۱۶}{۹})} = \log_{۱۰}^{(\frac{۱۵}{۶۴})}$

$\log_{۱۰}^{(\frac{۵^{۲}}{۳^{۲}})} + \log_{۱۰}^{(\frac{۱۶}{۹})}$

با توجه به قاعده (۳) $\log_{۱۰}^{(\frac{۱۵}{۶۴} \times \frac{۹}{۲۵} \times \frac{۱۶}{۹})}$ قواعد (۱) و (۲) $\log_{۱۰}^{(\frac{۳}{۲۰})}$

(پ) $۳\log_{a}^{x} + ۲\log_{a}^{y} - \log_{a}^{z} = \log_{a}^{x^{۳}} + \log_{a}^{y^{۳}} - \log_{a}^{z}$

قواعد (۱) و (۲) و (۳) $\log \frac{x^{۳}y^{۳}}{z}$

Example 13 Using only the rules of logarithms, find the value of $\log_3 125 \times \log_5 9$.

$\log_3 125 \times \log_5 9 = \log_3 5^3 \times \log_5 3^2$
$= 3 \log_3 5 \times 2 \log_5 3 = 6(\log_3 5)(\log_5 3)$
$= 6 \log_5 5 = 6$.

مثال ۱۳

فقط بااستفاده از قواعد لگاریتمها مقدار $\log_{۳}^{۱۲۵} \times \log_{۵}^{۹}$ را بیابید.

$\log_{۳}^{۱۲۵} \times \log_{۵}^{۹} = \log_{۳}^{۵^{۳}} \times \log_{۵}^{۳^{۲}} = ۳\log_{۳}^{۵} \times ۲\log_{۵}^{۳}$

$= ۶(\log_{۳}^{۵})(\log_{۵}^{۳}) = ۶\log_{۵}^{۵} = ۶$

1.3 The logarithmic and exponential functions

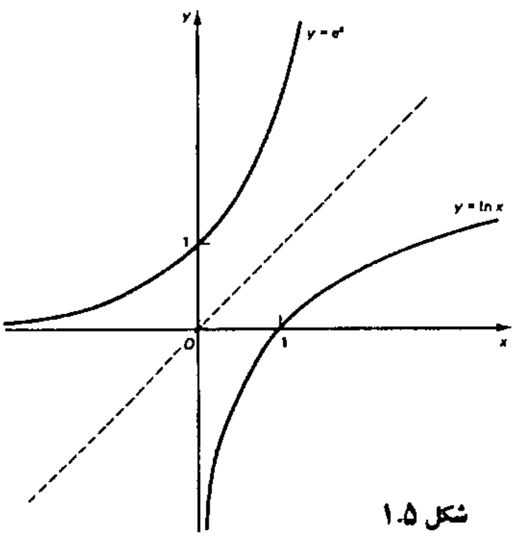
In calculus logarithms to a particular base are used. The logarithms are called *natural logarithms* and the base is denoted by e. The number e ≈ 2·718 281 8 and is defined as that base for which the function $\log_e x$ has unit gradient at $x = 1$. The standard notation is

$$\log_e x = \ln x.$$

The function $\ln x$ has domain $\mathbf{R}^+$ and is called the *logarithmic function*. The range of $\ln x$ is $\mathbf{R}$. Its inverse function is known as the *exponential function*, $\exp x$, which is denoted by e^x. The domain of the exponential function is $\mathbf{R}$ and its range is $\mathbf{R}^+$. To summarise,

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

The graphs of $y = e^x$ and $y = \ln x$ are given in Fig. 1.5. Note that, since e^x and $\ln x$ are inverse functions, their graphs are mirror images of each other in the line $y = x$ (shown dotted).



شکل ۱.۵

۱.۳ توابع لگاریتمی و نمایی

در حساب لگاریتمها از یک مبنای ویژه‌ای استفاده می‌شود. این نوع لگاریتم، لگاریتم طبیعی نامیده می‌شود و مبنای آن با e نمایش داده می‌شود. عدد $e \approx ۲/۷۱۸۲۸۱۸$ می‌باشد و آن به‌عنوان مبنایی برای تابع $\log_e^x$ درنظرگرفته شده که در $x = ۱$ دارای شیب واحدمی‌باشد. نمایش استاندارد آن به‌شکل $\log_e^x = \ln x$ می‌باشد.

دامنهٔ تابع $\ln x$، IR^+ است و آن را تابع لگاریتمی می‌نامند. بُرد این تابع IR است. تابع معکوس آن را تابع نمایی، (یا $e \times px$)؛ می‌نامیم که آن را به‌صورت e^x نمایش می‌دهند و دامنهٔ تابع نمایی IR و بُردش IR^+ است. به‌طور خلاصه:

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$$

نمودارهای $y = e^x$ و $y = \ln x$ در شکل ۱.۵ آمده است. توجه کنید که، همواره e^x و $\ln x$ معکوس یکدیگرند، نمودارهای آنها نسبت به خط $y = x$ تصویر معکوس یکدیگر می‌باشند. (خط $y = x$ با نقطه‌چین مشخص شده‌است.)

Example 14 Simplify

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}}.$$

We notice that $\ln e = 1$, and, since $\ln 1 = 0$, we have $e^{\ln 1} = e^0 = 1$. Therefore,

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}.$$

Since

$$e^{2x} = (e^x)^2$$

we may write

$$e^{2x} - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1)$$

and so

$$\frac{e^{2x} - \ln e}{e^x + e^{\ln 1}} = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x + 1} = e^x - 1.$$

مثال ۱۴

(کسر زیر را) ساده کنید:

$$\frac{e^{۲x} - \ln e}{e^x + e^{\ln ۱}}$$

توجه داریم که $\ln e = ۱$ و، چون $\ln ۱ = ۰$ داریم: $e^{\ln ۱} = e^0 = ۱$، بنابراین:

$$\frac{e^{۲x} - \ln e}{e^x + e^{\ln ۱}} \equiv \frac{e^{۲x} - ۱}{e^x + ۱}$$

از آن‌جاکه $e^{۲x} \equiv (e^x)^۲$ می‌توان نوشت:

$$e^{۲x} - ۱ \equiv (e^x + ۱)(e^x - ۱)$$

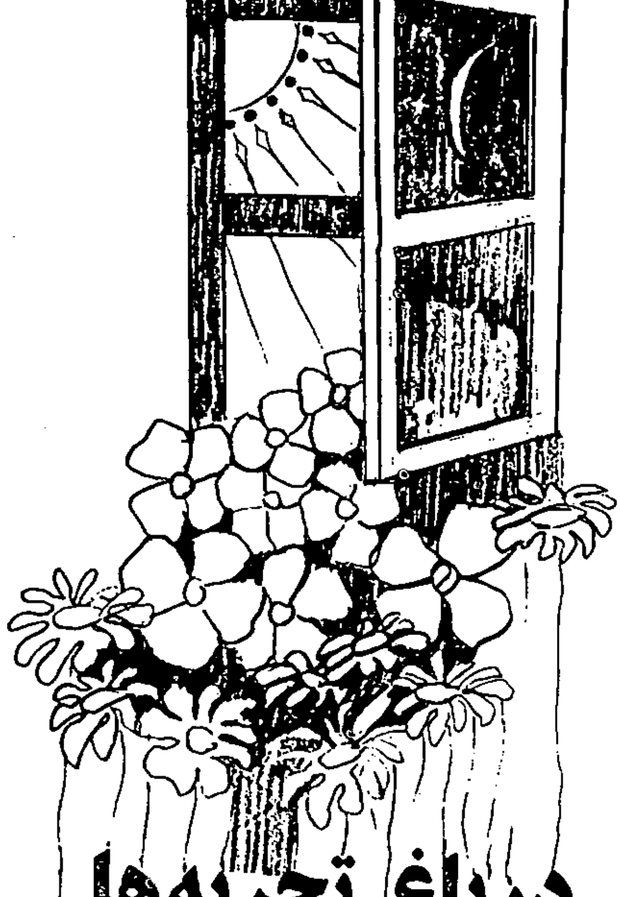
و بنابراین:

$$\frac{e^{۲x} - \ln e}{e^x + e^{\ln}} \equiv \frac{(e^x + ۱)(e^x - ۱)}{(e^x + ۱)} \equiv e^x - ۱$$

ادب و ریاضی

هیلبرت با این فکر که هر مسألهٔ ریاضی، بالاخره روزی حل خواهد شد، تصمیم گرفت که ثابت کند که چگونه می‌توان بدون رها کردن هیچ جزء از کشفیات سابق، مبناهای غیر قابل سنجشی به بیان ریاضیات داد و با دقت و استحکام ثابت کرد که محال است که استدلال مبتنی بر این مبناها به تناقض برخورد کند، و اگر نتوانست برنامه‌ای چنین با عظمت را به ثمر برساند (امروز شک دارند که چنین اثباتی امکان‌پذیر باشد)، اقلاً" ثابت کرد که هیچ اندیشه‌ای روشن نیست مگر آن که بتوان آن را با علامتهای صریح (و بدیهی است که با تعداد محدود) بیان کرد، و با وجود این محدودیت، ریاضی‌دان کامل حق دارد که دربارهٔ بی‌نهایت استدلال کند.

سرگذشت آنالیز ریاضی
آندره دولاشه. پرویز شهریاری



درباغ تجربه‌ها

□ جناب آقای بهنیا، ضمن تشکر از فرصتی که در اختیار ما قرار دادید، دربارهٔ خودتان و زادگاهتان، زندگی و تحصیلاتتان توضیحاتی بفرمایید:

زادگاهم «جوبُنه» دهی است در پانزده کیلومتری شهر رشت. در یک روز سرد زمستان سال ۱۲۹۹ هجری شمسی که برف، ده را سفید پوش کرده بود، در یک کلبهٔ روستایی به دنیا آمدم. مادرم، که گویا از قبل اندیشیده بود، در همان لحظه‌های اولیهٔ حیاتم، نامم را «غلامرضا» به معنی واقعی کلمه (غلامِ رضا) گذاشت، تا امام هشتم مرا از جمیع بلایا حفظ کند. پدربزرگ (پدریم) دهقان مرفه‌الحالی بود، به طوری که هر چند سال یکبار، پس از برداشت محصول به زیارت مشهد می‌رفت. مادربزرگم شیرزنی بود کاردان؛ که نه تنها بر جمیع کارهای خانه، بلکه به امور زراعتی هم نظارت می‌کرد. خودخواه و مستبد بود.

پدرم، با کار زراعت به کلی بیگانه بود. کوره سوادی داشت، آن‌قدر که بتواند، بخواند و بنویسد. با وساطت تنی چند از خویشاوندان



مصاحبه با معلمین شما

متنفذ، بخصوص پدربزرگم، توانست در «دایرهٔ میاه» وابسته به دارایی سنگسر (یا دوشنبه بازار، بازارروز دهات اطراف) استخدام شود. کارش توزیع آب به شالیزارهای حوالی یکی از شاخه‌های سفیدرود (از امامزاده هاشم تاآستانهٔ اشرفیه) بود.

در آن سالهایی که آب سفیدرود نقصان پیدا کرده بود و شالیزارها با خطر کم آبی مواجه بودند، دهقانان بر سر تقسیم آب با داس و بیل به جان هم می‌افتادند و خونها می‌ریختند. در یکی از این دعواها، پدرم از اسب سقوط کرد و استخوان پایش شکست؛ مدتها قادر به حرکت نبود و خانه‌نشین شد. هر چند روز یک بار، برای پانسمان (خروج چرک) و مداوای جراحت، فتیله می‌گذاشتند. چون رفت و آمد شکسته‌بند از رشت به جوبنه مستلزم پرداخت مخارج گزافی بود، با تقاضای پدرم مبنی بر انتقال به رشت موافقت شد و ما به رشت کوچ کردیم.

مادر، دو خواهر دیگرم رابه‌مکتب(ملاخانه)ی که‌درجوار خانهٔ مابود فرستاد و خواهرانم، مرا هم با خود به ملاخانه می‌بردند. به این ترتیب از سن چهارسالگی پایم به مکتب‌خانه باز و گوشم با آیات قرآن آشنا شد. کلماتی را می‌شنیدم که بر اثر تکرار، ناخواسته در ذهنم نقش می‌بست.

«ملا ربابه» مدیرهٔ مکتب، شخصاً عهده‌دار تدریس من شد و در اندک مدتی خواندن ونوشتن را به من آموخت.

در آن زمان غرض از باسواد کردن فرزندان، در درجهٔ اول، آشنایی آنها با قرائت قرآن بود، تا شبهای جمعه برای آمرزش روح اموات، چند سوره‌ای بخوانند و فاتحه بدهند.

در مکتب، دیوان اشعار **جودی، محزون و جوهری** را که در رثای ائمه بود، می‌خواندیم و از روی آن می‌نوشتیم، ولی از حساب، حتی عدد نویسی، مطلقاً" خبری نبود.

اواسط بهار ۱۳۰۷ شمسی، پدرم دست مرا گرفت و به «مدرسهٔ مبارکهٔ اسلامی» برد. مدیر مدرسه شخصاً از من امتحانی به عمل آورد و نامم را در کلاس اول دبستان ثبت کرد. یکی دو هفته بعد، امتحانات آخر سال فرا رسید. با شاگردان کلاس امتحان دادم و به کلاس بالاتر رفتم.

بجز درس حساب، من در سایر دروسم موفق بودم. در حالی که بچه‌ها بسهولت اعداد را جمع یا تفریق می‌کردند. من اعداد را نمی‌شناختم. بالاخره شد، آنچه انتظارش را می‌کشیدم و از آن وحشت داشتم. آموزگار کلاس، در مُنتهای ناباوری وقتی یقین حاصل کرد که من قادر به نوشتن اعداد نیستم ـ با همان چوب کذایی ـ چنان ضربه‌ای بر پشتم زد که بی‌هوش نقش زمین شدم و وقتی به اطلاع ایشان رسید که من شاگرد تازه واردم، از کردهٔ خود پشیمان شد و پس از استمالت و دلجویی، از من خواست که به پدر و مادرم چیزی نگویم. ضمناً به «پرویز» همکلاسیم دستور داد که در ساعات تفریح عددنویسی و جمع و تفریق اعداد را به من بیاموزد و خود هر روز بر کار ما نظارت می‌کرد. این همکاری دو سه هفته ادامه یافت و من به کلاس رسیدم.

معمولاً ساعات اول ایام تابستان، درس حساب داشتیم. آموزگار ما، یکی دو مسألهٔ حساب می‌داد یا حاصل ضرب دو عدد چند رقمی و یاخارج قسمت آن دو عدد... پیشرفتم در درس حساب چنان شد که روزانه در دفتر نمرهٔ کلاس، در مقابل اسمم، سه عدد بیست کنار هم ردیف می‌شد.

کلاسهای دوم و سوم را با موفقیت پشت سر گذاشتم. در شهریور ماه آن سال، پس از برگزاری امتحان و اعلام نتیجه و افزایش چند ریال به شهریه، به کلاس پنجم رفتم. با آن‌که شاگردان این کلاس، سه ماه تابستان، درس خوانده بودند، مشکل من درس حساب نبود، چون با مطالعهٔ دفترچهٔ قواعد حساب و هندسه و پاکنویس مسائل حل شده، عقب ماندگی سه ماهه، بسرعت و بسهولت جبران شد. مشکل من درس جغرافیا بود. در کلاس پنجم، جغرافیای جهان تألیف آقای ندیم تدریس می‌شد. روز قبل از ورودم به کلاس، جغرافیای چین تدریس شده بود و شاگردان کلاس تلفظ صحیح اسامی رودها و کوهها و شهرهای چین را شنیده بودند. در زنگ جغرافیا، آموزگار از من خواست تا رودهای چین را نام ببرم. من که به تلفظ صحیح آنها آشنا نبودم و کلمه‌های چاپی کتاب هم اعراب نداشت، در پاسخ گفتم: «مهمترین رود چین بانگ بسته کیانک... است» معلم ابتدا از شنیدن کلمه‌های «بانگ» و «بسته» و «کیانک» که تاج کیانی را تداعی می‌کرد، با تعجب به من نگریست، سپس بشدت خندید و متعاقب آن شلیک خندهٔ بچه‌ها هم بلند شد. من وحشت زده به آنان نگاه کردم و سپس به گریه افتادم. آن سال، گاه‌گاه که معلم سرحال بود، به شوخی از من می‌پرسید: «آیا بانگ کیانیت هنوز بسته است؟»

دورهٔ ابتدایی را طی چهار سال گذراندم. افزایش شهریه در سال اول دبیرستان، بیش از چند ریال بود. خطر ترک تحصیل تهدیدم می‌کرد. با پا درمیانی یکی از معلمین و شادروان «محمد حسابی» این مشکل حل شد. با پرداخت همان شهریهٔ دبستان، توانستم دورهٔ سه سالهٔ دبیرستان را بگذرانم. خرید کتابهای متعدد دبیرستان، آن هم با قیمت گزاف، ممکن نبود. استدلال قضایای هندسه را به خاطر می‌سپردم و در دفتر کاهی می‌نوشتم. مشکل من در درس ریاضی، وقتی بود که می‌بایست صورت مسائل و تمرینها را از روی کتاب بنویسم. در کلاس هشتم در درس جغرافیا تجدید شدم. چون معدل سالانه‌ام بالای چهارده بود، طبق آیین‌نامه به کلاس بالاتر رفتم.

«سعید» همکلاسی جدیدم در سال دوم دبیرستان، بچه‌ای ریز - نقش و باادب بود. بزودی احساس کرد با پیشرفت دروس، هر روز مشکلاتش بیشتر و درک او از مطلب کمتر می‌شود. پدرش به وسیلهٔ مدیر مدرسه از من خواست تا به او کمک کنم. مدیر مدرسه که از او به احترام یاد می‌کرد، متذکر شد، زحماتت بی‌اجر نخواهد ماند. اطاق درس، کتابخانهٔ پدرش بود. من اجازه داشتم از کتابها استفاده کنم. پدرش هر بار که کتابی به من می‌داد توصیه می‌کرد که ضمن مطالعه، یادداشتهایی از آنها بردارم.

با تکرار مطالب و تعمق دربارهٔ سؤالهای سعید، مطالب درسی عمیقتر در ذهنم جای می‌گرفت و مرکوز ذهنم می شد. بعدها با همکلاسیهای دانشکده هم، جلسه‌های مطالعه داشته‌ام.

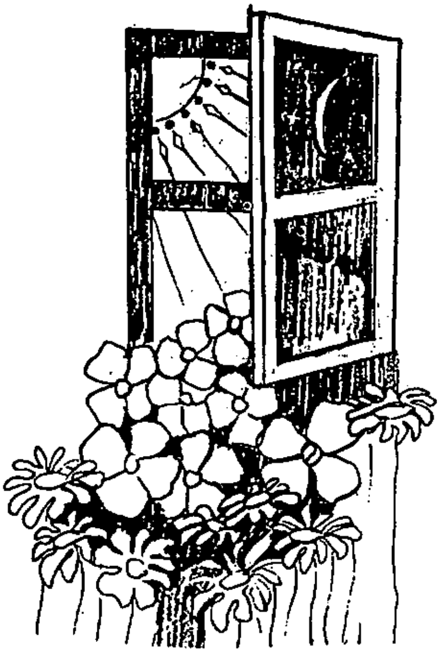
به توصیهٔ شادروان «محمد حسابی» در دانشسرای مقدماتی رشت ثبت‌نام کردم. به فکر افتاده بودم که به دبیرستان نظام بروم که با مخالفت شدید آن زنده‌یاد مواجه شدم و بعدها دانستم که او با استبداد و نظامی‌گری بشدت مخالف است. این همه، بدان علت بود که «دبیرستان ملی اسلامی» که فارغ التحصیل آن بودم، امتیاز تأسیس دورهٔ دوم متوسطه را نداشت.

شادروان «محمد حسابی» در محدودهٔ دروس دبیرستانی، جامع علوم بودند. ریاضیات را بخوبی تدریس می‌کردند. قلم پرقدرت وتوانایی داشتند. خوب شعر می‌گفتند. خطی به غایت زیبا و بسیار خوش داشتند. با زبان فرانسه تا آن جا که از حل‌المسائل *F.G.M.* بتوانند استفاده کنند، آشنا بودند. بعدها که در دبیرستان اسلامی دورهٔ دوم (رشتهٔ ادبی) دایر شد، تدریس ادبیات فارسی و صرف و نحو و تجزیه و ترکیب زبان عرب بر عهدهٔ ایشان بود. شمرده سخن می‌گفت. موقع خواندن اشعار شعرای متقدم، کلاس و درس را فراموش می‌کرد. به کارش علاقه داشت. در زندگی ساده و بی‌تکلف بود. چقدر دلم می‌خواست، بتوانم خصوصیات اخلاقی و منش او را داشته باشم و در معلمی پا، جای پای او بگذارم. روانش شاد باد.

درخرداد ماه ۱۳۱۶ شمسی، از دانشسرای مقدماتی، فارغ‌التحصیل شدیم.

در تمام امتحانات داخلی دانشسرا من شاگرد اول بودم و در امتحان پایانی، سه نفر (حسین فریور- من و رضا مبین) با اختلاف یک صدم، رتبه‌های اول و دوم و سوم را احراز کردیم. تنها در آن سال و فقط از فرهنگ رشت، به جای دو نفر، سه نفر جهت ادامهٔ تحصیل در دانشسرای عالی، اعزام شدیم. شاگردان رتبه‌های اول و دوم دانشسراها، پس از گذراندن یکی از دو کلاس آمادگی *(préparatoire)* علمی یا ادبی دانشسرای عالی حق انتخاب رشته را داشتند. نظر به علاقهٔ مفرطی که به آموختن زبان پیدا کرده بودم، در مهرماه ۱۳۱۶ شمسی در کلاس آمادگی (رشتهٔ ادبی) ثبت‌نام کردم. در اواسط آبان ماه به من اطلاع دادند که «شبانه‌روزیها» حق ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ زبان خارجه را ندارند. چاره‌ای نبود. در اواخر آبان ماه به کلاس آمادگی (رشتهٔ علمی) رفتم.

خوب به خاطر دارم «شادروان محمد وحید تنکابنی» در آن وقت



از سال، از دیدن یک شاگرد تازه وارد به کلاس علمی، ابتدا تعجب کرد. متفکرانه یکی دو بار طول کلاس را پیمود. آنگاه با لحنی پدرانه پرسید: «شما تا حال کجا بودید؟» پس از اطلاع از کم و کیف ماجرا خیره به من نگریست و این بار پرسید: «برای جبران عقب‌ماندگی از کلاس، چه خواهید کرد؟ چه کمکی از من می‌خواهید؟» گفتم: «من از کلاس عقب نیستم، چنانچه به جزوات کلاس دسترسی پیدا کنم، دیگر مشکلی نخواهم داشت.» براحتی نفسی کشید، و با قیافه‌ای شاد گفت: «شما می‌توانید از جزوهٔ من ـ که در حقیقت یادداشتهایش برای تدریس بود ـ استفاده کنید.» یادداشتها تمیز و مرتب و با خطی خوش نوشته شده بود. شادروان وحید به کارش مسلط بود. می‌دانست چه می‌خواهد و چه چیزی و چگونه باید بگوید یا از کجا شروع کند. با رسم چند خط عمودی، تخته سیاه را به چند قسمت تقسیم می‌کرد و به ترتیب در این ستونها مطلب می نوشت. هرگز نیازی به پاک کردن تخته سیاه، پیدا نمی‌کرد. پس از اتمام درس، تمام مطالب گفته شده در آن دو زنگ که روی تخته سیاه نقش بسته بود، بخوبی قابل استفاده بود و تخته سیاه به کتیبه‌های باستانی شباهت داشت.

زنده یاد وحید، شخصاً تمیز و بسیار با سلیقه بود. با آن که خیابان شرقی دانشسرای عالی خاکی بود و در فصول زمستان، پوشیده از گل و

لای، هرگز لکه یا اثری ازگِل و لای بر گالشهای او ندیدم. شاید قبل از ورود به کلاس، کفشهایش را عوض می‌کرد!!

در آن سالها، درس مشترک دانشجویان دو رشتهٔ ریاضی و فیزیک و شیمی «ریاضیات عمومی» بود. دکتر اسداله آل بویه، هندسه تحلیلی *geometrie analytique* و دکتر (م) که تازه از فرنگ برگشته بود، متمم جبر و آنالیز *Complement d'algebre et analyse* را تدریس می‌کردند. به عقیدهٔ من، معلمی یک هنر است و داشتن سواد و معلومات کافی یکی از ابزارهای آن. به عبارت دیگر باسواد و مطلع بودن شرطی لازم است، ولی کافی نیست: کلاس از طرز تدریس دکتر ناراضی بود و دامنهٔ این عدم رضایت به اعتراض و شکایت و در نهایت اعتصاب کشیده شد. دکتر صدیق اعلم، رئیس دانشکده، صریحاً اعلام داشت که از من کاری ساخته نیست... .

در شهریور ماه ۱۳۱۸ دکتر آل‌بویه به هواداری از همکارش دکتر (م) به قصد انتقامجویی از اعتصابیون، بیداد کردند و هیچ مرجعی هم برای دادخواهی و رسیدگی به اوراق وجود نداشت. چون وضع مالی من اجازه نمی‌داد که در خارج از شبانه‌روزی به تحصیل ادامه دهم، به وزارت فرهنگ مراجعه کردم که بلافاصله به سمت دبیری دبیرستانهای همدان منصوب و اعزام شدم.

درسال ۱۳۲۵، دکتر فریدون کشاورز (وزیر فرهنگ در کابینهٔ قوام) مصوبه‌ای را به تصویب رسانید، مبنی بر این که فارغ‌التحصیلان دانشسراهای مقدماتی، با پنج سال سابقهٔ تدریس و اخذ دیپلم کامل متوسطه، پس از قبولی در امتحانات ورودی دانشسرای عالی می‌توانند به عنوان «بورسیه» ادامهٔ تحصیل دهند. در امتحانات ورودی (در رشتهٔ ریاضی) شاگرد اول شدم و از مهرماه ۱۳۲۶ با داشتن زن و فرزند بار دیگر پشت نیمکتهای دانشکده نشستم.

درآن سالها، منوال کار دانشکدهٔ علوم بر این نهج بود که شاگرد اول دانشکده راجهت ادامهٔ تحصیل به خارج اعزام می‌کردند و شاگرد اول دانشکده، با توجه به معدل رشتهٔ تخصصی، معدل علوم تربیتی و نمره زبان خارجه انتخاب می شد و چون تک‌تک نمرات سه‌گانه‌ام بالاتر از سایرین بود، آن سال من انتخاب شدم تا به پاریس یا بن اعزام شوم. دانشکدهٔ علوم هم اقدامات اولیه را انجام داد و گزارش کار جهت صدور گذرنامهٔ تحصیلی به رکن دوم شهربانی فرستاده شد، که «صلاحیتم» به‌علت فعالیتهای دانشجویی مورد تأیید قرار نگرفت و در اواخر اسفند ۱۳۲۹ به یزد اعزام شدم.

در ۳۱ فروردین ۱۳۲۴ شمسی ازدواج کردم که ثمرهٔ آن چهار فرزند (دو دختر و دو پسر) است. «بهجت» نرس است و «بهناز» مددکار اجتماعی و کارشناس ارشد کودکان عقب ماندهٔ ذهنی و بدنی. «بهزاد» مهندس الکترونیک و فوق لیسانس مدیریت از لندن است و «بهنام» لیسانسیهٔ جامعه‌شناسی، فوق لیسانس آمار و دانشجوی دورهٔ دکترای اقتصاد در دانشگاه «اتاوا».

□ سابقهٔ تدریس شما چقدر است و در چه جاهایی تدریس کرده‌اید؟

اگر بگویم «نافم را با معلمی بریده‌اند» خلاف نگفته‌ام. چون از سال دوم دبیرستان به طور خصوصی و از آبان ماه ۱۳۱۸ به طور رسمی تا خرداد ماه ۱۳۵۸ (به مدت چهل سال) درس داده‌ام. درآبان ماه ۱۳۴۳ بنابه تقاضای شخصی با ۲۴ سال و ۱۱ ماه و ۲۸ روز خدمت فرهنگی بازنشسته شدم. ۸ ماه در یزد، دو سال دربندرانزلی و دو سال در رشت و پنج سال (در دو نوبت) در همدان انجام وظیفه کرده‌ام. در تهران، در دبیرستانهای وابسته به گروه‌های جاویدان، خوارزمی، هدف، آذر، بابکان، جام جم و... و در مدارس تهران نظیر مروی، البرز، کیهان نو، فیروز بهرام، انوشیروان دادگر و پیشاهنگ گرفته تا زاگرس، مدائن و تمدن و... و در آموزشگاه‌های شبانه و کلاسهای کنکور خزائلی، آذر، خوارزمی و جاویدان درس داده‌ام. یک سال هم در پلی تکنیک (دانشکدهٔ صنعتی) متمم جبر و آنالیز گفته‌ام.

□ از تألیفات و ترجمه‌هاتان بفرمایید.

با همکاری شادروان باقر امامی تبریزی و آقایان محمد باقر ازگمی، پرویز شهریاری وعلی اصغر شیخ رضایی، یک دورهٔ کامل کتابهای ریاضی، برای دانش آموزان سه سال اول متوسطه و دورهٔ دوم (رشته‌های ریاضی ـ طبیعی و ادبی) تألیف کردیم، تحت عنوان «مجلهٔ علوم». بعدها که وزارت فرهنگ چاپ و انتشار کتب دبیرستانی را رأساً بر عهده گرفت، چند جلد از مجموعهٔ علوم نیز انتخاب شد.

زنده یاد باقرامامی، به زبان فرانسه تسلط کافی داشت و به زبانهای انگلیسی و روسی هم آشنا بود. اطلاعاتش جامع و کامل و در واقع «استاد راهنما»ی ما بود. او کارها را تقسیم و وظیفهٔ هر یک را معین می‌کرد. او بود که به قصد کمک به دبیران ریاضی نقاط دور افتادهٔ کشور و اجابت تقاضاهای مکرر دانش‌آموزان (اکثرا" شهرستانی) ما را به نوشتن «حل مسائل مجموعهٔ علوم» واداشت؛ که ناشر موظف بود، این تألیفات را به عنوان «هدیهٔ مؤلفین» برای دبیران ریاضی ارسال دارد.

حل مسائل مثلثات کنکور (اثر هومن استاد دانشگاه کمبریج)، حل مسائل ریاضیات مقدماتی (اثر لیواشتینسکی)، ترسیمات هندسی (اثر ژولیوس پترمن، استاد دانشگاه کپنهاگ)، راهنمای جبر کنکور و جبر و آنالیز، از جملهٔ کتابهایی است که شخصاً ترجمه یا ترجمه و تألیف کرده‌ام.

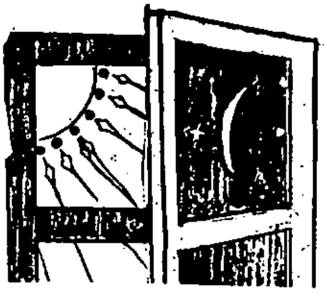
□ دربارهٔ چگونگی تشکیل گروه فرهنگی خوارزمی و جاویدان شرحی دهید:

در اوایل سال ۱۳۳۹ به پیشنهاد باقرامامی، با سرمایه‌ای معادل ۷۵۰۰۰۰ ریال (اولین حق‌التألیف چهل و چند جلد کتب ریاضی مجموعهٔ علوم)، «گروه فرهنگی خوارزمی» راتأسیس کردیم. در تابستان همان سال، کلاسهای کنکور ما، بالاخص رشتهٔ ریاضی آن، با استقبال شدید دانش‌آموزان مواجه شد و همین امر، ما را بر آن داشت، تا با دلگرمی بیشتری، به فکر تأسیس دبیرستان باشیم. در سال تحصیلی ۴۰-۱۳۳۹ دبیرستان پسرانه و سال بعد دبیرستان دخترانهٔ خوارزمی تأسیس شد.

چند سال بعد، ابتدا از عضویت در گروه فرهنگی خوارزمی، سپس از همکاری با مؤلفین مجموعهٔ علوم کناره‌گرفتم. در اواخر ۱۳۴۸، با همکاری جمعی از دبیران پایتخت، «گروه فرهنگی جاویدان» را پی‌ریزی کردیم که ساختمان معظم «دبیرستان جاویدان» واقع در اول جلفای شمالی، تنها یادگار آن دوران است.

□ از شاگردان باهوش خود چه خاطره‌ای دارید؟

اثبات یکی از اتحادهای مثلثاتی به طریق هندسی، نه فقط ساعتها، بلکه روزها ذهنم را به خود مشغول کرده بود، تا آنجا که تصمیم



داشتیم، این تمرین را از متن کتاب درسی حذف کنیم. بالاخره با کوشش فراوان توانستم راه حلی، که نصف صفحهٔ کتاب را اشغال می‌کرد، پیدا کنم؛ کتاب هم با همین راه حل طولانی به چاپ رسید.

در یکی از کلاسهای ششم ریاضی خوارزمی، وقتی این تمرین را که دانش‌آموزان زبدهٔ کلاس از حل آن عاجز مانده بودند، حل می‌کردم و از توفیقی که در این راه نصیبم شده بود، مسرور بودم، «کبّای» یکی از شاگردان کلاس اجازه خواست تا راه حل جدیدی ارائه دهد. او، فقط با رسم یک خط و نوشتن یک رابطه، به نتیجهٔ مطلوب رسید. «راه حل کبّای» در چاپهای بعدی مورد استفاده قرارگرفت. یادش گرامی باد.

□ کدام یک از دبیرستانها را برخوردار از فضای مناسبتری یافته‌اید؟ اگر از شاگردان بازیگوشتان خاطره‌ای دارید، ذکربفرمایید:

برایم کلیهٔ دبیرستانها، محلهای مناسبی برای تدریس بودند. دانش‌آموزان، اگر کلاس درس را قابل استفاده تشخیص می‌دادند، سراپاگوش می‌شدند. این تشخیص در همان جلسات اول و دوم صورت می‌گرفت. تقریبا" تمام ساعات تدریسم در کلاسهای ششم و بالاخص در رشتهٔ ریاضی بود که به تناسب بنیهٔ تحصیلی و درک دانش‌آموزان کلاس، نحوهٔ تدریسم، در کلاسها و مدارس فرق می‌کرد. اتمام برنامهٔ درسی را وظیفهٔ خود می‌دانستم.

در واقع شاگرد مزاحم و بازیگوش، به معنای واقعی کلمه هرگز نداشتم. البته بودند، شاگردانی که گاه‌گاه «نکته‌پرانی» می‌کردند و همه می‌خندیدیم. آنها که مطالعهٔ بیشتری داشتند، حل مسائلی را از من می‌خواستند. به همین جهت اکثر اوقات جیبهایم پربود از اوراقی که صورت مسائل، نام شاگرد و نام دبیرستان روی آنها نوشته شده بود.

□ ازمیان مؤلفین و مترجمین، کدام یک بیشترمقبول شما افتاده‌اند؟ چه ویژگی یا ویژگیهایی در آنان، چنین موجب گشته است؟

مقام علمی استادانی چون «دکتر محمد معین» که قسمت اعظم عمر گرانبهای خود را صرف خدمت به فرهنگ کشور کرده‌اند، و «دکتر غلامحسین مصاحب» که با برخورداری از همکاری صمیمانهٔ جمعی از اساتید مسئولیت سنگین تهیه، چاپ ونشر «دایرةالمعارف فارسی» را بر عهده داشته‌اند، آن چنان رفیع و والاست که من قادر به توصیف آن نمی‌باشم.

ناسپاسی است اگر از «دکتر علی زرگری» به خاطر زحماتی که در تألیف اثر جاودانه‌اش «گیاهان دارویی ایران» متحمل شده‌اند واز «پرویز شهریاری» که ترجمه‌هایش را در کتابهای هر دانش‌آموز دبیرستانی می‌توان یافت، نامی برده نشود.

علاوه بر استادانی که حق معلمی به گردن من داشته‌اند، از مدرسینی که در قید حیات‌اند و سالها از مجالست آنها برخوردار بوده‌ام، حضرات آقایان فریدون کوشا (لیسانسهٔ فیزیک و شیمی) و مهدی قمصری اصفهانی (لیسانسهٔ علوم ریاضی) را از نوابغ اساتید دوران می‌دانم.

نوشته‌های آقای کوشا، نظر به تسلط کافی ایشان به زبان فرانسه و مطالعهٔ مداوم مجلات و کتابهای خارجی و اطلاع از تازه‌ترین تحولات علم شیمی، بسیار دقیق و مستند و جامع است.

مشخصهٔ آقای قمصری وسعت دید، سرعت انتقال، قدرت استدلال و خلاقیت ذهن پویا و فعال ایشان است. در همان محدودهٔ کوچک طرح سؤالهای جبر امتحانات نهایی سالهای ششم ریاضی، مطالبی نو و آموزنده عنوان کرده‌اند که در نوع خود بی‌نظیر بوده است و مهمتر از همه این که این همه، محصول تراوشات فکری ایشان بوده است، نه ترجمه یا اقتباس از کتب خارجی.



□ از آنهایی که شاگرد شما بوده‌اند و به مدارج بالای علمی رسیده‌اند، ذکر کنید:

تعداد شاگردانی که عهده‌دار تدریس آنان بوده‌ام، اندک نبوده است. بی‌شک جمع کثیری از آنها که استعداد ذاتی و امکان مالی داشته‌اند، مدارج علمی را پیموده‌اند. به علاوه ذهن آدمی، لوح محفوظ نیست. مهمتر از همه، در ظاهر جوان دیروز و اکثراً مهندس امروز، تغییرات عظیم روی می‌دهد. با تعدادی از شاگردانم که در سالهای ۲۰ـ۱۳۱۸ عدد یک درهمدان تحصیل می‌کردند، در سالهای ۳۲ـ۱۳۲۹ در دبیرستانهای همدان افتخار همکاری داشته‌ام.

□ وضع تدریس ریاضیات را در گذشته و حال چگونه می‌بینید؟

نشاط (جوانک اصفهانی که هنوز نامش را به یاد دارم) همراه من از کلاسی به کلاس دیگر می‌آمد. با علاقه و شور زایدالوصفی، گفته‌هایم رایادداشت می‌کرد. من هم، برای آن که با تکرار مطالب گفته شده در کلاس قبلی، وقتش را تلف نکنم، برخلاف برنامهٔ تنظیمی، در کلاس جدید، مطلب تازه‌ای را مطرح می‌کردم.

گاهی حضور حتی یک نفر در کلاس، یا طرح یک پرسش بجا یا نابجا در نحوهٔ تدریس و برداشت مطلب اثر می‌گذارد. هیچگاه نتوانستم یک مطلب علمی مشخص را، در یک روز، ولی در دو کلاس به یک نحو تدریس کنم. صدور یک حکم کلی دربارهٔ «وضع تدریس» یعنی رویارویی انسانها با یکدیگر به قصد تفهیم مطلبی که هنوز برای یک طرف ناشناخته است، شاید ممکن نباشد. چون تفهیم و تفاهم به عوامل متعددی بستگی دارد.

تنها مطلب قابل ذکر دراین زمینه و در شرایط کنونی، تلاش بیش از حد متعارف معلمین در راه تأمین نیازهای اولیهٔ زندگی است که به واقع، از جان خود مایه می‌گذارند. صرف این همه انرژی، علاوه بر فرسودگی جسمی و پیری زودرس، بازده چندانی هم ندارد. در حالی که در گذشته، شرایط زندگی تا بدین پایه دشوار و طاقت‌فرسا نبود و معلم، فرصت مطالعه داشت.

□ اوضاع تألیف کتابهای ریاضی را در گذشته و حال چگونه ارزیابی می‌کنید؟

اکثریت قریب به اتفاق معلمین دارالفنون یا فرانسوی بودند یا به زبان فرانسه تدریس می‌کردند. اکثر دانشجویان اعزامی به خارج مشتغل به تحصیل در دانشگاهها، در فرانسه تحصیل کرده بودند. در نتیجه، تألیفات آن زمان، ترجمه‌هایی بود از کتب فرانسه و طبق سلیقهٔ مترجم. واضح است حاصل کار یک فرد، هر اندازه ذهنی قوی و فعال داشته باشد، مصون از کاستی نخواهد بود.

بعدها که کار تألیف به صورت گروهی درآمد، توانستند با استفاده از منابع مختلف (و به زبانهای مختلف) بعضی مطالب علمی را به زبانی ساده‌تر یا به صورتی جامعتر بیان کنند. نظرات اصلاحی و پیشنهاداتِ بجایِ دبیران ریاضی و حتی‌انتقاداتِ دانش‌آموزان سراسر کشور، به کار بسته می‌شد، تا آن جاکه در چاپهای متعدد یک کتاب، تفاوتها و تغییراتی مبتنی بر این‌گونه اصلاحات بخوبی مشهود است. از آن جا که مثلاً نویسندهٔ کتابهای جبر دورهٔ دوم متوسطه یک نفر بود، از کتابهای دیگر این دوره مطلع بوده، رفع گسستگی مطالب می‌گشت. مؤلفین کتب درسی کنونی نسبت به تألیفات خود بیگانه‌اند. چون اجازهٔ دخل و تصرف در نوشته‌های خود را ندارند و انگیزه‌ای هم در آنان برای غنیتر ساختن این آثار وجود ندارد. مهمتر از همه، نظرات یا پیشنهادات اصلاحی را با چه مقامی و در کجا باید در میان گذاشت که ثمربخش باشد؟

□ آیا تألیف کتابهای کمک درسی لازم است؟ آنها را تحت چه شرایطی مطلوب می‌دانید؟

مطالب کتابهای کمک درسی باید جامع، مفید و آموزنده باشند و از آن جاکه نقش خودآموز را بازی می‌کنند، باید به زبانی ساده و روان و قابل فهم نوشته شوند تا به کار محصلان نقاط دورافتادهٔ کشور بیایند. باید که ضمن طرح مطالب جالب و آموزنده، از موضوعات ساده شروع کرد و آن جاکه مسائل و مطالب، دشوار و بغرنج می‌شود، از ذکر توضیحات لازم و کافی خودداری نکرد.

□ موفقیت در ریاضیات را بسته به چه عواملی می‌دانید؟

توفیق درهر امری، مستلزم داشتن پشتکار و تداوم تمرین و ممارست درآن است. در ریاضیات هم، پس از درک مفاهیم ساده و مقدماتی که نقشی اساسی درآموختن ریاضیات دارد و سنگ بنای اولیهٔ آن درکلاسهای اول و دوم ابتدایی گذاشته می‌شود، شاگرد باید آنچنان به تکرار آموخته‌ها و تمرین مسائل بپردازد تا مطالب در ذهنش نقش بندد. آموزگاران سالهای اول دبستان می‌توانند، رغبت به فراگرفتن ریاضیات را در کودک تقویت کنند.

آقای بهنیا، در خاتمه باز هم از شما تشکر می‌کنیم و موفقیت و طول عمر شما را از درگاه خداوند متعال خواستاریم.

تفریح اندیشه ۲

هلال

آیا می‌توانید هلال شکل زیر را تنها با دو خط مستقیم به شش قسمت تقسیم کنید؟



جواب در صفحه ۹۶

تابع معکوس

تابعهای مثلثاتی (Arc ها) (قسمت سوّم)

● علی حسن زاده ماکویی

۷. هریک از رابطه‌های Arc ای را می‌توان با استفاده از روابط نسبتهای مثلثاتی کمانها نوشت. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱

$$\sin\alpha = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \text{و} \quad ۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad \alpha = Arc\sin(\frac{۳}{۵})$$

$$\cos\alpha = \frac{۴}{۵} \quad \text{و} \quad \cot g\,\alpha = \frac{۴}{۳} \quad \text{و} \quad ...$$

با توجه به حدود (α) هریک از رابطه‌های فوق را می‌توان برحسب روابط Arc ای نوشت.

یعنی داریم:

$$\alpha = Arc\sin(\frac{۳}{۵}) = Arc\cos(\frac{۴}{۵}) = Arc\cot g(\frac{۴}{۳}) = ...$$

مثال ۲

$$\sin\beta = \frac{-۵}{۱۳} \quad \text{و} \quad ۰ > \beta > \frac{-\pi}{۲} \quad \text{و} \quad \beta = Arc\sin(\frac{-۵}{۱۳})$$

حال با توجه به حدود β، رابطه‌های فوق را نمی‌توان به‌صورت روابط Arc ای نوشت. بافرض، $\frac{\pi}{۲} > \beta_۱ > ۰$ و $\beta = -\beta_۱$ خواهیم داشت:

$$\cos\beta = \cos\beta_۱ = \frac{۱۲}{۱۳} \quad \text{و} \quad \cot g\,\beta_۱ = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow$$

$$\beta_۱ = Arc\cos(\frac{۱۲}{۱۳}) = Arc\cot g(\frac{۱۲}{۵}) = ... \Rightarrow$$

$$\beta = -Arc\cos(\frac{۱۲}{۱۳}) \text{ و } \beta = -Arc\cot g(\frac{۱۲}{۵})$$
$$= Arc\cot g(\frac{-۱۲}{۵}) - \pi$$

از مثالهای فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر بخواهیم کمانهای ،

$\beta = Arc\cos(n)$ و $|n| \leq ۱$ و $\alpha = Arc\sin(m)$ و $|m| \leq ۱$

و ... برحسب سایر روابط Arc بنویسیم باید حدود کمانها مشخص شوند. ما به‌عنوان نمونه کمانهای a و β را برحسب سایر Arc ها می‌نویسیم.

علاقه‌مندان می‌توانند هریک از رابطه‌های،

$Arc\,tg(p)$ و $Arc\cot g(q)$ و $Arc\sec(s)$ و $Arc\,\mathrm{cosec}(r)$ را با توجه به مقادیر اعداد، p ، q ، s ، r، برحسب سایر Arc ها بنویسند:

الف.)

$$\alpha = Arc\sin(m) \quad \text{و} \quad |m| \leq ۱$$

داریم:

$$(۱) \quad \begin{cases} ۰ \leq m \leq ۱ \Rightarrow \alpha = Arc\cos\sqrt{۱-m^۲} \\ -۱ \leq m < ۰ \Rightarrow \alpha = -Arc\cos\sqrt{۱-m^۲} \end{cases}$$

$$(۲) \quad \alpha = Arc\,tg(\frac{m}{\sqrt{۱-m^۲}}), \quad -۱ < m < ۱$$

$$\alpha = Arc\ cosec\ (\frac{1}{m})\ \text{و}\ m \neq 0 \qquad (۳)$$

$$\alpha = \begin{cases} Arc\,cotg\,(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}), & 0 < m \leq 1 \\ Arc\,cotg(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}) - \pi, & -1 \leq m < 0 \end{cases} \qquad (۴)$$

$$\alpha = \begin{cases} Arc\,sec\,(\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}), & 0 \leq m < 1 \\ -Arc\,sec\,(\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}), & -1 < m < 0 \end{cases} \qquad (۵)$$

کمان $Arc\ sin\ (m)$ به ازای $m = 0$ برحسب $Arc\ cotg$ و $Arc\ cosec$ و به ازای، $m = \pm 1$ برحسب $Arc\ tg$ و $Arc\ sec$ قابل تعریف نیست.

ب) $1 \leq |n|$ و $\beta = Arc\ cos\ (n)$ داریم:

$$\beta = \begin{cases} Arc\,sin\sqrt{1-n^2}, & 0 \leq n \leq 1 \\ \pi - Arc\,sin\sqrt{1-n^2}, & -1 \leq n < 0 \end{cases} \qquad (۱)$$

$$\beta = \begin{cases} Arc\,tg\,(\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}), & 0 < n \leq 1 \\ \pi + Arc\,tg(\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}), & -1 \leq n < 0 \end{cases} \qquad (۲)$$

$$\beta = Arc\ sec\ (\frac{1}{n})\ \text{و}\ n \neq 0 \qquad (۳)$$

$$\beta = Arc\,cotg\,(\frac{n}{\sqrt{1-n^2}}), \quad -1 < n < 1 \qquad (۴)$$

$$\beta = \begin{cases} Arc\,cosec\,(\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}), & 0 \leq n < 1 \\ \pi - Arc\,cosec(\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}), & -1 < n < 0 \end{cases} \qquad (۵)$$

کمان $Arc\ cos\ (n)$ به ازای، $n = 0$ بر حسب کمانهای $Arc\ tg$ و $Arc\ sec$ و به ازای $n = \pm 1$ برحسب $Arc\ cotg$ و $Arc\ eosec$ قابل تعریف نیست. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱.

$$\gamma = Arc\,cos\,(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \pi + Arc\,tg\,(-1)$$

$$= Arc\,cotg\,(-1)$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

مثال ۲. می‌خواهیم کمان، $\omega = Arc\ tg\ (-3)$ را برحسب کمانهای، $Arc\ cos$ و $Arc\ cotg$ و $Arc\ cosec$ بنویسیم.

ω زاویه حادهٔ منفی است. با توجه به رابطهٔ، $\omega = -Arctg\ (3)$ می‌توان نوشت:

$$Arc\ tg\,(3) = \alpha \ \text{و}\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad tg\alpha = 3 \Rightarrow$$

$$cos\,\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad cotg\,\alpha = \frac{1}{3},$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sin\alpha} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

با توجه به روابط فوق به ترتیب داریم:

:(I)

$$\omega = -Arc\,cos\,(\frac{\sqrt{10}}{10}) \ \text{یا}\ \omega = Arc\,cos(\frac{-\sqrt{10}}{10}) - \pi$$

:(II)

$$\omega = -Arc\,cotg(\frac{۱}{۳}) \text{ یا } \omega = Arc\,cotg(\frac{-۱}{۳}) - \pi$$

:(III)

$$\omega = -Arcsec(\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}) \text{ یا } \omega = Arcsec(\frac{-\sqrt{۱۰}}{۳})$$

مثال ۳. می‌خواهیم کمان، $\varphi = Arc\ cotg\ (-۲)$ را بر حسب کمانهای، Arc sin و Arctg و Arcsec بنویسیم.

φ کمان منفرجهٔ مثبت است. وباتوجه به رابطهٔ (۲) $\varphi = \pi - Arc\ cotg(۲)$ می‌توان نوشت:

$$cotg\,\beta = ۲ \Rightarrow \text{ و } \varphi+\beta=\pi \text{ و } ۰<\beta<\frac{\pi}{۲} \text{ و } Arc\ cotg\ (۲)=\beta$$

$$sin\,\beta = \frac{\sqrt{۵}}{۵}\ ,\ tg\,\beta = \frac{۱}{۲}\ ,\ sec\beta = \frac{۱}{cos\,\beta} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

با توجه به روابط فوق داریم:

$$\varphi = \pi - Arc\ sin\ (\frac{\sqrt{۵}}{۵}) \qquad (I)$$

$$\varphi = \pi - Arctg\ (\frac{۱}{۲}) = \pi + Arctg\ (\frac{۱}{۲}) \qquad (II)$$

$$\varphi = \pi - Arcsec\ (\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}) = Arcsec\ (\frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}) \qquad (III)$$

۸. Arc نسبتهای مثلثاتی کمانها. برای تعیین مقدار کمانهایی نظیر، Arc sin (sin x) و Arc cos(cos x) و ... و یا Arc sin (cos x) و Arc cos (sin x) و Arctg (cotg x) و Arc cotg (tg x) باید با توجه به روابط نسبتهای مثلثاتی کمانهای، $\varphi + k\pi$ یا $\varphi + (۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ با نسبتهای مثلثاتی φ، به‌جای x کمان اصلی آن را برحسب مجموعه مقادیر هریک از Arcها قرار می‌دهیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱)

$$\alpha = Arc\ sin\ sin\ (\frac{\pi}{۴}) = \frac{\pi}{۴}$$

$$\alpha = Arc\ sin\ (\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

مثال (۲)

$$\beta = Arc\ sin\ sin\ (\frac{۳\pi}{۵})\ ,$$

$$sin\ (\frac{۳\pi}{۵}) = sin\ (\frac{۲\pi}{۵}) \Rightarrow \beta = \frac{۲\pi}{۵}$$

مثال (۳)

$$\gamma = Arc\,cos\,cos\ (\frac{۷\pi}{۵})\ ,$$

$$cos\ (\frac{۷\pi}{۵}) = cos\ (۲\pi - \frac{۷\pi}{۵}) \Rightarrow$$

$$cos\ (\frac{۷\pi}{۵}) = cos\ (\frac{۳\pi}{۵}) \Rightarrow \gamma = \frac{۳\pi}{۵}$$

مثال (۴)

$$\lambda = Arc\ tg\ tg(\frac{۹\pi}{۵}) \text{ و } tg\ (\frac{۹\pi}{۵}) = tg\ (\frac{-\pi}{۵}) \Rightarrow \lambda = \frac{-\pi}{۵}$$

مثال (۵)

$$\delta = Arc\ cos(sin\ \frac{۵\pi}{۷}) \text{ و } sin\ (\frac{۵\pi}{۷}) = sin\ (\frac{\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۱۴}) \Rightarrow$$

$$sin\ (\frac{۵\pi}{۷}) = cos\ \frac{۳\pi}{۱۴} \Rightarrow \quad \delta = \frac{۳\pi}{۱۴}$$

مثال (۶)

$$\varphi = Arc\ cotg\ tg\ (\frac{۲۳\pi}{۱۰}) \quad \text{و} \quad tg\ (\frac{۲۳\pi}{۱۰})$$

$$= tg\ (\frac{۳\pi}{۱۰}) = cotg\ (\frac{\pi}{۵}) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{۵}$$

۹. روابط مجموع و تفاضل در Arc ها. مجموع یا تفاضل Arc های همنام را می‌توان مانند روابط نسبتهای مثلثاتی دو کمان به‌صورت یک Arc نوشت. ولی با توجه به محدودیت مجموعهٔ مقادیر Arcها باید در تبدیل آنها دقت بیشتری کرد.

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱)

$$\alpha = Arc\cos\left(\frac{۵}{۱۳}\right) + Arc\cos\left(\frac{۳}{۵}\right) \text{ و } \alpha = ؟$$

$$x = Arc\cos\frac{۵}{۱۳} \quad \text{و} \quad \cos x = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \sin x = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$y = Arc\cos\left(\frac{۳}{۵}\right) \quad \text{و} \quad \cos y = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \sin y = \frac{۴}{۵}$$

$$\cos\alpha = \cos(x+y) = -\frac{۳۳}{۶۵}$$

$$۰ < x < \frac{\pi}{۲} \text{ و } ۰ < y < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ < x+y < \pi \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{-۳۳}{۶۵} \Rightarrow \alpha = Arc\cos\left(\frac{-۳۳}{۶۵}\right) = \pi - Arc\cos\left(\frac{۳۳}{۶۵}\right)$$

۱ـ حالت کلی. با توجه به مثال فوق برای تعیین مجموع یا تفاضل دو کمان Arcای داریم:

$$۰ \le m \le n \le ۱ \text{ و } \alpha = Arc\cos(m) \pm Arc\cos(n) \Rightarrow$$

$$\alpha = Arc\cos\left[m.n \mp \sqrt{(۱-m^۲)(۱-n^۲)}\right]$$

مثال (۲)

$$\beta = Arc\sin\left(\frac{۷}{۲۵}\right) + Arc\sin\left(\frac{۳}{۵}\right) \text{ و } \beta = ?$$

$$x = Arc\sin\left(\frac{۷}{۲۵}\right) \text{ و } \sin x = \frac{۷}{۲۵} \Rightarrow \cos x = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$y = Arc\sin\left(\frac{۳}{۵}\right) \text{ و } \sin y = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \cos y = \frac{۴}{۵}$$

$$\beta = x + y \Rightarrow \sin\beta = \frac{۴}{۵}$$

$$\frac{۷}{۲۵} < \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow , \ ۰ < x < \frac{\pi}{۴} , \ ۰ < y < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow$$

$$۰ < \beta < \frac{\pi}{۲} \text{ و } \sin\beta = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \beta = Arc\sin\frac{۴}{۵}$$

مثال (۳)

$$\alpha = Arc\sin\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right) + Arc\sin\left(\frac{۲۴}{۲۵}\right) \text{ و } \gamma = ?$$

$$x = Arc\sin\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right) \text{ و } \sin x = \frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \cos x = \frac{۵}{۱۳}$$

$$y = Arc\sin\left(\frac{۲۴}{۲۵}\right) \text{ و } \sin y = \frac{۲۴}{۲۵} \Rightarrow \cos y = \frac{۷}{۲۵}$$

$$\sin\alpha = \frac{۲۰۴}{۳۲۵} \text{ و } \frac{\pi}{۳} < x < \frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۳} < y < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{۲\pi}{۳} < \gamma < \pi \text{ و } \sin\gamma = \frac{۲۰۴}{۳۲۵} \Rightarrow \gamma = \pi - Arc\sin\left(\frac{۲۰۴}{۳۲۵}\right)$$

۲ـ حالت کلی. با توجه به مثالهای فوق در مورد مجموع کمانهای، $y = Arc\sin(n)$ و $x = Arc\sin(m)$ و $۰ < m$ و $n < ۱$ داریم:

الف)

$$۰ \le m^۲ + n^۲ \le ۱ , \ \gamma = x + y \Rightarrow$$
$$\gamma = Arc\sin\left(m\sqrt{۱-n^۲} + n\sqrt{۱-n^۲}\right)$$

ب)

$$۱ \le m^۲ + n^۲ \le ۲ \Rightarrow$$

$$\gamma = \pi - Arcsin\left(m\sqrt{1-n^2} + n\sqrt{1-m^2}\right)$$

۳. به همین ترتیب در مورد کمانهای،
$\varphi = Arctg\,(p) \pm Arctg\,(q)$ و $p \cdot q \neq 1$ و p و $q > 0$ و
$\lambda = Arctg\,(p) - Arctg\,(q)$ داریم:

الف) $\varphi = Arctg\,\dfrac{p+q}{1-pq}$ و $p.q < 1$، به ازای $p.q = 1$
کمان φ برابر $\dfrac{\pi}{2}$ است.

$$p.q > 1 \Rightarrow \varphi = \pi + Arctg\,\frac{p+q}{1-pq}$$

ب) $$\lambda = Arctg\,\frac{p-q}{1+p.q}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱)

$$Arctg\left(\frac{3}{4}\right) + Arctg\left(\frac{5}{12}\right) = Arctg\left(\frac{56}{33}\right)$$

مثال (۲)

$$Arctg\left(\frac{24}{7}\right) \pm Arctg\left(\frac{4}{3}\right) = \pi + Arctg\left(\frac{-4}{3}\right)$$

مثال (۳)

$$Arctg\left(\frac{1}{3}\right) - Arctg\left(\frac{1}{2}\right) = Arctg\left(\frac{-1}{7}\right)$$

مثال (۴)

$$Arctg\left(\frac{5}{2}\right) - Arctg\left(\frac{3}{2}\right) = Arctg\left(\frac{4}{19}\right)$$

تبصره. اولاً: در رابطه‌های فوق اگر اعداد m، n، p و q منفی باشند، با توجه به روابط بند (۴)، مثبت اعداد مزبور را در نظر می‌گیریم.

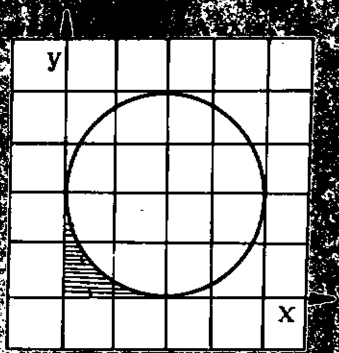
ثانیاً: باید در نظر داشت، همهٔ روابطی که در مورد نسبتهای مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ یا 2α و 3α و ... موجود است، با درنظر گرفتن حدود کمانهایی که به‌صورت Arc هستند می‌توان در مورد آنها به‌کار برد.

تفریح اندیشه ۳

سطح محصور بین محور x ها، محور y ها و

$(x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 4$

را بیابید



جواب در صفحه ۹۱۶

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۷)

شمارهٔ اول سال چهارم مجله با وجود مشکلاتی که در سر راه انتشار آن بود[1] بالاخره در شهریور ۱۳۵۹ چاپ شد.

در اولین مقالهٔ آن و در مقاله‌ای به‌نام خلاقیت ریاضی[2] چنین می‌خوانیم:

همهٔ ما این مطلب را می‌دانیم که بسیاری از دانشجویان خوب ریاضی، که امتحانهای خود را با نمره‌های خوب گذرانده‌اند، نتوانسته‌اند ریاضی‌دانان آفریننده‌ای بشوند، و این وضع مطلقاً به‌خاطر این نیست که آنها نیروی خود را در راه جست و جوی چیزهای تازه مصرف نمی‌کنند، بلکه به این خاطر است که نمی‌توانند چیز تازه‌ای به‌دست آورند. از بین آنها مروج خوب، مؤلف کتابهای جامع و سخنران زبردست بیرون می‌آید ولی نمی‌توانند در درون ریاضیات، خلاقیتی از خود نشان دهند. استعداد آنها به‌کلی درجهت دیگری بروز می‌کند. در عین حال، من افراد زیادی را می‌شناسم که در امتحانها هیچ درخششی نداشتند و نمی‌توانستند به‌عنوان استاد یکی از رشته‌های ریاضی به‌حساب آیند، ولی دارای این استعداد بودند که مسأله‌ها و روشها را با هم مقایسه کنند و هر چیزی را از جنبهٔ دیگری، که ظاهراً نامتعارف بود ببینند و به همین مناسبت، درست در جایی که ویژه کاران اصلی به هیچ نتیجه‌ای نمی‌رسیدند، آنها به نتیجه‌های جالب و تازه‌ای دست می‌یافتند.

این را هم باید گفت که استعداد ریاضی، برخلاف تصور بسیاری، خیلی نادر نیست، ولی این رگه‌های خلاق ریاضی در افراد مختلف، به صورتهای مختلف و در مسیرهای مختلف بروز می‌کند:

بعضی، نتیجه‌گیریهای قبلی را تعمیم می‌دهند و میدان کاربرد آنها را گسترده‌تر می‌کنند؛ بعضی دیگر، موضوعهای تازه‌ای را برای بررسی پیدا می‌کنند. گروه سوم، در جهت تحکیم مبانی منطقی و تکامل نظریه‌ها کار می‌کنند. گروه چهارم، به‌دنبال حل مسأله‌های عملی می‌روند و راههایی برای برطرف کردن دشواریهایی که در رشته‌های گوناگون دانش وجود دارد، جست‌وجو می‌کنند. گروه پنجم، به تجزیه و تحلیل مفهومهای ریاضی و روشهای مختلف بررسیهای ریاضی، یا به اصطلاح، تجزیه و تحلیل فلسفهٔ ریاضی، می‌پردازند و سپس شاخه‌های مختلف تفکر ریاضی را در رشتهٔ واحدی به‌هم می‌پیوندند.

برای این‌که بتوانیم به وجود یا عدم وجود استعداد ریاضی در مورد کسی حکم کنیم، باید همهٔ شکلهای گوناگون بروز این استعداد را درنظر داشته باشیم و حتی، یکی از آنها را هم به‌دست فراموشی نسپاریم. وقتی که کسی، مثلاً در یکی از این مسیرها استعداد ندارد، به هیچ وجه به معنای کلی نبودن استعداد خلاق ریاضی در او نیست. مثلاً در کنار برندگان مسابقات المپیادهای ریاضی، با زندگانی هم وجود دارند، آنها باید بدانند که شکست در چنین مسابقات سخت، به هیچ‌وجه به معنای نبودن استعداد در آنها نیست.

برای پرورش استعداد، کارهای فوق برنامه، چه در

زمینه‌های فنی و چه در زمینه‌های هنری، می‌تواند نقشی اساسی داشته باشد. علاقه به آفرینندگی و کارهای خلاقه باید از همان کودکی مورد توجه قرار گیرد. کار گروهی هم در این مورد نقش بسزایی دارد.

اما، در روند تقویت استعدادها، نقش معلم بزرگ و استثنایی است. اوست که می‌تواند دانش‌آموزان را به سمت پژوهش سوق دهد و شوق جست‌وجو را در آنها به‌وجود آورد. نیز در این مورد مهمتر از هرچیز، وجود محیطی علمی است، و این‌که: باید دربارهٔ چیزی همه چیز را دانست و دربارهٔ همه چیز، چیزی. نیروی آفرینندگی انسان هم به توانایی ذاتی او مربوط است و هم به این‌که بتواند دقت و آگاهیهای خود را در سمتی که برای حل مسأله لازم است متمرکز کند.

در مقاله **ابوریحان بیرونی و گلها**[۳] چنین می‌خوانیم که شکل گلها و شمار گلبرگهای آنها تابع چند برهان منتظم‌اند که ساختمان هندسی دارند. آنچه که ساختمان خط کش و پرگاری ندارد، گلی هم به آن صورت پیدا نمی‌شود.

در مقالهٔ **روش اصولی**[۴] از قول گراسمان چنین آمده که: «کتاب من پایه‌ای برای بررسی انتزاعی مفهوم فضا است و درواقع از قید تصورات عینی ما در مورد محیط فارغ است؛ به عبارت دیگر این ریاضیات کاملاً انتزاعی است و اعمال آن در مورد فضا منجر به علم فضا می‌گردد. علم فضا، چون به چیزی موجود در جهان مادی مربوط می‌شود (منظور همان فضاست) دیگر ریاضیات نامیده نمی‌شود، بلکه کاربردی از ریاضیات در زمینهٔ طبیعت می‌باشد.»

کتاب «اصول هندسه»ی پئانو که در سال ۱۸۸۹ منتشر شد، عناصر هندسه را صرفاً به‌عنوان «چیزها» درنظر گرفت و این اندیشه را ـ که مورد تأکید پئانو بود ـ اثبات نمود که تعداد نسبتاً کمی از اصطلاحهای تعریف نشده برای تعریف کردن سایر اصطلاحهایی که در هندسه ظاهر می‌شود کافی است. او خاطرنشان کرد، تا جایی که مقدور است، تعداد این اصطلاحها (یا صرفاً نمادها[۵]) باید در حداقل ممکن باشد.

به‌طور خلاصه در یک دستگاه اصولی مفهوم را برمی‌گزینیم، اصطلاحهای تعریف نشده و احکامی را که به‌عنوان اصل پذیرفته می‌شوند، انتخاب می‌کنیم؛ سرانجام به اثبات قضایا می‌پردازیم که طبعاً در این مرحله اصطلاحهای جدید نیز به میان می‌آیند. در این‌صورت مهم این است که اصول واقع در یک سیستم با یکدیگر تناقض نداشته باشند.

در مقالهٔ **آفرینندگان ریاضیات عالی**[۶] در مورد پیر فرما چنین می‌خوانیم:

در ۱۶۰۱ متولد شد و در ۱۶۶۵ از دنیا رفت. حادثهٔ قابل ذکری در زندگی خارجی او پیش نیامد، ولی ردپاهایی که از خود در ریاضیات به جاگذاشته چنان است که حتی در زمان ما هم، برای مطالعهٔ شخصیت او، کشش زیادی وجود دارد.

فرما از ۱۴ مه ۱۶۳۱ به‌عنوان مشاور مرکز تمیز پارلمان تولوز مشغول خدمت شد و تا آخر عمر در همین شغل ماند. اما وقت آزاد خود را، با مطالعهٔ نوشته‌های ریاضی و ریاضیات سرگرم کننده و نامه‌نگاری پر می‌کرد. به خاطر استعداد بی‌نظیری که در ریاضیات داشت، به دشوارترین و مهمترین مسأله‌های ریاضی زمان خودش علاقه‌مند شد، و از آن‌جاکه تنها یک دوستدار عادی ریاضی نبود و قابلیت و استعداد خلاق و ممتازی نسبت به ریاضیات از خود نشان می‌داد، است بزرگترین ریاضی‌دانان زمان او، باکمال میل با او مکاتبه می‌کردند.

در مقالهٔ مسأله‌های قدیمی[۷] دو مسألهٔ زیر را، که از مسأله‌های هندسی و اولی از پاپیروس ریند و دومی از پاپیروس مسکو است، می‌خوانیم:

۱. هفت نفر، هرکدام هفت گربه دارند. هر گربه می‌تواند هفت موش را بخورد، هر موش می‌تواند هفت خوشهٔ جو بجوند و هر خوشه هفت جو دارد. بزرگترین عدد این رشته و مجموع آنها کدام است؟

۲. اگر مساحت و نسبت ضلعهای یک مستطیل معلوم باشد، طول ضلعهای آن را پیدا کنید.

در این شماره مقاله‌ای در شرح حال موسی نثری تحت عنوان مردی از این سرزمین با خلق و خویی از مردم این سرزمین[8] موجود است. در این مقاله مرحوم نثری معلم و شاعر و داستان‌پرداز و محقق و رمان نویس و ریاضی‌دان و سرانجام عاشق و حیران معرفی شده است.

از جمله کارهای نثری که‌به آن اشاره شده کتاب «قوانین نثری» در حل معادله‌های درجه سوم و طرز ساختن «بیضی‌کش» است.

به شمارهٔ دوم سال چهارم می‌رسیم. اولین مقالهٔ این شماره تحت عنوان ریاضیات را چگونه درس بدهیم[9] است. راستی ریاضیات را چگونه باید درس داد؟ هر معلم ریاضی این سؤال را بارها و بارها از خود پرسیده است و جوابهایی نیز در خور تجربه و سابقهٔ تدریس خود به آن داده است. ببینیم مقاله چه جوابی برای این سؤال دارد:

ضمن توضیح و تفسیر یک مفهوم ریاضی در کلاس، همیشه بهتر است که از زمینه‌های کاربرد آن گفتگو شود.

نتیجهٔ آموزش را، نه با کمیت آگاهیهایی که داده شده است، بلکه با کیفیت فراگیری آنها، با توانایی به کار بردن آنها، و با قدرت دانشجویان برای ادامهٔ کار به‌طور مستقل، ارزیابی می‌کنند، بهتر است کمتر ولی بهتر بدانیم.

در بین تمام موضوعهای فراوانی که در درس ریاضی وجود دارد، باید بدون تردید مقام اصلی را به آلگوریتمها و راه حلهای کلی داد.

اما تا چه حد باید به استدلالهای منطقی دقیق بها داد؟ آنها که به کاربرد ریاضیات می‌اندیشند می‌گویند تقریباً هیچ. و مهمترین دلیلشان نیز این است که تاکنون در خود ریاضیات هم (چه برسد به کاربردش) هیچ کشفی، از راه دقیق منطقی به دست نیامده است، بلکه همهٔ حکمهای تازهٔ ریاضی، بر ملاحظه‌های شهودی و بر قضاوتهای شبه واقعی و بر تخیل پیشگویی یک نتیجه گیری مشخص از یک حکم کلی یا مشخص دیگر بوده است.

اما معرفت شهودی تنها وقتی می‌تواند ثمربخش باشد که، نه بر زمینه‌ای تهی، بلکه بر زمینه‌ای از دانش واقعی و استوار قرار گیرد.

مجله گاه گاه در مقاله‌های خاصی به تحکیم دانش دانش‌آموزان در مورد مفاهیم اساسی ریاضیات دبیرستانی می‌پردازد و به این ترتیب معلومات آنان را بسط داده استوار می‌کند. مقالهٔ دربارهٔ حد[10] از این گونه مسائل است. یکی از مسائل این مقاله را همراه با حل آن در زیر می‌آوریم:

مسأله: برای مثلث با ضلعهای، ۵، ۱۲، ۱۳:

الف: آیا درست است که قائم الزاویه است؟

ب: آیا این حکم، از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود؟

حل:

الف: زاویهٔ روبه رو به ضلع ۱۳ را درنظر می‌گیریم. اگر این زاویه حاده باشد، بنا به قضیهٔ مربوط به ضلع روبه رو زاویهٔ حاده باید داشته باشیم:

$۱۳^۲ < ۱۲^۲ + ۵^۲$

اگر این زاویه منفرجه باشد، بنابر قضیهٔ ضلع روبه رو به

زاویهٔ منفرجه باید داشته باشیم:

$$۱۳^۲ > ۱۲^۲ + ۵^۲$$

ولی، هردوی این نامساویها نادرستند، زیرا:

$$۱۳^۲ = ۱۶۹ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۲^۲ + ۵^۲$$

بنابراین، زاویهٔ روبه رو به ضلع ۱۳، نه حاده است نه منفرجه، یعنی قائمه است[۱۱].

ب: قضیهٔ فیثاغورس مربوط به مثلث قائم الزاویه است؛ ولی ما از قائم الزاویه بودن مثلث اطلاعی نداریم، بنابراین، نمی‌توان از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کرد.

بعضی از دانش آموزان این طور استدلال می‌کنند: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر مثلث قائم الزاویه نباشد، در این‌صورت باید حکم فیثاغورس سازگار نباشد، و باید رابطهٔ $۱۳^۲ \neq ۱۲^۲ + ۵^۲$ برقرار باشد. ولی این رابطه درست نیست، و بنابراین، مثلث قائم الزاویه است.

ولی، در واقع استدلالی که به‌وسیلهٔ «حروف خوابیده» بیان شده است، ناشی از قضیهٔ فیثاغورس نیست، زیرا قضیهٔ فیثاغورس مربوط به مثلث قائم الزاویه است و هیچ حکمی دربارهٔ مثلثهای دیگر نمی‌کند. به این ترتیب این استدلال از قضیهٔ فیثاغورس استفاده نمی‌کند، بلکه مربوط به قضیه‌های دیگری است که دربارهٔ مثلثهای غیر قائم الزاویه وجود دارد[۱۲].

گفته شد که مجله به تاریخ ریاضیات عنایتی خاص دارد و در این راستا مقاله‌های متعددی ارائه کرده است. در یکی از این مقاله‌ها تحت عنوان **پیشرفت ریاضیات هندی در سده‌های میانه**[۱۳] چنین آمده که:

هندیها به‌خصوص در زمینهٔ حساب خیلی کار کردند. تعیین نمادهایی برای رقمهای دستگاه دهدهی عدد نویسی و به‌وجود آوردن اصل موضعی رقمها (یعنی این‌که، مقدار واحد هر رقم، بستگی به جای آن داشته باشد) به هندیها مدیون است. به جز این، در هند، برای صفر نمادی درنظر گرفتند و کاربرد گستردهٔ آن را، برای نشان دادن جای خالی رقمها، معین کردند.

معادله‌های درجه اول و درجه دوم را حل می‌کردند، و در حل مسائل حساب از روش معکوس و روش فرضی استفاده می‌بردند[۱۴].

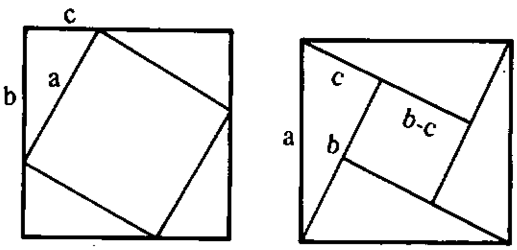
از رابطه‌هایی که به زبان امروزی به‌صورت زیر هستند[۱۵]، آگاه بودند:

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^۲ - b}}{۲}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^۲ - b}}{۲}}$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm ۲\sqrt{ab}}$$

مهمترین کارها را در رشتهٔ هندسه، باید به حساب براهماگوپتا گذاشت. مسأله‌های اصلی (پی) که براهماگوپتا حل کرده، چنین است: تعیین مساحت مثلث با معلوم بودن ضلع و شعاع دایرهٔ محیطی، رسم مثلثی که در آن ضلعها، شعاع دایرهٔ محیطی و مساحت با عددهای گویا بیان می‌شوند و ...

هندیها قضیهٔ فیثاغورس را هم، با روش جالبی اثبات می‌کردند. برای اثبات مثلاً دو شکل زیر را می‌کشیدند و می‌نوشتند «دیده می‌شود».



در مثلثات نیز، رابطه‌های

$$۱ - \cos ۲\alpha = ۲\sin^۲\alpha \,,\ \cos(۹۰^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$$

را می‌شناختند و از رابطه‌های مربوط بـه سـینوس مـجموع و تفاضل دوکمان آگاه بودند.

از این مرحله که می‌گذریم به پنجمین سال انتشار مجله که مصادف با بهار ۱۳۶۰ است می‌رسیم و در اولین شماره و اولین مقالهٔ آن یعنی هندسه در دبیرستان[۱۶] چنین می‌خوانیم که:

معنای واقعی آموزش متوسطه و هدف آن باید این باشد که آگاهیهای لازم عملی را به آدمی بدهد، شخصیت او را تکامل بخشد، بر روابط فکری، روحی و اخلاقی او اثر مثبت بگذارد (و بخصوص، مسألهٔ موازین اخلاقی، اهمیّت فـوق‌العـاده دارد). بنابراین، مسألهٔ نیاز به این یا آن مادهٔ درسی و ضرورت وجود یا عدم وجود آن، می‌تواند تنها در قالب مسألهٔ نیـازهای عـملی جامعه و اهمیّتی که این مطالب در تکامل شخصیت انسان دارد، مورد بررسی قرار گیرد.

ویژگی هندسه در این است که در آن استدلال دقیق و منطقی با درک عینی مطلب همراه است. و اساساً، ماهیت هندسه در همین است که تصور زنده، را با منطق دقیق بـه هـم پـیوند می‌دهد و این هر دو یکدیگر را تنظیم و توجیه می‌کنند.

تصور، امکان مشاهدهٔ مستقیم مـوضوع هـندسه را بـه دست می‌دهد و منطق بیان و استدلال آن را پیش‌بینی می‌کند. منطق هم به نوبهٔ خود تصور را دقیقتر می‌کند. این وضع، بی‌شک در مورد همهٔ موارد هندسهٔ سه بعدی اقلیدسی صادق است. ولی حتی در مورد سرچشمه و مبانی درونی هندسهٔ نـااقـلیدسی و هندسهٔ چندبعدی هم، تصور عینی، ولو به صورت تعمیم یافتهٔ آن وجود دارد.

تصور زنده بیشتر نزدیک به هنر است، در حالی‌که منطق خشک و دقیق امتیاز دانش است. می‌توان گفت که آنها به کلی در تضاد با یکدیگرند، با وجود این، هندسه آنها را به هم پیوند داده است. و مسأله آموزش همین است که آنها را در یک مادهٔ درسی، آشتی دهد.

در درس هندسه، دو جنبهٔ متضاد دیگر هم وجود دارد که با هم جمع شده‌اند: هندسهٔ انتزاعی و مجرد ریاضی، و هندسهٔ عملی، یعنی، بستگیهای واقعی فضایی و ویژگیهـای جـسمها. حکمهای هـندسه برای وجودهـای ایـده آلی بیـان و اثبـات می‌شوند. در حالی‌که با آنها چنان برخورد مـی‌شود کـه گـویا دربارهٔ وجودهایی هستند که بـه‌طور عـینی قـابل تـصورند و می‌توانند در مورد چیزهای واقعی به کار روند.

تمامی انتزاعهای هندسی ریشه‌ای در عمل دارند و بعد هم در عمل به کار می‌روند. به این ترتیب در آموزش هندسه باید سه عنصر مربوط به هم، و در عین حال متضاد با هم، وارد شود: منطق، تصور عینی، کاربرد دنیای واقع.

ماشین محصولی از هندسه است. در مکانیک و فیزیک هم تصورهای هندسی نقشی اساسی دارند، دست‌کم به این علت که حرکت روندی است که در فضا اتفاق می‌افتد.

اهمیت تصورهای فضایی درهنرهـای تـجسمی و در معماری چنان روشن است که نیازی به گفتگو ندارد. تصورهای فضایی و شهود هندسی در خود ریاضیات (غیر از هندسه) هم نقشی اساسی به‌عهده دارد. آنالیز ریاضی که کار خود را با محور عددی و رسم منحنی و غیر آن آغاز می‌کند بـدون شکلهـای هندسی بی‌معنی می‌شود.

اما در مورد دقت هندسه، با توجه به این‌که دقت مطلق نه معنی دارد نه وجود دارد، مسألهٔ آموزش مربوط به این می‌شود که سطحی از دقت را بپذیریم و بیان خود را بر مبنای آن قرار دهیم.

نکتهٔ عمیق و پراهمیّتی که در درس هندسه نهفته است به تربیت جهان‌بینی علمی مربوط می‌شود. در درس هندسه است که می‌توان دانش‌آموز را واداشت تا به حقیقت حرمت بگذارد و ضمناً بپذیرد که «حقایق مشهود» نیاز به اثبات دارند و اعتبـار پیشین آنها، تا زمانی که ثابت نشده‌اند، می‌تواند مورد تـردید

قرار گیرد.

در احترام به حقیقت و درخواست اثبات، نکته‌های اخلاقی بسیار مهمی وجود دارد. ساده‌ترین، ولی نه کم اهمیت‌ترین آنها، این است که بدون استدلال قضاوت نکنیم و در جایی که نیاز به ارائهٔ حقایق و مدارک است، به احساسها و تأثرها و تهمتها تسلیم نشویم.

به‌طور کلی، آن توانایی و مهارتی که باید دانش‌آموزان در درس هندسه به‌دست آوردند، در قسمت عمده و قریب به اتفاق خود عبارت است از مهارت ترکیب تصور عینی با منطق.

در مقالهٔ **تلاشی برای تنظیم فرهنگ ریاضی**[17] در مورد آلگوریتم چنین آمده است که:

آلگوریتم، یکی از اساسی‌ترین مفهومهای ریاضیات است که با کمک مفهومهای ساده‌تر از خودش تعریف رسمی ندارد. به‌طور کلی، آلگوریتم به هر دستور دقیق و روشنی گفته می‌شود که یک روند محاسبه‌ای را (که در این حالت، روند آلگوریتمی نامیده می‌شود)، بر مبنای داده‌های اوّلیّه، در پی داشته باشد (و البته این داده‌های اوّلیّه، باید برای آلگوریتم مورد نظر، ممکن باشد)، و سپس ما را به نتیجهٔ کاملاً معینی برساند. دراین مورد، محتوی هر دستور، به جز دستورالعملی که برای مشخص کردن روند لگاریتمی به همراه دارد، باید دارای این ویژگیها هم باشد: ۱) مجموعهٔ ممکن را برای داده‌های اوّلیّه نشان دهد و ۲) شامل قانونی باشد که بنابرآن، روند کار، به‌صورت به‌دست آوردن نتیجه، به پایان برسد.

مفهوم آلگوریتم، در ریاضیات معاصر، و بخصوص ریاضیات محاسبه‌ای، اهمیّت زیادی دارد. در هر گامی از دانشها، به این مطلب برخورد می‌کنیم که بتوانیم مسأله‌ای را به‌صورت کلی خود حل کنیم و این در واقع، به معنای آن است که از یک آلگوریتم آگاهی داشته باشیم. وقتی که مثلاً دربارهٔ امکان جمع کردن عددها گفت‌و گو شود، تنها به معنای این نیست که قدرت جمع کردن هر دو عددی را داشته باشیم، بلکه، ضمناً به‌معنای این است که برای جمع عددهای مشخص، قاعدهٔ کلی و معینی هم وجود دارد که آن‌را آلگوریتم جمع می‌گوییم (نمونهٔ این آلگوریتم عبارت است از قاعدهٔ معلوم جمع ستونی عددها).

کلمهٔ آلگوریتم، از تحریف نام ریاضی‌دان بزرگ سدهٔ نهم میلادی خوارزم، محمدبن موسی خوارزمی گرفته شده است.

امروز عدم وجود آلگوریتم برای حل تعداد زیادی از مسأله‌های ریاضی ثابت شده است. کشف آلگوریتمهای مختلف، اثبات عدم وجود آلگوریتم برای یک رشته از مسأله‌ها، و تنظیم نظریه‌های کلی در مورد آلگوریتم، بخصوص با پیشرفت و تکامل شگفت‌آور ماشینهای محاسبه بستگی دارد، به‌نحوی که این امکان به‌دست آمده است که تقریباً هر آلگوریتمی را با ساختمان ماشینهای محاسبه تطبیق دهند.

در مقالهٔ **گردآوری و ارائهٔ اطلاعات**[18] که خود فصلی از کتاب **سیبرنتیک از الف تا یا**[19] است تحت عنوان **چگونه می‌توان سوزن گمشده‌ای را در جنگل یافت؟** چنین آمده که:

درحال حاضر مشکل اساسی این است که چگونه تمام معلومات بشری را ذخیره و تجزیه و تحلیل کنیم و نیز این که چطور بتوانیم امکان فراخواندن و انتقال‌شان را فراهم آوریم.

در سال ۱۸۰۰ یک‌صد نشریهٔ علمی در دنیا وجود داشت. در سال ۱۹۵۰ این رقم به ۱۰۰۰۰۰ رسید و امروز از مرز ۲۰۰۰۰۰ نیز می‌گذرد. دراین‌صورت چگونه می‌توان این همه مطلب را خواند و از آن مهمتر هضم کرد.

یکی از راه‌های برخورد با این مشکل وارسی نشریه‌ها و انتخاب و خلاصه کردن مقاله‌ها است. اما با این روش نه‌تنها ممکن است که بعضی از مطالب مهم از قلم بیفتد و از آن مهمتر

جان کلام از دست برود این امکان نیز وجود دارد که کل مطلب ازنظر پنهان بماند. به‌عنوان مثال، در سال ۱۹۵۳ از نشریه‌های صنعتی آمریکا مطلبی در مورد روش به کار گرفتن روکشهای قابل تعویض برای لاستیک چرخ اتومبیل به چاپ رسید. در سال ۱۹۵۹ کارشناسان شوروی به این مقاله برخوردند و دو هفته بعد کارخانهٔ «یاروسلاول» به تولید این‌گونه روکشهای قابل تعویض پرداخت. این کار در عین سادگی ازنظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه بود و به این ترتیب ۶ سال تأخیر امکانات اقتصادی زیادی را به هدر داد.

اما بهترین راه ارائهٔ یک گزارش علمی چیست؟

اولاً گزارش باید خلاصه باشد. به‌همین منظور بهتر است متن اصلی اختیار شود و از توضیح و تفسیر مفصل صرف‌نظر گردد. از طرف دیگر گزارش نباید بیش از حد خلاصه شود زیرا در هر گزارش اطلاعاتی هست که نمی‌توان آنها را خلاصه کرد (مثل فرمولها، تاریخها، نامهای جغرافیایی و نامهای محققین).

نکتهٔ آخر این‌که در عصر گسترش علوم مختلطی چون زبانشناسی ریاضی، بیونیک، شیمی فضایی و غیره، دانشمندان یک رشته ـ هرچند هم که کارشان تخصصی باشد ـ نمی‌توانند از نتایج آثار و تحقیقات دانشمندان سایر رشته‌ها بی‌نیاز باشند.

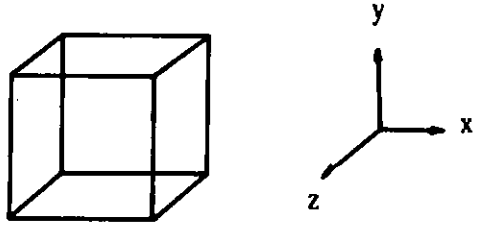
مجله به رویدادهای ریاضی معاصر نیز بی‌توجه نیست و مثلاً مقاله‌ای در مورد **دوازدهمین کنفرانس ریاضی کشور**[۲۰] که از ۸ ـ ۱۱ فروردین ۶۰ در دانشگاه صنعتی اصفهان تشکیل شده، دارد و در آن خلاصه‌وار به شرح وقایع کنفرانس می‌پردازد.

مقالهٔ **مسألهٔ ریاضی را چگونه حل می‌کنیم**[۲۱]: یکی از راه‌های انجام این کار را تغییر شکل شرطهای مسأله و بیان همهٔ آنها به یک نوع اصطلاح، مثلاً زاویه، می‌داند. راه دوم استفاده از «اصل صرف کردن» است. این اصل به این‌صورت است که در میان انواع شکلهای مختلفی که یک مطلب می‌تواند داشته باشد شکل صحیح آن را انتخاب کنیم. اصل سوم رسیدن از «جزئی به کلی» است، به این ترتیب که هر مسأله را به اجزای خود تجزیه می‌کنیم، مجموعه‌ای از اجزای آن را انتخاب می‌کنیم و آن را به کمک اجزای لازم دیگر، به‌صورت مجموعهٔ کاملی در می‌آوریم.

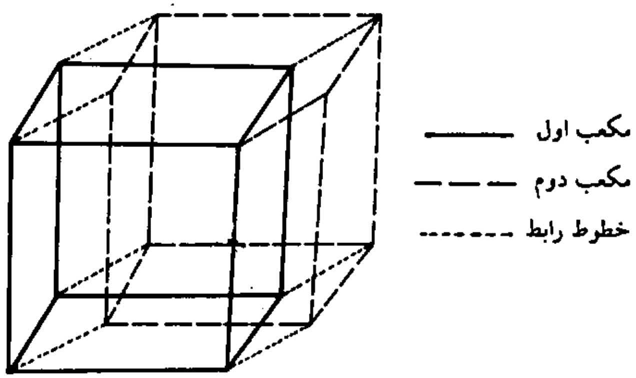
در مقالهٔ **بررسی و شمارش عناصر نخستین در فضای n بعدی**[۲۲] به قواعدی برخورد می‌کنیم که شخص را با مفهوم فضای بیشتر از سه بعدی، آشنا می‌کند، و دراین مسیر سعی مقاله بر این است که خصوصیاتی را که با تغییر بعد فضا ثابت می‌مانند، به‌عنوان تکیه گاههایی یافته و از آن برای استقرای ریاضی در مورد فضای بیشتر از سه بعد استفاده کند، و در این مورد به فضای چهار بعدی توجه می‌دارد و مطلب زیر را عنوان می‌کند:

در بررسی مسائل و قضایای هندسهٔ فضایی چون در عمل ناگزیر به استفاده از کاغذ هستیم که بیش از دو بعد ندارد به اشکال جدیدی برخورد می‌کنیم که هنگام مطالعهٔ هندسهٔ مسطحه ابداً با آن مواجه نیستیم. این موضوع بخصوص در آغاز آشنایی با هندسهٔ فضایی برای دانش‌آموزان سر درگمیهایی به‌وجود می‌آورد.

عملاً برای آن‌که بتوان مسائل اشکال هندسهٔ سه‌بعدی را روی کاغذ پیاده کرد براساس روش تصویری «پرسپکتیو» دو بعد را با ابعاد دوگانهٔ کاغذ تأمین می‌کنند و بعد سوم راکه در واقع می‌بایست عمود بر صفحهٔ کاغذ باشد با امتداد مایل روی صفحهٔ ترسیم نشان می‌دهند. همهٔ ما با نمایش مکعب به‌صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است آشنا هستیم و در حل مسائل هرجا که لازم باشد خطی به موازات بعد سوم رسم شود روی صفحهٔ ترسیم آن را به موازات محور مایل z می‌کشیم. با نگاه کردن به تصویر فوق از مکعب می‌توانیم حالت اصلی آن راکه سه‌بعدی است تجسم کنیم.



با استفاده از شکل فوق، موجودات دو بعدی (موجوداتی فرضی که همچون سایه فاقد حجم باشند) درصورت داشتن ذهن ریاضی پرورش یافته می‌توانند مسائل مربوط به مکعب را در جهان صفحه‌ای خودشان حل کنند. پس ما هم که موجودات سه‌بعدی هستیم باید بتوانیم با استفاده از چنین تبدیلی مسائل مربوط به مکعب چهار بعدی را درجهان سه‌بعدی خودمان حل کنیم. همان‌طور که انسانهای چهاربعدی آن مسائل را روی کاغذهای سه‌بعدی دفتر هندسه‌شان حل می‌کنند! برای این کار اول یک مکعب می‌سازیم که اضلاعش از مفتول باشد، سپس مکعب دیگری همانند مکعب اوّلیّه ساخته آن‌را نسبت به مکعب اوّلیّه در موقعیتی قرار می‌دهیم که اولاً: همهٔ اضلاع نظیرش با مکعب اوّلیّه موازی باشد، ثانیاً: مرکز این مکعب نسبت به مرکز مکعب اوّلیّه (یا هر رأس این مکعب نسبت به رأس نظیرش در مکعب اوّلیّه) تغییر مکانی محدود و در امتدادی مایل نسبت به سه بعد اصلی داشته باشد. حال اگر با مفتولهای مستقیم دیگری رئوس نظیر این دو مکعب را به هم وصل کنیم، تصویری از مکعب چهاربعدی در فضای سه بعدی به‌دست آورده‌ایم و



می‌توانیم مسائل مربوط به مکعب چهاربعدی را در فضای سه‌بعدی حل کنیم.

تصویر دوبعدی هم می‌توان از مکعب چهاربعدی رسم کرد که در این جا ناچار به گنجاندن دو بعد اضافی در صفحه هستیم که به‌صورت دو امتداد مایل متفاوت ظاهر می‌شود.

این کار را می‌توان روی صفحه برای مکعبهای ابعاد بالاتر هم ادامه داد ولی شکل حاصل بسیار پیچیده و شلوغ خواهد شد.

یکی از خصوصیات عمده‌ای که در تصویر دوبعدی از مکعب محفوظ می‌ماند عدهٔ رئوس و اضلاع و وجوه است. این خاصیت در تصویر دوبعدی از مکعب چهار بعدی (شکل فوق) نیز محفوظ مانده است.

با دقت و تعمق در تصویر دوبعدی از مکعب چهاربعدی می‌توانیم دریابیم که مکعب چهاربعدی ۳۲ یال و ۸ مکعب سه‌بعدی دارد.

در مسیر بررسی مقاله‌های مجلهٔ آشتی با ریاضیات می‌رسیم به مقالهٔ بحثی در زمینهٔ عددهای طبیعی[۲۳] و در آن می‌خوانیم که:

پاسخ به این سؤال که «عدد طبیعی چیست؟»، «مانند این‌که ریاضی چیست؟» مطلبی است غیر ریاضی، لذا به زعم عده‌ای هیچ ریاضی‌دانی ملزم به پاسخ دادن به چنین سؤالهایی نیست، اما عدم وجود پاسخی روشن، و نه قاطع، برای چنین سؤالهایی از یک طرف و انتزاعی بودن خود ریاضیات از طرف دیگر، منجر به پیدا شدن نظریه‌هایی از این قبیل که: «گویا ریاضیات از تفکر خالص به‌وجود آمده» یا این طرز فکر عامیانه که «گویا ریاضیات مشکل و دست نیافتنی است» شده است، و نتیجهٔ این وضع این است که شاخه‌های مختلف ریاضی، که مانند چشمه‌های جوشانی تمام رشته‌های فنون و علوم مختلف را به فراخور حالشان سیراب می‌کنند، و خود نیز زادهٔ زندگی می‌باشند، به‌عنوان موجوداتی

ترسناک و وحشت‌انگیز جلوه گر شده، مآلاً ریاضیات را در هاله‌ای از ابهام فرو می‌برد. به این ترتیب، کوششی که در راه بازشناسی تکوین عددهای طبیعی خواهیم داشت، کوششی در راه محو کردن این هاله از پیرامون ریاضیات و نشان‌دادن جوهر زندگی ریاضی خواهد بود.

با هر آشنایی می‌توان سه خاصیّت زیر از عددهای طبیعی را ذکر کرد:

(۱) انتزاعی بودن عددهای طبیعی.

(۲) بی‌نام بودن قسمت اعظم عددهای طبیعی.

(۳) سهلتر بودن استفاده از علائم «نوشتاری» ـ نسبت به علائم گفتاری ـ ذکر عددهای طبیعی.

اینکه یک عدد طبیعی موجودی انتزاعی است، مطلبی واضح است، زیرا هیچ موجود طبیعی(ای) که مثلاً (۵۳) برای اشاره به آن به‌کار رود وجود ندارد. نتیجه این‌که عددها محصول طبیعت نمی‌باشند و محصول ذهن می‌باشند. بی‌نام بودن قسمت اعظم عددها واضح است، اما از (۲) نتیجه می‌شود که عددهای طبیعی همگی با هم متولد نشده‌اند. (۳) نیز واضح است.

به هر حال هر نظریه‌ای که راجع بـه تکـوین عددهـای طبیعی بیان شود باید قادربه توجیه سه خاصیت بالا باشد.

یادداشتها

۱ ـ شرح این هجران و این خون جگر را می‌توان در مقالهٔ سردبیر همین شمارهٔ مجله، یعنی سال چهارم شمارهٔ ۱ (یا شمارهٔ مسلسل ۱۴) خواند.

۲ ـ مجلهٔ آشتی با ریاضیات، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۴، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۳ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۲۲، علی‌رضا امیرمعز.

۴ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۳۰، ترجمهٔ محمد باقری.

۵ ـ Symbols

۶ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۶۴، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۷ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۸۶.

۸ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۹۰.

۹ ـ همان مرجع سال چهارم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۱، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۰ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۴۳، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۱ ـ چون عکس قضیهٔ فیثاغورس، یعنی، این‌که، مثلثی به اضلاع a، b، c (با $a>b$، $a>c$) که در آن رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است قائم‌الزاویه می‌باشد، اثبات شده است، بنابراین می‌توان از این مطلب نیز در اثبات مسأله استفاده کرد.

۱۲ ـ به شمارهٔ قبل رجوع کنید.

۱۳ ـ همان مرجع، سال چهارم شمارهٔ ۳، صفحهٔ ۳۵، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۴ ـ هردوی این روشها در خلاصهٔ الحساب شیخ بهایی آمده است.

۱۵ ـ رابطهٔ اول فرمول رادیکال مرکب و رابطهٔ دوم اتحادهای به اصطلاح «اول و دوم» است.

۱۶ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۱، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۷ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۴۸، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۱۸ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۵۸، ترجمهٔ محمد باقری.

۱۹ ـ Cybernetics A Toz

۲۰ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۱، صفحهٔ ۱۰۵، محمدحسین احمدی.

۲۱ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۱، ترجمهٔ پرویز شهریاری.

۲۲ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۱۵، محمد باقری.

۲۳ ـ همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۲، صفحهٔ ۲۸.

***

ادب و ریاضی

سه اصل سنتی این همانی، نفی ثالث و تضاد به ترتیب عبارت‌اند از:

(*i*) هر شئ عین خودش است.

(*ii*) هر شئ یا هست یا نیست.

(*iii*) یک شئ نمی‌تواند در عین حال وجود داشته باشد، و وجود نداشته باشد.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه، پرویز شهریاری

فاصله یک نقطه از یک مجموعه نقاط

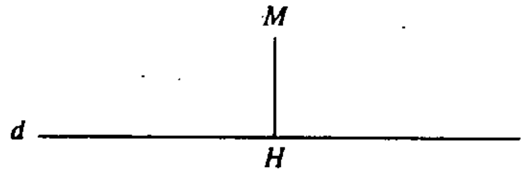
دکتر احمد شرف‌الدین

تعریف فاصله یک نقطه از یک مجموعه نقاط

نقطهٔ M و مجموعه نقاط E را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که N نقطه‌ای از مجموعه E باشد به طوری که فاصله‌اش از نقطه M کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. در این صورت فاصله نقطه M از نقطه N را فاصله نقطه M از مجموعه نقاط E می‌نامیم.

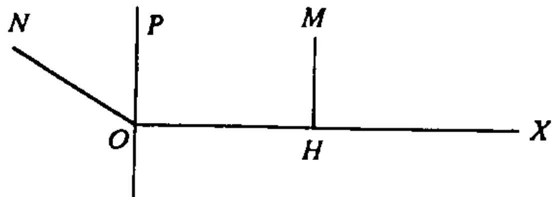
اکنون تعریف یاد شده در بالا را برای حل مسائل زیر به کار می‌گیریم.

مسئله ۱. در صفحه π خط d و نقطه M مفروض است. فاصله نقطه M از خط d چیست؟



از نقطه M عمود MH را بر خط d فرود می‌آوریم. طول پاره‌خط MH، فاصله نقطه M از خط d است.

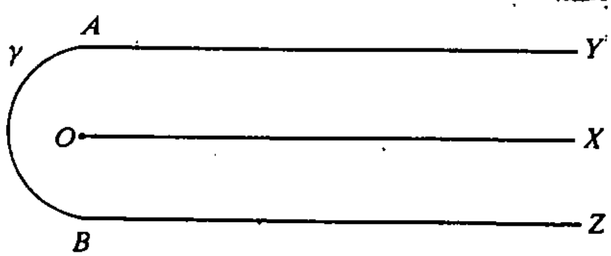
مسئله ۲. در صفحه π ، نیم‌خط OX و نقطه M مفروض‌اند. فاصله نقطه M از نیم‌خط OX چیست؟



در صفحه π، خط OP را بر نیم‌خط OX عمود می‌کنیم. خط OP صفحه π را به دو بخش تقسیم می‌کند. یکی بخش I که شامل نیم‌خط OX است و دیگری بخش Π که شامل هیچ نقطه از بخش I نیست.

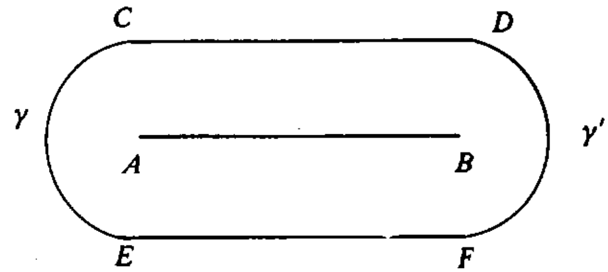
اگر نقطه M متعلق به بخش I باشد، فاصله آن از نیم‌خط OX عبارت است از طول عمود MH که از نقطه M بر خط OX فرود آید. اگر نقطه N متعلق به بخش Π باشد فاصله آن از نیم‌خط OX عبارت است از طول پاره‌خط ON.

مسئله ۳. در صفحه π، نیمخط OX را در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه π که از نیم‌خط OX به فاصله L باشند.



از نقطه O خط AB را در صفحه π ، بر نیم‌خط OX عمود می‌کنیم. بر روی خط AB دو نقطه A و B را در دو طرف نقطه O به فاصله L از نقطه O اختیار می‌کنیم. دو نیم‌خط AY و BZ را موازی و همسو با نیمخط OX اختیار می‌کنیم. نیم دایره γ به قطر AB که نیم‌خط OX را قطع نمی‌کند رسم می کنیم. شکل حاصل از اجتماع دو نیم‌خط AY و BZ و نیم دایره γ مکان هندسی مطلوب است.

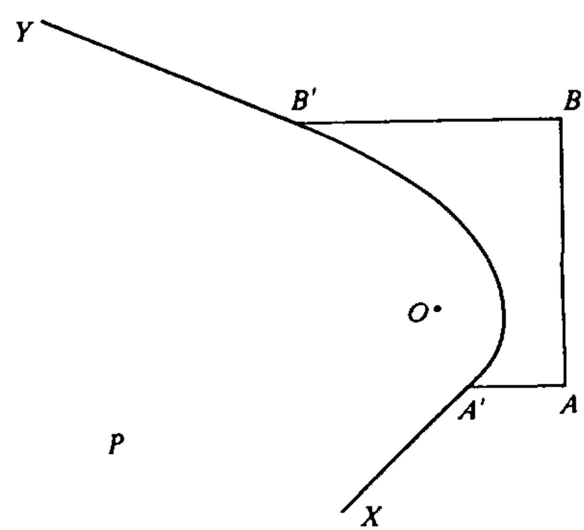
مسئله ۴. در صفحه π ، پاره خط AB را در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه π که از پاره خط AB به فاصله L باشند.



در صفحه π، از نقطه A خط CE را برخط AB عمود می‌کنیم. بر روی خط CE دو نقطه C و E را در دو طرف نقطه A به فاصله L اختیار می‌کنیم. دو بردار $\vec{CD}$ و $\vec{EF}$ را همسنگ بردار $\vec{AB}$ رسم می‌کنیم. دو نیم دایره γ و γ' را با قطرهای CE و DF در خارج مستطیل $CDEF$ رسم می‌کنیم. شکل حاصل از دو پاره خط CD و EF و دو نیم‌دایره γ و γ' مکان هندسی مطلوب است.

مسئله ۵. در صفحه π، پاره خط AB و نقطه O غیر واقع بر خط AB مفروض‌اند. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه π که از نقطه O و پاره خط AB به یک فاصله‌اند.

حل. در صفحه π، سهمی P را با کانون O و خط هادی AB رسم می‌کنیم. نقاط برخورد سهمی P را با دو خط AA' و BB' که بر خط AB عمود می‌شوند به ترتیب A' و B' می‌نامیم. دو نیم خط $A'X$ و

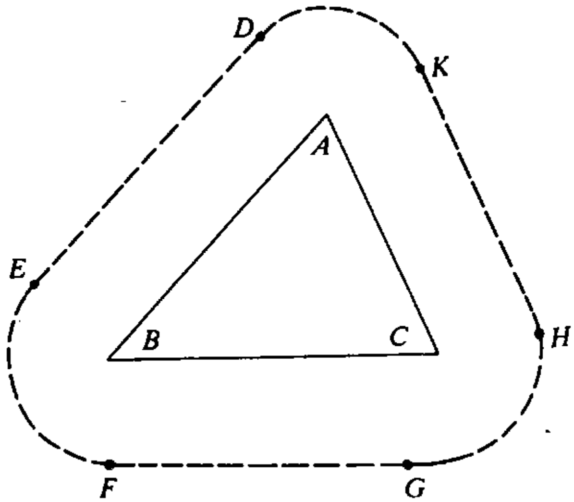


$B'Y$ را به ترتیب بر دو پاره خط OA و OB عمود می‌کنیم. جهت این دو نیم خط را طوری اختیار می‌کنیم که هیچ نقطه از این دو نیم خط در داخل نواری از صفحه π که محدود به دو خط نواری AA' و BB' است نباشد. (دو نیم خط $A'X$ و $B'Y$ به ترتیب بر عمود منصفهای دو پاره خط OA و OB قرار دارند.)

مکان هندسی مطلوب عبارت است از شکل حاصل از اجتماع کمان $A'B'$ از سهمی P و دو نیم خط $A'X$ و $B'Y$.

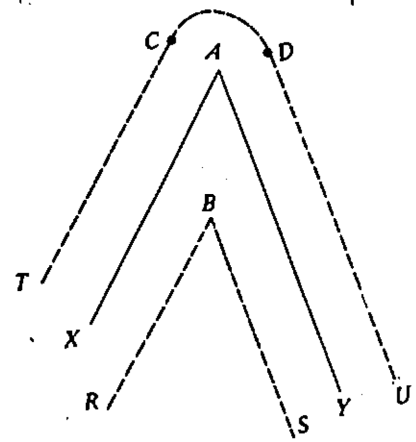
مسئلهٔ ۶. جزیره‌ای به شکل مثلث ABC در دریا در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از دریا که از جزیره مفروض به فاصله L باشند (L طولی است معلوم مثلاً ۶ کیلومتر). به عبارت دیگر منظور تعیین حریم جزیره تا فاصله ۶ کیلومتر است.

حل. مکان هندسی مطلوب به‌طور خط‌چین رسم شده است. این مکان متشکل از سه پاره‌خط DE ، FG و HK و سه کمان KD ، EF و GH است به‌طوری که سه چهارضلعی $BADE$ ، $BFGC$ و $CHKA$ مستطیل‌اند و سه کمان مذکور سه کمان از سه دایره‌اند که هر سه به شعاع L اند و مرکزهای آنها به ترتیب نقاط A ، B ، C می‌باشند.



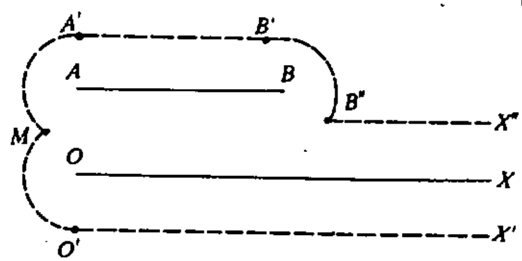
مسئلهٔ ۷. در صفحه P شکل F متشکل از دو نیم‌خط AX ، AY را درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه P که از شکل F به فاصله L قرار دارند.

حل. مکان هندسی مطلوب به‌طور خط‌چین رسم شده است. مکان هندسی مطلوب از چهار نیم‌خط BR ، BS ، CT و DU و کمان CD تشکیل شده است. دو نیم‌خط BR ، BS در داخل زاویه XAY اند. و به ترتیب موازی و همسو با نیم‌خط AX و AY اند. نیم‌خط BR به فاصله L از خط AX و نیم‌خط BS به فاصله L از خط BY رسم شده است.



نیم‌خط CT موازی و همسو با نیم‌خط AX رسم شده است و به فاصله L از آن قرار دارد. نیم‌خط DU موازی و همسو با نیم‌خط AY رسم شده است و به فاصله L از آن قرار دارد. کمان CD کمانی است از دایره γ به مرکز A و شعاع L. دو نیم‌خط CT و DU به‌ترتیب در دو نقطه C و D بر دایره γ مماس‌اند.

مسئلهٔ ۸. در صفحه P ، نیم‌خط OX را درنظر می‌گیریم. از نقطه O عمودی در صفحه P، بر خط OX رسم می‌کنیم و بر آن نقطه A را به فاصله معلوم d از نقطه O اختیار می‌کنیم و سپس پاره‌خط AB را موازی با خط OX رسم می‌کنیم به‌طوری که جهت بردار AB با جهت نیم‌خط OX یکی باشد. اجتماع نیم‌خط OX و پاره‌خط AB را



شکل F می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقاطی از صفحه P که از شکل F به فاصله L باشند با فرض آن که $d > L > \frac{d}{2}$.

حل. مکان هندسی مطلوب به‌صورت خط‌چین رسم شده است. این مکان متشکل است از دو نیم‌خط $O'X'$ و $B''X''$ و پاره‌خط $A'B'$ و سه کمان $O'M$ ، MA' و $B'B''$.

نیم‌خط $O'X'$ موازی و همسو با نیم‌خط OX است و به فاصله L از آن قرار دارد و بعلاوه خط OO' بر خط OX عمود است. بردار $\overrightarrow{A'B'}$ همسنگ بردار $\overrightarrow{AB}$ رسم شده است. کمان $O'M$ کمانی است از دایره به مرکز O و شعاع L. کمان MA' کمانی است از دایره‌ای به مرکز A و شعاع L. کمان $B'B''$ کمانی است از دایره به مرکز B و شعاع L. نیم‌خط $B''X''$ موازی و همسو با نیم‌خط OX و به فاصله L از آن رسم شده است.

یک تذکر دربارهٔ عبارت «شرط لازم و کافی»

در اغلب کتابهای ریاضی عبارت «شرط لازم و کافی» به‌کار می‌برند. در بعضی کتابهای ریاضی عبارت «یک شرط لازم و کافی» به‌کار می برند. عبارت دوم مناسبتر است و شایسته است آن را به کار بریم. در سطور زیر در این باره توضیح می‌دهیم.

برای آن‌که یک خاصیت ریاضی برقرار باشد ممکن است شرطهای لازم و کافی متعددی موجود باشد. به قضیه‌های زیر توجه کنید.

۱. قضیه. شرط لازم و کافی برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن است که مجموع مربعات دو ضلع آن مثلث مساوی مربع ضلع سوم باشد.

۲. قضیه. شرط لازم و کافی برای آن‌که مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن است که حاصل ضرب دو ضلع مساوی با حاصل ضرب ضلع سوم در ارتفاع مربوط باشد.

۳. قضیه. شرط لازم و کافی برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن است که طول یکی از میانه‌ها نصف طول ضلع مربوط باشد. ملاحظه می‌شود برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد شرطهای لازم و کافی متعددی وجود دارد. بنابراین مناسبتر آن است که قضایای مذکور با عبارت «یک شرط لازم و کافی» بیان شوند. اینچنین

۱. قضیه. یک شرط لازم و کافی برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن است که مجموع مربعات دو ضلع آن مثلث مساوی مربع ضلع سوم باشد. و همین طور درباره احکام دیگر.

مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در هندسه فضایی (۲)

● پرویز شهریاری

۵. خطهای راست متنافر. معیار متنافر بودن خطهای راست

تااین‌جامی‌دانیم، دوخط راست می‌توانند درفضا متقاطع یا متوازی باشند. ولی برای دو خط راست در فضا، ممکن است حالت دیگری هم وجود داشته باشد. برای تصور عینی این گونه خطهای راست، می‌توان مکعب مستطیل $ABCD\,A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ را در نظر گرفت (معمولاً هر اطاقی، به شکل مکعب مستطیل است). در این مکعب مستطیل، خطهای راست AB و A_1D_1، نه متقاطع‌اند و نه متوازی.

تعریف. دو خط راست را متنافر گویند، وقتی که متقاطع یا متوازی نباشند.

دو خط راست متنافر را با نماد $\overset{\circ}{-}$ نشان می‌دهند.

قضیهٔ ۱ (معیار شناسایی دو خط راست متنافر).**اگر یکی از دو خط راست بر صفحه‌ای واقع باشد و خط راست دوم، صفحه را در نقطه‌ای که روی خط راست اول نیست، قطع کند، آن وقت این دو خط راست متنافرند.**

شرط: $a \subset \alpha$، $b \cap \alpha = M$ و $M \notin a$.

حکم: $a \overset{\circ}{-} b$.

اثبات. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید خطهای راست a و b متقاطع یا متوازی باشند. در این صورت، هر دوی آنها، بر صفحه‌ای مثل β قرار دارند. صفحه‌های α و β برهم منطبق‌اند، زیرا هر دوی آنها، از خط راست a و نقطهٔ M، که متعلق به a نیست، می‌گذرند. ولی β، از خط راست B که متعلق به α نیست، می‌گذرد یعنی β نمی‌تواند بر α منطبق باشد. تناقض حاصل، درستی حکم قضیه را ثابت می‌کند.

به کمک این معیار، اغلب می‌توان به سادگی و از روی شکل، خطهای راست متنافر را تشخیص داد. مثلاً، در چهار وجهی $ABCD$ (شکل ۱) یالهای AC و BD روی خطهای راست متنافر قرار دارند، زیرا $(AC) \subset (ABC)$، در ضمن BC صفحهٔ (ABC) را در نقطهٔ B، که متعلق به (AC) نیست، قطع می‌کند، توجه کنید: **از دو خط راست متنافر، نمی‌توان صفحه‌ای عبور داد.**

پرسشها و مساله‌ها

۳۴. ۱) روی مکعب، چند زوج یال نشان دهید که روی خطهای راست متنافر باشند؛ ۲) روی جسمهایی که در کلاس درس می‌بینید، نمونه‌هایی از خطهای راست متناضر را پیدا کنید.

۳۵. هرم $SABCD$ در شکل ۲ را در نظر بگیرید. ۱) ثابت کنید، خط راست SA با خطهای راست BC و CD متنافر است؛ ۲) روی همان شکل، خطهای راستی را نشان دهید که با خط راست AD متنافر باشند.

۳۶. در یک چهاروجهی چند زوج یال وجود دارد که، روی خطهای راست متنافر قرار دارند؟

۳۷. ۱) یک خط راست و نقطه‌ای در بیرون آن مفروض است. ثابت کنید، می‌توان از این نقطه، خط راستی متنافر با خط راست مفروض رسم کرد؛ ۲) از این نقطه، چند خط راست، متنافر با خط راست مفروض، می‌توان رسم کرد؟

۳۸. دو خط راست متنافر a و b، نقطه‌های A_1 و A_2 واقع بر a، نقطه‌های B_1 و B_2 واقع بر b، داده شده‌اند. ثابت کنید: ۱) خطهای

راست A_1B_1 و A_2B_2، ۲) خطهای راست A_1B_2 و A_2B_1 نسبت به هم متنافرند.

۳۹. نقطه‌های A و B روی خط راست m قرار دارند. از نقطه‌های A و B، عمودهای a و b را بر m رسم کرده‌ایم خطهای راست a و b، چه وضعی نسبت به هم می‌توانند داشته باشند؟

۴۰. خطهای راست متنافر a و b و، همچنین خطهای راست $a \parallel a_1$ و $b \parallel b_1$ داده شده‌اند. خطهای راست a_1 و b_1 نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۴۱. یک صفحه، یک خط راست و نقطه‌ای در بیرون این خط راست، داده شده‌اند. آیا می‌توان خط راستی پیدا کرد که از نقطهٔ مفروض بگذرد، صفحهٔ مفروض را قطع کند و با خط راست مفروض متنافر باشد؟

۶. خط راست موازی با صفحه. معیار شناسایی موازی بودن خط راست با صفحه

دربارهٔ موقعیت خط راست، نسبت به صفحه، تا این‌جا با دو حالت آشنا هستیم: خط راست بر صفحه قرار دارد ($a \subset \alpha$) خط راست صفحه را قطع می‌کند ($a \cap \alpha = A$) حالت سومی هم وجود دارد: خط راست، نقطهٔ مشترکی با صفحه ندارد ($a \cap \alpha = \varnothing$)همان طور که دربارهٔ خطهای راست واقع بر صفحه عمل می‌کردیم، در این جا هم، حالتهای اول و سوم را، یک حالت به حساب می‌آوریم.

تعریف. خط راست و صفحه را موازی می‌نامیم، وقتی که یا نقطهٔ مشترکی نداشته باشند و یا خط راست بر صفحه منطبق باشد. موازی بودن خط راست a و صفحهٔ α را، به صورت $a \parallel \alpha$ یا $\alpha \parallel a$ نشان می‌دهند.

قضیهٔ ۲. (معیار موازی بودن خط راست با صفحه). **اگر خط راستی، با یک خط راست واقع بر صفحه موازی باشد، با صفحه موازی است.**

شرط: $a \parallel b$ و $b \subset \alpha$

حکم: $a \parallel \alpha$

اثبات. حالتی را در نظر می‌گیریم که $a \not\subset \alpha$. فرض می‌کنیم a و α در نقطه‌ای مثل M، مشترک باشند. خطهای راست a و b موازی و متمایزند، بنابراین b نمی‌تواند از M بگذرد. بنابراین، بنابر معیار شناسایی خطهای راست متنافر (قضیه ۱)، باید خطهای راست a و b متنافر باشند. ولی بنابر شرط $a \parallel b$ تناقض حاصل، به این معناست که فرض ما، مبنی بر این که خط راست a و صفحهٔ α نقطهٔ مشترکی دارند، نادرست است، یعنی $a \cap \alpha = \varnothing$ و $a \parallel \alpha$.

در حالتی که a بر صفحهٔ α منطبق باشد، بنابه تعریف $a \parallel \alpha$.

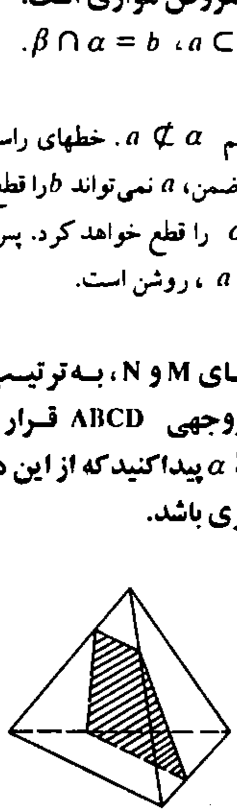
قضیهٔ ۳. اگر صفحه‌ای از خط راستی موازی با صفحهٔ دیگر بگذرد و صفحهٔ اخیر را قطع کند، آن وقت، فصل مشترک دو صفحه، با خط راست مفروض موازی است.

شرط: $a \parallel \alpha$، $a \subset \beta$، $\beta \cap \alpha = b$.

حکم: $a \parallel b$.

اثبات. فرض می‌کنیم $a \not\subset \alpha$. خطهای راست a و b روی صفحهٔ β قرار دارند، در ضمن، a نمی‌تواند b را قطع کند، زیرا در غیر این صورت، a صفحهٔ α را قطع خواهد کرد. پس $a \parallel b$ درستی حکم، برای حالت $a \subset \alpha$ ، روشن است.

مسأله. نقطه‌های M و N، به ترتیب، درون یالهای AB و AD از چهاروجهی ABCD قرار دارند. مقطع چهاروجهی را با صفحهٔ α پیدا کنید که از این دو نقطه بگذرد و با خط راست AC موازی باشد.



شکل ۵

حل. فرض می‌کنیم، مقطع مجهول را ساخته باشیم. شکل ۵ نشان می‌دهد، مسأله وقتی حل می‌شود که بتوانیم روشی برای پیدا کردن پاره

خطهای راست NP و MQ پیدا کنیم. این پاره‌خطهای راست، عبارتند از فصل مشترک صفحهٔ α با وجه‌های ABC و ADC صفحهٔ ABC از خط راست AC می‌گذرد که با صفحهٔ α موازی است. در ضمن، این صفحه‌ها، در نقطه N مشترک‌اند با توجه به اصل موضوع برخورد دو صفحه و قضیه ۳، صفحه‌های ABC و α در خط راستی موازی (AC) یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی خط راست NP باید موازی خط راست AC باشد. به همین ترتیب روشن می‌شود که $(MQ) \parallel (AC)$.

از این‌جا، روش ساختمان مقطع به دست می‌آید:
۱) $(NP) \parallel (AC)$، $P \in [BC]$؛ ۲) $(MQ) \parallel (AC)$، $Q \in [DC]$؛ ۳) $[MN]$؛ ۴) $[PQ]$.

چهار ضلعی $MNPQ$، مقطع مجهول است. در واقع، چون $(AC) \parallel (NP)$، پس $(AC) \parallel (MNP)$.

پرسشها و مسأله‌ها

۴۲. روی جسمهایی که درکلاس می‌بینید، نمونه‌هایی از خط راست و صفحهٔ موازی با هم را نشان دهید.

۴۳. مکعب $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ را روی صفحه نشان دهید و سپس: ۱) خطهای راست موازی با صفحهٔ ABC و ۲) صفحه‌های موازی با خط راست $A_1 D_1$ را مشخص کنید.

۴۴. خط راستی موازی با یک صفحه داده شده است. ۱) آیا این خط راست، با هر خط راست واقع بر صفحه، موازی است؟ آیا ممکن است، این خط راست، دست کم یکی از خطهای راست واقع بر صفحه را قطع کند؟

۴۵. خط راست a، با فصل مشترک دو صفحهٔ α و β موازی است. a و α و هم a و β، نسبت به هم، چه وضعی دارند؟

۴۶. چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. نسبت به صفحهٔ ABC چه وضعی‌دارند: ۱) خط راست MN که‌از وسط یالهای BD و AD گذشته‌است؛ ۲) خط‌راست PQ که‌دونقطهٔ آن یالهای BD و CD را (از طرف نقطه D) به‌نسبت ۱:۲ تقسیم‌کرده‌اند؛ ۳) خط‌راست MQ؟

۴۷. از نقطهٔ مفروض: ۱) چندخط راست‌موازی‌باصفحهٔ مفروض؛ ۲) چند صفحهٔ موازی با خط راست مفروض، می‌توان رسم کرد؟

۴۸. دو خط راست، یکی موازی با صفحهٔ α و دیگری متقاطع با صفحهٔ α داده شده‌اند. این دو خط راست، نسبت به هم، چه وضعی می‌توانند داشته باشند؟

۴۹. نقطه‌های A و B، به ترتیب روی صفحه‌های متقاطع α و β قرار دارند، ولی متعلق به خط راست c، فصل مشترک دو صفحه، نیستند. ثابت کنید، از این دو نقطه، می‌توان تنها یک صفحه موازی با خط راست c رسم کرد.

۵۰. ۱) مقطع چهاروجهی $ABCD$ را، با صفحه‌ای پیدا کنید که از رأس C و نقطه M واقع در درون یال AB گذشته و با خط راست AD موازی باشد، ۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به شرطی که طول هر یال چهاروجهی برابر a باشد و نقطهٔ M، پاره‌خط راست AB را نصف کند.

۵۱. M و N را، به ترتیب، نقطه‌هایی در درون یالهای AD و BC از چهاروجهی $ABCD$ می‌گیریم. مطلوب است مقطع چهاروجهی با صفحه‌ای که از M و N بگذرد و ۱) با خط راست AB، ۲) با خط راست CD موازی باشد.

۵۲. ۱) مقطع منشور قائم $ABCA_1 B_1 C_1$ را با صفحه‌ای پیدا کنید که با یال AA_1 موازی باشد و از نقطه‌های $M \in [AB]$ و $N \in [B_1 C_1]$ بگذرد؛ ۲) محیط این مقطع را محاسبه کنید، به شرطی که طول هر یال منشور برابر b باشد و نقطه‌های M و N یالهای AB و $B_1 C_1$ را نصف کرده باشند.

۵۳. ۱) مقطع چهاروجهی $ABCD$ را، با صفحه‌ای پیدا کنید که از نقطهٔ برخورد میانه‌های وجه‌های ABC، ACD و ABD بگذرد؛ ۲) منشور قائم $ABCA_1 B_1 C_1$ داده شده است. از نقطهٔ M متعلق به وجه ABC و نقطهٔ N متعلق به وجه $BB_1 C_1 C$ صفحه‌ای موازی یال AA_1 رسم کرده‌ایم. مقطع منشور را با این صفحه پیدا کنید.

۵۴. هرم $SABCD$ (با قاعدهٔ $ABCD$) و نقطهٔ M واقع بر یال SD مفروض‌اند. مقطع هرم را با صفحه‌ای پیدا کنید که از نقطه‌های B و M بگذرد و با خط راست AC موازی باشد.

ادامه دارد...

روش برهان خلف[1]

غلامرضا یاسی‌پور

روش کوتاه‌تر جدول ارزش[2]

باز هم روش دیگری دراثبات درستی استدلالات[3]، و در دسته‌بندی کردن گزاره‌ها[4] به عنوان صادق[5]، کاذب[6]، یا محتمل[7] موجود است. در شمارهٔ قبل به این مطلب اشاره شد که استدلال نادرست[8] است اگر و فقط اگر ممکن باشد که ارزشهای راستی[9]ای به گزاره‌های سادهٔ[10] ترکیب کننده‌اش به طریقی تخصیص داده شود که تمام مقدماتش[11] راست[12] و نتیجه[13]اش دروغ[14] شود، و در مورد استدلالات درست، انجام گرفتن چنین تخصیصاتی غیر ممکن می‌باشد. در نتیجه، برای اثبات درستی یک استدلال کفایت می‌کند که ثابت کنیم که به گزاره‌های آن چنین ارزشهای راستی‌ای را نمی‌توان تخصیص داد، و این کار را با نشان دادن این که تنها با تخصیص دادن ارزشهای راستی ناموافق[15]، به این معنی که به گزارهٔ ترکیب کننده‌ای هم T هم F تخصیص داده شده باشد، می‌توان مقدمات یک استدلال را راست و نتیجه‌اش را دروغ ساخت، انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر، اگر ارزش راستی T به هر یک از مقدمات یک استدلال درست و ارزش راستی F به نتیجهٔ آن تخصیص داده شود، لازمهٔ این کار این می‌شود که به گزارهٔ ترکیب کننده‌ای هم T هم F تخصیص دهیم که البته تناقض[16] به وجود می‌آورد.

به این ترتیب برای اثبات درستی استدلال

$(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$

$(D \vee E) \Rightarrow G$

$\therefore A \Rightarrow G$

به هر یک از مقدمات آن T و به نتیجهٔ آن F را تخصیص می‌دهیم. لازمهٔ تخصیص F به نتیجه این است که به A، T و به G، F تخصیص داده شود. از آن‌جاکه به A، T تخصیص داده شده، مقدم[17] مقدمهٔ اول راست است، و از آن جاکه به این مقدمه T تخصیص داده شده، تالی[18] آن نیز باید راست باشد. لذا باید هم به C هم به D، T را تخصیص داد. از آن جاکه به D، T تخصیص داده شده، مقدم مقدمهٔ دوم راست است و از آن‌جاکه به این مقدمه T تخصیص داده شده، باید تالی آن نیز راست باشد، لذا باید به G، T تخصیص داده شود. اما قبلاً برای این که نتیجه را دروغ بسازیم، مجبور شدیم که به G، F را تخصیص دهیم. در نتیجه استدلال نادرست است تنها اگر گزارهٔ G هم راست هم دروغ باشد، که غیر ممکن است. این روش اثبات درستی یک استدلال صورت دیگر روش برهان خلف است که تخصیص ارزشهای راستی را به جای قوانین استنتاج[19] به کار می‌برد.

تعمیم این روش به دسته‌بندی کردن گزاره‌ها (و صورتهای گزاره‌ای) آسان است. به این ترتیب، برای تصدیق این که قانون پیرس[20]، یعنی، $[(p \supset q) \supset p] \supset p$ صادق است، به آن ارزش راستی F را، که لازمه‌اش این است که به مقدمش $[(p \supset q) \supset p]$، T و به تالیش p، F را تخصیص دهیم، نسبت می‌دهیم. برای این که شرطی[21] $[(p \supset q) \supset p]$ که تالیش P دروغ است راست باشد، باید به مقدمش $(p \supset q)$ نیز ارزش راستی F تخصیص داده شود. اما برای این که شرطی $p \supset q$ دروغ باشد، باید به مقدمش p، T و به تالیش q، F تخصیص داد. اما قبلاً مجبور شدیم که به p، F را تخصیص دهیم، لذا فرض دروغ بودن قانون پیرس به نقیضی منجر می‌شود که ثابت می‌کند این قانون صادق است.

اگر امکان داشته‌باشد که ارزشهای راستی موافقی به ترکیبات

سازندهٔ عبارتی، با این فرض که دروغ باشد تخصیص دهیم، دراین صورت عبارت مورد بحث صادق نیست، اما باید یا کاذب یا محتمل باشد. در چنین حالتی سعی می‌کنیم که ارزشهای راستی‌ای تخصیص دهیم که آن را راست بسازد. اگر این کوشش به تناقضی منجر شود عبارت امکاناً نمی‌تواند راست باشد و باید کاذب باشد. اما اگر بتوانیم ارزشهای راستی‌ای را برای این که آن را راست سازد و ارزشهای راستی (دیگری) برای این که آن را دروغ سازد تخصیص دهیم، در این صورت این عبارت نه صادق و نه کاذب، بلکه محتمل است.

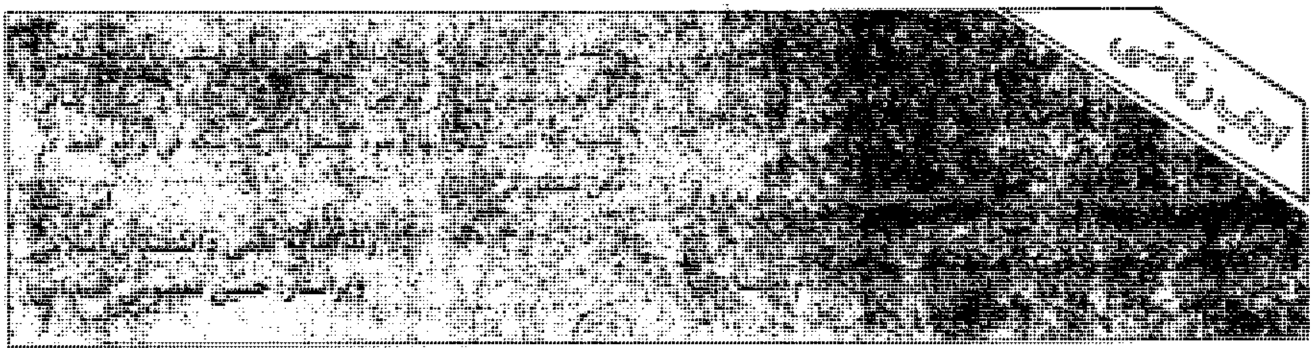
روش برهان خلف، تخصیص ارزشهای راستی ساده‌ترین و سریعترین روش امتحان استدلالات و دسته‌بندی کردن گزاره‌هاست. اما، این روش در بعضی حالات آسانتر از دیگر حالات به کار می‌رود. مثلا" اگر به یک ترکیب فصلی[22] F تخصیص داده شده باشد، باید به هردو منفصلش[23] F نسبت داده شود، و جایی که به یک ترکیب عطفی[24] T تخصیص داده شده، باید به هر دو منعطفش[25] T نسبت داده شود، و در این موارد تابعیت تخصیصات اجباری است. اما جایی که به یک ترکیب فصلی T یا به یک ترکیب عطفی F تخصیص داده شده، این تخصیص به خودی خود مشخص نمی‌کند که کدام منفصل راست یا کدام منعطف دروغ است، و در این مورد باید آزمایش کنیم و «تخصیصات» گوناگونی را مورد امتحان قرار دهیم، که این کار سودمندی این روش را در مورد چنین حالاتی کاهش می‌دهد. اما علی‌رغم این مشکلات در اکثریت قریب‌الاتفاق حالات، روش برهان خلف به سایر روشهای معروف دیگر برتری دارد.

یادداشتها:

1. Reductio Ad Absurdum
2. Truth Table
3. Validity of Arguments
4. Statements
5. Tautologous
6. Contradictory
7. Contingent
8. Invalid
9. Truth Values
10. Simple Statements
11. Premisses
12. True
13. Conclusion
14. False
15. Inconsistent
16. Contradiction
17. Antecedent
18. Consequent
19. Rules of Inference
20. Peirce's Law
21. Conditional
22. Disjunction
23. Disjunct
24. Conjunction
25. Conjunct

مرجع:

Symbolic Logic
Irving M. Copi



حلقه و میدان[1]

● حمید رضا امیری

در برهان ۱ از سال اول مقاله‌ای تحت عنوان «گروه، پیدایش و کاربرد نظریه گروهها» به چاپ رسید. در آنجا از یک دستگاه ریاضی[2] به‌نام گروه صحبت به میان آمد، این دستگاه ریاضی که در مقدمهٔ آن مقاله راجع به کاربردهای عملی و غیرریاضی آن نیز اشاره‌هایی شده است، از یک مجموعه مانند G و یک عمل دوتایی مانند $*$، روی G تشکیل می‌شد، در این مقاله راجع به دستگاههای ریاضی دیگری که هرکدام از یک مجموعه امّا با دو عمل تشکیل شده‌اند صحبت به میان خواهد آمد (در اینجا لازم به تذکر است عزیزان دانش‌آموز و خوانندگان محترمی که قصد مطالعهٔ این مقاله را دارند می‌بایست اطلاعات کافی در مورد گروه و خواص آن داشته‌باشند زیرا همانطور که خواهید دید اساس و مبنای نظریهٔ حلقه‌ها بر گروه استوار است).

فرض کنیم R مجموعه‌ای ناتهی و دو عمل روی این مجموعه تعریف شده باشد. عمل اول را $*$ و عمل دوّم را o می‌نامیم. (تقدم و تأخر این دو عمل مهّم است.) هرگاه مجموعهٔ R همراه با این دو عمل دارای خواص زیر باشد در این صورت آن را یک حلقه نامیده و می‌نویسیم $(R, *, o)$ یک حلقه است.

۱) R توأم با عمل اول $(*)$ یک گروه آبلی باشد ($(R, *)$ گروه آبلی باشد).

۲) R نسبت به عمل دوم (o) بسته باشد.

۳) عمل دوم (o) در R شرکت‌پذیر باشد.

۴) عمل دوم یعنی (o) نسبت به عمل اول یعنی $(*)$ از چپ و راست توزیع‌پذیر باشد یا به‌عبارت دیگر:

$$\forall a, b, c \in R ،\ ao\,(b * c) = (aob) * (aoc)$$
$$(b * c)\, oa = (boa) * (coa)$$

قرار داد: از این به‌بعد برای راحتی کار عمل اول در یک حلقه را با نماد $+$ و عمل دوم را با نماد $\times$ نمایش می‌دهیم که این نمادها لزوماً جمع و ضرب معمولی نمی‌باشند.

مثال ۱) مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی IR را با دو عمل جمع و ضرب معمولی درنظر می‌گیریم، در این صورت:

۱) $(IR, +)$ یک گروه جابجایی است.

۲) IR نسبت به ضرب بسته است.

۳) عمل ضرب در IR شرکت‌پذیر است. (اصل موضوعهٔ دستگاه اعداد حقیقی)

۴) عمل ضرب از چپ و راست در عمل جمع توزیع‌پذیر است.

بنابراین $(IR, +, \circ)$ یک حلقه است.

نکته: توجه داریم، هرگاه خاصیتی با یک سور عمومی برای اعضای یک مجموعه برقرار باشد (مانند شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری یا جابجایی)، این خاصیت برای تمام زیر مجموعه‌های آن مجموعه نیز برقرار خواهد بود.

باتوجه به نکتهٔ گفته شده و مثال ۱ واضح است که $(Q, +, \circ)$ و $(Z, +, \circ)$ هرکدام یک حلقه می‌باشند که به‌ترتیب آنها را حلقهٔ اعداد گویا و حلقهٔ اعداد صحیح می‌نامیم.

---

1) Ring and feild

۲) منظور از یک دستگاه ریاضی مجموعه‌ای است همراه با یک یا چند عمل که تعاریف، قضایا و ویژگیهای مخصوص به خود را دارا می‌باشد.

هرگاه مجموعهٔ ماتریسهای مربعی از مرتبهٔ n $(n \times n)$ را $M_{n \times n}$ بنامیم در این صورت $M_{n \times n}$ همراه با دوعمل جمع و ضرب ماتریسی یک حلقه است یابه‌عبارت دیگر $(M_{n \times n}, +, \times)$ یک حلقه است.

مثال ۲) مجموعهٔ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را درنظر می‌گیریم و روی اعضای این مجموعه دو عمل جمع و ضرب را به شکل زیر تعریف می‌کنیم، ثابت کنید $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ یک حلقه است.

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

الف) شرکت پذیری $\mathbb{R}^2$ نسبت به + به‌راحتی قابل بررسی است.
ب) زوج مرتب (۰ , ۰) عضو خنثی می‌باشد.
ج) متقابل هرزوج مانند (a, b) به صورت $(-a, -b)$ می‌باشد.
د) جابجایی بودن $\mathbb{R}^2$ نسبت به + نیز واضح است.
پس $(\mathbb{R}^2, +)$ یک گروه آبلی است.
ه) باتوجه به تعریف × مشاهده می‌شود که $\mathbb{R}^2$ نسبت به × بسته است. (حاصل ضرب دو زوج مرتب، یک زوج مرتب است.)
و) توزیع پذیری × نسبت به + را بررسی می‌کنیم یعنی ثابت می‌کنیم:

$$(a_1, b_1) \times [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \times (a_2 b_2) + (a_1, b_1) \times (a_3, b_3)$$

$$\text{سمت چپ} = (a_1, b_1) \times (a_2 + a_3, b_2 + b_3)$$
$$= (a_1 (a_2 + a_3) - b_1 (b_2 + b_3) \ \text{و} \ a_1 (b_2 + b_3) + b_1 (a_2 + a_3))$$
$$= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3)$$

$$\text{سمت‌راست} = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3 \ \text{و} \ a_1 b_3 + b_1 a_3)$$
$$= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3 \ \text{و} \ a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3)$$

که دو طرف باهم برابر بوده و تساوی برقرار است.
ز) آخرین خاصیت (باتوجه به تعریف حلقه) که به اثبات آن می‌پردازیم خاصیت شرکت‌پذیری $\mathbb{R}^2$ نسبت به × است یعنی باید ثابت کنیم:

$$(a_1, b_1) \times [(a_2, b_2) \times (a_3, b_3)]$$
$$= [(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)] \times (a_3, b_3)$$

(اثبات به‌عهدهٔ خواننده)

بیان چند تعریف و معرفی حلقه‌هایی خاص

تعریف : حلقهٔ $(R, +, \times)$ را یک حلقهٔ جابجایی می‌نامیم هرگاه R نسبت به عمل دوم یعنی × خاصیت جابجایی داشته‌باشد.

مثال : حلقه‌های زیر همگی جابجایی هستند.

$(\mathbb{R}, +, \circ)$ و $(Q, +, \circ)$ و $(Z, +, \circ)$ و $(\mathbb{R}^2, +, \times)$

چون مجموعهٔ $M_{n \times n}$ نسبت به عمل ضرب ماتریسها خاصیت جابجایی ندارد لذا حلقهٔ $(M_{n \times n}, +, \times)$ ، حلقهٔ جابجایی نیست.

تعریف: حلقهٔ $(R, +, \times)$ را یک حلقهٔ یکدار[1] می‌نامیم هرگاه حلقهٔ R دارای عضو خنثی نسبت به عمل دوم یعنی × باشد.

مثال: حلقه‌های $(\mathbb{R}, +, \circ)$ ، $(Q, +, \circ)$ و $(Z, +, \circ)$ حلقه‌هایی جابجایی و یکدارند. حلقهٔ $(M_{n \times n}, +, \times)$ یک حلقهٔ

۱) در حلقهٔ $(R, +, \times)$ عضو خنثی نسبت به عمل + را صفر حلقه و عضو خنثی نسبت به عمل × را یکِ حلقه می‌نامیم.

غیرجابجایی ولی یکدار است که یکِ حلقه همان ماتریس واحد یا I_n است.

در حلقهٔ $(IR^2 , + , \times)$ زوج مرتب $(1 , 0)$ عضو خنثی نسبت به $\times$ است زیرا:

$$(a , b) \times (1 , 0) = (a \times 1 - b \times 0 \text{ و } a \times 0 + b \times 1)$$
$$= (a , b)$$

پس $(IR^2 , + , \times)$ یک حلقهٔ جابجایی و یکدار است.

نکته : وقتی می‌گوییم متقابل ضربی یا وارون یک عضو در یک حلقه، منظور از این متقابل یا وارون نسبت به عمل دوم یعنی ضرب است و مثلاً اگر $(R , + , \times)$ یک حلقه باشد و در ضمن حلقه‌ای یکدار باشد و $a \in R$، منظور از وارون یا متقابل ضربیِ a، عضوی است چون $a^{-1} \in R$ به قسمی که :

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$$

تعریف میدان : اگر $(R , + , \times)$ یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد و نیز هر عضو مخالفِ صفر آن متقابل ضربی داشته باشد در این صورت این حلقه با چنین شرایطی، دستگاهی ریاضی به نام میدان تشکیل می‌دهد.

نتیجه : باتوجه به تعریف حلقه و تعریف میدان می‌توان میدان را به‌صورت زیر تعریف کرد: هرگاه F مجموعه‌ای ناتهی و دو عمل * و o روی آن تعریف شده باشد در این صورت $(F , * , o)$ یک میدان است، وقتی که شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $(F , *)$ گروه آبلی باشد.

۲) $(F - \{0\} , o)$ گروه آبلی باشد.

۳) عمل o از چپ و راست در عمل * توزیع‌پذیر باشد.

مثال ۳) باتوجه به تعریف میدان و خواص دو عمل جمع و ضرب معمولی واضح است که، $(IR , + , \circ)$ و $(Q , + , \circ)$ هرکدام میدان می‌باشند. ازطرفی چون هر عضودر Z (به جز ۱ و ۱−) فاقد وارون یا متقابل ضربی در Z است لذا، $(Z , + , \circ)$ میدان نمی‌باشد.

مثال ۴) باتوجه به‌اینکه اگر دترمینانِ یک ماتریس صفرباشد، آن ماتریس فاقد وارون خواهدبود، واضح‌است‌که $(M_{n \times n} , + , \times)$ درحالت کلّی ممکن است میدان نباشد.

مثال ۵) هرگاه مجموعهٔ باقیمانده‌های حاصل از تقسیم اعداد صحیح بر عدد صحیح m را Z_m بنامیم، خواهیم داشت :

$$Z_m = \{0 , 1 , 2 , \dots , m - 1\}$$

حال روی این مجموعه دو عملِ ⊕ و ⊗ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\forall x , y \in Z_m$ ، $x \oplus y = $ باقیماندهٔ تقسیم $x + y$ بر m

$\forall x , y \in Z_m$ ، $x \otimes y = $ باقیمانده تقسیم xy بر m

به‌عنوان مثال دو مجموعهٔ $Z_5 = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4\}$ و $Z_6 = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ را درنظر می‌گیریم و خواهیم داشت:

در Z_5 ←

- $3 \oplus 4 = $ باقیماندهٔ تقسیم $4 + 3$ بر ۵ $= 2$
- $3 \otimes 4 = $ باقیماندهٔ تقسیم 4×3 بر ۵ $= 2$
- $3 \otimes 1 = $ باقیماندهٔ تقسیم 1×3 بر ۵ $= 3$
- $3 \oplus 0 = $ باقیماندهٔ تقسیم $0 + 3$ بر ۵ $= 3$
- $2 \otimes 3 = $ باقیماندهٔ تقسیم 3×2 بر ۵ $= 1$

در Z_6 ←

- $3 \oplus 4 = $ باقیماندهٔ تقسیم $4 + 3$ بر ۶ $= 1$
- $3 \otimes 4 = $ باقیماندهٔ تقسیم 4×3 بر ۶ $= 0$

با توجه به تعاریف دو عمل فوق روی Z_m به سادگی قابل بررسی است که $(Z_m , \oplus , \otimes)$ یک حلقه است که این حلقه جابجایی و یکدار است.

در حالت کلّی ممکن است $(Z_m , \oplus , \otimes)$ میدان نباشد، زیرا

ممکن است بعضی از اعضای Z_m فاقد متقابل نسبت به $\otimes$ باشند مثلاً در Z_6 عددِ ۲ فاقدِ متقابلِ ضربی است (نسبت به $\otimes$) زیرا:

$$۲\otimes۰ = ۰ \quad و \quad ۲\otimes۱ = ۲ \quad و \quad ۲\otimes۲ = ۴ \quad و \quad ۲\otimes۳ = ۰$$
$$۲\otimes۴ = ۲ \quad و \quad ۲\otimes۵ = ۴$$

یعنی ترکیب عدد ۲ با هیچ‌یک از اعضای Z_6 نسبت به عمل $\otimes$ مساوی با ۱ نمی‌باشد.

در اینجا به ذکر قضیه‌ای در این مورد می‌پردازیم.

قضیه: در حلقهٔ $(Z_m, \oplus, \otimes)$ هرگاه $a \in Z_m$ و a نسبت به m اول باشد (بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و m، یک باشد) در این صورت a وارون پذیراست (a دارای متقابل ضربی است).

اثبات: (برای اثبات ناگزیریم از قضیه‌ای در هم‌نهشتی ها استفاده کنیم) چون $(a, m) = ۱$ پس معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} ۱$ همواره در Z_m دارای جواب است یعنی عددی صحیح در Z_m چون $x_\circ$ یافت می‌شود به قسمی که $ax_\circ \overset{m}{\equiv} ۱$ (باقیماندهٔ تقسیم $ax_\circ$ بر m مساوی با ۱ است). به عبارت دیگر $a \times x_\circ = ۱$ یعنی $x_\circ$ متقابل a می‌باشد.

نکتهٔ ۱) می‌دانیم هرگاه P عددی اول باشد تمام اعداد صحیح و مثبت که کوچکتر از P باشند نسبت به P اولند حال اگر حلقهٔ $(Z_p, \oplus, \otimes)$ را درنظر بگیریم که P اول باشد، چون همهٔ اعضا در Z_p از P کوچکترند پس نسبت به P اولند و طبق قضیهٔ قبل همهٔ اعضایِ مخالف صفر در Z_p وارون پذیرند یعنی: $(Z_p, \oplus, \otimes)$ یک میدان است.

نکتهٔ ۲) باتوجه به قضیهٔ قبل هرگاه بخواهیم تعداد اعضایِ وارون‌پذیر در حلقهٔ Z_m را محاسبه کنیم، کافی است تعداد اعدادی در Z_m که نسبت به m اولند را بشماریم که در این رابطه به معرفی فرمول اولر که به تابع فی ـ اولر معروف است می‌پردازیم:

هرگاه m عددی صحیح، مثبت و مخالف یک باشد و آن را به‌صورت استاندارد به حاصل ضرب عاملهای اول تجزیه کنیم، یعنی داشته‌باشیم:

$$m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$$

که P_1 ، P_2 ، ... ، P_k اعداد اول هستند.

دراین صورت تعداد اعداد صحیح مثبت و کوچکتر از m که نسبت به m اولند برابر است با $\varphi(m)$ که از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi(m) = m\left(۱ - \frac{۱}{P_1}\right)\left(۱ - \frac{۱}{P_2}\right)\dots\left(۱ - \frac{۱}{P_k}\right)$$

به‌عنوان مثال تعداد وارون‌پذیر های حلقهٔ Z_{18} برابر است با:

$$۱۸ = ۲ \times ۳^۲ \Rightarrow \varphi(۱۸) = ۱۸ \times \left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۳}\right)$$
$$\Rightarrow \varphi(۱۸) = ۱۸ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} = ۶$$

یعنی در Z_{18}، ۶ عضو وارون‌پذیر وجود دارد.

تبصره: هرگاه عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq ۰$ تقسیم کنیم اصطلاحاً b را مقسوم علیه a می‌نامند و اگر باقیمانده صفر باشد می‌نویسند $a = bq$ (در این حالت q نیز می‌تواند مقسوم علیه a باشد).

تعریف مقسوم‌علیه صفر: درحلقهٔ $(R, +, \times)$ عضو $a \neq ۰$ را یک مقسوم علیه صفر می‌نامند هرگاه عضوی چون $b \neq ۰$ در این حلقه یافت شود به قسمی که $a \times b = ۰$.

نکته ۱) باتوجه به تبصرهٔ قبل همانطور که حتماً پی برده‌اید اصطلاح مقسوم علیه صفر از همان اصطلاح جاری در اعداد صحیح ناشی شده زیرا دیدید که اگر حاصل ضربِ دو عدد مساوی با عددی دیگر باشد هریک از آن دو عدد مقسوم علیه عددِ حاصل است در این تعریف نیز حاصل ضرب a و b مساوی با صفر شده و بنابراین هریک مقسوم علیه صفر هستند.

نکته ۲) باتوجه به اینکه اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ در این صورت، $a = ۰$ یا $b = ۰$، واضح است که حلقهٔ اعداد حقیقی و کلیهٔ حلقه‌های عددی همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی فاقد مقسوم علیه صفر می‌باشند.

مثال ۱) در حلقهٔ $Z_۶$ دیدیم که $۴ \otimes ۳ = ۰$ درصورتی که $۳ \neq ۰$ و $۴ \neq ۰$ پس ۳ و ۴ در $Z_۶$ هریک مقسوم علیه صفر می‌باشند.

مثال ۲) در حلقهٔ ماتریسهای ۲ × ۲ داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

یعنی دو ماتریس A و B هر دو مخالف با ماتریس صفرند ولی حاصلِ AB مساوی با ماتریس صفراست پس A و B هریک مقسوم علیه صفرند.

در این قسمت نیز به بیان و اثبات قضیه‌ای بسیار مهّم می‌پردازیم که به نوعی ارتباط بین مقسوم علیه‌های صفر یک حلقه و وارون‌پذیرهای آن حلقه را نشان می‌دهد.

قضیه: در حلقهٔ یکدار $(R , + , \times)$ هرگاه a عضوی از این حلقه بوده و وارون‌پذیر باشد مقسوم‌علیه صفر نیست. (عکس این قضیه در حالت کلّی برقرار نمی‌باشد.)

اثبات: فرض‌کنیم $(R , + , \times)$ یک حلقهٔ یکدار و $a \in R$ و a وارون‌پذیر باشد. ثابت می‌کنیم a مقسوم‌علیه صفر نیست. در جهت نیل به این مقصود، برای bای دلخواه در R فرض می‌کنیم $ab = ۰$ و ثابت می‌کنیم $b = ۰$.

$$b = ۱ \times b = (a^{-۱}a)\, b = a^{-۱}\,(ab) = a^{-۱} \times ۰ = ۰$$

همانطور که قید شد عکس قضیهٔ فوق درحالت کلّی برقرار نیست یعنی همواره نمی‌توان از اینکه عضوی دریک حلقه مقسوم علیه صفر نیست، نتیجه گرفت که وارون‌پذیر است. مثلاً در حلقهٔ اعداد صحیح همراه با جمع و ضرب معمولی عدد ۲ مقسوم علیه صفر نیست ولی وارون‌پذیر نیز نمی‌باشد ($\frac{۱}{۲} \notin Z$).

نتیجه: عکس نقیض قضیهٔ فوق که با خود قضیه هم ارز است به‌صورت زیر بیان می‌شود:

در حلقهٔ یکدار $(R , + , \times)$، اگر a مقسوم علیه صفر باشد، وارون‌پذیر نیست.

تذکر: عکس قضیهٔ قبل در مورد دو حلقهٔ $M_{n \times n}$ و Z_m، صادق است یعنی مثلاً در حلقهٔ Z_m ، a مقسوم‌علیه صفر است اگر و فقط اگر وارون‌پذیر نباشد.

بنابراین در حلقه Z_m، مقسوم‌علیه‌های صفر عبارتنداز اعدادی که نسبت به m اول نیستند (چرا؟). یعنی باتوجه به تابع فی ـ اولر و اینکه عدد صفر نیز نمی‌تواند مقسوم علیه صفر باشد داریم:

$$Z_m \text{ تعداد مقسوم علیه‌های صفر در } = m - \varphi(m) - ۱$$

مثال: تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر حلقهٔ $Z_{۱۸}$ را محاسبه می‌کنیم، که باتوجه به مطالب قبل خواهیم داشت:

$$Z_{۱۸} \text{ تعداد مقسوم علیه‌های صفر در } = ۱۸ - \varphi(۱۸) - ۱ = ۱۸ - ۶ - ۱ = ۱۱$$

نتیجه: دیدیم که در Z_p (p اول است) همهٔ اعضایِ مخالف صفر نسبت به p اول و در نتیجه وارون‌پذیرند، لذا Z_p فاقد مقسوم علیه صفر است.

p اول‌است $\Rightarrow \varphi(p) = p(۱ - \frac{۱}{p}) = (p - ۱)$ تعداد وارون‌پذیرهای Z_p

Z_p تعدادمقسوم‌علیه‌های صفردر $= P - \varphi(p) - ۱ = P - (P - ۱) - ۱ = ۰$

تعریف حوزهٔ صحیح یا میدان درست:

هرگاه R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد، که فاقد مقسوم‌علیه صفر است، در این صورت R یک میدان درست نامیده می‌شود.

مثال ۱) حلقهٔ $(Z , + , ۰)$ میدان درست است.

مثال ۲) « $(IR, +, \circ)$ « « « .

مثال ۳) « $(Q, +, \circ)$ « « « .

مثال ۴) « $(Z_p, \oplus, \otimes)$ « « « . (P اول است)

مثال ۵) اگر m اول نباشد در حلقهٔ $(Z_m, \oplus, \otimes)$ مقسوم‌علیه صفر موجود است لذا Z_m میدان درست نیست.

مثال ۶) حلقهٔ ماتریسهای مربعِ $n \times n$ میدان درست نیست.

تذکر: در حلقهٔ $(M_{n \times n}, +, \times)$ هر ماتریس مانند A که $|A| = \circ$ وارون‌پذیر نیست لذا مقسوم علیه صفر است.

در این قسمت نیز به بیان و اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که بیانگر رابطهٔ بین برقراری قاعدهٔ حذف در یک حلقه و وجود مقسوم علیه صفر در آن حلقه است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه در حلقهٔ R قاعدهٔ حذف برقرار باشد آن است که R فاقد مقسوم علیه صفر باشد.

اثبات: فرض کنیم در R قانون حذف برقرار باشد یعنی

$$\forall a, b, c \in R \quad ,ab = ac \Rightarrow b = c$$

ثابت می‌کنیم R فاقد مقسوم علیه صفر است. برای این کار فرض می‌کنیم $ab = \circ$ و ثابت می‌کنیم $a = \circ$ یا $b = \circ$. اگر $a \neq \circ$، در این صورت،

$$ab = \circ \Rightarrow ab = a\circ \overset{\text{قانون حذف}}{\Longrightarrow} b = \circ$$

عکس قضیه: فرض کنیم R فاقد مقسوم علیه صفر باشد ثابت می‌کنیم قانون حذف در R برقرار است برای این کار فرض می‌کنیم $a \neq \circ$ و $ab = ac$ ثابت می‌کنیم $b = c$.

$$ab = ac \Rightarrow ab - ac = \circ \Rightarrow a(b-c) = \circ$$
$$\underset{R\ \text{فاقد مقسوم علیه صفر}}{\overset{a \neq \circ}{\Longrightarrow}} (b-c) = \circ \Rightarrow b = c$$

نتیجه: با توجه به تعریف میدان درست و قضیهٔ قبل داریم:

«شرط لازم و کافی برای آنکه حلقهٔ جابجایی و یکدار R میدان درست باشد آن است که قانون حذف در آن برقرار باشد.»

تذکر: استفاده از قضیهٔ قبل، در حلقه‌هایی که فاقد مقسوم علیه صفر می‌باشند منجر به استفاده از قانون حذف در این حلقه‌ها می‌باشد که در همنهشتی‌ها و حل معادلات همنهشتی در حلقه‌های Z_p به چشم می‌خورد، مثلاً در Z_{11} داریم:

$$6x \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 6x \overset{11}{\equiv} 1 + 11 \Rightarrow 6x \overset{11}{\equiv} 6 \times 2 \Rightarrow x \overset{11}{\equiv} 2$$

نتیجه: ثابت می‌کنیم هر میدان مانند F، میدان درست است.

روش اول: بنابر نتیجهٔ قبل چون هر میدان یک حلقهٔ جابجایی و یکدار است، کافی است ثابت کنیم در F قانون حذف برقرار است و این باتوجه به وارون‌پذیربودنِ همهٔ اعضای غیرصفر در F آسان است.

$$ab = ac \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1}ac \Rightarrow 1b = 1c \Rightarrow b = c$$

روش دوم: در میدان F همهٔ اعضا وارون‌پذیرند لذا طبق قضیه هیچ کدام مقسوم‌علیه صفر نیستند یعنی F فاقد مقسوم علیه صفر است و طبق قضیه قانون حذف در آن برقرار است لذا F میدان درست است.

در این قسمت به تعریف و بررسی خواص و قضایای مربوط به زیر حلقه‌ها و ایده‌آلها می‌پردازیم:

تعریف زیر حلقه: هرگاه $(R, +, \times)$ یک حلقه و R' زیر مجموعه‌ای ناتهی از R باشد و با همان دو عمل تعریف شده روی R، تشکیل یک حلقه دهد، در این صورت حلقهٔ R' را زیر حلقهٔ، حلقهٔ R می‌نامیم.

تذکر ۱) همان طور که از تعریف زیر حلقه مشخص است، هر زیر حلقه به تنهایی یک حلقه است.

تذکر ۲) در بسیاری اوقات در حل مسائل مربوط به حلقه و میدان،

برای اثبات حلقه یا حتّی میدان بودنِ یک مجموعه، با توجه به قضیه‌ای که خواهیم‌گفت، ابتدا ثابت می‌کنیم آن مجموعه همراه با دو عمل تعریف شده روی آن، زیر حلقهٔ یک حلقهٔ شناخته شده است و بلافاصله نتیجه می‌گیریم که حلقه است.

قضیه : شرط لازم و کافی برای آنکه یک زیر مجموعهٔ ناتهی مانند R'، از حلقهٔ R زیر حلقهٔ آن باشد، آن است که:

(الف) $\forall a\,,\, b \in R'\,,\ (a-b) \in R'$

(ب) $\forall a\,,\, b \in R'\,,\ (ab) \in R'$

اثبات : شرط الف) زیر گروه[1] جمعی بودن R' نسبت به $(R\,,\,+)$ را می‌رساند و شرط ب) بسته بودن نسبت به عمل دوم یا ضرب را اثبات می‌کند و بقیهٔ شروط حلقه با توجه به زیر مجموعه بودنِ R'، از R به R' القاء می‌شود. اگر R' زیر حلقهٔ R باشد که طبق تعریف خودش حلقه است و نسبت به تفاضل و ضرب بسته خواهدبود.

$$\forall a\,,\, b \in R' \Rightarrow a\,,(-b) \in R' \Rightarrow a+(-b) \in R'$$

بنابراین برای اثبات زیر حلقه بودنِ یک مجموعه کافی است دو شرط الف) و ب) را برای آن بررسی کنیم و بلافاصله به قضیه استناد کرده و نتیجه بگیریم که زیر حلقه است.

مثال : نشان‌دهیدکه‌مجموعهٔ $R_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| \ a \in IR \right\}$

یک زیر حلقهٔ حلقهٔ ماتریسهای ۲ × ۲ است:

$$0 \in IR \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R_1 \Rightarrow R_1 \neq \phi$$

و واضح است که $R_1 \subset M_{2\times 2}$. پس R_1 یک زیر مجموعهٔ ناتهی از $M_{2\times 2}$ است. حال به بررسی دو شرط زیر حلقه می‌پردازیم:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_1-a_2}^{a_3} & 0-0 \\ 0-0 & \underbrace{a_1-a_2}_{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \in R_1$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_1a_2}^{a} & 0 \\ 0 & \underbrace{a_1a_2}_{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in R_1$$

مسأله ۱) ثابت کنید اشتراک دو زیر حلقه از حلقهٔ R، زیر حلقه‌ای از حلقهٔ R است.

فرض کنیم R_1 و R_2 هردو زیر حلقهٔ، حلقهٔ R باشند ثابت می‌کنیم $(R_1 \cap R_2)$ نیز زیرحلقهٔ R است.

$$0 \in R_1 \wedge 0 \in R_2 \Rightarrow 0 \in (R_1 \cap R_2) \Rightarrow (R_1 \cap R_2) \neq \phi$$

$$(R_1 \cap R_2) \subset R_1 \wedge R_1 \subset R \Rightarrow (R_1 \cap R_2) \subset R$$

پس $(R_1 \cap R_2)$ یک زیر مجموعهٔ ناتهیِ حلقهٔ R است. حال دو شرط زیر حلقه را بررسی می‌کنیم:

$$\forall x,y \in (R_1 \cap R_2) \begin{cases} x,y \in R_1 \xRightarrow{R_1\ \text{زیرحلقه}} x-y \in R_1 \\ x,y \in R_2 \xRightarrow{R_2\ \text{زیر حلقه}} x-y \in R_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$

$$(x-y) \in (R_1 \cap R_2)$$

$$\forall x,y \in (R_1 \cap R_2) \begin{cases} x,y \in R_1 \xRightarrow{R_1\ \text{زیرحلقه}} xy \in R_1 \\ x,y \in R_2 \xRightarrow{R_2\ \text{زیر حلقه}} xy \in R_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$

$$(x\,y) \in (R_1 \cap R_2)$$

۱) اگر $(G\,,\,*)$ یک گروه باشد و G' زیر مجموعهٔ ناتهی G، شرط لازم و کافی برای آنکه G' زیر گروه G باشد آن است که: $a * b' \in G'$، $\forall a\,,\, b \in G'$. (در این جا * همان + است پس b' به‌صورت $-b$ درآمده است.)

مسالهٔ ۲) نشان دهید مجموعهٔ $Q\sqrt{3} = \{a + b\sqrt{3} \mid a,b \in Q\}$ یک میدان است (همراه با دو عمل جمع و ضرب معمولی):

ابتدا ثابت می‌کنیم $Q\sqrt{3}$ یک زیر حلقهٔ $(IR , + , \cdot)$ است

الف) $(a_1 + b_1\sqrt{3}) - (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{3} = (a_3 + b_3\sqrt{3}) \in Q\sqrt{3}$

ب) $(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = \underbrace{(a_1a_2 + 3b_1b_2)}_{a} + \underbrace{(a_1b_2 + b_1a_2)}_{b}\sqrt{3} = (a + b\sqrt{3}) \in Q\sqrt{3}$

پس $Q\sqrt{3}$ یک زیر حلقهٔ حلقهٔ IR است لذا طبق تعریف زیر حلقه $Q\sqrt{3}$ یک حلقه است و چون $1 = 1 + 0\sqrt{3} \in Q\sqrt{3}$ پس یکدار است و جابجایی بودن را از IR به ارث می‌برد بنابراین یک حلقهٔ جابجایی و یکدار است، کافی است ثابت کنیم هر عضوِ مخالف صفر آن متقابل ضربی دارد.

$$(a + b\sqrt{3}) \times t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{(-b)}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow t \in Q\sqrt{3}$$

تعریف ایده‌آل: هرگاه I زیر مجموعه‌ای ناتهی از حلقهٔ R باشد و شرایط زیر را نیز دارا باشد در این صورت I را یک ایده‌آل دو طرفه حلقهٔ R می‌نامند.

الف) $\forall\, a , b \in I \;,\; (a - b) \in I$

ب) $\forall\, r \in R , \forall\, a \in I \;,\; ra \in I ,\; ar \in I$

(حاصل‌ضرب هرعضو حلقهٔ R در هر عضو I، چه از چپ و چه از راست عضوی از I باشد.)

نکته: همانطور که مشاهده می‌شود شرط اولِ ایده‌آلها با شرط اول زیر حلقه‌ها برابر می‌باشد و توسط شرط دوم ایده‌آلها می‌توان به شرط دوم زیر حلقه‌ها (بسته‌بودن نسبت به ضرب) دست یافت. بنابراین هر ایده‌آل یک حلقه، زیر حلقهٔ آن حلقه نیز هست ولی عکس این مطلب در حالت کلّی برقرار نیست. مثلاً $(Z , + , \cdot)$ یک زیر حلقهٔ $(IR , + , \cdot)$ است ولی ایده‌آل آن نیست زیرا:

$\frac{2}{3} \in IR ,\; 1 \in Z$ ولی $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \notin Z$

مساله ۱) ثابت کنید اشتراکِ دو ایده‌آلِ حلقهٔ R، ایده‌آل حلقهٔ R است.

اثبات: فرض کنیم I_1 و I_2 هر دو ایده‌آلِ حلقهٔ R باشند برای اثبات ایده‌آل بودنِ $(I_1 \cap I_2)$ فقط به اثبات شرط ب) می‌پردازیم: (شرطِ الف) در اثبات زیر حلقه بودنِ اشتراک دو زیر حلقه قبلاً ثابت شده)

$$\forall r \in IR, \forall x \in (I_1 \cap I_2) \begin{cases} x \in I_1 \overset{I_1\ \text{ایده‌آل}}{\Longrightarrow} rx, xr \in I_1 \\ x \in I_2 \overset{I_2\ \text{ایده‌آل}}{\Longrightarrow} rx, xr \in I_2 \end{cases} \overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Longrightarrow}$$

$$rx , xr \in (I_1 \cap I_2)$$

مسالهٔ ۲) ثابت کنید مجموعهٔ $mZ = \{mx \mid x \in Z\}$ یک ایده‌آل حلقهٔ Z است.

اثبات: فرض کنیم $mx_1 , mx_2 \in mZ$

$$mx_1 - mx_2 = m\overbrace{(x_1 - x_2)}^{x_3} = mx_3 \in mZ$$

$$\forall\, r \in Z , \forall\, mx \in mZ \;,\; r(mx) = (rm)x = (mr)x = m\overbrace{(rx)}^{x_1} = (mx_1) \in mZ$$

$$(mx)\,r = m\,\overbrace{(xr)}^{x_2} = (mx_2) \in mZ$$

مسألهٔ ۳) ثابت کنید هرگاه I ایده‌آل حلقهٔ R باشد و $1 \in I$، آنگاه $I = R$. (هر ایده‌آلِ یکدار از حلقهٔ R، با خود حلقهٔ R برابر است.)

اثبات: فرض کنیم I یک ایده‌ال حلقهٔ R باشد و $1 \in I$. چون I ایده‌آلِ حلقهٔ R می‌باشد، لذا $I \subset R$ (۱).

حال ثابت می‌کنیم $R \subset I$،

$$[\forall x \in R \Rightarrow x \in R \wedge 1 \in I \overset{\text{ایده‌آل } I}{\Longrightarrow} 1x \in I \Rightarrow x \in I] \Rightarrow$$

$$R \subset I \ (2) \overset{(1)\text{ و }(2)}{\Longrightarrow} I = R$$

مسألهٔ ۴) هرگاه I و J هر دو ایده‌آل حلقهٔ R باشند و $(I \cap J) = \{0\}$، ثابت کنید: $ab = 0$، $\forall a \in I, \forall b \in J$

اثبات:

$$(1)\ \forall a \in I, \forall b \in J \overset{I \subset R}{\Longrightarrow} a \in R, b \in J \overset{\text{ایده‌آل } J}{\Longrightarrow} ab \in J$$

$$(2)\ \forall a \in I, \forall b \in J \overset{J \subset R}{\Longrightarrow} a \in I, b \in R \overset{\text{ایده‌آل } I}{\Longrightarrow} ab \in I$$

$$\overset{(1)\text{ و }(2)}{\Longrightarrow} ab \in (I \cap J) \Rightarrow ab \in \{0\} \Rightarrow ab = 0$$

مسألهٔ ۵) ثابت کنید تنها ایده‌آلهای هر میدان مانند F عبارتند از F و $\{0\}$.

اثبات: فرض کنیم I ایده‌آل میدان F باشد و $I \neq \{0\}$، ثابت می‌کنیم $I = F$. برای اثبات اینکه $I = F$، طبق مسألهٔ ۳) کافی است ثابت کنیم، I یک ایده‌آل یکدار است یا $1 \in I$.

$$I \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \neq 0 \in I \overset{I \subset F}{\Longrightarrow} x \in F \overset{\text{میدان است } F}{\Longrightarrow} x^{-1} \in F$$

$$\Rightarrow x \in I \wedge x^{-1} \in F \overset{\text{ایده‌آل } I}{\Longrightarrow} xx^{-1} \in I \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I = F$$

طرح یک تست: هرگاه I یک ایده‌آل حلقهٔ $(Q, +, 0)$ (حلقهٔ اعداد گویا یا اعداد مُنطَق) باشد، و $9 \in I$، در این صورت I کدام است؟

۱) $I = Z$ ۲) $I = Q^+$ ۳) $I = Q$ ۴) $I = Z^+$

حل) گزینهٔ ۳) صحیح است زیرا:

Q میدان است و طبق مسألهٔ ۵) فقط می‌تواند دو ایده‌آل داشته باشد یکی $\{0\}$ و دیگری خودش یعنی Q، بنابراین $I = \{0\}$ یا $I = Q$ و چون $9 \in I$ پس $I \neq \{0\}$ و لذا $I = Q$.

مسألهٔ ۶) ثابت کنید هرگاه H و K هر دو ایده‌آل حلقهٔ R باشند، در این‌صورت $H + K = \{(h + k) \mid h \in H, k \in K\}$ نیز یک ایده‌آل R است (جمع دو ایده‌آل، ایده‌آل است).

اثبات: $0 \in H \wedge 0 \in K \Rightarrow 0 + 0 \in H + K \Rightarrow 0 \in H + K$

$$\Rightarrow (H + K) \neq \phi$$

$$\text{اگر } (h+k) \in (H+K) \rightarrow \left.\begin{array}{l} h \in H \Rightarrow h \in R \\ k \in K \Rightarrow k \in R \end{array}\right\} \Rightarrow (h + k) \in R$$

$$\Rightarrow (H + K) \subset R$$

بنابراین ثابت کردیم $(H + K)$ یک زیر مجموعهٔ ناتهی از حلقهٔ R است. حال کافی است دو شرط ایده‌آل را بررسی کنیم:

$$(h_1 + k_1), (h_2 + k_2) \in (H+K) \rightarrow \left.\begin{array}{l} h_1, h_2 \in H \\ k_1, k_2 \in K \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (h_1 - h_2) \in H \\ (k_1 - k_2) \in K \end{array}\right\} \Rightarrow (h_1 - h_2) + (k_1 - k_2) \in H + K \ (1)$$

$$(h_1 + k_1) - (h_2 + k_2) = (h_1 + k_1) + [-h_2 + (-k_2)]$$
$$= [(h_1 + k_1) - h_2] - k_2 = [h_1 + (k_1 - h_2)] - k_2$$
$$= [h_1 + (-h_2 + k_1)] - k_2 = [(h_1 - h_2) + k_1] - k_2$$
$$= (h_1 - h_2) + (k_1 - k_2) \in h + k \leftarrow \text{طبق } (1)$$

فرض‌کنیم $r \in R, h+k \in H+K \Rightarrow \begin{cases} h \in H \Rightarrow rh, hr \in H \\ k \in K \Rightarrow rk, kr \in K \end{cases} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} (rh + rk) \in H + K \\ (hr + kr) \in H + K \end{array}\right\} \quad (۲)$$

$$r(h + k) = rh + rk \in H + K$$

طبق (۲) ←

$$(h + k)r = hr + kr \in H + K$$

لذا $\underline{H + K}$ یک ایده‌آل R است.

نکته ۱ : ثابت می‌شود ایده‌آلهای حلقهٔ اعداد صحیح یعنی $(Z , + , ۰)$ فقط به صورت mZ هستند که :

$$mZ = \{mx \mid x \in Z\}$$

مانند ۲Z و ۳Z و ... (مضارب ۲ و مضارب ۳ و ...)

نکته ۲ : برای هر دو عدد صحیح مثبت مانند a و b داریم:

$$aZ + bZ = dZ$$

که d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکِ اعداد a و b است. در حقیقت این نکته با این قضیه در تئوری اعداد هم ارز است:

«بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد بر هر مقسوم علیه مشترک آن دو عدد بخش‌پذیر است.»

واضح است که اگر a و b نسبت به هم اول باشند یعنی $d = ۱$ در این صورت $aZ + bZ = Z$.

نکته ۳: به ازای هر دو عدد صحیح و مثبت مانند a و b داریم:

$$aZ \cap bZ = mZ$$

که m کوچکترین مضرب مشترک a و b است.

این نکته نیز با قضیهٔ زیر در تئوری اعداد هم ارز است.

«هر مضرب مشترک دو عدد بر کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد بخش‌پذیر است.»

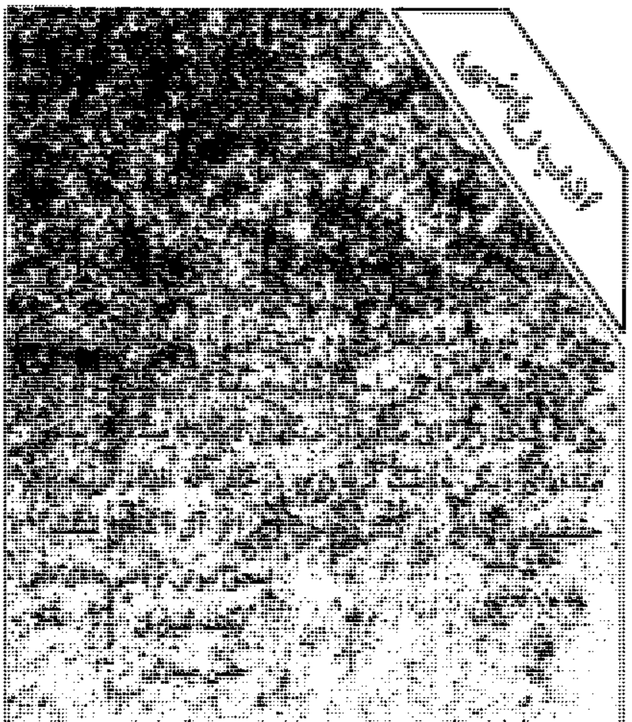
به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) ۲Z + ۳Z = Z　　　۳) ۲Z ∩ ۴Z = ۴Z

۲) ۲Z ∩ ۳Z = ۶Z　　　۴) ۲Z + ۴Z = ۲Z

در خاتمهٔ این مقاله با امید به اینکه مطالب فوق تا حدودی مشکلات و مسائل مربوط به این قسمت از کتاب را برطرف کرده باشد متذکر می‌شوم که، نظریه حلقه‌ها و میدانها بسیار وسیع و پیشرفته‌تر از آن است که بتوان همه را در یک مقاله جمع‌آوری نمود و در این مقاله سعی شده در حد نیاز به آن پرداخته شود.

والسلام.



پارادوکس* وصیت شگفت‌انگیز

نوشتهٔ مارتین گاردنر

ترجمهٔ حسن نصیرنیا

یک وکیل دعاوی ثروتمند ۱۱ اتومبیل گرانبهای قدیمی داشت که ارزش هر یک در حدود ۲۵۰۰۰ دلار بود.

پس از مرگ وکیل، وصیت‌نامه‌ای از او به جا ماند. در وصیت‌نامه آمده بود که ۱۱ اتومبیل او میان سه پسرش به این ترتیب تقسیم شود که نیمی از اتومبیلها به فرزند ارشد، یک چهارم آنها به فرزند میانی و یک ششم دیگر به فرزند کوچکتر برسد.

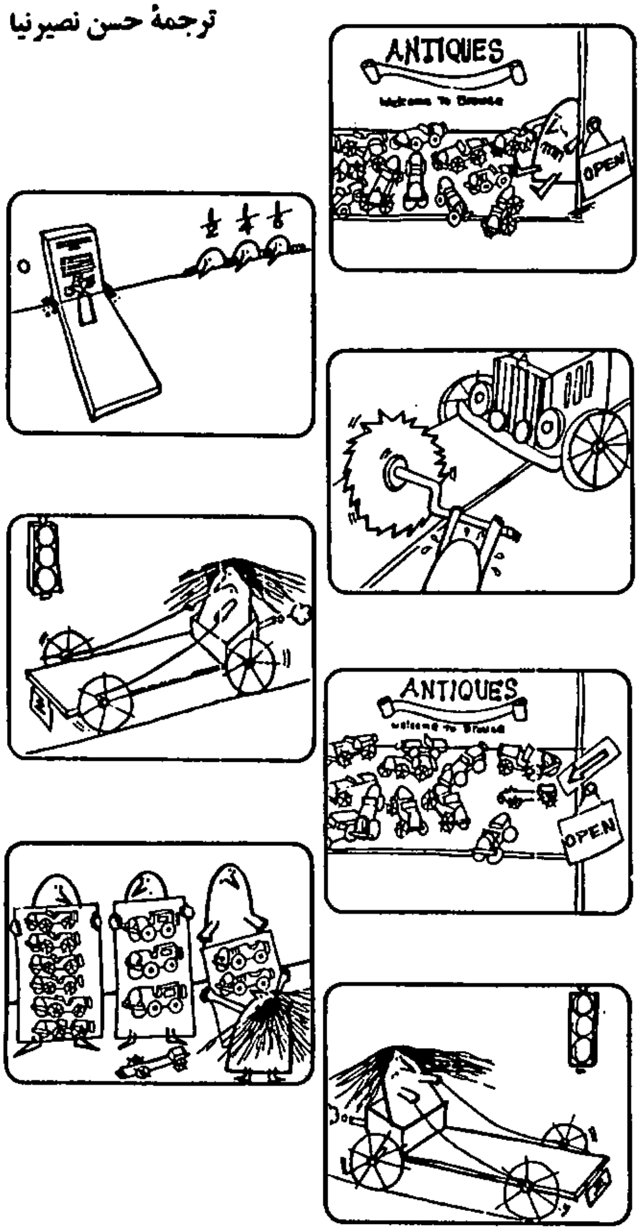
همگی مات و مبهوت مانده بودند که چگونه می‌توان ۱۱ اتومبیل را به دو یا چهار و یا شش قسمت مساوی تقسیم کرد.

وقتی فرزندان وکیل بر سر چگونگی تقسیم آنها بگومگو می‌کردند، خانم «رقم پیشه» کارشناس عددشناسی نامدار، سوار بر اتومبیل اسپرت جدید خود از راه رسید.

خانم رقم پیشه: سلام بچه‌ها. مثل این که مسأله‌ای برای شما پیش آمده است. چه خدمتی از من برمی‌آید؟ پس از این که پسران وکیل موضوع را برای خانم «رقم پیشه» تعریف کردند، او اتومبیل اسپرتش را در کنار ۱۱ اتومبیل قدیمی آنها پارک کرد و از آن بیرون پرید. **خانم رقم پیشه:** خب، بچه‌ها بگویید ببینم چند اتومبیل در این جا پارک شده است؟ پسرها اتومبیلها را شمردند، ۱۲ دستگاه بود.

سپس خانم رقم پیشه با استناد به موضوع وصیت‌نامه شروع به تقسیم اتومبیلها کرد. به این ترتیب که نیمی از اتومبیلها یعنی شش دستگاه را به پسر ارشد، یک چهارم آنها را به پسر میانی و یک ششم بقیه یعنی دو دستگاه را به کوچکترین پسر داد. **خانم رقم پیشه:** ۶ به علاوهٔ ۳ به علاوهٔ ۲ دقیقا" ۱۱ می‌شود. و این یکی هم اتومبیل خود من.

خانم رقم پیشه توی اتومبیل خود پرید و آن جا را ترک کرد. **خانم رقم پیشه:** هرکمک دیگری از دستم بربیاید، درآینده درخدمت شما فرزندانم خواهم بود. صورت حساب مربوط به هزینهٔ این مشاوره را برایتان خواهم فرستاد!



این پارادوکس شکل جدیدی از یک پارادوکس عربی[1] است که در آن به جای اتومبیلها، چند اسب موضوع تقسیم است. می‌توان شرایط وصیت‌نامه را با تغییر دادن تعداد اتومبیلها و تقسیم آنها بر مجموعهٔ دیگری از کسرها تغییر داد، مشروط بر این که وام گرفتن یک اتومبیل سبب اجرای درست وصیت شود و پس از تقسیم ما ترک، یک اتومبیل باقی بماند تا به وام دهنده مسترد گردد.

برای مثال، فرض کنیم ۱۷ اتومبیل داریم که طبق وصیت‌نامه باید به نسبتهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۹}$ میان سه نفر تقسیم شود. اگر تعداد اتومبیلها را n و سه کسر مربوط را $\frac{1}{a}$، $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ بگیریم، پارادوکس فقط در صورتی مصداق می‌یابد که معادلهٔ زیر:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

دارای پاسخی با عددهای صحیح مثبت باشد. در این جا شما را فرا می‌خوانیم تا با مداقهٔ بیشتر در این‌باره، در صورت امکان راهی بیابید که با افزایش عدهٔ وارثان و نیز افزایش تعداد اتومبیلهای به عاریت گرفته شده، بتوان وصیت را عملی کرد.

البته‌حل‌این پارادوکس در گرو آن‌است که مجموع کسرهای مورد اشاره در وصیت‌نامه (پیش از افزودن هرگونه اتومبیل عاریتی) کمتر از ۱ باشد. چنانچه اجرای وصیت‌نامه در واقع به شیوهٔ قطعه قطعه کردن اتومبیلها صورت می‌گرفت، $\frac{۱۱}{۱۲}$ از یک اتومبیل باقی می‌ماند. خانم رقم پیشه به شیوهٔ توزیع همان $\frac{۱۱}{۱۲}$ میان پسران عمل کرد. به این ترتیب که پسر بزرگ $\frac{۶}{۱۲}$ یک اتومبیل، پسر میانی $\frac{۳}{۱۲}$ و پسر کوچک $\frac{۲}{۱۲}$ یک اتومبیل بیشتر از سهمیه مقرر دریافت کرد. حاصل جمع این سه کسر $\frac{۱۱}{۱۲}$ می‌شود و از آن جا که در حال حاضر هر پسر به تعداد یک عدد صحیح از اتومبیلها سهم می‌برد، نیازی به قطعه قطعه کردن اتومبیلها نیست.

---

* پارادوکس، Paradox، (یا باطلنما) واژه‌ای یونانی به مفهوم «فراتر از اعتقاد» است و منظور از آن احکامی است که با عقل متعارف یا اصول مقدماتی منطق در تضاد باشد. ـ م.

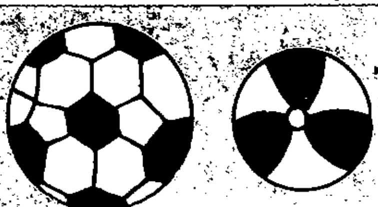
۱ـ شاید منظور نویسنده مسألهٔ مشابهی است که حل آن منسوب به حضرت علی (ع) است. در کتاب ناسخ التواریخ، جلد سّوم آمده است، سه مرد بر آن بودند که ۱۷ شتر همانند را به نسبتهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۹}$ میان خود تقسیم کنند. چون هیچ یک از سه مدعی حاضر نبود حتی از ذرّه‌ای از سهم خود به نفع دیگری بگذرد، یا این‌که با به میان نهادن مقداری درهم یا دینار مشکل تقسیم به نسبت را حل کند، کار آنان به مشاجره و بن‌بست رسید. ناگزیر برای حل اختلاف و داوری نزد حضرت علی (ع) رفتند. حضرت با شنیدن دعوی آنان تدبیری اندیشیدند، به این ترتیب که یک شتر از آنِ خویش بر تعداد شترها افزودند و مجموع آنها را به ۱۸ رساندند. سپس با تقسیم ۱۸ بر عددهای ۲ و ۳ و ۹ به ترتیب ۹ و ۶ و ۲ (مجموعاً ۱۷ شتر) به دست آمد که هریک از این ارقام قدری بیشتر از سهم مورد درخواست آن سه مرد بود و همگی خشنود و سپاسگزار شدند. پس از تقسیم عادلانهٔ شتران، آن حضرت شتر خویش را پس گرفتند.

برای آگاهی از یک پارادوکس مشابه دیگر، نگاه کنید به فصل ۵، تقسیم مزرعه در کتاب «سرگرمیهای علمی و آموزشی» جلد ۲، ترجمهٔ حسن نصیرنیا، انتشارات مدرسه، تابستان ۱۳۷۱. ـ م.

مأخذ و ترجمهٔ مقاله:

Gardner, Martin. aha! Gotcha ,
Paradoxes to puzzle & Delight, W.H. Freeman & Company , New York, 1982.

تفریح اندیشه ۴



دو توپ به ترتیب به قطرهای ۸ و ۴ سانتی‌مترند.
«توپ بزرگتر» چندمرتبه بیشتر است؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

تعیین دامنه و برد توابع

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

(قسمت سوّم)

۹ـ تعیین دامنه و برد توابع معکوس [14] (وارون):

تعیین دامنه و برد توابع معکوس وقتی معنا پیدا می‌کند که یک به یک بودنشان مسلم باشد، زیرا شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع f وارون پذیر باشد، آن است که f یک به یک باشد. به بیان دیگر اگر f یک به یک نباشد وارون آن یعنی f^{-1} یک تابع نیست. به‌عنوان مثال وارون تابع زیر یک تابع نیست زیرا یک‌به یک نیست.

$f=$ {(−۱ , ۴) و (۱ , ۳) و (۲ , ۱) و (۳ , ۴)}

f^{-1} یک رابطه است و تابع نیست زیرا داریم:

$R = f^{-1} =$ {(۴ , −۱) و (۳ , ۱) و (۱ , ۲) و (۴ , ۳)}

و دو زوج مرتب (۳ و ۴) و (۱− و ۴) در آن موجود است که مؤلفهٔ اول آنان با هم مساوی است ولی مؤلفهٔ دوم آنان با هم مساوی نیست. بدیهی است که این رویداد از عدم یک به یک بودن تابع ناشی شده است. می‌دانیم اگر تابعی یک به یک باشد هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن یافت نمی‌شود که مؤلفهٔ دوم آنان با هم مساوی باشد. همچنین می‌دانیم نمودار هر تابع و تابع معکوس آن نسبت به خط $y = x$ قرینهٔ یکدیگرند، زیرا دو نقطهٔ $M(x , y)$ و $M'(y , x)$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات قرینهٔ یکدیگر می‌باشند. بنابراین در این‌جا نتیجه می‌شود که اگر f تابعی از D_f به R_f $(f: D_f \to R_f)$ تعریف شده باشد و همچنین f یک به یک باشد آنگاه تابع معکوس (وارون) آن f^{-1} از R_f به D_f $(f^{-1}: R_f \to D_f)$ تعریف خواهد شد و داریم:

$$D_{f^{-1}} = R_f \, , \, R_{f^{-1}} = D_f$$

توجه: f^{-1} نمادی برای تابع معکوس (وارون) است و نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه شود.

مثال ۲۹: دامنه و برد تابع معکوس $f=$ {(۱ و ۳) و (۵ و ۱−) و (۳ و ۱)} و مجموعهٔ f^{-1} را به‌دست آورید.

حل: همان‌طور که مشاهده می‌شود تابع f یک به یک است پس معکوس‌پذیر است و داریم:

$D_f =$ {۱ و ۱− و ۳} و $R_f =$ {۳ و ۵ و ۱}

بنابراین دامنه و برد تابع معکوس f یعنی f^{-1} چنین است:

$D_{f^{-1}} = R_f =$ {۱ و ۳ و ۵} و $R_{f^{-1}} = D_f =$ {−۱ و ۱ و ۳}

مجموعه f^{-1} چنین است:

$f^{-1} =$ {(۳ و ۱) و (۱− و ۵) و (۱ و ۳)}

14) Ineverse functions

مثال ۳۰: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ $y = g(x) = Arc\ cosx$ راتعیین کنید.

حل: با توجه به ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود که تابع فوق وارون تابع $f(x) = cosx$ است. از آنجا که تابع $f(x) = cosx$ در هر یک از بازه‌های زیر یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است:

... یا [۲π و π] یا [π و ۰] یا [۰ و $-\pi$] یا [$-\pi$ و -۲π] یا...

بنابراین هریک از بازه‌های فوق را می‌توان به‌عنوان برد تابع $g(x)$ درنظر گرفت.

با انتخاب یکی از بازه‌های فوق درهر صورت دامنهٔ تابع $g(x)$ چنین نتیجه خواهد شد:

$$D_g = [-۱ \text{ و } ۱]$$

معمولاً برای سادگی، بازهٔ [π و ۰] را برای برد تابع $g(x)$ اختیار می‌کنند:

$$R_g = [۰ \text{ و } \pi]$$

مثال ۳۱: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید.

$$y = f(x) = Arc\ sin\ \frac{۲x}{۱-x^۲}$$

حل: تعیین دامنهٔ تابع: $D_f = \left\{x \middle| -۱ \le \frac{۲x}{۱-x^۲} \le ۱\right\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۲x}{۱-x^۲} \le ۱ \\ \frac{۲x}{۱-x^۲} \ge -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^۲+۲x-۱}{۱-x^۲} \le ۰ \\ \frac{-x^۲+۲x+۱}{۱-x^۲} \ge ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} ۱-x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \\ x^۲+۲x-۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \pm\sqrt{۲} \\ -x^۲+۲x+۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm\sqrt{۲} \end{array} \right.$$

x	$-\infty$ تا $-۱-\sqrt{۲}$	$-۱-\sqrt{۲}$ تا -۱	-۱ تا $۱-\sqrt{۲}$	$۱-\sqrt{۲}$ تا $-۱+\sqrt{۲}$	$-۱+\sqrt{۲}$ تا ۱	۱ تا $۱+\sqrt{۲}$	$۱+\sqrt{۲}$ تا $+\infty$
$\frac{x^۲+۲x-۱}{۱-x^۲}$	−	+	−	−	+	−	−
$\frac{-x^۲+۲x-۱}{۱-x^۲}$	+	+	−	+	+	−	+

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -۱-\sqrt{۲}] \cup [۱-\sqrt{۲}, -۱+\sqrt{۲}] \cup [۱+\sqrt{۲}, +\infty)$$

تعیین برد تابع: $y = Arc\ sin\ \frac{۲x}{۱-x^۲} \Rightarrow siny = \frac{۲x}{۱-x^۲}$

$$(۱-x^۲)\,sin\,y = ۲x \Rightarrow siny - x^۲ sin\,y = ۲x$$

$$x^۲ siny + ۲x - siny = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱\pm\sqrt{۱+sin^۲y}}{siny}$$

$$siny \ne ۰ \Rightarrow y \ne k\pi$$

برای برد تابع معکوس سینوسی یکی از بازه‌های زیر را می‌توان انتخاب کرد. زیرا تابع سینوسی در هریک از فاصله‌های زیر یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

... یا [$\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$] یا [$\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$] یا [$\frac{-\pi}{۲}$ و $\frac{-۳\pi}{۲}$] یا ...

معمولاً برای سادگی بُرد تابع معکوس سینوسی رابازهٔ [$\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$] اختیار می‌کنند. بنابراین برد تابع فوق چنین است:

$$R_f = [\frac{-\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}]$$

مثال ۳۲: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید.

$$y = g(x) = Arctgx$$

حل: با توجه به ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود که تابع $g(x)$ وارون تابع $f(x) = tgx$ است. تابع $f(x)$ در بازه‌های زیر یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است:

... یا $(\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲})$ یا $(\frac{-\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲})$ یا $(\frac{-۳\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲})$ یا ...

با انتخاب هر یک از این فاصله‌ها برای برد تابع $g(x)$ در هر صورت دامنهٔ تابع $g(x)$ چنین است:

$$D_g = (-\infty \text{ و } +\infty)$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ را می‌توان یکی از بازه‌های فوق اختیار کرد. معمولاً برای سادگی برد تابع $g(x)$ را در بازهٔ $(\frac{-\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲})$ درنظر می‌گیرند. بنابراین داریم:

$$R_g = (\frac{-\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲})$$

۱۰ ـ تعیین دامنه و برد توابع مرکب[۱۵]:

ترکیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با نماد $f\left(g(x)\right)$ یا $fog(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را تابع مرکب می‌نامیم و در حالت عمومی دامنهٔ آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$D_{fog} = \{x \in Dg \mid g(x) \in D_f\}$$

به‌طور کلی همواره می‌توان دامنه و برد تابع مرکب fog را پس از ترکیب دو تابع f و g تعیین کرد.

15) composite functions

مثال ۳۳: توابع $f = \{$(۲ و ۱) و (۳ و ۵) و (۱ و ٦)$\}$ و $g = \{$(۱ و ۳) و (۲ و ۴) و (۴ و ۱)$\}$ مفروضند، دامنه و برد توابع مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) fog ب) gof ج) $(۲f + ۳g)\ o\ (g - ۳f)$

د) $(۳f . g)\ o\ (\frac{f}{g})$

حل: الف) می‌دانیم: $fog(x) = f\left(g(x)\right)$

با توجه به مجموعه‌های f و g و تعریف تابع مرکب داریم:

fog:
$$۱ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} ۵$$
$$۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f} ?$$

fog:
$$۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ٦ \Rightarrow fog = \{(۱ \text{ و } ۵) \text{ و } (۴ \text{ و } ٦)\}$$

بدیهی است در این‌جا می‌توان با توجه به مجموعهٔ fog دامنه و برد آن را تعیین کرد:

$$D_{fog} = \{۴ \text{ و } ۱\} \text{ و } R_{fog} = \{٦ \text{ و } ۵\}$$

ب) می‌دانیم: $gof(x) = g\left(f(x)\right)$

gof:
$$۲ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{g} ۳ \text{ و } ۳ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g} ? \text{ و } ۱ \xrightarrow{f} ٦ \xrightarrow{g} ?$$

$$\Rightarrow gof = \{(۳ \text{ و } ۲)\} \Rightarrow D_{gof} = \{۲\} \text{ و } R_{gof} = \{۳\}$$

ج) لازم به توضیح است که معنی kf این است که مؤلفهٔ دوم هر زوج مرتب f را k برابر کنیم. به‌عنوان مثال اگر $(a\ ,\ b) \in f$ آنگاه $(a\ ,\ kb) \in kf$ است. در این صورت اگر $(a\ ,\ b) \in f$ آنگاه $(a\ ,\ ۲b) \in ۲f$ است. بنابراین داریم:

۲f = {(۱۲ و ۱) و (۱۰ و ۳) و (۲ و ۲)}

۳g = {(۳ و ۴) و (۱۲ و ۲) و (۹ و ۱)}

۳f = {(۱۸ و ۱) و (۱۵ و ۳) و (۳ و ۲)}

از طرفی می‌دانیم: $D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$D_{۲f+۳g}$ = {۱ و ۲}

⇒ ۲f + ۳g = {(۱۲ + ۲ و ۲) و (۹ + ۱۲ و ۱)}

۲f + ۳g = {(۱۴ و ۲) و (۲۱ و ۱)}

⇒ $R_{۲f+۳g}$ = {۱۴ و ۲۱}

همچنین داریم:

$D_{g-۳f}$ = {۱ و ۲}

⇒ g − ۳f = {(۱ و ۳ − ۱۸) و (۲ و ۴ − ۳)}

= {(۱ و ۱۵−) و (۲ و ۱)}

$R_{g-۳f}$ = {۱ و ۱۵−}

و بنابراین داریم: (۲f + ۳g) o (g − ۳f) = {(۲ و ۲۱)}

زیرا: (۲f + ۳g) o (g − ۳f)

۱ —(g−۳f)→ (۱۵−) —(۲f+۳g)→ ? و ۲ —(g−۳f)→ ۱ —(۲f+۳g)→ ۲۱

در نتیجه دامنه و برد تابع مرکب فوق چنین است:

$D_{(۲f+۳g)\,o\,(g-۳f)}$ = {۲}

$R_{(۲f+۳g)\,o\,(g-۳f)}$ = {۲۱}

د) داریم:

$D_{\frac{f}{g}}$ = {۱ و ۲} ⇒ $\frac{f}{g}$ = {(۱ و $\frac{۶}{۳}$) و (۲ و $\frac{۱}{۴}$)}

= {(۱ و ۲) و (۲ و $\frac{۱}{۴}$)}

$D_{۳f.g}$ = {۱ و ۲} ⇒ ۳f.g = {(۱ و ۱۸ × ۳) و (۲ و ۳ × ۴)}

۳f.g = {(۱ و ۵۴) و (۲ و ۱۲)}

(۳f.g) o ($\frac{f}{g}$)

۱ —($\frac{f}{g}$)→ ۲ —(۳f.g)→ ۱۲ و ۲ —($\frac{f}{g}$)→ $\frac{۱}{۴}$ —(۳f.g)→ ?

⇒ (۳f.g) o ($\frac{f}{g}$) = {(۱ و ۱۲)} ⇒

$D_{(۳f.g)\,o\,(\frac{f}{g})}$ = {۱} و $R_{(۳f.g)\,o\,(\frac{f}{g})}$ = {۱۲}

مثال ۳۴: توابع با ضوابط $g(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = 10^{-1 \cdot \log(\log x)}$ مفروضند، دامنه و برد توابع مرکب $fog(x)$ و $gof(x)$ را تعیین کنید.

حل: در ابتدا دامنهٔ هریک از توابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$D_f = \{x \mid \log x > 0\}$ = (۱ و ∞+) و $D_g = R - \{0\}$

تابع $f(x)$ در دامنهٔ تعریفش به شکل سادهٔ $f(x) = \frac{1}{x}$ تحویل می‌شود:

$$f(x) = 10^{-1 \cdot \log(\log x)} \xRightarrow{\log x > 0}$$

$$f(x) = 10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}}$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{x} > 0} f(x) = \frac{1}{x}$$ و D_f = (۱ و ∞+)

بنابراین با توجه به دامنه‌های توابع داریم:

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

= $\{x \in R - \{0\} \mid \frac{1}{x} > 1\}$ = (۰ و ۱)

$$D_{gof} = \{x \in D_g \mid f(x) \in D_g\}$$
$$= \{x \in (۱ \text{ و } +\infty) \mid \frac{۱}{x} \in R - \{۰\}\} = (۱ \text{ و } +\infty)$$

همچنین برای تابع fog داریم:

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\frac{۱}{x}) = ۱۰^{-۱۰\log}\log(\frac{۱}{x})$$

$$\log(\frac{۱}{x}) > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x} > ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۱-x}{x} > ۰$$
$$\Rightarrow x \in (۰ \text{ و } ۱)$$

$$\Rightarrow y = fog(x) = ۱۰^{-\log\frac{۱}{x}} = ۱۰^{\log x} \xrightarrow{x \in (۰ \text{ و } ۱)}$$
$$y = fog(x) = x \Rightarrow D_{fog} = (۰ \text{ و } ۱)$$

تعیین برد تابع fog:

$$y = x \Rightarrow x = y \in (۰ \text{ و } ۱) \Rightarrow ۰<y<۱ \Rightarrow R_{fog} = (۰ \text{ و } ۱)$$

و همین‌طور برای تابع gof داریم:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(۱۰^{-۱۰\log(\log x)}) = ۱۰^{۱۰\log(\log x)}$$

$$\Rightarrow \log x > ۰ \Rightarrow x > ۱ \Rightarrow gof(x) = ۱۰^{\log x}$$

$$\xrightarrow{x>۱} gof(x) = x,\ x \in (۱ \text{ و } +\infty) \Rightarrow D_{gof} = (۱ \text{ و } +\infty)$$

تعیین برد تابع gof:

$$z = gof(x) = x \Rightarrow x = z \in (۱ \text{ و } +\infty)$$
$$\Rightarrow z > ۱ \Rightarrow R_{gof} = (۱ \text{ و } +\infty)$$

بنابراین به‌طور خلاصه دامنه و برد توابع fog و gof چنین می‌شوند:

$$D_{fog} = R_{fog} = (۰ \text{ و } ۱)$$
$$D_{gof} = R_{gof} = (۱ \text{ و } +\infty)$$

مثال ۳۵: توابع $gof(x) = \sqrt{x+۱}$ و $f(x) = \frac{x}{x+۱}$ مفروضند. دامنه و برد تابع مرکب $fog(x)$ را تعیین کنید.

حل: برای تعیین دامنه و برد تابع $fog(x)$ ابتدا باید ضابطهٔ آن را بیابیم. برای این منظور ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$gof(x) = g(f(x))$$

$$g(\frac{x}{x+۱}) = \sqrt{x+۱} \Rightarrow \frac{x}{x+۱} = t \Rightarrow x = \frac{t}{۱-t}$$

$$g(t) = \sqrt{\frac{t}{۱-t} + ۱} = \frac{۱}{\sqrt{۱-t}}$$

t متغیر ظاهری است، بنابراین ضابطهٔ $g(x)$ چنین است:

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x}}$$

اینک ضابطهٔ $fog((x)$ را می‌نویسیم:

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)+۱}$$

$$fog(x) = \frac{\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}}{\frac{۱}{\sqrt{۱-x}} + ۱} \xrightarrow{x \neq ۱} y = fog(x) = \frac{۱}{۱+\sqrt{۱-x}}$$

تعیین دامنه تابع fog:

$$\begin{cases} ۱ - x \geq ۰ \\ x \neq ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq ۱ \\ x \neq ۱ \end{cases} \Rightarrow x < ۱ \Rightarrow D_{fog} = (-\infty \text{ و } ۱)$$

تعیین برد تابع fog: ابتدا از ضابطهٔ تابع نتیجه می‌شود: $y > ۰$.
همچنین داریم:

$$۱ + \sqrt{۱-x} = \frac{۱}{y} \Rightarrow \sqrt{۱-x} = \frac{۱}{y} - ۱ = \frac{۱-y}{y} > ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۱-y}{y} > ۰ \\ y > ۰ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ۰ < y < ۱$$

بنابراین برد تابع چنین است: $R_{fog} = (۰ \text{ و } ۱)$

مثال ۳۶: اگر $f(x) = x - ۱$ و $fog(x) = \frac{۱}{x - ۱}$ آنگاه دامنه و برد تابع مرکب $gof(x)$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا ضابطهٔ تابع $gof(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = x - ۱ \Rightarrow f(g(x)) = g(x) - ۱$$

$$\Rightarrow fog(x) = g(x) - ۱$$

$$\frac{۱}{x - ۱} = g(x) - ۱ \Rightarrow g(x) = \frac{۱}{x - ۱} + ۱ = \frac{x}{x - ۱}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{x - ۱}$$

اینک ضابطهٔ $gof(x)$ را می‌نویسیم:

$$y = gof(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - ۱} = \frac{x - ۱}{x - ۲}$$

تعیین دامنهٔ تابع gof: $x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow D_{gof} = R - \{۲\}$

تعیین برد تابع gof: $y = \frac{x - ۱}{x - ۲} \Rightarrow x = \frac{۲y - ۱}{y - ۱}$

$$y - ۱ = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow R_{gof} = R - \{۱\}$$

در این‌جا به بحث و بررسی دامنه و برد توابع خاتمه می‌دهیم و در شماره‌های آیندهٔ مجله به مطالب جنبی دیگر تابع می‌پردازیم.

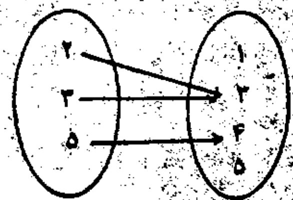
پوزش:

صورت مسألهٔ ۲۴ در قسمت دوم، مندرج در شمارهٔ ۷ برهان به شکل زیر اصلاح شود.

دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید:

$$y = f(x) = \sqrt{log\left[\frac{۱۰(x+۱)}{x^۲-۱}\right]\left[\frac{x^۲-۱}{x+۲}\right] + cos\,x}$$

نمودار مثال ۱، مندرج در برهان ۶ به شکل زیر اصلاح شود.



ادب ریاضی

دومین شاخهٔ ریاضیات که در آن تحولات قرن نوزدهم تأثیر زیادی بر کار علمی آتی داشت هندسه بود، زیرا در این قرن دو نظام هندسی کاملاً تازه مطرح شد. این نظامات ناشی از شکست دو قضیهٔ هندسهٔ اقلیدس بود. طرح کلی هندسهٔ اقلیدس بنی استادانه و یادوارهٔ باشکوه منطق انسان بود. این هندسه بیش از دو هزار سال بلامنازع حکم رانده و تا قرن نوزدهم، کم‌کم مترادف با جنبه‌ای از معنی «حقیقت» شده بود. اما دو قضیه وجود داشت که با هیچ استدلال منطقی قابل اثبات نبود. یکی مشعر بر این بود که پاره‌خط را می‌توان از هر دوسو تا بی نهایت امتداد داد. دیگری اشعار می‌داشت که دو خط موازی، تا هر جا که امتداد یابند، یکدیگر را قطع نمی‌کنند. گرچه هر دو بدیهی به نظر می رسند، اما نه اقلیدس و نه هندسه‌دانهای بعد از او هیچ یک نتوانستند آنها را رسما" به اثبات برسانند. اقلیدس خود همیشه در مورد این دو قضیه احتیاط می‌کرد و سعی داشت تا آن جا که می‌تواند از فرض خطوط موازی استفاده نکند.

کالین اـ رنان. تاریخ علم کمبریج

حسن افشار

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۶)

ION CUCUREZEANU
Journal of Number Theory 44 (1993)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

راه حل مقدماتی مسألهٔ لوکاس

با استفاده از روش نزول نامتناهی[۱]، معادلهٔ پل[۲]، و قانون تقابل درجهٔ دوم[۳]، ثابت شده است که معادلهٔ $x(x+1)(2x+1)=6y^2$ تنها دارای جواب صحیح وناصفر[۴]، $x=24$، $y=70$ است.

در ۱۸۷۵ لوکاس[۵] [1] حدس زد که تنها جواب صحیح و ناصفر معادلهٔ

$$x(x+1)(2x+1)=6y^2 \qquad (*)$$

$x=24$، $y=70$ است. معادلهٔ (*) زمانی رخ می‌دهد که شخص این سؤال رامطرح کند که کدام عدد هرمی[۶] مربع است، یعنی در جستجوی مقدار n ی باشد که به ازای آن $1^2+2^2+\dots+n^2$ مربع عددی طبیعی است.

مسألهٔ «چهاروجهی = مربع»[۷] نیز به همین معادله منجر می‌شود، زیرا (*) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2x(2x+1)(2x+2)=6(2y)^2$$

در ۱۹۱۹، واتسون[۸]، [2] مسألهٔ لوکاس را (به اثبات) حل کرد. راه حل وی، مبتنی بر نظریهٔ توابع بیضوی[۹]، بسیار پیچیده است.

راه حل مشکل دیگری توسط لجانگرن[۱۰] [3] در سال ۱۹۵۲ داده شد. راه حل مزبور که کوتاه‌تر از راه حل واتسون است، بستگی به معادلهٔ پلی در هیأت درجهٔ دومی[۱۱] دارد، که به هیأت درجه چهارمی[۱۲] منجرمی‌شود که جمیع هیأتهای مزدوجش[۱۳] انگاری[۱۴]اند.

مسألهٔ مزبور در اغلب کتب نظریهٔ اعداد[۱۵] ذکر شده است. مردل[۱۶] [4] و گای[۱۷] [5] این پرسش را، که در این مورد راه حلی مقدماتی وجود دارد یا نه، مطرح کرده‌اند. (جالب توجه است که پرسش مزبور اخیراً در مجلهٔ زیر تکرار شده است:

Notices Amer. Math. Soc. 32, No.5 (243) (1985), (608)

هدف این مقاله به دست دادن چنین راه حلی است.

معادلهٔ (*) از آن‌جا که x و $x+1$ و $2x+1$ نسبت به هم اول[۱۸] هستند، به یکی از دستگاههای زیر، با $(v,t)=1$ و $y=vt$، منجر می‌شود:

$$\text{(I)}\begin{cases} x(x+1)=6t^2 \\ 2x+1=v^2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \text{(II)}\begin{cases} x(x+1)=2t^2 \\ 2x+1=3v^2 \end{cases}$$

اگر شخص (I) را ابتدا به پیمانهٔ[۱۹] ۸،

$$(v\equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow v^2\equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 2\,|\,x)$$

و سپس به پیمانه ۳،

$$(3\,|\,x+1 \Rightarrow v^2=2x+1\equiv -1 \pmod 3))$$

(که غیر ممکن است) تحلیل کند، نشان می‌دهد که تنها امکان، عبارت است از:

$$x=6z^2,\ x+1=u^2,\ 2x+1=v^2$$

به طریقی مشابه، از (II) نتیجه می‌شود که تنها امکان؛

$$x=z^2,\ x+1=2u^2,\ 2x+1=3v^2$$

با $(u,z)=1$، $uz=1$است. به این ترتیب یکی از دو مورد زیر را داریم:

$$(1)\begin{cases} 6z^2+1=u^2 \\ 12z^2+1=v^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad (2)\begin{cases} z^2+1=2u^2 \\ 2z^2+1=3v^2 \end{cases}$$

تنها جوابهای به اعداد طبیعی[20] (۱) عبارتند از $u = v = 1$، $z = 0$ و $z = 2$، $u = 5$، $v = 7$. (جوابهای متناظر (*) به ترتیب عبارتند از $x = 0$، $y = 0$ و $x = 24$، $y = 70$.) در واقع، ابتدا از (۱) به پیمانهٔ ۸، z را زوج[21] داریم. نیز از دستگاه (۱)، u و v را فرد[22] داریم، $(u , v) = 1$، و بنابراین، $(v - u , v + u) = 2$. از آن جا که $v^2 - u^2 = 6z^2$ یا، $(v + u)(v - u) = 6z^2$

$$\text{(a)}\begin{cases} v + u = 6r^2 \\ v - u = 4s^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \text{(b)}\begin{cases} v + u = 2r^2 \\ v - u = 12s^2 \end{cases}$$

را با $z = 2rs$، $(r , s) = 1$، و r فرد، داریم.

از (a)، $v = 3r^2 + 2s^2$ را داریم، که در ارتباط با $v^2 = 12z^2 + 1$، $z = 2rs$،

$$9r^4 - 36r^2s^2 + 4s^4 = 1$$

را می‌دهد، که به پیمانهٔ ۱۶ غیر ممکن است، زیرا:

$$9r^4 \equiv 9 \pmod{16}$$

r فرد، اما:

$$4s^2(9r^2 - s^2) \equiv 0 \pmod{16}$$

از (b) داریم: $v = r^2 + 6s^2$، که در ارتباط با $v^2 = 12z^2 + 1$، $z = 2rs$، می‌دهد:

$$r^4 - 36r^2s^2 + 36s^4 = 1 \qquad (۳)$$

تنها جوابهای به اعداد طبیعی معادلهٔ (۳) عبارتند از:

$$r = 1 , s = 0 \quad \text{و} \quad r = 1 , s = 1$$

(جوابهای متناظر (*) عبارتند از: $x = 0$ و $x = 24$.)

در واقع، معادلهٔ (۳) را می‌توان به صورت،

$$(6s^2 - 3r^2)^2 - 8r^4 = 1$$

یا

$$(6s^2 - 3r^2 - 1)(6s^2 - 3r^2 + 1) = 8r^4 \qquad (۳')$$

نوشت. از آن جا که

$$(6s^2 - 3r^2 - 1 , 6s^2 - 3r^2 + 1) = 2$$

از (۳') به پیمانهٔ ۳، موارد زیر را، با $(a , b) = 1$، $ab = r$، داریم:

$$\text{(a)}\begin{cases} 6s^2 - 3r^2 - 1 = -2a^4 \\ 6s^2 - 3r^2 + 1 = 4b^4 \end{cases}$$

$$\text{(b)}\begin{cases} 6s^2 - 3r^2 - 1 = -4b^4 \\ 6s^2 - 3r^2 + 1 = -2a^4 \end{cases}$$

یا:

$$\text{(c)}\begin{cases} 6s^2 - 3r^2 - 1 = -b^4 \\ 6s^2 - 3r^2 + 1 = -8a^4 \end{cases}$$

از (a) یا (b) نتیجه می‌شود که $2b^4 - a^4 = 1$، که می‌تواند به صورت:

$$(b^2)^4 - a^4 = (b^4 - 1)^2$$

نیز نوشته شود، که معادله‌ای به صورت $x^4 - y^4 = z^2$، با $(x , y) = 1$ است. می‌دانیم ([4] را ملاحظه کنید) که تنها جوابهای صحیح معادله توسط

$$x^2 = y^2 = 1 , \; z = 0$$

داده شده‌اند. بنابراین $a^2 = b^2 = 1$، که از آن $r = 1$ و (۳)، $s = 0$ یا $s = 1$ را به دست می‌دهد.

این رابطه از (c)،

$$-b^4 + 8a^4 = -2$$

را، که به پیمانهٔ ۴ غیر ممکن است، به دست می‌دهد.

اکنون، ثابت می‌کنیم که تنها جواب دستگاه (۲) عبارت است از:

$$z^2 = u^2 = v^2 = 1$$

(جواب متناظر (*) عبارت است از $x = 1$، $y = 1$.)

از (۲) نتیجه می‌شود که $4u^2 - 3v^2 = 1$. با قرار دادن $U = 2u$، $V = v$، $Z = 2z$، می‌توانیم معادلهٔ اخیر را به صورت

$$U^2 - 3V^2 = 1 \qquad (۴)$$

بنویسیم، در حالی که معادلهٔ اول دستگاه (۲) به

$$Z^2 = 2U^2 - 4 \qquad (۵)$$

تبدیل می‌شود. اکنون جوابهای معادلهٔ (۴) را، تحت محدودیت مطرح شده توسط (۵)، پیدا می‌کنیم. معادلهٔ (۴) معادلهٔ پلی است که جواب اصلیش $U = 2$، $V = 1$ است. بنابراین جمیع جوابهای (۴) توسط

$$U_n + V_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n \qquad (۶)$$

با n صحیح، داده می‌شود.

روابط زیر را به‌سادگی به دست می‌آوریم:

$$U_{-n} = U_n\,,\ V_{-n} = -V_n \qquad (7)$$

$$U_{n+k} = U_n V_k + 3V_n U_k \qquad (8)$$

$$V_{n+k} = V_n U_k + V_k U_n \qquad (9)$$

$$U_{2k} = U_k^2 + 3V_k^2 = 2U_k^2 - 1 \qquad (10)$$

$$V_{2k} = 2U_k V_k \qquad (11)$$

معادلات (۸)، (۹)، (۱۰)، (۱۱) مستلزم مورد زیرند:

$$U_{n+2k} \equiv -U_n \qquad (\bmod U_k) \qquad (12)$$

ثابت می‌کنیم که جوابهای معادلهٔ (۴)، تحت محدودیت (۵)، توسط (۶) تنها به ازای $n = \pm 1$، داده می‌شوند.

بنا به (۷) می‌توان فرض کرد که $n > 0$. از آن جا که U زوج است، از (۶) نتیجه می‌شود که n فرد است. فرض می‌کنیم $n = 4m \pm 1$. به ازای $m \neq 0$، می‌توانیم

$$n = \pm 1 + 2^t (2h + 1)$$

را، با $t \geq 2$ و $h \geq 0$ بنویسیم. قرار می‌دهیم $j = 2^t$؛ به این ترتیب، $n = j \pm 1 + 2jh$.

h بار به کار بردن (۱۲) می‌دهد:

$$U_n \equiv (-1)^h U_{j \pm 1} \qquad (\bmod U_j)$$

از آن جاکه

$$U_{j \pm 1} = U_j U_{\pm 1} + 3V_j V_{\pm 1} = 2U_j \pm 3V_j$$

داریم:

$$U_n \equiv \pm 3V_j \qquad (\bmod U_j)$$

از (۵) نتیجه می‌شود که:

$$Z^2 = 2U_n^2 - 4 \equiv 18V_j^2 - 4 \ (\bmod U_j)$$

از آن جا که معادلهٔ (۴) مستلزم

$$3V_1^2 \equiv -1 \qquad (\bmod U_j)$$

است، داریم:

$$Z^2 \equiv -10 \qquad (\bmod U_j)$$

همنهشتی[۲۳] فوق غیرممکن است. در واقع، به ازای $t \geq 2$ (یعنی، $j \geq 4$)، از (۱۰) با استفاده از استقرا[۲۴] نتیجه می‌شود که:

$$U_j \equiv 1 \ (\bmod 8) \quad \text{و} \quad U_j \equiv 2 \ (\bmod 5)$$

(به حساب بیاورید که $U_4 = 97$). در این صورت، با استفاده از نمادنویسی معمول نماد لژاندر ـ ژاکوبی[۲۵]، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{-10}{U_j}\right) = \left(\frac{10}{U_j}\right) = \left(\frac{2}{U_j}\right)\left(\frac{5}{U_j}\right) = \left(\frac{5}{U_j}\right)$$

$$= \left(\frac{U_j}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1$$

که اثبات را تمام می‌کند.

یادداشتها

۱. Infinite descent

۲. Pell's Equation. معادلهٔ دیوفانتی $x^2 - Dy^2 = 1$، که در آن D عدد صحیح غیرمربعی است. این معادله احتمالاً معروفترین معادلهٔ دیوفانتی بعداز معادلهٔ مربوط به سه تاییهای فیثاغورثی $a^2 + b^2 = c^2$، و از بعضی جهات از آن مهمتر است. یکی از مثالهای مشهور این مورد، مسألهٔ موسوم به مسألهٔ رمهٔ ارشمیدس است. این مسأله به معادلهٔ $x^2 - 4729494y^2 = 1$ منجر می‌شود که کوچکترین جوابش که توسط امتور «Amthor» به دست آمده، دارای ۲۰۶۵۴۵ رقم است. [برای توضیحات بیشتر رجوع کنید به: جلد سی و هفتم مجلهٔ آشنایی با ریاضیات ـ پاییز ۱۳۷۱؛ مقالهٔ نظریهٔ اعداد یونانی، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، صفحهٔ ۲۷۲.]

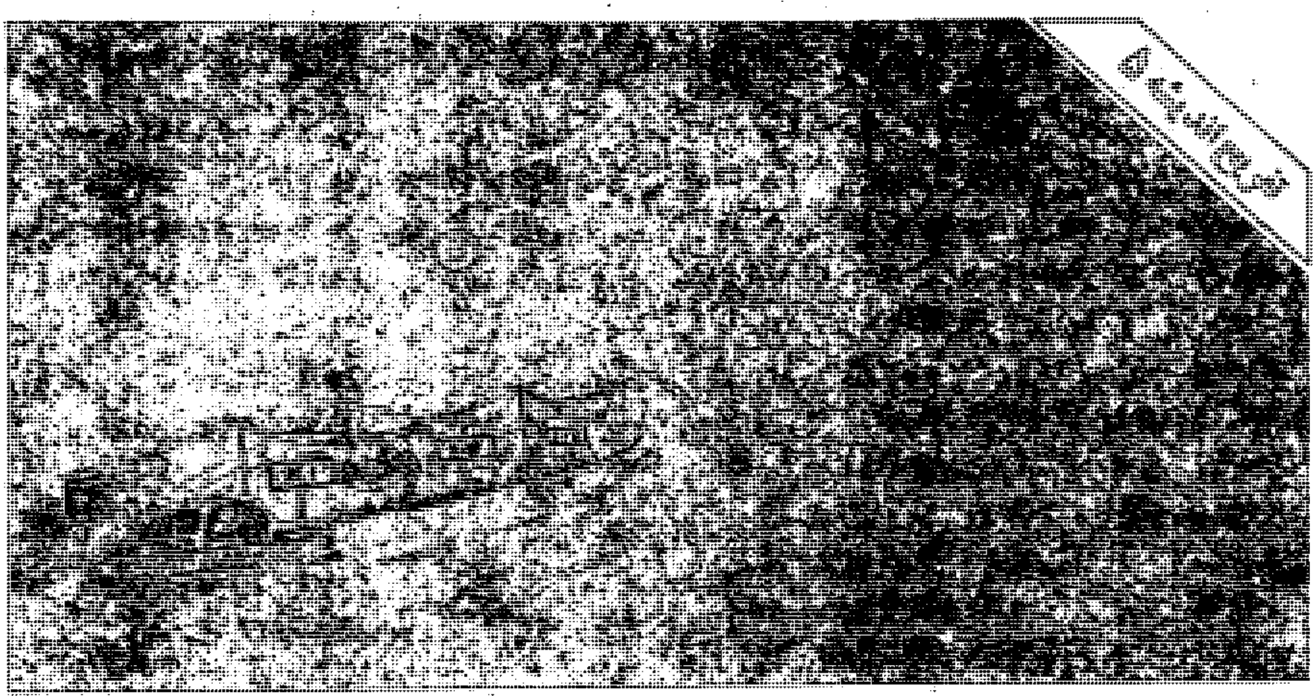
۳. Quadratic Reciprocity Law. نمادهای لژاندری معکوس اعداداول فرد p و q مشمول فرمول $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{[(p-1)/2][(q-1)/2]}$ اند. این قانون، که به قانون تقابل درجهٔ دوم موسوم است، توسط اویلر تنظیم

شد، اما به اثبات نرسید.اولین اثبات کامل آن توسط کارل فردریک گاوس، Karl Friedrich Gauss، در ۱۸۰۱ ارائه شد.

۴. Nontrivial Integer Solution
۵. Lucas
٦. Pyramidal Number
۷. «Tetrahedron = Square»
۸. Watson
۹. Theory of Elliptic Functions
۱۰. Ljunggern
۱۱. Quadratic Field
۱۲. Quartic Field
۱۳. Conjugate Fields
۱۴. Imaginary
۱۵. Number Theoretic Books
۱٦. Mordell
۱۷. Guy
۱۸. Relatively Primes
۱۹. Modulo
۲۰. Natural Numbers
۲۱. Even
۲۲. Odd
۲۳. Congruence
۲۴. Induction
۲۵. Legendre - Jaccobi Symbol

مراجع:

1. E. Lucas, problem 1180, Nouvelle Ann. Math (2)14 (1875), 33.6.
2. G.N. Watson, The problem of the square pyramid, Messenger of Math. 48 (1918/1919), 1 - 22.
3. W. LYUNGGREN, New Solution of a problem proposed by Lucas, Nordisk Mat. Tidskr. 34 (1952), 65 - 72.
4. L. J. MORDELL «Diophantine Equations» Academic press, London, 1969.
5. R.K. Guy, «Unsolved Problems in Number Theory» Springer - Verlag, Berlin / NewYork, 1984.
6. S.P. MOHANTY AND A.M.S. RAMASAMY, the simultaneous diophantine equations. $5y^2-20=x^2$ and $2y^2+1=z^2$.J.Number Theory 18, No.3 (1984), 356 - 359.



طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (٦)

از:

100 Great Problems of Elementary Mathematics

قانون تقابل درجهٔ دوم

(قضیهٔ اویلر[1] ـ لژاندر[2] ـ گاوس[3]) نمادهای لژاندری معکوس اعداد اول فرد p و q مشمول فرمول زیرند:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{[(p-1)/2]\cdot[(q-1)/2]}$$

این قانون، که به قانون تقابل درجهٔ دوم[4] موسوم است، توسط اویلر (*Opuscula analytica*, Petersburg, 1783) تنظیم شد اما به اثبات نرسید. در ۱۷۸۵، لژاندر، همین قانون را مستقل از اویلر کشف و جزئاً اثبات کرد.

اولین اثبات کامل آن توسط کارل فردریک گاوس "karl friedric Gauss" (۱۷۷۷ ـ ۱۸۵۵) در *Disquisitiones Arithmeticae*[5] مشهورش (چاپ شده در ۱۸۰۱)، کتابی که اصول نظریهٔ اعداد[6] معاصر را بنا نهاد، ارائه شد؛ اثر مزبور، با پانصد صفحهٔ به قطع خشتی‌اش، پر از ایده‌های عمیقی بود که توسط گاوس در سن ۲۰ سالگی به رشتهٔ تحریر درآمده بود. کرونکر[7] در این مورد چنین می‌گوید: «اندیشه در این موضوع که چگونه مردی تنها، با سنی چنان اندک توانسته چنین گنجینه‌ای از نتایج را مطرح کند، و بالاتر از آن، چنین بررسی عمیق و سازمان یافته‌ای از دستگاهی کاملاً تازه را ارائه دهد، واقعاً حیرت‌آور است.»

بعدها، گاوس هفت اثبات دیگر برای قضیهٔ تقابل کشف کرد. (اثباتهای گاوس را می‌توان در جلد ۱۴ی، Ostwald 's *Klassiker der exakten Wissenschaften* یافت.)

قانون تقابل درجهٔ دوم یکی از مهمترین قضایای نظریهٔ اعداد است. خود گاوس آن را، «*Theorema fundamentale*[8]» نامیده است. دیکسن[9]، ریاضی‌دان آمریکایی در *Theory of Numbers* اش چنین می‌گوید: «قانون تقابل درجهٔ دوم بدون شک مهمترین وسیله در نظریهٔ اعداد است و در تاریخ آن، از موقعیت مرکزی برخوردار است.»

اهمیت این قانون منجر به این شد که ریاضی‌دانهای دیگری نظیر ژاکوبی[10]، کوشی[11]، لیوویل[12]، کرونکر، شرینگ[13]، و فروبنیوس[14]، پس از گاوس به تحقیق درآن بپردازند و اثباتهایی از آن را ارائه دهند. پ. باخمان[15] در *Niedere Zahlentheorie* اش چیزی ناکمتر از ۵۲ اثبات را نقل می کند و از مهمترین‌شان گزارش می‌دهد.

احتمالاً ساده‌ترین اثباتها اثبات حسابی ـ هندسی[16] زیر است، که از ترکیب لم معروف به لم گاوس[17] (Gauss' *Werke* vol. II, p.51) و ایده‌ای هندسی[18] از کیلی (Arthur Cayley [1821 ـ 1895], *Collected Mathematical Papers*, vol. II) حاصل شده است.

اما، پیش از ورود به خود اثبات، استخراج لم گاوس را به دست می‌دهیم.

فرض می‌کنیم P عددی اول و فرد و D عدد صحیحی باشد که بر

P بخش‌پذیر نیست. اگر x یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ...، $P = (P-1)/2$، R_x ماندهٔ مشترک[19] تقسیم[20] D_x / P، g_x خارج قسمت صحیح[21] متناظر آن را نمایش دهد، آنگاه:

$$D_x = R_x + g_x P \qquad (1)$$

بنابراین چون R_x کوچکتر یا بزرگتر از $\frac{1}{2}P$ باشد، $R_x = \rho_x$ یا $R_x = \rho_x + P$ را قرار می‌دهیم، که در حالت دوم آن، ρ_x ماندهٔ مینیمم منفی[22] تقسیم Dx / P را نمایش می‌دهد، و به‌دست می‌آوریم:

$$Dx = \rho_x + g_x P \qquad (1a)$$

$$Dx = \rho_x + p + g_x P \qquad (1b)$$

در این صورت، اگر n تعداد مانده‌های مینیمم منفی رخ دهنده در تقسیم Dx / P (به ازای $x = 1, 2, 3, ..., P$) باشد، n معادله به‌صورت $(1b)$ و $m = P - n$ معادله به‌صورت $(1a)$ داریم.

معادلات فوق را به همنهشتیهایی[23] به پیمانهٔ p تبدیل می‌کنیم و P همنهشتی زیر را به دست می‌آوریم:

$$Dx \equiv \rho_x \bmod p$$

اکنون P ماندهٔ ρ_x، جز درمورد علامت[24] و دنباله[25]، با P عدد ۱ تا P تطبیق می‌کنند.

[به عنوان مثال، اگر ρ_r، به ازای دو مقدار متفاوت r و s از x، برابر ρ_s یا $-\rho_s$ باشد، $\rho_r = -\rho_s$، آنگاه $Dr \equiv \rho_r$ و $Ds \equiv \rho_s$، به ترتیب، با تفریق[26] یا جمع[27]، $D(r \mp s) \equiv 0 \bmod P$ را به دست خواهند داد. این همنهشتی، اما، غیر ممکن است، زیرا نه D، نه $r \mp s$ بر P بخش‌پذیر است.]

ضرب P همنهشتی (۲) منجر به

$$D^P P! \equiv (-1)^n P! \bmod P$$

می‌شود که از آن به دست می‌آوریم:

$$D^P \equiv (-1)^n \bmod p$$

اما از آن‌جا که، طبق قضیهٔ اویلر[28]،

$$D^P \equiv \left(\frac{D}{p}\right) \bmod p$$

به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{D}{p}\right) \equiv (-1)^n \bmod p$$

و از آن، از آن‌جا که هر دو طرف این همنهشتی دارای قدر مطلق[29] ۱ است،

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^n \qquad (3)$$

این فرمول، که n آن، تعداد مانده‌های می‌نیمم منفی حاصل از تقسیم Dx / p ($x = 1, 2, 3, ..., p$) را نمایش می‌دهد، لم گاوس است.

اکنون فرض می‌کنیم که D عدد اول و فرد qای که با p متفاوت است باشد. P معادلهٔ $(1a)$ و $(1b)$ را به همنهشتیهایی به پیمانهٔ ۲ تبدیل کرده، تمام مضارب[30] اضافی ۲، یعنی $(q-1)x$ را کنار می‌گذاریم، و به دست می‌آوریم:

$$x \equiv \rho_x + g_x \bmod 2 \quad \text{و} \quad x \equiv 1 + \rho_x + g_x \bmod 2$$

جمع P همنهشتی فوق می‌دهد:

$$\Sigma x \equiv n + \Sigma\rho_x + \Sigma g_x \bmod 2$$

اما از آن‌جا که قدر مطلقهای P_x با اعداد ۱ تا P در مطابقت‌اند و به جای هر جمعوند[31]، می‌توان مقدار مقابل[32] آن را در همنهشتی‌ای به پیمانهٔ ۲ قرار داد، در همنهشتی به دست آمده Σ_x را به جای $\Sigma \rho_x$ و $-n$ را به جای n قرار داده، به دست می‌آوریم:

$$\Sigma x + n \equiv \Sigma x + \Sigma g_x \bmod 2$$

یا

$$n \equiv \Sigma g_x \bmod 2 \qquad (4)$$

اکنون، بنابه (۴) می‌توانیم (۳) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\Sigma g_x}$$

اما g_x بزرگترین عدد صحیح مشمول در خارج قسمت qx / p است. اگر آن را به صورت $[qx / p]$ مشخص کنیم، در آخر به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\Sigma[qx/p]} \qquad (I)$$

که در آن x، جمیع اعداد صحیح از ۱ تا $(p - 1)/2 = p$ را می‌پذیرد.

بنابراین

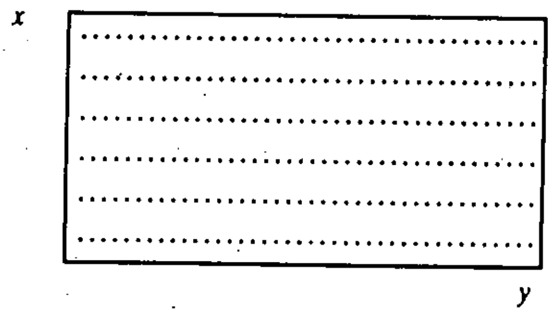
$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\Sigma[py/q]} \qquad (II)$$

که y آن، جمیع اعداد صحیح ۱ تا $(q - 1)/2 = q$ را می‌پذیرد.

ضرب (I) و (II) می‌دهد:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\Sigma[(q/p)x] + \Sigma[(p/q)y]} \qquad (III)$$

نمای عبارت سمت راست، ساده یاب است.



در دستگاه مختصات قائم[33] xy، مستطیل[34] با چهار زاویهٔ[35]

$$0|0 \;,\; \frac{p}{2}|0 \;,\; \frac{p}{2}|\frac{q}{2} \;,\; 0|\frac{q}{2}$$

را رسم و آن را با قطر[36] d، گذرنده از مبدأ[37]، دارای معادلهٔ $y = (qx/p)$ نصف می‌کنیم، آنگاه جمیع نقاط شبکه‌ای[38] داخل مستطیل مزبور را مشخص می‌کنیم. (به شکل، که در آن $p = 19$، $q = 11$ است، رجوع کنید.)

درآغازکار، واضح است که هیچ نقطهٔ شبکه‌ای نشان شدهٔ $x|y$ ی بر d قرار ندارد، زیرا در این صورت، x لزوماً کمتر از $\frac{1}{2}p$ و $y < \frac{1}{2}q$ می‌شود که شرط $y/x = q/p$ را نقض می‌کند.

به ازای طول درست[39] x، عرض[40] متناظر d عبارت است از $y = (qx/p)$ و تعداد نقاط شبکه‌ای نشان شدهٔ واقع بر این عرض $[qx/p]$ است. در نتیجه، تعداد نقاط نشان شدهٔ واقع در نیمهٔ پایین مستطیل مزبور $\Sigma[qx/p]$ است، که x آن جمیع اعداد صحیح ۱ تا P را قبول می‌کند.

به همین ترتیب، تعداد جمیع نقاط شبکه‌ای نشان شدهٔ واقع در نیمهٔ بالای مستطیلمان $\Sigma[py/q]$ است، که y آن جمیع اعداد صحیح ۱ تا q را می‌پذیرد.

در این صورت، نمای ظاهر در (III) تعداد جمیع نقاط شبکه‌ای نشان شدهٔ در مستطیلمان است. این تعداد کلاً $p.q$ عنصر است. نتیجتاً:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{pq}$$

یا

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{[(p-1)/2] \cdot [(q-1)/2]}$$

فهوالمطلوب.

***

یادداشتها

۱. لئونارد اویلر (۱۷۸۳ ـ ۱۷۵۷) ریاضیدان سوئدی در تمام طول تاریخ ریاضیات، بیش از هر فرد دیگری مطالب جدید به‌وجود آورده است. دربارهٔ او گفته‌اند که: وی به همان آسانی که آدمی نفس می‌کشد و عقاب در آسمان پرواز می‌کند، به محاسبه می‌پردازد. هفده سال نابینایی کامل او در پایان عمر، نه‌تنها موجب رکودش نشد، که قدرت ادراک او را در جهان داخلی تصوراتش شدت بخشید. مجموع آثار او به بیش از ۹۰ مجله عظیم می‌رسد. جالب این است که اویلر، بیشتر به خاطر نمادهایی که معرفی یا همگانی کرده، معروف شده است. علائم اساسی π، e، i نماد مجموع Σ و نماد استاندارد تابع، $f(x)$، در میان کارهای او در زبان ریاضیات است. از آثار برجستهٔ اویلر که به حق از آن مغرور بود، یکی این است که:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

۲. آدرین ماری لژاندر (۱۸۳۳ ـ ۱۷۵۲) ریاضی‌دان فرانسوی معاصر با انقلاب کبیر فرانسه. وی در قرن نوزدهم به‌خاطر کتاب درسی هندسه‌اش که «کارسرهٔ اقلیدسی‌ای بود»، بسیار معروف بود. از جملهٔ کارهای وی چند جمله‌ایهای معروف لژاندر، است که در میان مهمترین توابع خاص قرار دارند. اثر اساسی وی در ارتباط بسیار با حساب دیفرانسیل وانتگرال است، وی انتگرالهای بیضوی را به صورتهای استانداردشان رده بندی کرد.

۳. کـــارل فـردریک گــاوس، Karl Friedrich Gauss، (۱۸۵۵-۱۷۷۷) ریاضی‌دان آلمانی این حق را دارد که بزرگترین مقام ریاضی‌دانهای محض در نظر گرفته شود. او سهم عظیمی در بسیاری از قسمتهای دیگر ریاضیات و فیزیک داشت. اثبات هر دو قضیهٔ اساسی حساب و جبرکار اوست.

۴. Quadratic Reciprocity Law

۵. کتابی است که گاوس در سن ۲۴ سالگی در تجسسات حسابی‌اش به چاپ رساند. کتابی که می‌باید تأثیری عمیق بر نظریهٔ اعداد داشته باشد.

۶. Number Theory

۷. لئوپولدکرونکر در ۱۸۲۳ در لیگ نیتز پرویس در خانواده‌ای یهودی و صاحب مکنت متولد شد، و البته جز تخصص در معاملات ـ که بعدها به نفع ریاضیات هم از امور مالی کناره جست و هم سیاست را ترک گفت ـ عشقی مفرط به فلسفه را از پدرش به میراث برد. غالباً اظهار می‌داشت که موسیقی زیباترین هنرهاست، شاید به استثنای ریاضیات که وی آن را به شعر تشبیه می‌کرد. کومر، کرونکر و ددکنید با اختراع تئوری جدید اعداد جبری که حیطهٔ عمل ریاضیات را بی‌نهایت بار افزایش داد و معادلات جبری را در خطهٔ اعداد وارد کرد، برای حساب عالی و تئوری معادلات جبری همان کاری را انجام دادند، که گاوس، لباچفسکی، یوهان بولیه و رهان با خلاص کردن هندسه از قید عبودیت دستگاه محدود اقلیدسی دربارهٔ این دانش انجام دادند. کرونکر در ۱۸۴۵، در بیست و دو سالگی با رد مسأله‌ای تحت عنوان De Unitatibus Complexis (درباره آحاد مطلق) که عبارت از آحاد حوزه‌های جبری مخصوصی بود که از مسألهٔ گاوس دربارهٔ تقسیم محیط دایره به n قسمت متساوی سرچشمه می‌گرفت، دکتر در فلسفه شد. شاید برخی کسان درصدد برآیند مبدأ شک و تردید کرونکر را در ریاضیات، در مطالعات عمیق او در زمینهٔ فلسفه و بخصوص فلسفه هگل جست و جو کنند، با این‌حال مابین برخی از شک و تردیدهای عصر حاضر دربارهٔ ثبات خود به خود ریاضیات و نازک کاریهای دستگاه هگل شباهتی عجیب و خیره کننده وجود دارد.

وی سالیان سال بدون کرسی رسمی استادی در دانشگاه برلین به تدریس پرداخت و تنها پس از بازنشستگی کومر در ۱۸۸۳ کرسی استادی را پذیرفت. کارهای اصلی کرونکر عبارت است از توابع بیضوی، نظریهٔ ایده آلها، و حساب صورتهای درجهٔ دوم. سلسله درسهای چاپ شدهٔ او دربارهٔ نظریهٔ اعداد توصیفهای دقیقی از کشفیات خود و پیشینیان است و به روشنی اعتقاد وی را به حسابی سازی ریاضیات نشان می‌دهد. به‌نظر او ریاضیات باید براساس عدد، و عدد باید برپایهٔ عدد طبیعی بنا شود. از گفته‌های اوست: «اعداد صحیح را خداوند ساخته، مابقی کار بشر است.»

کرونکر در دسامبر ۱۸۹۱ در برلین بر اثر عارضهٔ ذات‌الریه درگذشت.

۸. قضیهٔ اساسی

۹. Dickson

۱۰. Jacobi

۱۱. Cauchy

۱۲. Liouville

۱۳. Schering

۱۴. Frobenius

۱۵. P. Bachmann

۱۶. Arithmetic - Geometric Proof

۱۷. Lemma of Gauss

۱۸. Geometric Idea

۱۹. Common Residue

۲۰. Division

۲۱. Integral Quotient

۲۲. Negative Minimum Residue

۲۳. Congruencies

۲۴. Sign

۲۵. Sequence

۲۶. Subtraction

۲۷. Addition

۲۸. قضیهٔ عدد اول فرما ـ اویلر به صورت زیر است: هر عدد اول به صورت ۱ + 4n را می‌توان تنها به یک روش به صورت مجموع دو مربع نمایش داد.

۲۹. Absolute Value

۳۰. Multiplies

۳۱. Summand

۳۲. Opposite Value

۳۳. System of Rectangular Coordinates

۳۴. Rectangle

۳۵. Angle

۳۶. Diagonal

۳۷. Origin

۳۸. Lattice Points

۳۹. Integral Abscissa

۴۰. Ordinate

تحقیقی پیرامون عدد پی π*

● احسان رضایی (دوم ریاضی دبیرستان کمال تهران)

کامپیوتر

یکی از معروفترین ثابتهای ریاضی π (از حروف یونانی) می‌باشد. این ثابت در بسیاری از روابط مشهور ریاضی به کار می‌رود مانند:

(محیط دایره) $C = ۲\pi r$ ، (مساحت دایره) $S = \pi r^۲$ ، (حجم کره)

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

نخستین و قدیمی‌ترین تعریف دربارهٔ π عبارت بود از «نسبت محیط دایره به قطرش[1]» امّا این ثابت بسیار پیچیده‌تر از آن است که تعریفش نشان می‌دهد. مشکل می‌توان π را محاسبه کرد زیرا غیرممکن است که بتوان هم قطر و هم محیط دایره را به‌صورت عدد صحیح یا کسر محاسبه کرد. بنابراین π را نمی‌توان به صورت عدد صحیح یا کسر بیان کرد. از این رو π را جزو اعداد گنگ (اصم) می‌خوانند.

دربارهٔ وجه نامگذاری این عدد باید گفت که نماد π برای نسبت محیط دایره به قطر آن، از اوایل قرن هیجدهم[2] به کار رفته است و به این مناسبت است که واژهٔ محیط در زبان یونانی با π شروع می‌شود. قدیمی‌ترین سابقهٔ تاریخی در مورد عدد π پاپیروسی است که اکنون در مسکو نگهداری می‌شود. در این سند محاسبهٔ محیط دایره به‌وسیلهٔ مصریان ارائه شده‌است. به موجب این سند این عدد برابر با ۳ می‌باشد. در محاسبات بابلیان نیز این مقدار مساوی با ۳ فرض شده‌است. احتمالاً مردمان آن زمان این نسبت را از کوششهای تجربی نتیجه گرفته‌اند و مبنای دقیق علمی نداشته است.

برروی پاپیروس دیگری که متعلّق به ۱۷۰۰ سال پیش‌از میلاد است، مصریان مساحت دایره را اینچنین محاسبه کرده‌اند:

$$S = (d - \frac{۱}{۹}d)^۲$$

که در آن S مساحت و d قطر دایره است. اگر به‌جای d، ۲r را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$S = \frac{۲۵۶}{۸۱}r^۲$$

بنابراین مصریان باستان π را برابر با $\frac{۲۵۶}{۸۱}$ می‌دانستند که مساوی است با ...۳/۱۶۰۵۰، که با مقدار صحیح آن ۲٪ اختلاف دارد.

ریاضی‌دان و دانشمند باستان ارشمیدس (۲۱۲ - ۲۸۷ پیش از میلاد) به کمکِ شکلهای هندسی، π را بیش‌از $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ و $۳\frac{۱۰}{۷۰}$ برآورد کرد که اگر بخواهیم آن‌را به اعشار تبدیل کنیم باید π بین ...۳/۱۴۰۸۴۵ و ...۳/۱۴۲۸۵۷ باشد.

در چین باستان، π را چوانگ‌هونگ به سال ۱۲۵ میلادی چنین محاسبه کرد:

$$\pi = \sqrt{۱۰} = ۳/۱۶۲\ \ldots,$$

سپس ونگ فن درسال ۲۶۵ π را چنین برآورد کرد:

$$\pi = \frac{۱۴۲}{۴۵} = ۳/۱۵۵۵\ \ldots,$$

وچونگ چیک به سال ۴۷۰ کسر دیگری رابرای محاسبهٔ π معرفی کرد:

$$\pi = \frac{۳۵۵}{۱۱۳} = ۳/۱۴۱۵۹۲۹$$

که شش رقم اعشار آن درست است.

چنین کوششهایی برای پیداکردن مقدار π نمایانگر این مطلب بود که π کاملاً ناشناخته مانده‌است.

غیاث‌الدین جمشیدکاشانی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی و کاشف نمادهای اعشاری[3]، برای نخستین بار در کتاب «رسالهٔ محیطیه» مقدار π را تاهفده رقم اعشار چنین به‌دست آورد:

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۵$$

که تنها رقم هفدهم اعشار آن نادرست می‌باشد.

شماره حروف	تلفظ	لاتین	حروف کوچک	حروف بزرگ
۱	آلفا	alpha	α	A
۲	بتا	beta	β	B
۳	گاما	gamma	γ	Γ
۴	دلتا	delta	δ	Δ
۵	اپسیلن	epsilonn	ε	E
۶	زتا	dzeta	ζ	Z
۷	اتا	eta	η	H
۸	تتا	theta	θ	
۹	یوتا	iota		I
۱۰	کاپا	kappa	κ	K
۱۱	لامبدا	lambda	λ	Λ
۱۲	مو	mu	μ	M
۱۳	نو	nu	ν	N
۱۴	کسی	ksi	ξ	Ξ
۱۵	امیکرون	omicronn	o	O
۱۶	پی	pi	π	Π
۱۷	رو	ro	ρ	P
۱۸	سیگما (زیگما)	sigma	σ	Σ
۱۹	تو	tou	τ	T
۲۰	اپسیلن	upsilonn	r	V
۲۱	فی	phi	ϕ	Φ
۲۲	خی	khi		X
۲۳	پسی (پسای)	psi		Ψ
۲۴	امگا	omega	ω	Ω

درسال ۱۵۸۵ «تیکوبراهه» منجم معروف دانمارکی در محاسبات خود به عدد $\pi = 3/1409$ رسید.

مقارن همین اوقات «فرانسوا ویت» ریاضی‌دان معروف فرانسوی به کمک ۳۹۳۲۱۶ ضلعی منتظم مقدار π را تا ۹ رقم اعشار حساب کرد. درسال ۱۵۹۲، ریاضی‌دان فرانسوی «ویتا» π را چنین برآورد کرد:

$$\pi = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\dots}\right)$$

به سال ۱۶۵۵ «جان والیس» ریاضی‌دانِ انگلیسی شکل ساده‌تری برای π ارائه داد، بدین شکل:

$$^{4}\pi = 4\left(\frac{2^2\times4^2\times8^2\times10^2\times12^2\times\dots}{3^2\times5^2\times7^2\times9^2\times11^2\times\dots}\right)$$

ولی قبل از او، «آندریاس رومانوس» به سال ۱۵۹۷ با کمک کثیرالاضلاع منتظم $2^{24}\times5\times3$ ضلعی مقدار π را تا ۱۵ رقم اعشار تقریب به‌دست آورد. همچنین، «لودلف» دانشمند آلمانی در سالهای ۱۶۱۵ و ۱۶۲۱ بااستفاده از $2^{35}\times5\times3$ ضلعی و 2^{65} ضلعی منتظم مقدار π را در دفعهٔ اوّل تا ۲۰ رقم و در نوبت دیگر تا ۳۵ رقم محاسبه نمود.[5]

به سال ۱۶۵۸، «ویلیام برونکر» ریاضی‌دان ایرلندی مقدار π را چنین محاسبه کرد:

$$\pi = 4\times\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\dots}}}}}}$$

ساده‌ترین عبارت برای π را «لایب نیتز» ریاضی‌دان آلمانی درسال ۱۷۰۸ ارائه داد:

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\dots\right)$$

در سال ۱۷۱۷ «آبراهام شارپ» ریاضی‌دان انگلیسی، رشته زیر را برای محاسبهٔ π تا ۷۲ رقم اعشار به‌کاربرد:

$$\pi = 6\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(1-\frac{1}{3\times3}+\frac{1}{3^2\times5}-\frac{1}{3^3\times7}+\frac{1}{3^4\times9}-\frac{1}{3^5\times11}+\dots\right)$$

به سال ۱۸۷۳ ، ویلیام شانکز، ریاضی‌دان انگلیسی، مقدار π را تا ۷۰۷ رقم اعشار محاسبه کرد. این عدد در قصر اکتشافات پاریس در غرفهٔ مربوط به علوم ریاضی به صورت نواری دور تا دور تالار نوشته شده‌است. سپس به سال ۱۹۴۸ «جان فرنچ» از آمریکا و «فرگوسن» از انگلستان به اتفاق مقدار π را تا ۸۰۸ رقم اعشار محاسبه کردند. آنها خطاهای چندی را در محاسبهٔ شانکز یافتند. این خطاها از رقم ۵۲۸ اعشار شروع می‌شد. در ژانویه سال ۱۹۵۰ ، مقدار π را تا ۲۰۰۰ رقم اعشار محاسبه کردند، این کار توسط کامپیوتر انجام شد. و در سال ۱۹۵۴ بااستفاده از حسابگرهای الکترونیکی بیش از ۳۰۰۰ رقم اعشار π را تعیین کردند.

در زبانهای مختلف شعرها و متن‌هایی گفته‌اند که با شمارش کلمات و حروف آن رقم‌هایی از π مشخص می‌شود و برای به‌خاطر سپردن این عدد بسیار مفید است[۶]. قدیمی‌ترین شعر موجود در این زمینه به زبان فرانسه سروده شده‌است که شمارش ارقام آن π را تا سی رقم اعشار نمایش می‌دهد.[۷]

در زبان فارسی نیز اشعاری در این مورد سروده شده‌است من جمله شعر زیر که π را تا ده رقم اعشار نمایان می‌کند:

گر کسی از تو بپرسد ره آموختن π

پاسخی ده که خردمند ترا آموزد:

«خرد و بینش و آگاهی دانشمندان

۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹

ره سرمنزل توفیق بما آموزد.»

۲ ۶ ۵ ۳ ۵

و نمونهٔ ساده‌تری که بین دانش‌آموزان مرسوم است این است: «۳ و ۱ می‌شود ۴ و ۱ می‌شود ۵ .»

در اینجا ما مقدار π را تا ۳۰ رقم اعشار ($\frac{۱}{۱۰^{۳۰}}$ دقت) ارائه می‌دهیم:

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹...$$

«پایان»

* موقعیت π درجدول حروف الفبای یونانی

پاورقیها:

۱ـ بعدها بقراط دانشمند بزرگ یونانی که درصدهٔ پنجم پیش‌از میلاد می‌زیست π را «نسبت مساحت دایره به مجذور شعاع آن» معرفی کرد.

۲ـ کلیهٔ سالهای آورده‌شده دراین مقاله‌برمبنای میلادحضرت مسیح(ع) است.

۳ـ غیاث‌الدین درکاشان متولد شد. دوران فعالیت علمی‌اش درقرنهای هفتم و هشتم هجری (قرنهای ۱۳ و ۱۴ میلادی) است. کاشانی همراه باتنظیم جدولهای مثلثاتی راه بسیار دقیقی برای محاسبهٔ سینوس زاویهٔ یک درجه بادانستن سینوس زاویهٔ سه درجه ارائه کرد. از کاشانی آثار چندی باقی‌مانده که از جملهٔ آنها کتاب «مفتاح الحساب» است. در این کتاب است که وی از کسرهای اعشاری سخن به میان آورده است.

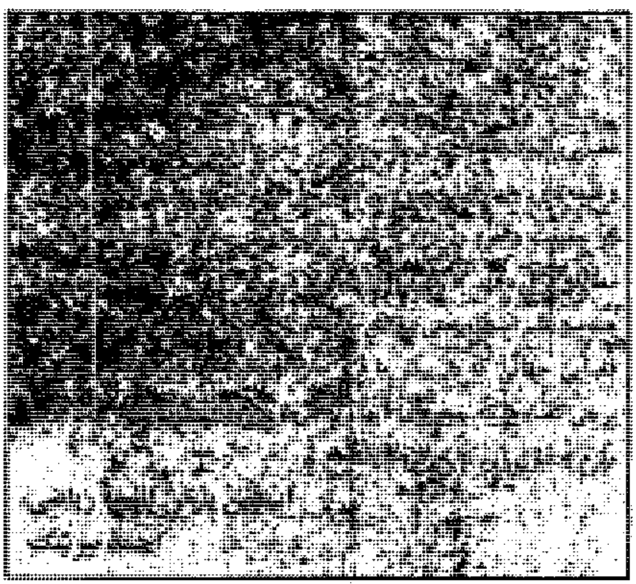
۴ـ توجّه کنید که در اینجا اعداد زوج در صورت و اعداد فرد در مخرج آورده شده‌اند.

۵ـ به همین جهت است که در آلمان π را لودلف می‌خوانند.

۶ـ از آنجاکه رقم سی ودوّم اعشار π صفر است این اعشار تا سی‌ویک رقم اعشار بیشتر به‌دست نمی‌آید.

۷ـ این متن چنین است:

«Que J'aime à faire apprendre un nomber Utile
auxsages Immortel Archimède, artiste, ingenieur
Qui de ton jugement peut priser La Valeur?
Pour moi ton problème est de pareils avantages»



جواب نامه‌ها

آقای محمد رضا ذکایی سال چهارم ریاضی (خوی)

ضمن عرض سلام و تشکر متقابل برای ارسال مسائل حل شده شما به اطلاع می‌رسانیم که مسائل ارسال شدهٔ شما بیشتر مورد استفاده دانش‌آموزان علاقه‌مند و المپیاد ریاضی است که جزو اهداف فعلی مجلهٔ دانش‌آموزی برهان نمی‌باشد. بنابراین سعی کنید مسائل را در سطح مجله ارائه دهید.

آقای اکبر شمسی (آذربایجان غربی)

ضمن تشکر از شما باید به عرض برسانیم که متأسفانه روش اثباتی که در مورد قضیهٔ فرما ارائه داده‌اید در هیچ حالت صحیح نیست. زیرا شما فرض کرده‌اید که $z = x + y$ و $y = x + z$ و $x = z + y$ که از این سه شرط حاصل می‌شود: $x = 0$ و $y = 0$ و $z = 0$ که جوابهای صفر از نظر تئوری اعداد بیهوده می‌باشند و در نتیجه به عنوان جواب مطلوبی برای معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ محسوب نمی‌شوند و جوابها باید شرط $xyz \neq 0$ را دارا باشند.

آقای اسداله نصیری (فارس)

پس از سلام به عرض می‌رسانیم که مجلهٔ برهان از پاسخ به مسائل خصوصی معذور است.

آقای محمد رضا اسماعیلی خدابنده

با تشکر از مسائل ارسالی شما، امید است که از آنان در جای مناسب استفاده شود.

آقای حسین اصلانی دانش‌آموز سال سوم (تبریز)

ضمن تشکر از مقالات ارسالی شما، باید به عرض برسانیم که مقالات ارسالی شما در غالب یک مسأله است. در صورت تمایل آن را به صورت یک مسئله بیان کنید و برای ما بفرستید.

آقای عبدالحمید معصومی (خوانسار)

ضمن تشکر و سپاس از مقالهٔ شما تحت عنوان «محاسبهٔ عدد π» به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان چاپ آن در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب به وجود آید. در انتظار مسائل (همراه با حل) و مقالات بعدی شما هستیم. موفق و پیروز باشید.

آقای علی بهرامی‌زاده دانش‌آموز سال سوم ریاضی (نیشابور)

ضمن سلام و تشکر ازمقالات ارسالی شما تحت عناوین «فهم و دقت در ریاضی» و «گزاره‌ها و قوانین آن» باید به عرض برسانیم که مقالهٔ اول شما حاوی چند تذکر به ریاضی خوانهای بی‌توجه است و باید توجه داشته باشید که مواردی راکه شما اشاره کرده‌اید جامع نیست زیرا بیان اصطلاحات و تعاریف نیز، با شرط درستی آنان تابع قیدوبند نیست و سلیقه‌ای می‌باشد. به‌عنوان مثال همان طور که خودتان نیز اشاره کرده‌اید در کتابهای دکتر مصاحب، عباراتی سلیقه‌ای مانند: ازبا، تابا و بازه و... را مشاهده می‌کنیم که شاید در کتابهای دیگر نظیر این نوع اصطلاحات راکمتر ببینیم. همچنین ارائهٔ یک تعریف ریاضی از نظر لفظی و یا جهات دیگر متفاوت است. مقالهٔ دوم شما نیز بسیار مختصر می‌باشد و در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد. در هر صورت توجه شما تحسین‌آمیز است و امید است با به کارگیری این توجهات (که لازمهٔ هر ابتکار و نوآوری است) ما را با ارائه مقالات دیگری در زمینه‌های مختلف ریاضی بهره‌مند سازید.

آقای عبدالرضا حیدری دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (یزد)

با تشکر از مسئله حل شدهٔ ارسالی شما، امید است مسائل مطلوبتری را طرح و حل نمایید تا آنان را مورد استفادهٔ دانش‌آموزان علاقمند قرار دهیم.

آقای کیوان حاجی بیگ‌زاده دانش‌آموز سال سوم ریاضی (خوی)

ضمن تشکر ازشما برای ارسال مسائل حل شده به عرض می‌رسانیم که ارسال حل مسائل مجله به جز مسائل مسابقه‌ای لزومی ندارد و فقط برای ارسال حل کامل و صحیح مسائل سابقه‌ای در زمان مقرر شده جوایزی اهدا خواهد شد.

آقای وحید فرشاد دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (تبریز)

ضمن تشکر از ارسال مسائل حل شدهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که در شماره‌های آینده از سائل شما استفاده خواهیم کرد. در انتظار مسائل (همراه با حل) بعدی شما باهمین کیفیت هستیم. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند منان خواستاریم.

آقای حسن جعفریه (تهران)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی حل شدهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که امید است در آینده از آنان استفاده کنیم.

آقای ناصر آذری دانش‌آموز سال سوم ریاضی (مازندران)

ضمن تشکر از ارسال حل برخی از مسائل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید پس از حل مسائل مقطع مربوطه مندرج در مجله، به طرح و حل مسائلی جدید و متنوع و قابل استفادهٔ دانش‌آموزان بپردازید و در صورت امکان آن را ارسال دارید. تا پس از تأیید در یکی از شماره‌های مجله آن را به نام خودتان به چاپ برسانیم.

آقای حسن عطاردی دانش‌آموز سال چهارم تجربی (گناباد)

ضمن تشکر از ارسال تستهای حل شدهٔ شما، به عرض می‌رسانیم که سعی کنید تست یا مسائل ارسالی شما بیشتر توسط خودتان طراحی شود که در این صورت مطمئناً" از سطح مطلوبتری برخوردار خواهد بود.

آقای سبزرو دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (تهران)

با تشکر از شما برای ارسال راه حلی دیگر برای مسألهٔ استاد هشترودی و طرح و حل یک مسأله، موفقیت روزافزون شما و سایر دانش‌آموزان علاقه‌مند و مستعد به ریاضی را از خداوند منان خواستاریم.

آقای علیرضا آسیابانی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (شهر قدس)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل را در سطح جامعتری انتخاب و یا طراحی کنید، تا بتوان مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار داد. به این نکته نیز توجه داشته باشید که روشهای به کار گرفته شده درحل مسائل باید مربوط به همان مقطع تحصیلی شود.

آقای احسان پولادی دانش‌آموز سال دوم دبیرستان (قوچان)

ضمن تشکر از نامهٔ شما و ارسال یک مسألهٔ حل شده، باید به عرض برسانیم که پاسخ به سؤالات، جزو اهداف مجله نیست و به عنوان راهنمایی می‌توانیم کتاب بازآموزی هندسه را به شما معرفی کنیم که اثبات مسئله معروف مربوط به نیمساز را در آن مشاهده خواهید کرد.

آقای سعید عقلی دانش‌آموز چهارم ریاضی (یزد)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسائلی همراه با حل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید طرح و حل مسائل بیشتر از خودتان باشد و تکراری نیز نباشد و همچنین در سطح مطلوبتری ارائه شود تا مورد استفاده دانش‌آموزان دبیرستان واقع شود.

آقای پوریا پوریحیی (رشت)

ضمن تشکر از شما برای ارسال دو مسألهٔ حل شده به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در شماره‌های آیندهٔ مجله به وجود آید.

آقایان محمد رضا و علیرضا یمقانی (تهران)

ضمن تشکر از شما برای ارسال حل یکی از مسائل مسابقه‌ای و حل برخی از مسائل و تستهای مجله (البته صرفه‌نظر از اشکالاتی که در حل برخی از آنان موجود بود) به عرض می‌رسانیم که ارسال حل مسائل و تستهای مجله لزومی ندارد و فقط حل مسائل مسابقه‌ای را ارائه دهید.

آقای حیدر ذبیحی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی

ضمن تشکر از ارسال نامهٔ شما باید به عرض برسانیم که قسمت جدیدی که تحت عنوان «آموزش ترجمهٔ متون ریاضی» باز شده است با توجه به این نیاز است که هر دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی لااقل با برخی از لغات و اصطلاحات اساسی که در مقطع دانشگاه نیز با آنان روبه‌رو خواهد شد آشنا شود و همچنین درمقطع فعلی نیز بتواند از منابع غنی ریاضی که اکثراً به زبان لاتین می‌باشند به سادگی استفاده کند. زیرا ترجمهٔ متون با به‌کارگیری واژه‌نامه آن قدر هم که شما نظر داده‌اید کار آسانی نیست و حتی ترجمهٔ چند سطر که محتوی چند لغت جدید و اصطلاح ریاضی باشد از یک دانش‌آموز مبتدی وقت زیادی را طلب می‌کند، چه رسد به ترجمهٔ یک متن کامل ریاضی که حاوی لغات و اصطلاحات فراوان ریاضی باشد. دیگر این‌که ذکر منابع و مآخذ برای یک مقاله هرچه‌قدر هم که زیاد باشد، مفید است، زیرا خواننده را برای رسیدن به چشمه‌های اصلی مطلب هدایت می‌کند.

آقای وحید آئین دانش‌آموز سال چهارم ریاضی (خوی)

ضمن تشکر از شما برای ارسال چند مسألهٔ حل شده، در جواب نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که به طور کلی لازمهٔ پیشرفت و خلاقیت و ابتکار در هر رشتهٔ از علوم استعداد و تحقیق و پشتکار است که آن هم ناشی از میل و علاقهٔ درونی شخص به آن رشتهٔ می‌باشد. بنابراین واقعیتها چنین حکم می‌کنند که انسان رشته‌ای را باید دنبال کند که با استعداد و میل درونی او انطباق داشته باشد. در این جا دیگر شما می‌توانید با توجه به معیارهای اساسی و نه معیارهای کاذبی مانند سرزنش دوستان یا مقدار درآمد و یا... به رشتهٔ مورد علاقهٔ خود که به گفتهٔ خودتان رشته ریاضی است قدم نهید تا پس از ارائهٔ نتایج پژوهشها و ابداعات جدید ریاضی به ارضای درونی خویش نایل شوید.

آقایان حنیف بیات موحد و امید کاویانی‌پور دانش‌آموزان مرکز آموزشی علامه حلی (تهران)

ضمن تشکر از شما برای تلاش و کوشش و ابتکاری که برای حل یکی از مسائل هندسه مندرج در مجلهٔ دانش‌آموزی برهان ارائه داده‌اید، موفقیت و پیروزی هر چه بیشتر شما را از خداوند منان خواستاریم.

ادب ریاضی

ارسطو میان بدیهیات [Axioms] (که مشترک میان تمام علوم است) یا اصول موضوعه [Postulates] (مربوط به فردفرد علوم) تفاوت گذاشته است. مثالهایی از بدیهیات یا علوم متعارفه [Coinaiennoiai] که ارسطو آورده، چنین است: «قانون نفی حد وسط» (هر چیز باید تصدیق شود یا مورد انکار قرار گیرد)، «قانون تناقض» (یک شئ نمی‌تواند در آن واحد هم باشد و هم نباشد)، و «چون از دو چیز مساوی برداشته شود، باز باقیمانده‌ها مساوی یکدیگر است». تعریفات باید خوب فهم شود؛ و البته تعریف شئ ضرورت ندارد که وجود یا عدم شئ را اثبات کند. در حساب باید آحاد یا موناد‌ها [Monads] و در هندسه نقطه و خط فرض شود، ولی در مورد اشیای پیچیده‌تر مانند مثلث و مماس باید وجودشان را اثبات کنند و بهترین راه اثبات این است که عملاً آنها را بسازند. بزرگترین خدمت ارسطو به ریاضیات، بحثی است که وی با کمال احتیاط دربارهٔ پیوستگی و لانهایت کرده است، و در مورد لانهایت گفته است که بالقوه وجود دارد و بالفعل موجود نیست.

جورج سارتون. تاریخ علم

احمد آرام

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ٦

۱- ثابت کنید برای $n > 4$ ، $(1234321)_n$ و $(44100)_n$ مربع کامل‌اند و نشان‌دهید $(12543)_n$ بر $(111)_n$ و $(113)_n$ بخش‌پذیر است.

حل:

$$(1234321)_n = 1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + 3n^4 + 2n^5 + n^6$$
$$= (1 + n^2)^3 + 2n(1 + 2n^2 + n^4) = (1 + n^2)^3 + 2n(1 + n^2)^2 =$$
$$= (1 + n^2)^2 (1 + n^2 + 2n) = (1 + n^2)^2 (1 + n)^2 \text{ مربع کامل}$$
$$(44100)_n = n^2 + 4n^3 + 4n^4 = n^2 (1 + 4n + 4n^2)$$
$$= n^2 (2n + 1)^2 \text{ مربع‌کامل}$$

$$(111)_n = (1 + n + n^2) \text{ و } (113)_n = (3 + n + n^2)$$
$$(12543)_n = (3 + 4n + 5n^2 + 2n^3 + n^4)$$

با تقسیم K بر A و B داریم:

K بر A و بر B بخش‌پذیر است $\Rightarrow K = AB$

(راه‌حل از: مریم آقایی‌پور، دوم دبیرستان از شهرستان رشت)

۲- مجموع دو عدد ۱۴۸ و مجموع مقلوبهای این دو عدد ۵۵۳ است این دو عدد کدامند؟

حل: این دو عدد هر دو ۳ رقمی نیستند زیرا مجموع آنها ۱۴۸ است و هر دو، دو رقمی نیستند زیرا مجموع مقلوبهای آنها ۵۵۳ است پس الزاماً یکی باید دو رقمی و دیگری سه رقمی باشد عدد ۳ رقمی را $\overline{abc}$ و ۲رقمی را $\overline{de}$ فرض می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ + \quad \overline{de} \\ \hline \end{array}$$

$$\overline{a(b+d)(c+e)} = 148 \Rightarrow a = 1 \text{ و } b + d = 4 \text{ و } c + e = 8$$

$$\begin{array}{r} \overline{cba} \\ + \quad \overline{ed} \\ \hline \end{array}$$

$$\overline{c(b+e)(a+d)} = 553 \Rightarrow c = 5 \text{ و } b + e = 5 \text{ و } a + d = 3$$

از مقایسهٔ آنها ٦ معادله و ۵ مجهول به‌دست می‌آید و از حل آنها داریم:

$c = 5$ و $c + e = 8 \Rightarrow e = 3$

$e = 3$ و $b + e = 5 \Rightarrow b = 2$

$b = 2$ و $b + d = 4 \Rightarrow d = 4$

$a = 1$

$c = 5$

$\overline{abc} = 125$

$\overline{de} = 23$

(راه حل از: نقی اصغری، سوّم ریاضی، دبیرستان فرخی، منطقه ۱۲ تهران)

مسائل مسابقه‌ای

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ - ثابت کنید اگر به حاصل ضرب هر چهار عدد که به تصاعد حسابی با قدر نسبت d می‌باشند مقدار $d^۴$ را اضافه کنیم، حاصل همواره یک مربع کامل می‌شود (مسئله را برای شش، هشت و ده عدد که به تصاعد حسابی با قدر نسبت d باشند نیز در صورت امکان تعمیم دهید).

۲ - با استفاده از اتحاد

$$(A + B)^۳ = A^۳ + B^۳ + ۳AB(A + B)$$

معادلهٔ درجهٔ سوم کانونیک زیر را حل کنید:

$$X^۳ + pX + q = ۰$$

(نکتهٔ ۱: هر معادلهٔ درجهٔ سوم کامل به فرم عمومی $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ را نیز می‌توان با تبدیل $x = X - \frac{b}{۳a}$ به فرم کانونیک تبدیل نمود.

نکتهٔ ۲: در حالت عمومی وقتی معادلهٔ درجهٔ سوم سه ریشهٔ حقیقی دارد، ریشه‌های آن روی یک دایره می‌باشند و به فرم مثلثاتی بیان می‌شوند، لذا معادله در این حالت باید به طریقهٔ مثلثاتی حل شود).

اسامی تعدادی از افرادی که مسائل مسابقه‌ای برهان شمارهٔ ۶ را صحیح حل کرده‌اند:

راحله نظری - سال سوم ریاضی و فیزیک (رشت)
مهرداد سلامی - سال چهارم ریاضی و فیزیک (مشکین‌شهر)
ایمان زارعی - سال چهارم تجربی (اهواز)
مریم عباسی - سال سوم ریاضی (مشهد)
زهرا عباسی - سال سوم تجربی (مشهد)
رؤیا کریمیان - سال سوم ریاضی (شیراز)
رضا ظهرابی - (مسجد سلیمان)
امیر بابازاده - سال سوم ریاضی (زنجان)
کاوه بذرافکن - سال چهارم ریاضی (تهران)
ستاره ناصری - (قم)
نقی اصغری - سال سوم ریاضی و فیزیک (تهران)
مریم آقایی‌پور - سال سوم ریاضی و فیزیک (رشت)
قاسم اکبری ترک - سال سوم ریاضی (جهرم)
مهدی فرهمندفر - سال سوم ریاضی (تهران)
رحیم بغدادی - (فیزیک و ریاضی)
رضا توکلی - (تجریش)
سید عبدالصمد جوانمرد - سال چهارم ریاضی و فیزیک (جهرم)
امیر حیدری - سال سوم ریاضی (تفرش)
مجید جباری راد (قزوین)
فاطمه فاضل سرجویی - سال سوم ریاضی (تهران)
احمدرضا فتاحی - سال سوم ریاضی (اراک)
عباس زوار (تکاب)
عبدالرضا حیدری - سال چهارم ریاضی و فیزیک (یزد)

مسائل برای حل

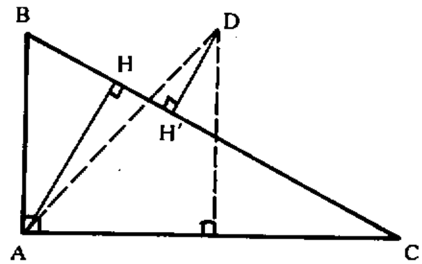
● هندسه: محمد هاشم رستمی

● ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری ● جبر و مثلثات: احمد قندهاری و محمدرضا هاشمی

مسائل ریاضیات سال اول

۱ـ ثابت کنید که در هر مثلث غیرمتساوی الساقین در یک رأس، نیمساز زاویهٔ درونی آن رأس، داخل زاویهٔ بین میانه و ارتفاع نظیر آن رأس قرار دارد.

۲ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = 90^\circ)$ با شرط $AC = 2AB$ مفروض است. نقطهٔ برخورد عمودمنصف ضلع AC و نیمساز درونی زاویهٔ A را D می‌نامیم. ثابت کنید که فاصلهٔ نقطهٔ D تا وتر مثلث، مساوی نصف اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر مثلث ABC است.



۳ـ هرگاه گزاره‌های $(p \Rightarrow q)$، $(q \Rightarrow p)$ و $(\sim p \wedge r)$ دارای ارزش درست باشند، ارزش گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \Leftrightarrow p)$ را تعیین کنید.

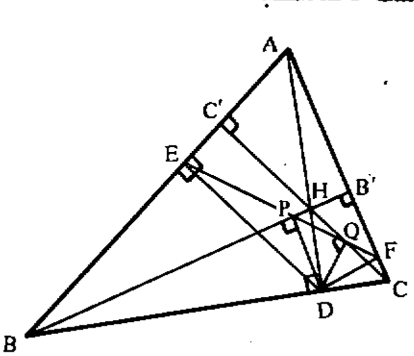
۴ـ بدون استفاده از جدول ارزشها، ثابت کنید گزارهٔ شرطی $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$ یک استلزام منطقی است. (گزارهٔ شرطی همیشه درست استلزام منطقی نام دارد.)

۵ـ اگر تساوی $\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1} = \frac{11x-8}{(2x-1)(x-1)}$ یک اتحاد باشد، A و B را بیابید.

۶ـ اگر $a - b + c = 2$، آنگاه عبارت $(a^2 - b^2 + c^2)$ برابر چیست؟

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

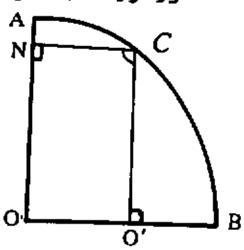
۱ـ تصویر نقطهٔ D پای ارتفاع رأس A از مثلث ABC روی اضلاع AB و AC را به ترتیب E و F، و نقطه‌های برخورد خط EF با ارتفاعهای رئوس B و C را P و Q می‌نامیم. ثابت کنید که مثلث DPQ با مثلث ABC متشابه است.



فرستنده: حسین اصلانی دانش‌آموز دبیرستان والفجر تبریز

۲ـ ربع‌دایرهٔ AOB مفروض است. وسط شعاع OB را O' می‌نامیم و مستطیل $OO'CN$ را می‌سازیم. سپس به قطر OB نیم‌دایره‌ای رسم می‌کنیم تا پاره‌خط $O'C$ را در نقطهٔ M قطع کند در صورتی‌که اندازهٔ وتر AB مساوی $10\sqrt{2}$ سانتی‌متر باشد، مساحت قسمت هاشورخورده در شکل را پیدا کنید.

فرستنده: غلامرضا روشندل



۳ـ هرگاه A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند ثابت کنید:

$$(B \times A) - (B \times B') = \phi$$

۴ـ ثابت کنید تعداد رابطه‌هایی که روی یک مجموعهٔ K عضوی می‌توان تعریف کرد که هم خاصیت تقارنی و هم پادتقارنی داشته باشند عبارت است از 2^k.

۵ـ خاصیت یک به یکی و پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ زیر بررسی کنید:

$$f : IR^+ \to IR^+$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$$

۶ـ اگر $\log_9 16 = a$، آنگاه عبارت $\log_4 \sqrt[3]{3}$ را برحسب a بیابید.

۷ـ نقاطی روی خط نیمساز ربع اول و سوم بیابید که فاصله آنها از نقطهٔ $A \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \end{vmatrix}$ برابر $\sqrt{13}$ باشد.

۸ـ اگر $x = a\cos\alpha - b\sin\alpha$ و $y = a\sin\alpha + b\cos\alpha$ باشد، نشان دهید که:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

فرستنده: رامتین آمویی دانش‌آموز رشته‌ریاضی مسجد سلیمان

۹ـ ثابت کنید:

$$\sin\left(Arc\cos\frac{3}{5}\right) = \cos\left(Arc\sin\frac{3}{5}\right)$$

فرستنده: خانم رضوان سعیدی دانش‌آموز مرکز فرزانگان اراک

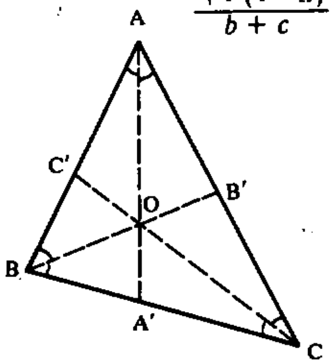
مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ـ نقطه برخورد AA' و BB' و CC' نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC را O می‌نامیم.

الف) ثابت کنید اگر $OB.OC = a.OA$ باشد، مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ب) ثابت کنید تصویر AA' روی ضلع AC برابر است با:

$$\frac{2P(P-a)}{b+c}$$



۲ـ دایرهٔ به مرکز O و دو نقطهٔ A و B در صفحهٔ این دایره مفروض‌اند. از نقطهٔ A قاطع ACD را نسبت به دایره رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث BCD را وقتی قاطع ACD حول نقطهٔ A دوران کند، تعیین کنید.

۳ـ اگر A و B هردو زیرفضای، فضای برداری V باشند، ثابت کنید:

«شرط لازم و کافی برای آنکه $(A \cup B)$ یک زیرفضای V باشد آن است که $A \subset B$ یا $B \subset A$.»

۴ـ ثابت کنید مجموعهٔ توابع فرد، یک زیرفضای، فضای برداری توابع از IR به IR است.

۵ـ در یک جبر بول مانند B، عمل $*$ را به صورت $a * b = ab' + a'b$ تعریف می‌کنیم. ابتدا ثابت کنید $(B, *)$ یک گروه جابجایی است و سپس با استفاده از خواص گروه ثابت کنید:

(الف) $ab'+a'b=a \Rightarrow b=0$

(ب) $ab'+a'b=0 \Rightarrow a=b$

۶ـ دامنه و برد تابع به معادله $y=x+\sqrt{-x^2+2}$ را بیابید.

۷ـ به کمک تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را بیابید.

۸ـ عبارت $5-3\sqrt{3}$ را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کنید.

فرستنده: امین خاتین‌زاده دانش‌آموز رشته ریاضی اهواز

۹ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$1+\sqrt{2}\,\sin 3x=\cos 2x$$

فرستنده: خانم سیده صدیقه حسینی دانش‌آموز رشته ریاضی لنگرود

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ بردار $\vec{v}_1$ موازی بردار $\vec{v}_2=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ و $\vec{v}_1.\vec{v}_2=42$ است. طول تصویر قائم بردار $\vec{v}_1$ روی صفحهٔ xoy را پیدا کنید.

۲ـ حجم متوازی‌السطوحی را بیابید که سه بردار $3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ و $4\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ و $\vec{i}+\vec{j}$ سه یال مجاور آن باشند.

۳ـ دو نقطهٔ A (۱ و ۳ و ۱−) و B (۲− و ۰ و ۱) و صفحهٔ $P:\ 2x+y-2z-3=0$ مفروض‌اند:

الف) مشخص سازید که نقاط A و B در یک طرف صفحه P واقع‌اند یا در دو طرف آن.

ب) زاویهٔ خط AB با صفحه P را تعیین کنید.

۴ـ معادلهٔ کانونیک تصویر قائم خط $D:\ 2x-1=-y+2=3z$ روی صفحهٔ $P:\ x+y-2z-2=0$ را به دست آورید.

۵ـ نقیض گزارهٔ $(r\Rightarrow s)\Rightarrow[s\Rightarrow(s\wedge t)]$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۶ـ ثابت کنید گزارهٔ زیر یک استلزام منطقی است:

$$[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\wedge q)]\Rightarrow(q\Rightarrow p)$$

۷ـ نشان دهید که اعداد به شکل $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ که a و b و c اعداد گویا هستند تشکیل یک میدان می‌دهند.

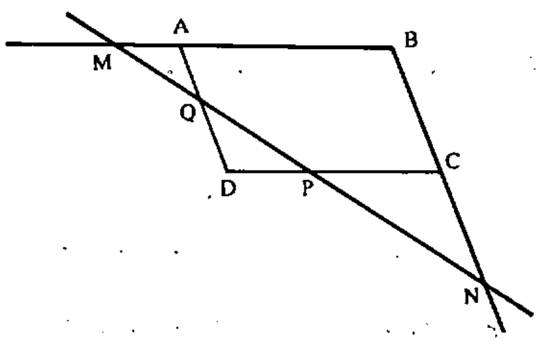
۸ـ ثابت کنید هر حلقهٔ متناهی (تعداد اعضایش متناهی باشد) که حوزهٔ درست باشد یک میدان خواهد بود.

۹ـ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}$ را در نقطهٔ $x_0=1$ بررسی کنید.

۱۰ـ تابع به معادله $y=\dfrac{x^2+bx+c}{x^2+1}$ را چنان مشخص کنید تا مجموع طولهای اکسترمم مساوی حاصلضرب عرضهای اکسترمم، مساوی صفر باشد.

مسائل ریاضیات دوّم تجربی

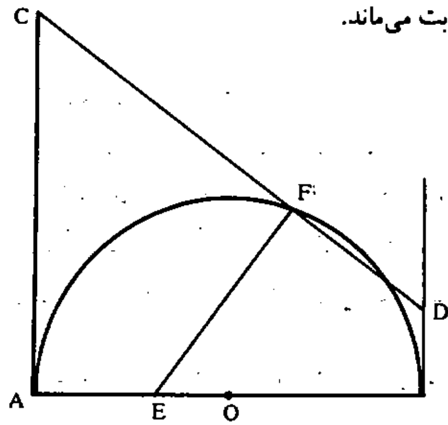
۱ـ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. خط راستی، اضلاع یا امتداد اضلاع AB و BC و CD و DA از این متوازی‌الاضلاع را به



ترتیب در نقاط M و N و P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$$\frac{MA}{MB} \times \frac{NB}{NC} \times \frac{PC}{PD} \times \frac{QD}{QA} = ۱$$

۲ـ نیم دایره‌ای به قطر AB مفروض است. از نقطهٔ اختیاری F واقع براین نیم‌دایره به نقطهٔ ثابت E که روی قطر AB واقع است وصل می‌کنیم و در نقطهٔ F خطی عمود بر FE رسم می‌نماییم تا خطوط مماس بر نیم دایره در نقاط A و B را به ترتیب در نقاط C و D قطع کند. ثابت کنید که با تغییر مکان نقطهٔ F روی نیم‌دایره مقدار $AC \,.\, BD$ ثابت می‌ماند.



فرستندهٔ مسائل ۱ و ۲: آقای علی عمیدی دانش‌آموز رشته ریاضی گرمسار

۳ـ عبارات زیر را تجزیه کنید:

۱) $a(a+۱)(a+۲)(a+۳)+۱$

۲) $y^۵+y+۱$

۴ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(x+۲)(x+۴)(x-۳)(x-۵)=۷۲$$

۵ـ به ازای چه مقادیری از a دستگاه زیر دارای جواب است:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۲a+۲ \\ (x+y)^۲=۱۴ \end{cases}$$

۶ـ ثابت کنید اگر a_m جملهٔ mام و a_n جملهٔ nام و d قدر نسبت یک تصاعد حسابی باشند، همواره داریم:

$$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$$

فرستنده مسائل ۵ و ۶: خانم مریم‌موسوی دانش‌آموز رشته‌ریاضی اهواز

۷ـ ثابت کنید:

$$\sin^۴\frac{\pi}{۸}+\sin^۴\frac{۷\pi}{۸}+\sin^۴\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۴\frac{۵\pi}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

فرستنده: خانم مریم‌موسوی دانش‌آموز رشته‌ریاضی اهواز

۸ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$۲\cos\frac{x}{۶}-\sin\frac{x}{۴}+۱=۰$$

فرستنده: سیدرضا موسوی‌عارف دانش‌آموز رشته‌ریاضی تبریز

مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ـ در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰° است. وسط ضلع AB را نقطهٔ M و وسط ضلع AC را نقطهٔ N می‌نامیم. قرینهٔ نقطه M نسبت به ضلع AC را M' و قرینهٔ نقطهٔ N نسبت به ضلع AB را N' می‌نامیم. ثابت کنید:

الف) نقاط M' و A و N' روی یک خط راست قرار دارند.

ب) $M'N'=\frac{۱}{۲}(AB+AC)$.

در صورتی‌که $\hat{A}\neq ۶۰^\circ$ باشد رابطهٔ $M'N'=\frac{۱}{۲}(AB+AC)$ به چه صورت در می‌آید؟

۲ـ اگر $|\vec{v}_۱|=۴\sqrt{۲}$ و $|\vec{v}_۲|=۶$ و $|\vec{v}_۳|=۵$ و $|\vec{v}_۴|=۱۲$ و اندازهٔ زاویهٔ بردارهای $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ و $\vec{v}_۳$ با محور $x'ox$ به ترتیب $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۳}$ باشد. اندازهٔ زاویهٔ بردار $\vec{v}_۴$ با محور $x'ox$ را به دست

آورید، در صورتی‌که اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی این بردارها روی محور $x'ox$ برابر ۱ + باشد.

۳ـ اگر $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ و $|\vec{b}| = 6$ و $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ باشد مطلوب است محاسبهٔ $\vec{a}.(\vec{a} - 3\vec{b})$

۴ـ دامنهٔ تابع باضابطهٔ

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-2x+5}}{\sqrt{2x+9-\left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2}}$$

را تعیین کنید.

فرستنده: آقای حسین سبزرو دانش آموز رشته ریاضی تهران

۵ـ مطلوب است محاسبهٔ حد زیر:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, tg\, 2x$$

فرستنده: خانم سیدهٔ صدیقه حسینی دانش آموز رشته ریاضی لنگرود

٦ـ از رابطهٔ $5\sin x=\sin(2y + x)$ رابطهٔ $2tg(x+y) = 3tg y$ را نتیجه بگیرید.

فرستنده: آقای حمیدایزدیان دانش آموز رشته‌ریاضی اصفهان

۷ـ ثابت کنید که برابریهای زیر برقرار است:

الف) $16\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = 1$

ب) $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ = \frac{1}{2}\sin 25^\circ \operatorname{cosec} 50^\circ$

فرستنده: آقای ن – ف دانش‌آموز رشته‌ریاضی آباده

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ معادلهٔ بیضی که مرکزش نقطهٔ $I\left|\begin{matrix}-4\\-2\end{matrix}\right.$ و بر محورهای مختصات مماس می‌باشد را بنویسید.

۲ـ نقاط $F(3-3\sqrt{2},-3)$, $F'(3+3\sqrt{2},-3)$ کانونهای یک هذلولی متساوی‌القطرین می‌باشند. معادلهٔ این هذلولی را بنویسید.

۳ـ معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم، بر سهمی به معادلهٔ: $(y+3)^2 = -8(x-2)$ می‌توان رسم نمود را بنویسید.

۴ـ مقدار $\lim_{n \to \infty}\left(n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{tg^{2n}x}{\cos^2 x}\,dx\right)$ حد را حساب کنید.

مسائل مثلثات سال چهارم تجربی

۱ـ در معادلهٔ کلاسیک $a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x = c$ ثابت کنید اگر $a^2+b^2 < 2bc$ آنگاه معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. همچنین ثابت کنید شرط لازم برای وجود جواب معادلهٔ $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c$ چنین است:

$$a^2+b^2+2bc \ge 0$$

۲ـ از رابطهٔ بین سه ضلع و دو زاویه، قضیهٔ کسینوسها را نتیجه بگیرید:

$$a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

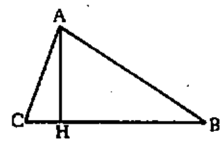
فرستنده: آقای فرید آزادگان از اهواز

حل مسائل برهان شمارهٔ ۷

حل مسائل سال اول

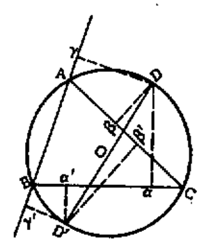
۱ـ در مثلث ABC، $AB > AC$ اختیار شده است، پس $\hat{C} > \hat{B}$ است امّا $\hat{C} = 90^\circ - H\hat{A}C$ و $B = 90^\circ - H\hat{A}B$ است.

پس: $90 - H\hat{A}C > 90 - H\hat{A}B \Rightarrow H\hat{A}B > H\hat{A}C$.



بنابراین می‌توان گفت: هرگاه مثلثی در یک رأس متساوی‌الساقین نباشد، ارتفاع نظیر آن رأس با ضلع بزرگتر، زاویه‌ای می‌سازد که بزرگتر است از زاویه‌ای که با ضلع کوچکتر می‌سازد.

۲ـ قطر DD' از دایرهٔ به مرکز O را رسم می‌کنیم و خطهای سمس نظیر نقاط D و D' را به ترتیب Δ و Δ' می‌نامیم. از C به نقاط D و D' وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد Δ و Δ' را N می‌نامیم. چهارضلعی $\beta\alpha CD$ محاطی است پس:



(۱) $\beta\hat{\alpha}D = \beta\hat{C}D$. همچنین چهارضلعی $\alpha'\beta'CD'$ محاطی می‌باشد پس (۲) $\beta'\hat{\alpha'}C = \beta'\hat{D'}C$. از طرفی دو زاویهٔ $\beta\hat{C}D$ و $\beta'\hat{D'}C$ که اضلاعشان دو به دو برهم عمودند متساوی‌اند (۳) $\beta\hat{C}D = \beta'\hat{D'}C$.

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گردد که $\beta\hat{\alpha}D = \beta'\hat{\alpha'}C$. امّا چون $D\alpha \perp BC$ است، $\beta\hat{\alpha}D + \beta\alpha\hat{\alpha}' = 90^\circ$. و از آنجا می‌توان نوشت $\beta'\hat{\alpha'}\alpha + \beta\alpha\hat{\alpha}' = 90^\circ$ پس مثلث $N\alpha\alpha'$ که مجموع دو زاویه‌اش 90° می‌باشد، در رأس N قائم‌الزاویه است. یعنی $\Delta \perp \Delta'$ است.

۳ـ با توجه به درست بودن ارزش گزارهٔ $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow r)$ و $(\sim r \vee \sim p)$ نتیجه می‌گیریم که <u>$P \equiv F$</u>، زیرا اگر $P \equiv T$ داریم، $\sim P \equiv F$ و با توجه به فرض باید $\sim r \equiv T$ یا $r \equiv F$ و از طرفی اگر $P \equiv T$ با توجه به فرض باید $q \equiv T$ بنابراین $(q \Rightarrow r) \equiv F$ که با درست بودن آن تناقض دارد، بنابراین $P \equiv F$، حال با توجه به اینکه $P \equiv F$ برای q دو حالت در نظر می‌گیریم. (همواره ثابت شده که $P \equiv F$)

I) اگر $q \equiv T$ پس با توجه به اینکه $(q \Rightarrow r) \equiv T$، باید $r \equiv T$ و $\sim r \equiv F$ بنابراین گزارهٔ $q \Rightarrow (\sim r \vee p) \Leftrightarrow r$ دارای ارزش درست خواهد بود.

II) اگر $q \equiv F$، چون $(q \Rightarrow r) \equiv T$ پس برای r دو حالت موجود است که در هر دو حالت گزاره حکم همواره درست خواهد بود زیرا: اگر $r \equiv T$ پس $\sim r \equiv F$ که همان حالت قبل ایجاد می‌شود و اگر $r \equiv F$ پس $\sim r \equiv T$ پس $q \Rightarrow (\sim r \vee p)$ با توجه به اینکه $q \equiv F$، دارای ارزش نادرست است که با r هم‌ارز است و لذا در این حالت نیز $q \Rightarrow (\sim r \vee p) \Leftrightarrow r$ دارای ارزش درست است.

۴ـ

$$C \cap [(A - B) \cup B] \cup (A \cup B) =$$
$$C \cap [(A \cap B') \cup B] \cup (A \cup B)$$
$$= [C \cap (A \cup B)] \cup (A \cup B) = (A \cup B)$$

(طبق قانون جذب)

۵ـ

$$A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$$
$$A_1 = \{a, \{a\}\} \quad A_2 = \{\{a, \{a\}\}\}$$
$$A = \{A_1, A_2\}$$ یک افراز ۲ عضوی

(مجموعه‌های A_1 و A_2 مجموعهٔ A را افراز می‌کنند زیرا هرکدام ناتهی‌اند و اشتراکی ندارند و $A_1 \cup A_2 = A$)

از طرفی می‌دانیم A یک مجموعهٔ ۳ عضوی است پس $8 = 2^3$ زیر مجموعه دارد و طبق فرض مجموعهٔ B، ۲۴ زیر مجموعه از A بیشتر دارد پس:

$$2^n = 24 + 8 = 32 \Rightarrow n = 5$$

یعنی B یک مجموعهٔ ۵ عضوی است.

۶ـ از رابطهٔ اول دستگاه به روابط زیر می‌رسیم:

$$y^2 = xz,\ z^2 = uy,\ u^2 = sz,\ s^2 = ut$$

اینک به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) $\frac{x}{y} = \frac{z}{u},\ x = 8u \Rightarrow z = \frac{8u^2}{y}$

(۲) $\frac{y}{z} = \frac{z}{u} \Rightarrow z^2 = uy \overset{1}{\Rightarrow} y = 4u$

(۳) $1 \text{ و } 2 \Rightarrow z = 2u$

(۴) $u^2 = zs \underset{(u \neq 0)}{\overset{3}{\Rightarrow}} s = \frac{u}{2}$

(۵) $s^2 = ut \overset{4}{\Rightarrow} t = \frac{u}{4}$

پس از جایگزینی روابط اخیر در معادلهٔ آخر دستگاه فوق داریم:

$8u + 4u + 2u + u + \frac{u}{2} + \frac{u}{4} = 15\frac{3}{4}$

$\Rightarrow 15\frac{3}{4}u = 15\frac{3}{4} \Rightarrow u = 1$

و پس از جایگزینی $u = 1$ داریم:

$x = 8$ و $y = 4$ و $z = 2$ و $s = \frac{1}{2}$ و $t = \frac{1}{4}$

۷.
$m^2x - m^2 + mx + m + 1 - 2x = 0$

$(m^2 + m - 2)x = m^2 - m - 6$

$(m-1)(m+2)\,x = (m+2)(m-3)$

اگر $m \neq 1$ و $\neq -2$ $\Rightarrow x = \frac{m-3}{m-1}$

اگر $m = 1 \Rightarrow 0 \times x = -6$ معادله غیرممکن است

اگر $m = +3 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

اگر $m = -2 \Rightarrow 0 \times x = 0$

معادله به اتحاد تبدیل می‌شود و بی‌شمار مقدار می‌پذیرد.

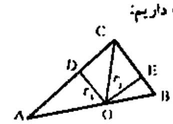
۸. اگر معادلات دستگاه را باهم جمع کنیم خواهیم داشت:

$3(x + y + z + t) = 30 \Rightarrow x + y + z + t = 10$

با توجه به معادلهٔ اوّل $(t = 4)$ وبا توجه به معادلهٔ دوّم $(x = 1)$ و با توجه به معادلهٔ سوم $(y = 2)$ و با توجه به معادلهٔ چهارم $(z = 3)$ خواهد شد.

حل مسائل سال دوم ریاضی

۱. (از آقای محمدعلی سلحشور دبیر ریاضی اصفهان): برای محاسبهٔ مساحت قطاع DOE لازم است شعاع دایرهٔ مورد بحث $OD = OE = r_1$، و زاویهٔ قطاع $D\hat{O}E = \alpha$ را به دست آوریم.
با توجه به داده‌های مسئله داریم:



نصف محیط مثلث $2p = 13+14+15 = 42 \Rightarrow p = 21$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84\,cm^2$

$S_{ABC} = S_{OAC} + S_{OBC} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}(AC\,r_1) + \frac{1}{2}(BC\,r_1)$

$S = \frac{1}{2}r_1(AC + BC) \Rightarrow 84 = \frac{1}{2}r_1(15 + 13) \Rightarrow r_1 = 6$

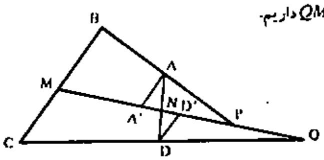
$\cos A\hat{C}B = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC.BC} = \frac{225+169-196}{2\times15\times13}$

$= \frac{198}{390} = \frac{99}{195}$

$\Rightarrow D\hat{O}E = \pi - Arc\cos\frac{99}{195} \Rightarrow S_{ODE}$ قطاع $= \frac{1}{2}r^2\alpha$

$= 18(\pi - Arc\cos\frac{99}{195})$

۲. از نقاط A و D خطهایی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا خط MN را به ترتیب در نقاط A' و D' قطع کند. در مثلثهای PMB و QMC داریم:



$AA' \parallel MB \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{MB}$ (۱)

$DD' \parallel MC \Rightarrow \frac{QD}{QC} = \frac{DD'}{MC}$ (۲)

امّا $AA' = DD'$ است زیرا دو مثلث NAA' و NDD' با هم برابرند و $MB = MC$ است. پس طرفهای دوم روابط (۱) و (۲) با هم برابرند، لذا داریم:

$\frac{PA}{PB} = \frac{QD}{QC}$

۳. می‌دانیم هرگاه $(a,b) \in R$ آنگاه $(b\,,a) \in R^{-1}$ و برعکس. حال با فرض اینکه R یک رابطهٔ هم‌ارزی است و ۳ خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارا می‌باشد ثابت می‌کنیم R^{-1} نیز دارای هر سه این خواص است:

۱) R^{-1} انعکاسی است)

۱) $\forall a \in A\,, (a\,,a) \in R \Rightarrow (a\,,a) \in R^{-1}$

۲) اگر $(a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R \overset{R\text{ تقارنی}}{\Longrightarrow} (a,b) \in R$

$\Rightarrow (b,a) \in R^{-1}$ ۲) R^{-1} تقارنی است)

۳) اگر $(a,b) \in R^{-1}, (b,c) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R,$

$(c,b) \in R \overset{R\text{ تعدی است}}{\Longrightarrow} (c,a) \in R \Rightarrow (a,c) \in R^{-1}$

۳) R^{-1} خاصیت تعدی دارد)

۴.
$f: IR^2 \to IR^2$

$f(x,y) = (\frac{2x-6}{x+2}, \frac{y+4}{2y-1})$

$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (\frac{2x_1-6}{x_1+2}, \frac{y_1+4}{2y_1-1}) = (\frac{2x_2-6}{x_2+2}, \frac{y_2+4}{2y_2-1})$

با طرفین وسطین و ساده کردن

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2x_1-6}{x_1+2} = \frac{2x_2-6}{x_2+2} & \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \frac{y_1+4}{2y_1-1} = \frac{y_2+4}{2y_2-1} & \Rightarrow y_1 = y_2 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1\,,y_1) = (x_2\,,y_2)$

بنابراین تابع یک به یک است.

حال فرض کنیم $(x_1, y_1) \in IR^2$ و دلخواه پس خواهیم داشت:

$(x_1\,,y_1) = (\frac{2x-6}{x+2}, \frac{y+4}{2y-1})$

$\Rightarrow \frac{2x-6}{x+2} = x_1 \Rightarrow 2x - 6 = x_1x + 2x_1 \Rightarrow$

$2x - x_1x = 2x_1 + 6 \Rightarrow x(2 - x_1) = 2x_1 + 6$

$\Rightarrow x = \frac{2x_1+6}{2-x_1}$

همان طور که مشاهده می‌شود برای $x_1 = 2$، هیچ x ای در IR یافت نمی‌شود تا زوج مرتبی به شکل $(x\,,y)$ تشکیل شود، بنابراین تابع پوشا نمی‌باشد.

۵. از فرض مسأله استفاده کرده و ثابت می‌کنیم G یک گروه جابجایی است:

$\forall x, y \in G: (x*y)^2 = x^2*y^2 \Rightarrow$

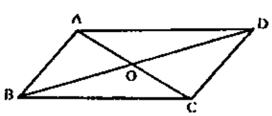
$(x*y)*(x*y) = (x*x)*(y*y)$

$\Rightarrow \underbrace{x'*(x}_{e}*y)*(x*\underbrace{y)*y'}_{e} = \underbrace{x'*(x}_{e}*x)*(y*\underbrace{y)*y'}_{e}$

$\Rightarrow y*x = x*y$ (پس G یک گروه جابجایی است)

۶. می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو دو به دو با هم مساوی و موازیند، در این مسأله با توجه به شکل زیر باید ثابت کنیم:

$\begin{cases} \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB} \end{cases}$



با توجه به شکل داریم ←
$\begin{cases} \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC} \end{cases}$

و چون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ پس می‌توانیم بنویسیم:

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC} =$

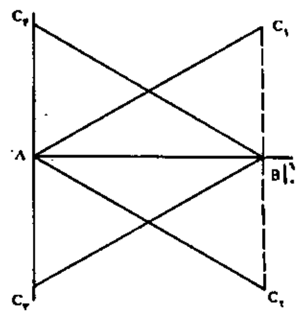
$\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{OB}$ (۱)

تساوی (۱) فقط به ازای حالت $\overline{O} = \overline{O}$ برقرار است یعنی:

$$\begin{cases} \vec{AO} - \vec{OC} = \vec{O} \Rightarrow \vec{AO} = \vec{OC} \\ \vec{DO} - \vec{OB} = \vec{O} \Rightarrow \vec{DO} = \vec{OB} \end{cases}$$

که حکم ثابت می‌شود، زیرا اگر تساوی (۱) در حالتی به جز $\vec{O} = \vec{O}$ برقرار باشد، بردار $\vec{AO} - \vec{OC}$ برداری خواهد بود روی پاره‌خط AC یا CA و بردار $\vec{DO} - \vec{OB}$ نیز برداری خواهد بود روی پاره‌خط BD یا DB که در هر حالت چون این پاره‌خطها یکدیگر را قطع کرده‌اند، موازی نبوده و تساوی هیچ‌گاه برقرار نخواهد شد.

۷ـ با توجه به شکل چهار مثلث قائم‌الزاویه عبارتند:



C_1BA , C_2BA , C_3BA , C_4BA

اگر مثلث ABC_1 را در نظر بگیریم:

$$S_{ABC_1} = \frac{AB \times C_1B}{2} = \frac{6 \times y_{C_1}}{2} = 12 \Rightarrow 6y_{C_1} = 24$$

$$\Rightarrow y_{C_1} = 4 \Rightarrow y_{C_2} = +4 \text{ و } y_{C_3} = y_{C_4} = -4$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} \quad C_2 \begin{vmatrix} 6 \\ -4 \end{vmatrix} \quad C_3 \begin{vmatrix} \\ -4 \end{vmatrix} \quad C_4 \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}$$

۸ـ

$$2x^3 - 7x^2 + 3x < 0$$

$$x(2x^2 - 7x + 3) < 0$$

$$x = 0 \text{ و } 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{7 \pm 5}{4} \quad x'' = 3, \quad x' = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$ 0	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x^2 - 7x + 3$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x(2x^2 - 7x + 3) < 0$	$-$	$+$	$-$	$+$

جواب: $x < 0$ جواب: $\frac{1}{2} < x < 3$

۹ـ

$$tgx = 2 : \cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

پس از تقسیم صورت و مخرج عبارت A بر $\cos^2 x$ داریم:

$$A = \frac{45\left(tg^2 x \sin^2 x + \cos^2 x + \frac{tgx}{\cos^2 x}\right)}{1 + tg^2 x}$$

$$= \frac{45\left(8 \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + 10\right)}{9}$$

$$A = 5\left(\frac{33}{5} + 10\right) = 33 + 50 = 83 \Rightarrow \boxed{A = 83}$$

۱۰ـ از فرض $\cos x = \frac{b}{a}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{a - a\cos x}{a + a\cos x}} + \sqrt{\frac{a + a\cos x}{a - a\cos x}}$$

$$= \sqrt{\frac{a(1 - \cos x)}{a(1 + \cos x)}} + \sqrt{\frac{a(1 + \cos x)}{a(1 - \cos x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos^2 x}} + \sqrt{\frac{(1 + \cos x)^2}{1 - \cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \cos^2 x)}{\sin^2 x}} + \sqrt{\frac{(1 + \cos x)^2}{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{|1 - \cos x|}{|\sin x|} + \frac{|1 + \cos x|}{|\sin x|} \underset{\text{x حاده است}}{=}$$

$$\frac{1 - \cos x}{|\sin x|} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$$

۱۱ـ معادله را به شکل زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$[(\sin x + 1)(\sin x + 2)][(\sin x + 6)(\sin x - 3)] = -84$$

$$(\sin^2 x + 3\sin x + 2)(\sin^2 x + 3\sin x - 18) = -84$$

با فرض: $\sin^2 x + 3\sin x = y$ داریم: $(y+2)(y-18) = -84$

$(y - 12)(y - 4) = 0 \Rightarrow y = 12$ (غیرقابل قبول) یا $y = 4$

$$y = 4 : \sin^2 x + 3\sin x = 4 \Rightarrow \sin^2 x + 3\sin x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 1)(\sin x + 4) = 0$$

$\sin x = -4$ (غیرقابل قبول) یا $\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{2}$

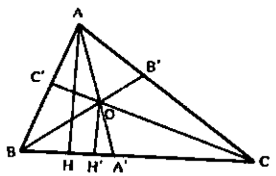
$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

حل مسائل سال سوم ریاضی

۱ـ از نقاط A و O به ترتیب عمودهای AH و OH' را بر ضلع BC فرود می‌آوریم. می‌دانیم که $AH = h_a$ و $OH' = r$ است. از تشابه مثلثهای AHA' و OH'A' داریم:

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OH'}{AH} = \frac{r}{h_a} \Rightarrow$$

$$\frac{AA' - OA'}{AA'} = \frac{h_a - r}{h_a} \Rightarrow \frac{OA}{AA'} = \frac{h_a - r}{h_a}$$



با توجه به اینکه $AA' = d_a$ است خواهیم داشت:

$$OA = \frac{da}{ha}(ha - r)$$

با جایگزینی مقدارهای da و ha و r برحسب اضلاع مثلث در رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که:

$$OA = \frac{1}{P}\sqrt{bcp(p-a)}$$

و به طریق مشابه محاسبه می‌شود:

$$OB = \frac{1}{p}\sqrt{acp(p-b)}, \quad OC = \frac{1}{p}\sqrt{abp(p-c)}$$

حل: ثانیاً ـ دو مثلث OBC و ABC در قاعدهٔ BC مشترک‌اند پس داریم:

$$\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \frac{OH'}{AH} = \frac{OA'}{AA} = \frac{AA' - OA}{AA'} = 1 - \frac{OA}{AA'} \Rightarrow$$

$$\frac{OA}{AA'} = 1 - \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} \qquad (1)$$

به روش مشابه داریم:

$$\frac{OB}{BB'} = 1 - \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} \qquad (2)$$

$$\frac{OC}{CC'} = 1 - \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} \qquad (3)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) و (۳) با توجه به اینکه $S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} = S_{ABC}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = 3 - 1 = 2$$

حل: ثالثاً

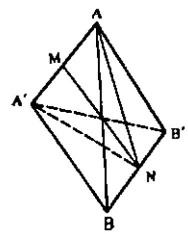
$OA.OB.OC =$

$\frac{1}{p}\sqrt{bcp(p-a)}\times\frac{1}{p}\sqrt{acp(p-b)}\times\frac{1}{p}\sqrt{abp(p-c)}$

$\Rightarrow OA.OB.OC=\frac{abc}{p^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$

$\frac{abc\times S}{p^2}=\frac{abc}{S}\times\frac{S^2}{p^2}=4Rr^2$

۲ ـ الف) از نقاط A و A' به نقطه N وسط پاره‌خط BB' وصل می‌کنیم. خطهای AN و $A'N$ از دو مثلث متساوی‌الساقین ABB' و $A'BB'$، عمود منصف قاعده می‌باشند. یعنی:
$BB'\perp AN$ و $BB'\perp A'N$. در نتیجه BB' بر صفحهٔ $AA'N$ عمود می‌باشد، پس بر AA' که یکی از خطوط این صفحه است عمود است.



ب) دو مثلث ABB' و $A'BB'$ با هم برابرند. پس ارتفاعات نظیر رئوس A و A' نیز متساویند. یعنی $AN'=AN$ لذا مثلث $AA'N$ متساوی‌الساقین است. پس میانه NM از این مثلث، عمود منصف قاعدهٔ AA' است. یعنی خط MN بر AA' عمود است. از طرفی BB' بر صفحهٔ $AA'N$ عمود می‌باشد. پس BB' بر MN عمود می‌باشد. یعنی MN، عمود مشترک دوپاره خط AA' و BB' است.

۳ـ فرض کنیم بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_n در فضای برداری V مستقل خطی باشند و فرض کنیم V_1 و V_2 و ... و V_p، P بردار دلخواه از این n بردار باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم این P بردار نیز مستقل خطی‌اند.
برای این کار فرض می‌کنیم:

$$a_1V_1+a_2V_2+...+a_pV_p=\bar{o} \qquad (1)$$

و ثابت می‌کنیم: $a_1=a_2=...a_p=0$.

$$(1)\Rightarrow a_1V_1+a_2V_2+...+a_pV_p+0V_{p+1}+0V_{p+2}+...+0V_n=\bar{o} \qquad (2)$$

رابطهٔ (۲) که در حقیقت همان رابطهٔ (۱) است، ترکیبی خطی از n بردار V_1 تا V_n است که مساوی با بردار صفر شده و چون این بردارها طبق فرض مستقل خطی‌اند، پس باید ضرایب آن همگی صفر باشند که در این صورت حکم ثابت است.

۴ـ چون جدول از سه کلید تشکیل می‌شود پس ابتدا خواهیم داشت:

$T=xy+xz+x'yz=xy(z+z')+xz(y+y')$

$+x'yz=xyz+xyz+xyz+xy'z+x'yz$

$\Rightarrow T=xyz+x'yz+xy'z+xyz'$

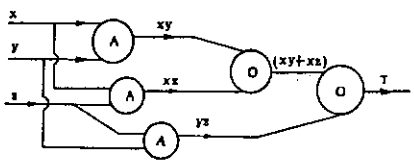
x	y	z	T	
1	1	1	1	→
1	1	0	1	→
1	0	1	1	→
1	0	0	0	
0	1	1	1	→
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	

حال عبارت T را ساده می‌کنیم:

$T=xyz+xyz+xyz+x'yz+xy'z+xyz'$

$\Rightarrow T=yz\underbrace{(x+x')}_{1}+xz\underbrace{(y+y')}_{1}+xy\underbrace{(z+z')}_{1}$

$\Rightarrow T=xy+xz+yz$



۵ـ الف) حالتهایی که ۴ مهره می‌توانند همرنگ باشند به این صورت است که هر دو مهرهٔ خارج شده از جعبه A قرمز ودو مهرهٔ خارج شده از جعبهٔ B نیز قرمز باشند یا هر دو مهرهٔ خارج شده از جعبهٔ A سبز و هر دو مهره خارج شده از جعبهٔ B نیز سبز باشند.
بنابراین در قسمت (الف) داریم:

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}\times\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}+\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}\times\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}$$

ب) در این حالت صورتهای ممکن برای قرمز بودن ۳ مهره از ۴ مهره به شکل زیر است:
(۲ مهرهٔ قرمز از B و ۱ مهرهٔ قرمز و ۱ مهره سبز از A) + (۲ مهره قرمز از A و ۱ مهرهٔ قرمز و ۱ مهرهٔ سبز از B)

$$\Rightarrow P(B)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}\times\frac{\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}+\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}\times\frac{\binom{4}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}$$

۶ـ منحنی این تابع باید بر محور xها یعنی خط $y=0$ مماس باشد. پس معادله تقاطع این خط با این منحنی باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases}y=(x-1)(x^2+mx+2)\\ y=0\end{cases}$$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+mx+2)=0$

الف) $\Delta=0\Rightarrow m^2-8=0\Rightarrow m^2=8\Rightarrow$

$\boxed{m=\pm2\sqrt{2}}$

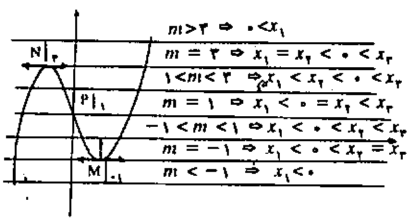
ب) $x=1\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دوم}}1+m+2=0\Rightarrow\boxed{m=-3}$

۷ـ

$$\begin{cases}m=x^3-3x+1\\ y=m\end{cases}\Rightarrow y=x^3-3x+1$$

$y'=3x^2-3=0\Rightarrow\boxed{x=\pm1}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+		−		−		+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	1	↘	-1	↗	$+\infty$



۸ـ کمانها تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت $\frac{2\pi}{11}$ داده‌اند.
اینک با ضرب طرفین تساوی در $2\sin\frac{\pi}{11}$ داریم:

$(2\sin\frac{\pi}{11})A=2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}$

$+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11}$

$+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}=\sin\frac{2\pi}{11}+(\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11})$

$+(\sin\frac{6\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11})+(\sin\frac{8\pi}{11}-\sin\frac{6\pi}{11})$

$+\sin(\frac{10\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11})$

پس از اختصار لازم داریم:

$(2\sin\frac{\pi}{11})A=\sin\frac{10\pi}{11}=\sin(\pi-\frac{\pi}{11})=\sin\frac{\pi}{11}$

$\Rightarrow 2A=1\qquad\Rightarrow A=\frac{1}{2}$

۹ـ با توجه به اتحاد

$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(a+c)(b+c)$

الف) داریم:

$(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3 - 3(\sin x + \sin 2x)$.

$(\sin x + \sin 3x)(\sin 2x + \sin 3x)$

$= \sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$

پس از اختصار لازم داریم:

$(\sin x + \sin 2x)(\sin 2x + \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) = 0$

که معادل سه معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی است:

$\sin x + \sin 3x = 0$ یا $\sin 2x + \sin 3x = 0$

یا $\sin x + \sin 2x = 0$

$$\sin 2x = -\sin x = \sin(-x) \Rightarrow \begin{cases}2x = 2k\pi - x\\ 2x = 2k\pi + \pi + x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{2k\pi}{3} \\ x_2 = 2k\pi + \pi\end{cases}$$

برای حل دو معادلهٔ دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

ب) با استفاده از اتحاد $\cos 2(x+\frac{\pi}{3}) = 1 - 2\sin^2(x+\frac{\pi}{3})$ داریم:

$$2\sin^2(x+\frac{\pi}{3}) - 4\sin(x+\frac{\pi}{3}) + \frac{3}{2} = 0$$

$$\left[2\sin(x+\frac{\pi}{3}) - 3\right]\left[\sin(x+\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}\right] = 0$$

$2\sin(x+\frac{\pi}{3}) - 3 = 0$ یا $\sin(x+\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} = 0$

$2\sin(x+\frac{\pi}{3}) = 3 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}$ (غیرممکن)

$$\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{6}\\ x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}\end{cases}$$ (جوابهای عمومی معادله)

حل مسائل سال چهارم ریاضی

۱ـ اولاً:

$\vec u(2,3,-1)$ و $\vec v(1,-2,3)$

$$P_r \frac{\vec u}{\vec v} = \frac{\vec u . \vec v}{|\vec v|} = \frac{2-6-3}{\sqrt{1+4+9}}$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{14}} = -\frac{7}{2}\sqrt{14}$$

ثانیاً: فرض می‌کنیم $\vec u_1(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec u_2(x_2,y_2,z_2)$ باشد با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\vec u_1 + \vec u_2 = \vec u \Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2=2\\y_1+y_2=3\\z_1+z_2=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2 = 2-x_1\\ y_2=3-y_1\\ z_2=-1-z_1\end{cases}$$

$$\vec u_1 \parallel \vec v \Rightarrow (x_1 = k \ , y_1 = -2k \ , z_1 = 3k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2-x_1 = 2-k\\ y_2 = 3-y_1 = 3+2k\\ z_2 = -1-z_1 = -1-3k\end{cases}$$

$$\vec u_2 \perp \vec v \Rightarrow 1(2-k) - 2(3+2k) + 3(-1-3k) = 0$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec u_1(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}), \vec u_2(\frac{5}{2}, 2, \frac{1}{2})$$

۲ـ خط $D: \begin{cases}x=0\\y-z=2\end{cases}$ فصل مشترک دو صفحهٔ $x = 0$ و $y - z = 2$ است، که صفحهٔ $x = 0$ همان صفحهٔ مختصات yoz و صفحهٔ $y - z = 2$ صفحه‌ای است که بر صفحهٔ yoz عمود است بنابراین خط D در صفحهٔ yoz واقع است و با توجه به اینکه این خط محور yها را در نقطهٔ (۰ و ۲ و ۰)A و محور zها را در نقطهٔ (۲- و ۰ و ۰)B قطع می‌کند مثلث OAB قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است بنابراین زاویهٔ خط D با محور xها °۹۰ و با محور yها برابر °۴۵ و با محور zها برابر °۴۵ است.

نکته: اگر معادلهٔ خط D را به‌صورت $\begin{cases}x=0\\y=z+2\end{cases}$ بنویسیم پارامترهای هادی این خط $(p=0 \ , q = r = 1)$ خواهد بود که از آنجا کسینوسهای هادی این خط برابر با $\alpha = 0$ و $\beta=\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، که از آنجا زاویه‌هایی که خط با محورهای مختصات می‌سازد به راحتی قابل محاسبه است.

۳ـ معادلهٔ دایره را به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم داریم:

$$R = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-4c = 64 \qquad (1)$$

$$M(4,0) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}} 16 + 0 + 4a + c = 0$$

$$\Rightarrow 4a + c + 16 = 0 \qquad (2)$$

$C: x^2+y^2-2x+2y=0$ شرط عمود بودن:

$$aa' + bb' - 2c - 2c' = 0$$

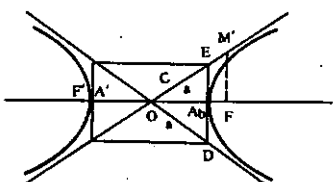
$$-2a + 2b - 2c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0 \qquad (3)$$

$$\begin{cases}a^2+b^2-4c=64\\4a+c+16=0\\a-b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-8\\b=+8\\c=16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-\frac{16}{5}\\b=-\frac{32}{5}\\c=-\frac{16}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1: x^2+y^2-8x+8y+16=0$$

$$C_2: x^2+y^2-\frac{16}{5}x - \frac{32}{5}y - \frac{16}{5} = 0$$

۴ـ فرض می‌کنیم محور کانونی هذلولی منطبق بر محور xها و مرکز هذلولی منطبق بر مبدأ مختصات باشد. در این صورت معادلهٔ هذلولی به صورت:



۶

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ خواهد بود و معادلهٔ خط عمود بر محور کانونی در کانون F به صورت $x = c$ است. در نتیجه $FM = y = \frac{b^2}{a}$ (۱) خواهد بود. حال FM' را محاسبه می‌کنیم: دو مثلث OFM' و OAE متشابهند پس داریم:

$$\frac{FM'}{AE} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow \frac{FM'}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow FM' = \frac{bc}{a} \qquad (2)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow MM' = \frac{bc}{a} - \frac{b^2}{a} = \frac{b(c-b)}{a} = \frac{ab(c-b)}{a^2} =$$

$$\frac{ab(c-b)}{c^2-b^2} = \frac{ab}{b+c} \Rightarrow MM' = \frac{ab}{b+c} \qquad (3)$$

از طرفی اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث OED را r بنامیم در این مثلث $S = pr$ است یا $ab = (b+c)r$ یا:

$$r = \frac{ab}{b+c} \qquad (4)$$

از روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که: $r = MM'$

۵ـ

$1)(p \Rightarrow \sim r)$ ۸

$2)(\sim p \wedge r) \Rightarrow 9$ ۸

$3)(\sim t \wedge r)$

$\therefore\ t \Rightarrow \sim q$

از (۱) و عکس نقیض $4)\ r \Rightarrow \sim p$

از (۲) و عطف مقدمات $5)\ \sim p \Rightarrow (r \Rightarrow q)$

از (۴) و (۵) و قیاس $6)\ r \Rightarrow (r \Rightarrow q)$

از (۶) و عطف مقدمات $7)\ [(r \wedge r) \Rightarrow q] \equiv r \Rightarrow q$

از (۳) و حذف عاطف $8)\ r$

از (۷) و (۸) و انتزاع $9)\ q$

از (۳) و حذف عاطف $10)\ \sim t$

طبق (۹) داریم، $q \equiv T$ و طبق (۱۰) داریم، $\sim t \equiv T$ پس $\sim q \equiv F$ و $t \equiv F$ بنابراین $\sim q \equiv t$ یعنی $(t \Rightarrow \sim q) \equiv T$، بنابراین استنتاج معتبر است.

۶ـ اگر عدد را a فرض کنیم طبق فرضیات مسأله داریم:

$a = 25q + r$ و $r = q^2$

از طرفی چون طبق قضیهٔ تقسیم، $0 \le r < 25$ پس $q^2 < 25$ پس $q = 1$ یا $q = 2$ که اگر $q = 1$، $a = 26$ و اگر $q = 2$، $a = 58$.

۷ـ چون $3 \times 5 \times 8 = 120$ و اعداد ۳ و ۵ و ۸ دو به دو نسبت به هم اولند کافی است ثابت کنیم $p^4 - 1$ بر ۳ و بر ۵ و بر ۸ بخش‌پذیر است.

الف) بخش‌پذیری بر ۵:

p اول و بزرگتر از ۵ $\Rightarrow (p, 5) = 1 \xrightarrow{\text{قضیهٔ فرما}} p^4 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 5 | p^4 - 1$

ب) بخش‌پذیری بر ۳:

می‌دانیم: $(p^4 - 1) = (p^2 - 1)(p^2 + 1)$

از طرفی: $(p, 3) = 1 \xrightarrow{\text{قضیهٔ فرما}} p^2 \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow 3 | p^2 - 1 \Rightarrow 3 | (p^2 - 1)(p^2 + 1) \Rightarrow 3 | p^4 - 1$

ج) بخش‌پذیری بر ۸:

طبق یکی از مسائل کتاب داریم، مربع هر عدد فرد به صورت $(8k + 1)$ است، بنابراین چون p اول و بزرگتر از ۵ است، فرد است و داریم:

$p^2 = 8k + 1 \Rightarrow 8k = p^2 - 1 \Rightarrow 8 | p^2 - 1 \Rightarrow 8 | (p^2 - 1)(p^2 + 1) \Rightarrow 8 | p^4 - 1$

۸ـ ابتدا توجه می‌کنیم که اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب آن دو عدد نیز نسبت به هم اولند، یعنی

از اینکه $(e, f) = 1$ نتیجه می‌گیریم $(e + f, ef) = 1$. از طرفی طبق قضیهٔ کتاب داریم:

$$(a, b) = d,\ [a, b] = c \Rightarrow \frac{ab}{d} = c$$

حال به حل مسأله می‌پردازیم:

$$(a, b) = d \xrightarrow{\text{قضیهٔ کتاب}} \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \Longrightarrow \left(\frac{a+b}{d}, \frac{ab}{d^2}\right) = 1$$

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ کتاب}} \left(a + b, \frac{ab}{d}\right) = d \Longrightarrow (a + b, c) = d$$

۹ـ ابتدا چند قضیه و نکته را یادآور می‌شویم:

$$(AB)' = B'A',\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (A')' = A,$$

$$(A^{-1})^{-1} = A,\ (A')^{-1} = (A^{-1})'$$

طبق فرض داریم $\rightarrow A'A = AA' \rightarrow (A')^{-1}(A'A)(A')^{-1}$

$= (A')^{-1}(AA')(A')^{-1}$

$\Rightarrow \quad A(A')^{-1} = (A')^{-1}A \quad (1)$

از طرفی: $(A'A^{-1})' = (A^{-1})'(A')' = (A')^{-1}A$

و داریم: $(A'A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}(A')^{-1} = A(A')^{-1}$

$$\xrightarrow{(1)} (A'A^{-1})' = (A'A^{-1})^{-1}$$

۱۰ـ

$$y = \frac{ax^2 + b}{cx} \Rightarrow y' = \frac{acx^2 + 0x - bc}{v^2} = 0$$

$acx^2 + 0x - bc = 0 \Rightarrow x'x'' = -1 \Rightarrow \frac{c}{a}$ معادلهٔ مشتق $= -1$

$$\Rightarrow \frac{-bc}{ac} = -1 \Longrightarrow \boxed{a = b}$$

$$y = \frac{ax^2 + b}{cx} \Rightarrow ax^2 - cyx + b = 0$$

$$\Delta = c^2y^2 + 0y - 4ab = 0$$

$$|y_1 - y_2| = 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4|a|$$

$$\Delta = 16a^2 \Rightarrow b^2 - 4ac = 16a^2$$

$$\Rightarrow 0 - 4c^2(-4ab) = 16c^4$$

$$\Rightarrow 16abc^2 = 16c^4 \Rightarrow ab = c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow \boxed{a = c}$$

$$y = \frac{ax^2 + b}{cx} \Rightarrow y = \frac{ax^2 + a}{ax} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2 + 1}{x}}$$

۱۱ـ اولاً:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x - 1} \\ y = m \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2(m + 1)x + (m + 5) = 0$$

$$x_A + x_B = -\frac{b}{a} = 2m + 2$$

$$x_A x_B = \frac{c}{a} = m + 5$$

نقطه p وسط AB $\Rightarrow x_p = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2m + 2}{2} = m + 1$

$$\Rightarrow P \begin{cases} x = m + 1 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow m = x - 1 \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$$

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P که همان هوپیتال تابع است، بنابراین از نقاط اکسترمم منحنی تابع اصلی می‌گذرد.

ثانیاً:

$$(x_M + x_N)(x_A + x_B) = 2(x_M x_N + x_A x_B)$$

$$(1 + x_N)(2m + 2) = 2(x_N + m + 5)$$

$$\Rightarrow 2m x_N = 8 \Rightarrow x_N = \frac{4}{m}$$

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ N

$$\Rightarrow N \begin{cases} x = \dfrac{4}{m} \\ y = m \end{cases} \Rightarrow m = \frac{4}{x} \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{x}}$$

حل مسائل سال دوم تجربی

۱ـ ثابت می‌کنیم که $AJ = BH$ است.

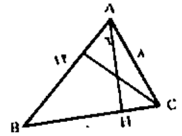
$$FJ \parallel AC \Rightarrow \frac{FC}{AJ} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow AJ = \frac{FC \cdot DA}{DC} \qquad (1)$$

$$EH \parallel AC \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH = \frac{BC \cdot BE}{AB} \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) با توجه به اینکه $EB = FC$ و $DA = BC$ و $DC = AB$، نتیجه می‌شود که $AJ = BH$. پس $JH \parallel AB$ است.

۲ـ در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = 60^\circ$، $AC = 8$، $AB = 12$

با توجه به رابطهٔ کسینوسها در مثلث می‌توان نوشت:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow a^2 = 64 + 144 - 2 \times 8 \times 12\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow a^2 = 208 - 96 = 112 \Rightarrow a = 4\sqrt{7}$$

$$CH = AC \times \sin 60 = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$AH.BC = CH \times AB \Rightarrow$

$AH \times 2\sqrt{7} = 2\sqrt{3} \times 12 \Rightarrow AH = 12\sqrt{\frac{3}{7}}$

۳ـ از فرض مسأله داریم:

$x_1 = mx_2$

پس دستگاه زیر را می‌توان نوشت:

$$m\begin{cases} x_1 - mx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - mx_2 = 0 \\ mx_1 + mx_2 = \frac{-bm}{a} \end{cases} \Rightarrow (m+1)x_1 = \frac{-bm}{a}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-bm}{a(m+1)}$$

$$x_2 = \frac{1}{m}\left(\frac{-bm}{a(m+1)}\right) = \frac{-b}{a(m+1)}$$

پس از جایگزینی مقادیر x_1 و x_2 در شرط $A = x_1^2 - 2x_2^3$ داریم:

$$A = \frac{b^2m^2}{a^2(m+1)^2} - 2\frac{-b^3}{a^3(m+1)^3} =$$

$$\frac{ab^2m^2(m+1) + 2b^3}{a^3(m+1)^3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{b^2}{a^3(m+1)^3}(am^3 + am^2 + 2b)$$

۴ـ بدیهی است مکعب بزرگترین عدد برابر مجموع مکعبهای سه عدد دیگر است. بنابراین اگر چهار عدد متوالی را به ترتیب به a و $a+1$ و $a+2$ و $a+3$ نشان دهیم. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = (a+3)^3$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$a^3 - 6a - 9 = 0$$

$$a^3 - 6a - 9 + 27 - 27 = 0 \Rightarrow$$

$$(a^3 - 27) - 6a + 18 = 0$$

$$(a-3)(a^2 + 3a + 9) - 6(a-3) = 0$$

تنها ریشهٔ مورد قبول: $(a-3)(a^2 + 3a + 3) = 0 \Rightarrow a = 3$

پس فقط چهار عدد متوالی هستندکه با شرایط مسأله سازگار باشند و آن چهار عدد، عبارتند از: ۳، ۴، ۵، ۶ و داریم:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

۵ـ

$$m(t_1 + (m-1)r) = p(t_1 + (p-1)r)$$

$$mt_1 + m(m-1)r = pt_1 + p(p-1)r$$

$$mt_1 - pt_1 + m(m-1)r - p(p-1)r = 0$$

$$\Rightarrow t_1(m-p) + r(m(m-1) - p(p-1)) = 0$$

$$t_1(m-p) + r(m^2 - m - p^2 + p) = 0$$

$$\Rightarrow t_1(m-p) + r(m-p)(m+p-1) = 0$$

$$\Rightarrow (m-p)(t_1 + (m+p-1)r) = 0$$

چون $m \neq p$ پس داریم:

$$t_1 + (m+p-1)r = 0 \Rightarrow t_{p+m} = 0$$

۶ـ می‌دانیم $\log_{b^n}^a = \frac{1}{n}\log_b^a$ پس داریم:

$$\log_{\sqrt{5}}^{x^2} = \log_{5^{\frac{1}{2}}}^{x^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5^{x^2} = 2\log_5^{x^2} = 4\log_5^x \qquad (1$$

$$\log_{25}^x = \log_{5^2}^x = \frac{1}{2}\log_5^x$$

و با فرض $y = \log_5^x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{4y} + \sqrt{\frac{1}{2}y} = 4 + \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{y} = 4 + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{y}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + \sqrt{2}$$

$$y = \frac{4+\sqrt{2}}{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4+\sqrt{2}}{\frac{4+\sqrt{2}}{2}} = 2 \Rightarrow \sqrt{y} = 2 \Rightarrow y = 4$$

$$\log_5^x = 4 \Rightarrow x = 5^4 = 625 \Rightarrow \boxed{x = 625}$$

۷ـ

$$A = 2tg(\pi - 50°) - 2cotg(\frac{\pi}{2} + 50°) - tg(\pi + 50°) - 5tg(2\pi - 50°) + cotg(\frac{\pi}{2} - 50°) - 4tg50°$$

$$\Rightarrow A = -2tg50° + 2tg50° - tg50° + 5tg50° + tg50° - 4tg50° = 0$$

$$B = \cos(\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})$$

$$= \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

۸ـ

$$(\sin x + 1) - \cos x - \sin x \cos x = (\sin x + 1) -$$

$$\cos x(\sin x + 1) = 0$$

$$(\sin x + 1)(1 - \cos x) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x + 1 = 0 \to \sin x = -1 \\ 1 - \cos x = 0 \to \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x_2 = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ \cos x = \cos 0 \quad \Rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \Rightarrow x_3 = 2k\pi \end{cases}$$

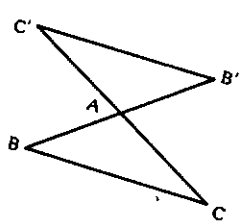
حل مسائل سال سوم تجربی

۱ـ قرینهٔ مرکزی رئوس B و C را نسبت به رأس A پیدا می‌کنیم و B' و C' می‌نامیم. مثلث $AB'C'$ قرینهٔ مرکزی مثلث ABC نسبت به رأس Aاست. برای محاسبهٔ مختصات نقاط B' و C' داریم:

A وسط BB' $\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \\ y_A = \frac{y_B + y_{B'}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{-2 + x_{B'}}{2} \Rightarrow x_{B'} = 2 \\ 3 = \frac{1 + y_{B'}}{2} \Rightarrow y_{B'} = 5 \end{cases} \Rightarrow B' \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

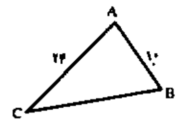
A وسط CC' $\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{3 + x_{C'}}{2} \Rightarrow x_{C'} = -3 \\ 3 = \frac{0 + y_{C'}}{2} \Rightarrow y_{C'} = 6 \end{cases} \Rightarrow C' \begin{vmatrix} -3 \\ 6 \end{vmatrix}$



G مرکز ثقل مثلث $AB'C'$ $\begin{cases} x = \frac{x_A + x_{B'} + x_{C'}}{3} = \frac{0 + 2 - 3}{3} = \frac{-1}{3} \\ y = \frac{y_A + y_{B'} + y_{C'}}{3} = \frac{3 + 5 + 6}{3} = \frac{14}{3} \end{cases}$

اندازهٔ بردار مکان نقطه G $\quad OG = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{196}{9}} = \frac{\sqrt{197}}{3}$

۲ـ اولاً: اندازهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را محاسبه می‌کنیم. شعاع کره برابر نصف این وتر است.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 + 576 = 676$$

$$\Rightarrow BC = 26 \xRightarrow{\text{کره محیطی}} R = \frac{26}{2} = 13$$

حجم کره $= V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(13)^3 = \frac{8788\pi}{3}$

ثانیاً: سطح قطاع 60° از دستور $S_{\text{قطاع}\ \alpha^\circ} = \frac{\pi R^2\alpha}{90^\circ}$، محاسبه می‌شود.

$$S_{\text{قطاع}\ 60^\circ} = \frac{\pi(13)^2\times 60^\circ}{90} = \frac{338\pi}{3}$$ واحد سطح

۳ـ برای حالتی که M نزدیک به A باشد داریم:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2 = (\overline{OA}-\overline{OM})^2+(\overline{MO}+\overline{OB})^2 = \overline{OA}^2+\overline{OM}^2-2\overline{OA}\ \overline{OM} + \overline{MO}^2+\overline{OB}^2+2\overline{MO}\ \overline{OB}$$

چون $\overline{OA}=\overline{OB}$ پس داریم:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2 = 2\overline{OA}^2+2\overline{OM}^2 = 2(\overline{OA}^2+\overline{OM}^2).$$

برای حالتی که M نزدیک به B باشد نیز به طریقهٔ مشابه عمل می‌شود و نتیجهٔ فوق حاصل می‌شود.

۴ـ با فرض $\cos x = t^6$، داریم:

$$\sqrt[3]{\cos x} = t^2,\ \sqrt{\cos x} = t^3,\quad \begin{cases} x\to 0\\ t\to 1\end{cases}$$

$$\lim_{t\to1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}} = \lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{1-t^{12}} = \lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{-(t^{12}-1)}$$

$$= \lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{-(t-1)(t^{11}+t^{10}+\dots+t+1)} =$$

$$\lim_{t\to1}\frac{-t^2}{t^{11}+t^{10}+\dots+t+1} = \frac{-1}{12}$$

۵ـ نخست نقاط تلاقی منحنی و خط را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} y=\frac{-(ax+c)}{b} & \text{خط}\\ y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} & \text{منحنی}\end{cases} \Rightarrow \frac{-(ax+c)}{b} = \frac{-b\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

$$-a^2x-ac = -b^2\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow a^2x+ac = b^2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$(a^2x+ac)^2 = b^4(a^2-x^2)$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(a^4+b^4)x^2+2a^3cx+a^2c^2+a^2b^4=0$$

شرط اینکه خط بر منحنی مماس باشد این است که معادلهٔ درجه دوم اخیر که ریشه‌هایش طولهای نقاط برخورد خط و منحنی را می‌دهد، دارای ریشهٔ مضاعف باشد و شرط ریشهٔ مضاعف این است که مبین آن برابر صفر باشد:

$$\Delta' = a^6c^2-(a^4+b^4)(a^2c^2-a^2b^4)=0$$

$$a^6c^2-a^6c^2+a^6b^4-a^2c^2b^4+a^2b^8=0$$

$$a^2b^4(a^4+b^4-c^2)=0 \xRightarrow{ab\neq0} a^4+b^4-c^2=0$$

$$\Rightarrow a^4+b^4=c^2.$$

۶ـ

$$x+y+z=k\pi \Rightarrow x=k\pi-(y+z)$$

$$\text{tg}x = \text{tg}\left(k\pi-(y+z)\right) = -\text{tg}(y+z)$$

$$-\text{tg}x = \frac{\text{tg}y+\text{tg}z}{1-\text{tg}y\,\text{tg}z} \Rightarrow -\text{tg}x+\text{tg}x\,\text{tg}y\,\text{tg}z =$$

$$\text{tg}y+\text{tg}z \Rightarrow \text{tg}x+\text{tg}y+\text{tg}z = \text{tg}x\,\text{tg}y\,\text{tg}z$$

۷ـ

$$2\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{2}=2$$

با فرض: (مضرب ۲ و ۳) $x=6z$ داریم:

$$2\cos2z+\sin3z=2$$

$$2(\cos2z-1)+\sin3z=0$$

$$2(-2\sin^2z)+3\sin z-4\sin^3z=0$$

$$-\sin z(4\sin^2z+4\sin z-3)=0$$

$\sin z=0$ یا $4\sin^2z+4\sin z-3=0$

$$\sin z=0 \Rightarrow z=k\pi \Rightarrow x_1=6k\pi$$

$$4\sin^2z+4\sin z-3=0 \Rightarrow \Delta'=4+12=16$$

$$\sin z=\frac{-2\pm4}{4}\Rightarrow$$

$\sin z=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$ (غیرقابل قبول)

یا

$$\sin z=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow \begin{cases} z=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ z=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=12k\pi+\pi\\ x_3=12k\pi+5\pi\end{cases}$$

۸ـ عبارت A را به ترتیب زیر ساده می‌کنیم:

$$A = \text{tg}10^\circ\text{tg}50^\circ - \text{tg}10^\circ\text{tg}70^\circ + \text{tg}50^\circ\text{tg}70^\circ =$$

$$\text{cotg}80^\circ\text{cotg}40^\circ - \text{cotg}80^\circ\text{cotg}20^\circ + \text{cotg}40^\circ\text{cotg}20^\circ$$

$$= \frac{1}{\text{tg}80^\circ\text{tg}40^\circ} - \frac{1}{\text{tg}20^\circ\text{tg}80^\circ} + \frac{1}{\text{tg}20^\circ\text{tg}40^\circ}$$

$$A = \frac{\text{tg}20^\circ-\text{tg}40^\circ+\text{tg}80^\circ}{\text{tg}20^\circ\text{tg}40^\circ\text{tg}80^\circ}$$

از طرفی داریم:

$$\text{tg}\alpha+\text{tg}(60^\circ+\alpha)+\text{tg}(120^\circ+\alpha) = 3\text{tg}3\alpha$$

$$\xRightarrow{\alpha=20^\circ} \text{tg}20^\circ+\text{tg}80^\circ+\text{tg}140^\circ = 3\text{tg}60^\circ$$

$$(\text{tg}140^\circ=-\text{tg}40^\circ) \Rightarrow \text{tg}20^\circ-\text{tg}40^\circ+\text{tg}80^\circ=3\text{tg}60^\circ \quad (1)$$

و از طرف دیگر نیز داریم:

$$\text{tg}\alpha\,\text{tg}(60^\circ+\alpha)\,\text{tg}(60^\circ-\alpha) = \text{tg}3\alpha$$

$$\xRightarrow{\alpha=20^\circ} \text{tg}20^\circ\text{tg}40^\circ\text{tg}80^\circ = \text{tg}60^\circ \quad (2)$$

از ۱ و ۲ داریم:

$$A = \frac{3\log60^\circ}{\text{tg}60^\circ} = 3$$

حل مسائل سال چهارم تجربی

۱ـ

$$f(x) = \frac{1-12mx}{4x-3m}$$

مرکز تقارن توابع هموگرافیک محل تلاقی مجانبهای قائم و افقی آنان می‌باشد، پس داریم:

$$I\begin{cases} x=\frac{3m}{4}\Rightarrow m=\frac{4}{3}x\\ y=\frac{-12m}{4}=-3m\end{cases}$$

(معادلهٔ مکان): $y=-3(\frac{4}{3}x)=-4x$

۲ـ $O(2,-3)$ مرکز هذلولی، $C=2\sqrt{3}$

$$a^2+b^2=c^2\Rightarrow a=b\Rightarrow 2a^2=c^2\Rightarrow 2a^2=12\Rightarrow a^2=6\Rightarrow a=b=\sqrt{6}$$

$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{6}=1$$

۳ـ

مختصات نقاط تلاقی: $\begin{cases} y^2=k^2x\\ x^2=k^2y\end{cases}\Rightarrow O(0,0),\ A(k^2,k^2)$

$$y_1=\frac{x^2}{k^2}\ ,\ \ y_2=\sqrt{k^2x}\quad S_0^{k^3}=\int_0^{k^3}(y_2-y_1)dx$$

$$S_0^{k^3}=\int_0^{k^3}\left(\sqrt{k^2x}-\frac{x^2}{k^2}\right)dx=\frac{k^6}{3}=72$$

$$\Rightarrow k^6=8\times 27\Rightarrow k^2=6\Rightarrow |k|=\sqrt{6}$$

۴.

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} cotg^m 2x\ \ cosec^2 2x\, dx=\frac{1}{14}$$

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{cotg^m 2x}{\sin^2 2x}dx=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} cotg^m 2x\,(1+cotg^2 2x)dx=$$

$$=\frac{-cotg^{m+1}2x}{2(m+1)}\Bigg|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{cotg^{m+1}2\frac{\pi}{8}}{2(m+1)}=\frac{cotg^{m+1}\frac{\pi}{4}}{2(m+1)}$$

$$=\frac{1}{2(m+1)}=\frac{1}{14}\Rightarrow m+1=7\Rightarrow \boxed{m=6}$$

۵.

$$m\,(1+\sin x+\cos x)=2\cos x+1$$

$$m+m\sin x+m\cos x-2\cos x=1$$

$$m\sin x+(m-2)\cos x=1-m$$

شرط اینکه معادلهٔ کلاسیک نوع اول:

$$9\sin x+b\cos x=c$$

دارای جواب باشد این است که داشته باشیم: $a^2+b^2\ge c^2$

پس برای معادلهٔ مفروض داریم:

$$m^2+(m-2)^2\ge(1-m)^2$$

$$m^2+m^2-4m+4\ge 1+m^2-2m\ \Rightarrow$$

$$m^2-4m+8\ge 0\Rightarrow (m^2-4m+4)+4\ge 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2+4>0$$

مین معادله همواره مثبت است پس معادله به ازای تمام مقادیر m دارای جواب است.

ادب ریاضی

هانری پوانکاره در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ متولد گردید و در مدرسهٔ متوسطهٔ شهر نانسی با همکار آینده‌اش پل آپل همشاگرد بود. دراین مدرسه مطالعات جالبی کرد و بدون شک شهرت او به عنوان ریاضی‌دان بزرگ آینده تا پاریس نیز رسید، زیرا هنگامی که خود را برای امتحان مسابقهٔ مدرسهٔ پلی تکنیک معرفی کرد (۱۸۷۳) یکی از ممتحنین جلسهٔ امتحان را مدت سه ربع ساعت متوقف ساخت تا برای او معماها و مسائل مشکل جدید بتراشد. و داوطلب مزبور نه تنها آن معماها را حل کرد بلکه راه حل جدیدی نیز برای آن کشف نمود. گذشته از آن امتحان مسابقهٔ او مشکل بزرگی از لحاظ وجدان برای هیأت ممتحنه تولید کرد؛ زیرا این جوان که می‌بایست با رتبهٔ اول در امتحانات پذیرفته شود در امتحان رسم نمرهٔ صفر داشت و در ورزش عدم لیاقت عجیبی از خود نشان داده بود. خوشبختانه بعد از دوران گالوآ نژاد ممتحنین اصلاح شده بودند، بنابراین نمرهٔ صفر را به ۱/۰ تبدیل کردند و با این حال با رتبهٔ اول پذیرفته شد.

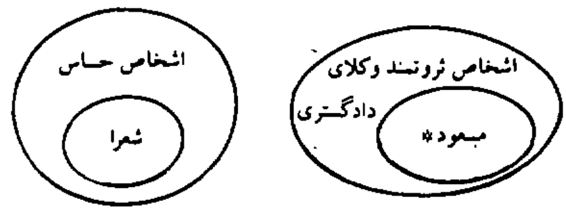
پی‌یر روسو. تاریخ علوم
حسن صفاری

نخستین گامها را در جهت پدید آوردن هندسهٔ غیر اقلیدسی دو ریاضی‌دان، نیکولای‌لوباچفسکی در روسیه و یانوش‌بولیوی در مجارستان، در دههٔ ۱۸۲۰ و اوایل دههٔ ۱۸۳۰ برداشتند. لوباچفسکی در سال ۱۷۹۲ در نیژنی‌نوگورود (گورکی امروزی) به دنیا آمد. در دانشگاه کازان درس خواند و در همان جا استاد شد. لوباچفسکی نیز مانند پیشینیان خود کوشید قضیهٔ خطوط موازی را به اثبات برساند؛ ولی بر خلاف ریاضی‌دانان پیشین، هنگامی که این را ناممکن یافت، گام منطقی بعدی را برداشت. او استدلال کرد که چون نمی‌شود به اثبات رسانید که از یک نقطه فقط یک خط می‌توان به موازات خط دیگر رسم کرد، پس می‌توان فرض کرد که بی‌نهایت خط می‌شود رسم کرد. بولیوی نیز، که افسر ارتش و ریاضی‌دانی نابغه بود، به همین نتیجه رسید. هر چند او وقتی شنید که گاوس نیز همین گامها را برداشته است، کار خود را فقط به عنوان ضمیمه به کتاب ریاضیات پدرش افزود. کاربولیوی تازه در اواخر دههٔ ۱۸۶۰ در جاهای دیگر شناخته شد، اما او دیگر مرده بود.

کالین اـ رنان. تاریخ علم کمبریج
حسن افشار

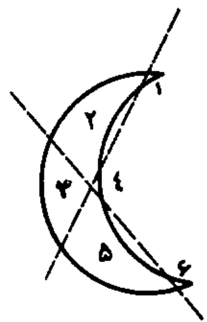
جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱ با توجه به شکلهای زیر:



می‌توان نتیجه گرفت که: مسعود شاعر نیست.

جواب ۲



جواب ۳

$\pi - 4$ واحد مربع. مربع دارای رؤس (۰ و ۴)، (۴ و ۰)، (۰ و ۰) و (۴ و ۴) را درنظر می‌گیریم. ناحیهٔ سایه خورده بنا به تقارن دارای مساحت $(4\pi - 16)(1/4)$ می‌باشد.

جواب ۴

دو مرتبه در محیط، شعاع، یا هر مقیاس خطی دیگر؛ چهار مرتبه در مساحت یا هرمقیاس مربع دیگر؛ و هشت مرتبه در حجم یا هر مقیاس مکعب دیگر.

جواب ۵

عدد دو رقمی نوشته شده روی تابلو اول را $\overline{ab}$ فرض می‌کنیم. در این‌صورت عدد نوشته شده روی تابلو دوّم $\overline{ba}$، و عدد نوشته شده روی تابلو سوم $\overline{a0b}$ یا $\overline{b0a}$ خواهد بود.

چون سرعت ثابت است، پس مسافت طی شده بین تابلوهای اوّل و دوّم یعنی: $\overline{ba} - \overline{ab}$ که از ۱۰۰ کمتر است، با مسافت پیموده شده بین تابلوهای دوّم و سوّم یعنی:

$\overline{a0b} - \overline{ba}$ یا $\overline{b0a} - \overline{ba}$ برابر می‌باشد. بنابراین با توجّه به اینکه $b>a$ است، عدد سه رقمی نوشته شده روی تابلو سوّم به‌صورت $\overline{a0b}$ و $a = 1$ می‌باشد. لذا داریم:

$$\overline{b1} - \overline{1b} = \overline{10b} - \overline{b1} \Rightarrow 10b + 1 - (10 + b)$$
$$= 100 + b - (10b + 1)$$
$$\Rightarrow b = 6 \Rightarrow \overline{ab} = 16 \text{ و } \overline{ba} = 61 \text{ و } \overline{a0b} = 106$$

$\Rightarrow$ سرعت اتومبیل $= 61 - 16 = 106 - 61 = 45$ کیلومتر در ساعت

In the name of God

Borhān

VOL. 3. No.1
Serial numbers; 8
Autumn 1993

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

1. The first word — editor
2. You, too, may be successful in your mathematics lessons — Parviz Shahriari
3. Derivablity — Ahmad Ghandehari
4. Instruction of translation of mathematics articles — Hamid Reza Amiri
5. In the garden of experiments
6. Inverse function of trigonometric function — Ali Hassan zadeh Makooi
7. A brief history of Persian mathematics Journals (7)
8. Distance of one point to a set points — Ahmad Sharafeddin
9. Fundamental concepts and axioms in solid geometry — Parvis shahriari
10. Method of proof by contradiction — Gholam Reza Yassipour
11. Ring and feild — Hamid Reza Amiri
12. Paradox of wonderful testaments — Hassan Nassirnia
13. Determination of domain and range of a function — M.R. Hashemi
14. Short articles of authentic mathematics journals (6) — Gholam Reza Yassipour
15. The verification around of p — Ehssan Rezaie
16. Solving a fundamental problem of mathematics by elementary methods (6)
17. Answer to letters
18. Solutions of contest problems of No. 6
19. Contest problems — M. R. Hashemi, Amiri, Ghandehari, Rostami, Hashemi
20. Problems
21. Solution and hints of problems of No. 7 — Amiri, Ghandehari, Rostami, Hashemi

روش «طبری» برای ضرب اعداد
(روش شبکه‌ای)

	۷	۰	۸	۶	
۱	۱ / ۴	۰ / ۰	۱ / ۶	۱ / ۲	۲
۷	۳ / ۵	۰ / ۰	۴ / ۰	۳ / ۰	۵
۹	۲ / ۸	۰ / ۰	۳ / ۲	۲ / ۴	۴
	۹	۸	۴	۴	

$$۷۰۸۶ \times ۲۵۴ = ۱۷۹۹۸۴۴$$

این روش ضرب را از کتاب «**شمارنامه**» تألیف محمد فرزند ایوب معروف به طبری برداشته‌ایم که در سالهای آخر سدهٔ چهارم و نیمهٔ اول سدهٔ پنجم هجری قمری در آمل مازندران و در دوران حکومت ایرانی آل‌بویه می‌زیسته است. او ریاضی‌دان و اخترشناس مسلمان ایرانی بود و از نخستین کسانی است که یک کتاب علمی را به زبان فارسی نوشته است. در «**شمارنامه**» با این که واژه‌ها و اصطلاحهای فراوان عربی دیده می‌شود، از واژه‌های فارسی زیادی (که باید ابتکار خود مؤلف باشد) مثل «افزودن»، «زدن»، «کاستن و کاهانیدن»، «سه یک»، «چهاریک»، «به دو نیم کردن» و ... استفاده شده است. طبری واژهٔ «شمارنامه» را به جای «حساب» به کار برده است. شیوهٔ ضرب عددها، با این روش، از جدول بالا روشن است.

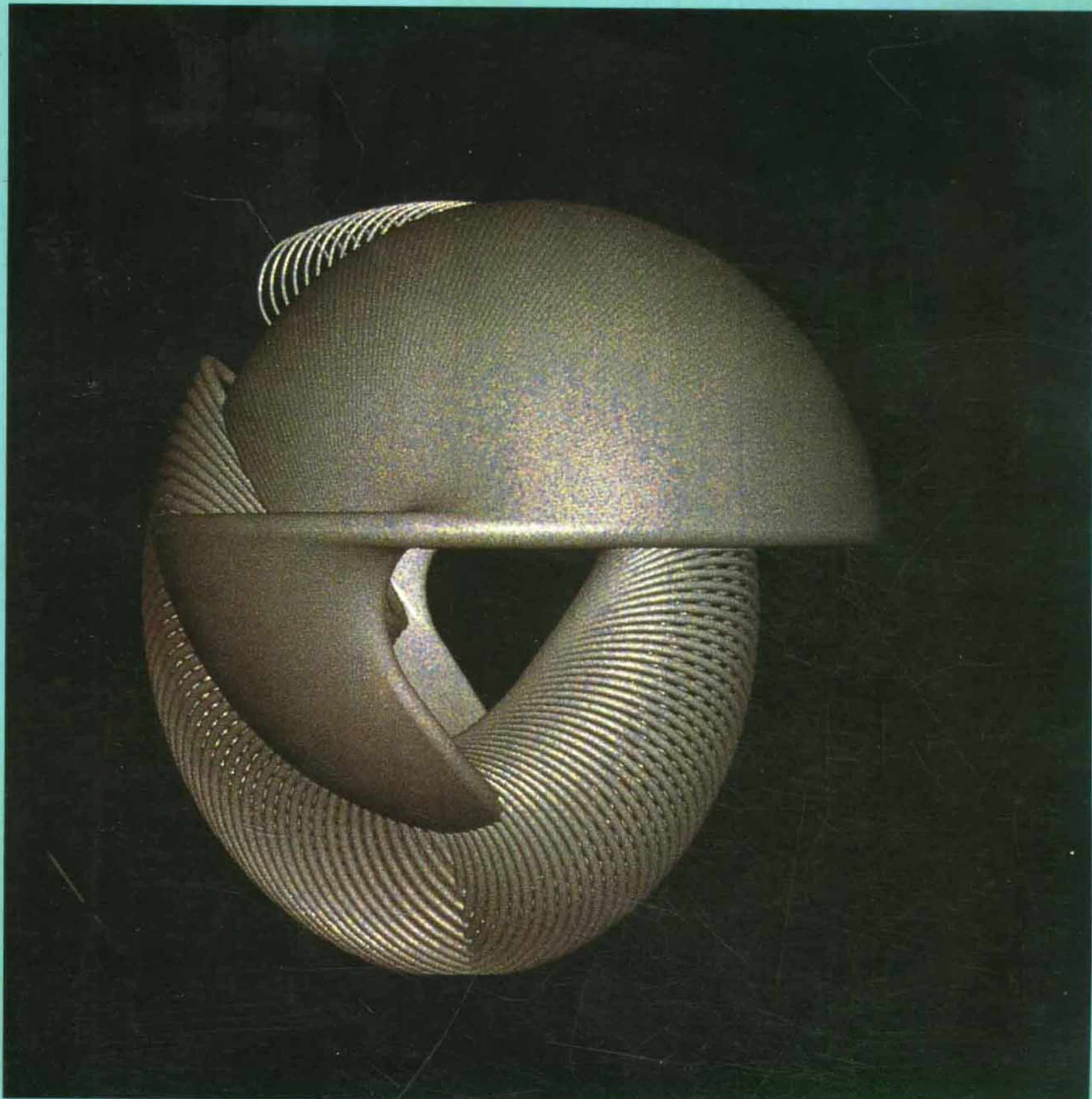
مجله ریاضی

برهان

برای دانش‌آموزان دبیرستان

۹

سال سوم، زمستان ۱۳۷۲ شماره دوم، بها ۱۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

سال سوم، زمستان ۱۳۷۲، شمارهٔ دوم

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۴ـ طرح معماهای ریاضی
۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

• حرف اول ۱
• شما هم می‌توانید دردرس ریاضی خود موفق باشید(۹)/ پرویز شهریاری ۲
• معادله درجه سوم و حل آن/احمد قندهاری و مهدی قمصری ۷
• آموزش ترجمه متون ریاضی (۵)/حمیدرضا امیری ۲۰
• مکان هندسی/محمدهاشم رستمی ۲۴
• تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۸)/ ۲۹
• مفهومهای اصلی واصل موضوعهادرهندسه‌فضایی(قسمت‌سوم)/ پرویز شهریاری ۳۸
• توابع گزاره‌ای و سورها/غلامرضا یاسی‌پور ۴۳
• دوران در هندسه تحلیلی/محمدابراهیم گیتی‌زاده ۴۶
• پارامترهای جبری متجانس/دکتر احمد شرف‌الدین ۵۴
• آشنایی با مشاهیر ریاضی جهان/غلامرضا یاسی‌پور ۵۸
• طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۷)/ غلامرضا یاسی‌پور ۶۱
• مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان(۷)/نغمه شریک‌زاده ۶۲
• نظریه گراف/غلامرضا یاسی‌پور ۶۵
• اصل حجره‌ها/مهدی نساجی (سال سوم دبیرستان) ۷۴
• جواب نامه‌ها/ ۷۹
• حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۷ ۸۲
• مسائل مسابقه‌ای/حمیدرضا امیری ۸۳
• مسائل برای حل/ ۸۴
• حل مسائل برهان ۸/ ۸۹

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه بهرام چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷، ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، فاکس ۸۸۲۰۵۹۹

حرف ۱ اول

باسمه تعالی

امروز بسیاری از کشورهای صنعتی و پیشرفتهٔ جهان، توسعهٔ اقتصادی و علمی خود را مرهون تلاشهای علمی و پژوهشی علما و دانشمندان خود می‌دانند. در واقع این اندیشمندان و متفکران یک جامعه‌اند که با تفکر و تحقیق و تلاشهای پیگیر و گاهی طاقت‌فرسا، ضمن بالابردن سطح علمی جامعه، صنعت و تکنولوژی را به خدمت انسان درمی‌آورند تا جامعه در رفاه و آسایش به‌سر برد. حال این‌که چرا در بسیاری از کشورهای پیشرفته صنعتی، علی‌رغم رشد روزافزون تکنولوژی و دستاوردهای چشمگیر آن، هنوز بشر به آرامش و آسایش واقعی نرسیده و اسیر دست صنعت و تکنولوژی است؟؛ بحثی است که احتیاج به تأمل و بررسی زیادی ندارد، زیرا جهان امروز بدون پشتوانه و بهره‌گیری از تکیه‌گاه‌های معنوی و بدون توجه به فطرت حق‌جو و عدالت‌طلب انسان از نردبان علم بالا می‌رود و متأسفانه همچون پرنده‌ای تک‌بال قدرت پرواز و اوج‌گیری در آسمان آرامش را ندارد.

ما دراین‌جا نمی‌خواهیم علل این صعود وسقوط را بررسی‌کنیم، بلکه می‌خواهیم بگوییم که ما نباید درحالی‌که به‌توسعه وبازسازی ساختارهای‌مختلف جامعه مشغول‌هستیم، پژوهش وتحقیقات علمی‌را نادیده‌بگیریم و یا رشد کمّی وکیفی علوم‌ریاضی خودرا درحد بازیافته‌های‌کلاسیک محدود کنیم.

پس بر ماکه در آغاز یک حرکت نوین علمی در جامعه هستیم، لازم است که حسّ برتری جویی و فزون‌طلبی در کسب علم را در خود تقویت کنیم و با تکیه بر منابع معنوی و پشتوانه‌های علمی و فرهنگی خود، در راه بازسازی تلاش کنیم و هرگز فراموش نکنیم که بزرگترین پشتوانهٔ فرهنگی ما قرآن و سخنان پیامبر(ص) و امامان ما علیهم‌السلام است. این سخن را با پیامی نورانی از امام‌صادق(ع) به پایان می‌برم. باشد که توفیق شاگردی در مکتب ایشان نصیب ما شود. امام صادق(ع) فرمودند: «دانش، دوست مؤمن است.»

سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۹)

پرویز شهریاری

کار در منزل

قبل از هرچیز تأکید می‌کنم، تکلیفهای مربوط به هر درس را، در همان روزی انجام دهید که درسش را در دبیرستان خوانده‌اید. فرض کنید امروز دوشنبه است و شما درس جبر داشته‌اید. وقتی بعد از پایان کلاسها به منزل می‌رسید، دفتر جبر خود را بردارید و تکلیفهای جبر را انجام دهید. اگر فقط هفته‌ای یکبار و روزهای دوشنبه با دبیر جبر خود روبه‌رو می‌شوید، تکلیف هرهفته را باید عصر دوشنبهٔ همان هفته انجام دهید، نه عصر یک‌شنبهٔ هفتهٔ بعد. شما هرقدر هم که حافظه‌ای نیرومند داشته باشید، با گذشت یک هفته، بسیاری از نکته‌هایی را که در کلاس شنیده‌اید، از یاد می‌برید و، در نتیجه، نمی‌توانید با موفقیت کامل بر موضوع درس مسلط شوید.

اگر از همان روز نخست سال تحصیلی، کارهای مربوط به هر درس را در همان روزی انجام دهید که درسش را خوانده‌اید، به‌طور محسوسی از دشواریهای شما کاسته می‌شود. بعد از به پایان رساندن کارهای مربوط به همان روز، کافی است مراجعه‌ای تند به درسهای فردای آن روز بکنید تا برای فردا آمادگی کامل داشته باشید. می‌گویم مراجعه‌ای تند به درسها و تکلیفهای فردا کافی است، زیرا هفتهٔ قبل، دربارهٔ همهٔ زیر و بمهای درسهای فردا دقت کرده‌اید، تکلیفها را به‌طور کامل انجام داده‌اید و اگر با دشواریهای احتمالی برخورد کرده‌اید، در روزهای بعد، ضمن مشورت با هم‌کلاسیها و یا مراجعه به دبیران خود آنها را برطرف ساخته‌اید و حالا، تنها کافی است نگاهی به آنها بیندازید تا همه چیز دوباره به یادتان بیاید.

اکنون ببینیم، برای انجام تکلیفها چه باید کرد! برای هر درس یک دفترچه داشته باشید (تنها یکی) نوع دفترچه و جنس کاغذ و جلد آن، حتی تعداد صفحه‌های آن مهم نیست. اگر دفترچه تمام شد، می‌توانید دفترچهٔ دیگری بردارید و کارتان را روی آن ادامه دهید. همهٔ کارهای خود را در همین یک دفتر انجام دهید. چیزی را پاک نکنید. اگر اشتباهی رخ داد، خط نازکی روی آن بکشید. باید برای خودتان و هم برای دبیرتان روشن باشد، بیشتر در چه زمینه‌هایی اشتباه می‌کنید! تمیزی کار در این نیست که خط خوردگی نداشته باشد، در این است که منظم و خوانا نوشته باشید. یکی از شیوه‌های بی‌نظمی ـ که با کمال تأسف، بسیاری از دانش آموزان، به آن گرفتارند، بی‌ترتیبی نوشته‌هاست؛ به این معنا که مطلب را ـ مثلاً ضمن دنبال کردن حل یک معادله ـ گاهی به‌صورت ستونی و گاهی به‌صورت افقی می‌نویسند. نوشتهٔ شما باید طوری باشد که اگر کسی بخواهد آن را دنبال یا بازبینی کند، دچار سر درگمی نشود و براحتی متوجه شود، بعد از هر جمله یا فرمول، کدام جمله یا فرمول آمده است!

به‌عقیدهٔ من، بهترین روش نوشتن، صورت افقی آن است: اگر با مطلب توضیحی و توصیفی سر و کار دارید، از راست به چپ، و اگر رابطه‌ها، دستورها و نمادها را به‌کار می‌برید، از چپ به راست. در ضمن، وقتی با رابطه‌ها و نمادها سر و کار دارید، به این چند نکته توجه کنید:

۱) اگر از دو طرف برابری چیزی را حذف می‌کنید، اگر صورت و مخرج کسری را ساده می‌کنید، اگر به‌جای چند جملهٔ متشابه، مجموع

جبری آنها را می‌نویسید،... چیزی را خط نزنید، بلکه این عملها را با نمادهایی که می‌شناسید مشخص کنید:

$$\frac{۹۵}{۱۳۳} = \frac{۹۵:۱۹}{۱۳۳:۱۹} = \frac{۵}{۷};$$

$$۳x^۲ - ۴x = ۱ - ۲x^۲ \Leftrightarrow ۵x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \quad :$$

۲) اگر برای انجام تبدیلی یا عملی، شرطی وجود دارد، ذکر شرط را فراموش نکنید:

$$\frac{a^۲ - b^۲}{a - b} = a + b \ (\text{به شرط } a \neq b) \ ;$$

$$mx = ۱ \Leftrightarrow x = \frac{۱}{m} \ (\text{به شرط } m \neq ۰) \ ;$$

همین‌جا به این نکته هم اشاره کنیم که، اگر برای عمل خود توضیحی دارید، آن را در مقابل عملی که انجام داده‌اید یادداشت کنید.

مثال: می‌خواهیم عبارت $x^۳ + y^۳ + g^۳ - ۳xyg$ را به صورت ضرب دو عامل تجزیه کنیم.

حل: عبارت $x^۳ + y^۳ + g^۳$ را به‌صورت:

$$(x+y+g)(x^۲+y^۲+g^۲) - xy^۲ - xg^۲ - x^۲y - yg^۲ - x^۲g - y^۲g$$

و عبارتِ $-۳xyg$ را به‌صورت

$$-xyg - xyg - xyg$$

می‌نویسیم و به این ترتیب گروه‌بندی می‌کنیم:

$$x^۳+y^۳+g^۳ - ۳xyg = (x+y+g)(x^۲+y^۲+g^۲) -$$
$$-(x^۲y + xy^۲ + xyg) - (x^۲g + xyg + xg^۲) -$$
$$-(xyg + y^۲g + yg^۲) = (x+y+g)(x^۲+y^۲+g^۲)$$
$$-xy(x+y+g) - xg(x+y+g) - yg(x+y+g) =$$
$$= (x+y+g)(x^۲+y^۲+g^۲ - xy - xg - yg)$$

به هر حال، هرجا که لازم است توضیح بدهید از چه قانونی، چه دستوری و چه استدلالی استفاده کرده‌اید؟ چه نتیجه‌ای به‌دست آورده‌اید؟ برای به‌دست آوردن این نتیجه، چه شرط یا شرطهایی لازم است؟ ...

۳) وقتی از چپ به راست می‌نویسید، ممکن است تمامی مطلب در یک سطر جا نگیرد و مجبور شوید بقیهٔ آن را در سطر بعد بنویسید، در این‌صورت آخرین نماد سطر قبل را در آغاز سطر بعد تکرار کنید:

$$x^۴ + y^۴ - x^۲y^۲ =$$
$$= (x^۲ + y^۲)^۲ - ۳x^۲y^۲ =$$
$$= (x^۲ + y^۲ + xy\sqrt{۳})(x^۲ + y^۲ - xy\sqrt{۳})$$

(در دفتر خود، اول خلاصهٔ درسی را که معلم داده است، بنویسید) برای این منظور سعی کنید، تنها با به یادآوردن سخنان معلم و با مراجعه به واژه‌ها و اشاره‌هایی که سرکلاس نوشته‌اید، موضوع درس را روی کاغذ بیاورید. مراجعه به کتاب درسی یا هر کتاب دیگر، مانعی ندارد، ولی تنها وقتی به آن مراجعه کنید که گیر کرده باشید. از رونویسی جمله‌های کتاب و یا تمرینهای حل شدهٔ آن، خودداری کنید. خودتان بنویسید: با قلم خودتان و با فکر و استدلال خودتان، آن‌طور که فهمیده‌اید و قانع شده‌اید. در ضمن، نوشتهٔ شما باید چنان باشد که نه در جمله بندیهای آن و نه در نوع استدلالها، کمبودی وجود نداشته باشد و هرکسی بتواند از آن استفاده کند. اگر سر کلاس، تمرینی حل شده یا دستور تازه‌ای ثابت شده، به نقل سادهٔ آن اکتفا نکنید. ببینید با درس قبل چه رابطه‌ای دارد! چگونه می‌توان آن را تعمیم داد؟ چه نتیجه‌هایی از آن به‌دست می‌آید؟ آیا می‌توانید خودتان، مسأله‌ای برای این درس یا این دستور درست کنید؟ آیا راه حل و یا استدلال معلم را پسندیده‌اید؟ اگر ایرادی به آنها دارید و آنها را قانع کننده نمی‌دانید و یا راه حل تازه‌ای به‌نظرتان می‌رسد (ولو این‌که راه حل شما دشوارتر باشد)، همه را یادداشت کنید.

یادداشت خلاصهٔ درس کلاس، باید به میدانی برای زورآزمایی فکری شما تبدیل شود. می‌توانید و باید دربارهٔ همهٔ استدلالها و دربارهٔ همهٔ راه حلها، نظرتان را بگویید. هرگونه شکی که نسبت به گفته‌های دیگران به دل خود راه دهید ـ ولو این که شک شما به جا و درست نباشد ـ می‌تواند در رشد فکری شما و در سلامتی و استحکام اندیشهٔ شما، نقشی جدی داشته باشد.

به نمونه‌ای بپردازیم. در کلاس مثلثات، دستورهای مربوط به تابعهای مثلثاتی کمان دو برابر و کمان سه برابر را ثابت کرده‌اند:

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \quad ;$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad ;$$
$$\sin 3a = -4\sin^3 a + 3\sin a \quad ;$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

(دراین‌جا، به اثبات درستی این دستورها نپرداخته‌ایم، ولی شما باید در دفتر مثلثات خود، آن را بیاورید؛ از این به بعد هم، برای کوتاهی مطلب، از بسیاری از استدلالها و محاسبه‌ها صرف‌نظر کرده‌ایم). خیلی جالب است. در بسط $\sin 3a$ و $\cos 3a$، ضریبها در سمت راست برابری، قرینهٔ یکدیگرند و دو دستور مربوط به $\sin 3a$ و $\cos 3a$ خیلی به‌هم شباهت دارند. درحالی که در مورد $\sin 2a$ و $\cos 2a$ چنین نیست ...

کار را ادامه دهیم، ببینیم برای کمانهای $4a$ و $5a$ چه پیش می‌آید. نتیجه‌ها چنین است:

$$\sin 4a = 4\sin a\cos^3 a - 4\sin^3 a\cos a \quad ;$$
$$\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1 \quad ;$$

این‌جا هم نتیجه‌های بسط $\sin 4a$ و $\cos 4a$ شباهتی ندارند، ولی برای کمان $5a$ به‌دست می‌آید:

$$\sin 5a = 16\sin^5 a - 20\sin^3 a + 5\sin a \quad ;$$
$$\cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$$

شباهت بیشتر شد. ضریبها نه تنها از لحاظ قدرمطلق، که از لحاظ علامت هم، یکی هستند... دستورهای مربوط به کمانهای $3a$ و $5a$، این «قانونها» را به ما تلقین می‌کنند. اینها به‌صورت استقرایی به‌دست می‌آیند که البته نیاز به اثبات دارند.

برای $\sin n a$ و $\cos n a$، وقتی n عددی فرد باشد ($n = 2k + 1$ ، $k \in Z$):

۱) می‌توان $\sin n a$ را برحسب توانهای $\sin a$ و $\cos n a$ را برحسب توانهای $\cos a$ نوشت؛

۲) در بسط $\sin n a$ ($\cos n a$)، نتیجه نسبت به $\sin a$ ($\cos a$) از درجهٔ n و تنها شامل توانهای فرد است؛

۳) در هر حال، مجموع ضریبهای عددی دربسط $\sin n a$ و $\cos n a$، قدر مطلقی برابر واحد دارد؛

۴) ضریب‌بزرگترین‌درجه‌در بسط $\cos (2k+1) a$ $(k \in Z)$ همیشه مثبت است؛

۵) ضریب بزرگترین درجه در بسط $\sin n a$ و $\cos n a$، از لحاظ قدر مطلق برابر است با 2^{n-1}.

۶) در حالت $n = 4k+1$ $(k \in Z)$ ضریبهای جمله‌های هم درجه در بسطهای $\sin n a$ و $\cos n a$ با هم برابر و در حالت $n = 4k-1$ قرینهٔ یکدیگرند. (سعی کنید این «قانونها» را ثابت کنید.)

اگر این «قانونها» درست باشند، می‌توان مثلاً $\cos 7a$ را، بدون بسط مستقیم، به‌دست آورد. باید داشته باشیم:

$$\cos 7a = 64\cos^7 a + A\cos^5 a + B\cos^3 a + C\cos a \qquad (*)$$

برابری (*) یک اتحاد و، بنابراین، به ازای هر مقدار حقیقی a برقرار است. اگر a را به‌ترتیب برابر ۰، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ قرار دهیم، بعد از تبدیلهای ساده، به این سه معادلهٔ سه مجهولی (برای A و B و C) می‌رسیم:

$$\begin{cases} A+B+C = -63 \\ A+2B+4C = -28 \\ A+4B+16C = 0 \end{cases}$$

که از آن، به‌دست می‌آید:

$$A = -112 \text{ , } B = 56 \text{ , } C = -7$$

یعنی:

$$\cos 7a = 64\cos^7 a - 112\cos^5 a + 56\cos^3 a - 7\cos a$$

با توجه به «قانون» ۶:

$$\sin 7a = -64\sin^7 a + 112\sin^5 a - 56\sin^3 a + 7\sin a$$

در ضمن، با بسط مستقیم sin۷a و cos۷a آزمایش شد؛ نتیجه‌ها درست است (این آزمایش را انجام دهید).

جالبتر از همه این است که، به‌کمک این بسطها، می‌توان برخی معادله‌های جبری بالاتر از درجه دوم را حل کرد. به این معادله توجه کنیم:

$$۳۲x^۵-۴۰x^۳+۱۰x-۱=۰ \quad (۱)$$

که اگر فرض کنیم x=cost، به این معادله می‌رسیم:

$$\cos ۵t=\frac{۱}{۲}=\cos ۶۰^\circ$$

حلِّ این معادلهٔ مثلثاتی ساده است و به‌دست می‌آید:

$$t=۷۲k^\circ \pm ۱۲^\circ \quad (k\in \mathbb{Z})$$

در نتیجه، برای ریشه‌های معادلهٔ جبری (۱)، به این جوابها می‌رسیم:

$$x_۱=\cos ۱۲^\circ,\ x_۲=\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲},\ x_۳=\cos ۸۴^\circ=\sin ۶^\circ,$$

$$x_۴=\cos ۱۳۲^\circ=-\cos ۴۸^\circ,\ x_۵=\cos ۱۵۶^\circ=-\cos ۲۴^\circ$$

در این جا توجه دانش‌آموزان را به دو نکته جلب می‌کنیم:

نکتهٔ اول: معادلهٔ (۱) یک معادلهٔ جبری است و ما عادت کرده‌ایم ریشه‌های یک معادلهٔ جبری را به‌صورت عددهای جبری در اختیار داشته باشیم. ولی اگر مایل باشیم می‌توانیم این ریشه‌ها را به‌صورت جبری هم بنویسیم. اگر به یاد بیاوریم:

$$\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲},\ \cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲},\ \sin ۱۸^\circ=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴},$$

$$\cos ۱۸^\circ=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}$$

آن‌وقت، برای محاسبهٔ $x_۱$، به‌ترتیب داریم:

$$x_۱=\cos ۱۲^\circ=\cos(۳۰^\circ-۱۸^\circ)=$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cdot\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}=$$

$$=\frac{\sqrt{۶(۵+\sqrt{۵})}+\sqrt{۵}-۱}{۸} \quad (۲)$$

بقیهٔ ریشه‌ها را هم می‌توان، با همین روش، به‌صورت جبری درآورد:

$$\sin^۲ ۶^\circ=\frac{۱-\cos ۱۲^\circ}{۲},\ ۴۸^\circ=۳۰^\circ+۱۸^\circ,\ ۲۴^\circ=۳۰^\circ-۶^\circ$$

ولی حقیقت این است که ریشه‌های معادلهٔ (۱)، به‌صورت مثلثاتی خود بسیار ساده‌تر و ملموس‌تر از بیان آنها به‌صورت جبری هستند: برای مقدار تقریبی $\cos ۱۲^\circ$ می‌توان بلافاصله به جدول مراجعه کرد، درحالی که برای به‌دست آوردن مقدار تقریبی x، وقتی به‌صورت جبری (۲) باشد، باید عملهایی طولانی را تحمل کرد.

و اما نکتهٔ دوم: می‌دانیم هر معادلهٔ جبری، به‌شرطی که جملهٔ بزرگترین درجهٔ آن، با توان فرد باشد:

$$ax^{۲n+۱}+bx^{۲n}+\ \dots\ +\ell=۰$$

دست‌کم یک ریشه حقیقی دارد. به این معادلهٔ درجه سوم توجه کنید:

$$۴x^۳-۳x-۵\sqrt{۲}=۰ \quad (۲)$$

معادلهٔ (۲)، بسادگی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(x-\sqrt{۲})(۴x^۲+۴\sqrt{۲}x+۵)=۰$$

معادلهٔ (۲)، یک ریشهٔ حقیقی $(x=\sqrt{۲})$ و دو ریشهٔ موهومی دارد. اکنون اگر فرض کنیم x= cos t، به معادلهٔ

$$\cos ۳t=۵\sqrt{۲} \quad (۳)$$

می‌رسیم. $۵\sqrt{۲}$ از واحد بزرگتر است و، بنابراین، برای t جوابی حقیقی به‌دست نمی‌آید. این تناقض را چگونه باید حل کرد؟ و آیا، به‌واقع، به یک تناقض برخورده‌ایم؟

حقیقت این است که تابعهای مثلثاتی را می‌توان به‌صورت تحلیلی تعریف کرد. **اولر** ثابت کرد:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad و \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad (4)$$

که درآنها، e عبارت‌است‌از عدد **نپر** (مبنای‌لگاریتم‌طبیعی و به تقریب برابر ۲/۷۲)، e عددی گنگ و غیر جبری است) و $i=\sqrt{-1}$.

اگر از این رابطه‌ها اطلاع داشته باشیم و اگر با عددهای مختلط و عمل با آنها آشنا شویم، آن‌وقت می‌توانیم ریشهٔ حقیقی معادلهٔ (۲) را، به‌کمک معادلهٔ (۳) پیدا کنیم. با توجه به رابطه‌های (۴)، مفهوم تابع مثلثاتی از محدودهٔ تنگ خود آزاد می‌شود و مثلاً تابعهای مثلثاتی عددهای موهومی معنا پیدا می‌کند. در ضمن تابع مثلثاتی یک عدد موهومی، الزاماً مقداری موهومی نیست، به‌عنوان نمونه:

$$\cos\sqrt{-1} = \frac{e^{-1}+e}{2} = \frac{e^2+1}{2e},$$

و از این شگفت‌تر، رابطه‌ای است که بین عددهای گنگ و غیر جبری π و e و عدد موهومی $\sqrt{-1}$ وجود دارد:

$$e^{2k\pi i}=1 \qquad (k\in Z,\ i=\sqrt{-1})$$

یادآوری می‌کنیم، **غیاث‌الدین جمشید کاشانی**، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی که در کاشان و سپس در سمرقند در دربار **الغ بیگ** کار می‌کرد، با استفاده از برابری

$$\sin 3^\circ = -4\sin^3 1^\circ + 3\sin 1^\circ$$

و با در دست داشتن مقدار $\sin 3^\circ$، توانست مقدار $\sin 1^\circ$ را با تقریب خوبی به‌دست آورد.

□

دامنهٔ بحث دربارهٔ این درس مثلثات، چنان گسترده است که، با اندکی صرف وقت، می‌توانید نتیجه‌های بسیاری به‌دست آورید (به یاد داشته باشید که ما در این‌جا دربارهٔ $\operatorname{tg}3a$ صحبتی نکردیم؛ همچنین با توجه به بسط $\operatorname{tg}(a+b+c)$ می‌توان به نتیجه‌های بسیار جالبی رسید که باز هم به آنها نپرداختیم)، که البته، برای دراز نشدن مطلب از آنها می‌گذریم، ولی از دانش‌آموزان می‌خواهیم تا آن‌جاکه می‌توانند، دامنهٔ بحث را گسترش دهند و خود به نتیجه‌های لازم برسند.

تا بعد

تمرین اندیشه ۱

مربع مقابل را با عددهای ۶ تا ۲۵ طوری تکمیل کنید که مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و دو قطر آن برابر ۶۵ شود (مربع وفقی یا مربع جادویی).

۱		۳		
				۲
۵				
			۴	

ترجمهٔ سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحهٔ ۹۶

معادله درجه سوّم و حل آن

احمد قندهاری و مهدی قمصری

معادله درجه سوّم: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

بخش اوّل:

حلّ معادلهٔ درجهٔ سوّم: روشهایی کلی، برای حلّ معادلهٔ درجهٔ سوم وجود دارد که به علت مفصّل بودن فرمولهای آن عملاً از آنها استفاده نمی‌شود. اینک حلّ معادلهٔ درجهٔ سوم را در حالتهای زیر بررسی می‌کنیم:

۱ـ اگر در معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ مجموع ضرایب صفر باشد، آن معادله بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است.

اثبات:

$\Rightarrow a + b + c + d = 0$ مجموع ضرایب معادله صفر است.

$$\Rightarrow d = -a - b - c$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx - a - b - c = 0$$

$$\Rightarrow a(x^3-1) + b(x^2-1) + c(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow a(x-1)(x^2+x+1) + b(x-1)(x+1) + c(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)\Big((ax^2 + (a+b)x + (a+b+c)\Big) = 0$$

مثال: معادلهٔ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ را حل کنید.

حل: چون مجموع ضرایب صفر است، معادله بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است. معادله را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شود:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \div (x-1) = x^2 - 5x + 6$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1, 2, 3}$$

۲ـ اگر در معادله درجهٔ سوّم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$، $a + c = b + d$، آنگاه معادله بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

اثبات:

$$a + c = b + d \Rightarrow d = a + c - b$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + a + c - b = 0$$

$$\Rightarrow a(x^3+1) + b(x^2-1) + c(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow a(x+1)(x^2-x+1) + b(x-1)(x+1) + c(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)\Big(ax^2 + (b-a)x + a - b + c\Big) = 0$$

مثال: معادلهٔ $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ را حل کنید.

چون در این‌معادله $a + c = b + d$، پس معادله بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است. معادله را بر $(x+1)$ تقسیم‌می‌کنیم تا تجزیه شود.

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 \div (x+1) = x^2 - 7x + 12$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2 - 7x + 12) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1, 3, 4}$$

۳ـ به کمک فاکتورگیری از راه دسته‌بندی بعضی از معادله‌های درجهٔ سوم قابل حل‌اند.

مثال: معادلهٔ $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-3) - 4(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x^2-4) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 3 \ , \ \pm 2}$$

۴ـ اگر $x = \lambda$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوّم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشد، آنگاه معادله بر $(x - \lambda)$ بخش‌پذیر است.

اثبات:

فرض می‌کنیم $x = \lambda$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$: (۱) باشد، پس می‌توان نوشت:

$$(2): \ a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

دو معادلهٔ (۱) و (۲) را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow a(x^3 - \lambda^3) + b(x^2 - \lambda^2) + c(x - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow a(x-\lambda)(x^2 + \lambda x + \lambda^2) + b(x-\lambda)(x+\lambda) + c(x-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (x-\lambda)\left(ax^2 + (a\lambda + b)x + a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0$$

مثال: اگر $x = 2$، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^3 + mx^2 - 2x + 4 = 0$ باشد، معادله را حل کنید:

حل:

$$x = 2 \Rightarrow 8 + 4m - 4 + 4 = 0 \Rightarrow m = -2$$

$$\Rightarrow x^3 + mx^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \ \Big| \ \underline{x - 2}$$
$$x^2 - 2$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2-2) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 2 \ , \ \pm\sqrt{2}}$$

۵ـ اگر ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ عضو (Z) باشند، عدد ثابت معادله بر هریک از ریشه‌ها بخش‌پذیر است. به عبارت دیگر، ریشه‌های معادله عضو مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های جبری عدد ثابت معادله‌اند.

اثبات:

اگر ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را x_1 و x_2 و x_3 بنامیم، بعداً خواهیم دید که $x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a}$.

چون x_1 و x_2 و x_3 عضو (Z) می‌باشند چون: $a = 1$ پس $x_1 . x_2 . x_3 = -d$ بنابراین عدد (d) بر هریک از عددهای x_1 و x_2 و x_3 بخش‌پذیر است. بنابراین x_1 و x_2 و x_3 عضو مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های جبری عدد (d) می‌باشند.

مثال: اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ عضو (Z) باشند، معادله را حل کنید.

حل: عدد ثابت معادله (۲۰) است و مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های جبری آن عبارت است از: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}$
مسلماً (۱+) یا (۱−) نمی‌تواند یکی از ریشه‌های این معادله باشد زیرا نه مجموع ضرایب صفر است و نه $a + c = b + d$، پس از $x = 2$ شروع می‌کنیم به جایگذاری در معادله:

$$x = 2 \Rightarrow 8 - 20 - 8 + 20 = 0$$

پس $x = 2$ یکی از ریشه‌های این معادله است.

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \quad \big| \, x - 2 \quad \quad x^2 - 3x - 10$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2 - 3x - 10) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 2, -2, 5}$$

۶ـ اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه‌سوّم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ به صورت کسرهایی گویا به فرم $\frac{p}{q}$ باشد p و $q \in Z$، آنگاه p عدد d را می‌شمرد و q عدد a را می‌شمرد. به عبارت دیگر، عدد p عضو مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های جبری عدد ثابت (d) است و q عضو مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های جبری عدد (a) خواهد بود.

اثبات:

اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های حقیقی معادله $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشد، بعداً خواهیم دید که $x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a}$. حال اگر x_1 و x_2 و x_3 به فرم کسرهایی نظیر $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ باشند داریم: $\frac{pp'p''}{qq'q''} = -\frac{d}{a}$ بنابراین d بر p و p' و p'' و a بر q و q' و q'' بخش‌پذیر خواهد بود.

مثال: اگر ریشه‌های معادلهٔ $16x^3 - 60x^2 + 56x - 15 = 0$ به صورت کسرهایی گویا مانند: $\frac{p}{q}$ ، $(p, q \in Z)$ باشند، معادلهٔ فوق را حل کنید:

حل:

$$x_1 = \frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases} p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\} \\ q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\} \end{cases}$$

با بررسی مختصری، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(x = \frac{1}{2})$ پیدا می‌شود که برای حل، معادله را بر $(x - \frac{1}{2})$ تقسیم می‌کنیم.

$$16x^3 - 60x^2 + 56x - 15 \quad \big| \, x - \frac{1}{2} \quad \quad 16x^2 - 52x + 30$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})(16x^2 - 52x + 30) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{4}}$$

توجه: قواعد فوق در معادلهٔ درجهٔ (n) ام نیز صادق است. به علت طولانی شدن مطلب، قواعد فوق در معادلهٔ درجهٔ سوم بررسی شده است.

۷ـ داریم: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

اگر معادله‌ای درجه سوم دارای جمله‌هایی نظیر: $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2$ باشد به کمک اتحاد فوق قابل حل است.

مثال: معادلهٔ $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$ را حل کنید.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3 \Rightarrow (x-1)^3 = 3 \Rightarrow$$

$$x - 1 = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \boxed{x = 1 + \sqrt[3]{3}}$$

بخش دوّم:

بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه سوّم.

برای بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باید معادله را به فرم معادلهٔ قابل بحث $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کرد.

برای پیدا کردن تبدیل مورد نیاز x را به $X + k$ تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow a(X+k)^3 + b(X+k)^2 + c(X+k) + d = 0$$

$$\Rightarrow aX^3 + (3ak + b)X^2 + (3ak^2 + 2bk + c)X$$

$$+ (k^3 + bk^2 + ck + d) = 0$$

برای این‌که، این معادله به معادلهٔ قابل بحث تبدیل شود لازم است ضریب X^2 را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\Rightarrow 3ak + b = 0 \quad \Rightarrow k = -\frac{b}{3a}$$

ازاین‌جا نتیجه‌می‌شودکه‌اگر درمعادلهٔ $ax^{3} + bx^{2} + cx + d = 0$ x را به $(X - \frac{b}{3a})$ تبدیل کنیم معادله، به معادلهٔ قابل بحث $X^{3} + pX + q = 0$ تبدیل می‌شود.

مثال: معادلهٔ $x^{3} + 6x^{2} + 9x + 1 = 0$ را به معادلهٔ قابل بحث تبدیل کنید.

$$x \to X - \frac{b}{3a} = X - \frac{6}{3} = X - 2$$

$$\Rightarrow (X-2)^{3} + 6(X-2)^{2} + 9(X-2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow X^{3} - 3X - 1 = 0$$

تذکر: چنانچه معادلهٔ درجهٔ سوم به صورت $ax^{3} + bx^{2} + d = 0$ باشد، برای تبدیل آن به معادله قابل بحث کافی است.

$$x \to \frac{1}{X}$$

مثال: معادلهٔ $2x^{3} - 6x^{2} + 1 = 0$ را به معادلهٔ قابل بحث تبدیل کنید:

$$x \to \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{2}{X^{3}} - \frac{6}{X^{2}} + 1 = 0 \Rightarrow X^{3} - 6X + 2 = 0$$

سؤال: چرا باید برای بحث معادلهٔ درجهٔ سوم، آن‌را به فرم $X^{3} + pX + q = 0$ تبدیل کرد؟

جواب: چون منحنی به معادله $y = X^{3} + pX + q$ بسادگی قابل رسم است.

اگر تابع به معادله $y = X^{3} + pX + q$ را در حالتهای مختلف بررسی کنیم به نتایج زیر می‌رسیم (اثبات کامل، در کتاب جبر و آنالیز سال چهارم فصل ۶ آمده است):

توجه: در حالتی که منحنی تابع $y = X^{3} + pX + q$، یک Max و یک Min دارد و y_1 و y_2 عرضهای نقاط اکسترمم باشد داریم:

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{4p^{3} + 27q^{2}}{27}$$

(صفحهٔ ۱۵۸ کتاب جبر و آنالیز سطر ۱۴)

عبارت $4p^{3} + 27q^{2}$ را (Δ) دلتا می‌نامیم، پس:

$$\Delta = 27 y_1 \cdot y_2$$

نتایج بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله

$$X^{3} + pX + q = 0$$

۱) $p > 0$ یا $\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله یک ریشه حقیقی ساده دارد.

۲) $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله سه ریشه حقیقی ساده دارد.

۳) $\Delta = 0 \Rightarrow$

معادله یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشهٔ حقیقی مضاعف دارد.

علامت ریشه‌ها

در هر حالتی علامت یکی از ریشه‌ها مخالف علامت q است. و علامت بقیهٔ ریشه‌ها در صورت وجود موافق علامت q است.

تذکر: در حالتی که $\Delta = 0$ معادلهٔ $X^{3} + pX + q = 0$ یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد، ریشهٔ مضاعف برابر با: $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ و ریشهٔ ساده برابر است با: $-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

اثبات: فرض می‌کنیم معادلهٔ درجه سوم $X^{3} + pX + q = 0$ دارای ریشه مضاعف (α) و ریشهٔ ساده (β) باشد.

پس می‌توان نوشت:

$$x^{3} + px + q \equiv (x-\alpha)^{2}(x-\beta)$$

$$\Rightarrow x^{3} + px + q \equiv x^{3} - (2\alpha + \beta)x^{2} + (2\alpha\beta + \alpha^{2})x - \alpha^{2}\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha\beta + \alpha^{2} = p \\ -\alpha^{2}\beta = q \end{cases}$$

$$\beta = -2\alpha \quad , \quad -\alpha^2\beta = q \Rightarrow 2\alpha^3 = q \Rightarrow$$

$$\alpha^3 = \frac{q}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}}$$

$$\beta = -2\alpha \Rightarrow \boxed{\beta = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}}$$

مسأله: در تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^3 - 6x^2 + 9x + (m-4) = 0$ به ازای مقادیر مختلف m بحث کنید.

$$x \to X - \frac{b}{3a} = X - \frac{-6}{3} = X + 2$$

$$(X+2)^3 - 6(X+2)^2 + 9(X+2) + m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow X^3 - 3X + (m-2) = 0$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-27) + 27(m-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0\ ,\ 4$$

m	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	
نتیجه		یک ریشه حقیقی ساده	①	سه ریشه حقیقی ساده	②	یک ریشه حقیقی ساده	

$1)\ \Delta = 0 \Rightarrow$

معادله یک ریشهٔ حقیقی ساده و یک ریشهٔ حقیقی مضاعف دارد.

$2)\ \Delta = 0 \Rightarrow$

معادله یک ریشهٔ حقیقی ساده و یک ریشهٔ حقیقی مضاعف دارد.

مسأله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ $(m+2)x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ بحث کنید.

$$x \to \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{m+2}{X^3} - \frac{3}{X^2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow X^3 - 3X + (m+2) = 0$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = -4(27) + 27(m+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0\ ,\ -4$$

$$q = m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

m	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
q		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
نتیجه		$0<x_1$	①	$x_1<x_2<0<x_3$	②	$x_1<0<x_2<x_3$	③	$x_1<0$	

$$1)\ \begin{cases}\Delta = 0 \\ q < 0\end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 < 0 < x_3$$

$$2)\ q = 0 \Rightarrow m = -2 \overset{\text{درمعادله}}{\Rightarrow} -3x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3)\ \begin{cases}\Delta = 0 \\ q > 0\end{cases} \Rightarrow x_1 < 0 < x_2 = x_3$$

مسأله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^3 - 3x^2 + (m-1) = 0$ بحث کنید:

$$x \to \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1}{X^3} - \frac{3}{X^2} + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{3}{m-1}X + \frac{1}{m-1} = 0$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = -4 \times \frac{27}{(m-1)^3} + 27 \times \frac{1}{(m-1)^2}$$

$$= \frac{27(m-5)}{(m-1)^3} \quad \begin{matrix} = 0 \Rightarrow m = 5 \\ = 0 \Rightarrow m = 1 \end{matrix}$$

$$q = \frac{1}{m-1} = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

m	$-\infty$	۱		۵	$+\infty$
Δ	+	‖	−	۰	+
q	−	‖	+		+
نتیجه	$0<x_1$	‖ ۱	$x_1<0<x_2<x_3$	۲	$x_1<0$

در معادله

$$1)\ m=1 \Rightarrow x^3-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=0 \\ x_3=3 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \Delta=0 \\ q>0 \end{cases} \Rightarrow x_1<0<x_2=x_3$$

مسأله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^3-3(m-2)x+2(m-2)=0$ بحث کنید.

$$\Delta=4p^3+27q^2=-4\times 27(m-2)^3+27\times 4(m-2)^2=0$$

$$\Delta=-108(m-2)^2(m-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \text{ ریشه مضاعف:} \\ m=3 \end{cases}$$

$$q=2(m-2)=0 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

m	$-\infty$	۲		۳	$+\infty$
Δ	+	۰	+	۰	−
q	−	۰	+		+
نتیجه	$0<x_1$	۱	$x_1<0$	۲	$x_1<0<x_2=x_3$

در معادله

$$1:\ m=2 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$$

$$2:\ \begin{cases} \Delta=0 \\ q>0 \end{cases} \Rightarrow x_1<0<x_2=x_3$$

مسأله: ثابت کنید منحنی تابع به معادلهٔ $y=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ دارای سه نقطهٔ عطف است.

$$y'=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+x+1)2} \Rightarrow y''=\frac{-2(-x^3+3x^2+6x+1)}{(x^2+x+1)^3}$$

$$y''=0 \Rightarrow x^3-3x^2-6x-1=0 \qquad (I)$$

$$x \to x-\frac{b}{3a}=x-\frac{-3}{3}=x+1$$

$$\Rightarrow (X+1)^3-3(X+1)^2-6(X+1)-1=0 \Rightarrow$$

$$X^3-9x-9=0 \quad (II)$$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(-9)^3+27(-9)^2=-729$$

پس معادلهٔ (II) و معادلهٔ (I) سه ریشهٔ حقیقی ساده دارد. اگر ریشه‌ها را x_1 و x_2 و x_3 بنامیم: $x_1<x_2<x_3$ و چون y'' به ازای ریشه‌های ساده تغییر علامت می‌دهد، پس تابع فوق سه نقطهٔ عطف دارد.

بخش سوّم:

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادلهٔ درجهٔ سوّم

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجهٔ سوّم فوق باشد، می‌توان نوشت:

$$ax^3+bx^2+cx+d\equiv a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\equiv x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\dfrac{c}{a} \\ \alpha.\beta.\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

تذکر:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{d}}$$

مسأله ۱: اگر ریشه‌های معادله $x^3-9x^2+mx-15=0$ تصاعد عددی بسازند، m را بیابید.

حل: ریشه‌ها تصاعد عددی می‌سازند و α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$\Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma\Rightarrow 3\beta=\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow 3\beta=9\Rightarrow \boxed{\beta=3}$$

$$\beta=3 \xrightarrow{\text{در معادله قرار میدهیم}} 27-81+3m-15=0\Rightarrow \boxed{m=23}$$

مسأله ۲: اگر ریشه‌های معادله $x^3-7x^2+(m-1)x-8=0$ تصاعد هندسی بسازند، m را بیابید.

حل: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله باشند و تصاعد هندسی بسازند:

$$\beta^2=\alpha\gamma\Rightarrow\beta^3=\alpha.\beta.\gamma=-\frac{d}{a}=8\Rightarrow\boxed{\beta=2}$$

$$\beta=2 \rightarrow 8-28+2m-2-8=0\Rightarrow \boxed{m=15}$$

مسأله ۳: اگر ریشه‌های حقیقی معادله $x^3+mx^2+3=0$ ، α و β و γ باشد، m قابل قبول را طوری بیابید تا رابطهٔ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\gamma$ برقرار باشد.

حل:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{d}\Rightarrow -\gamma+\frac{1}{\gamma}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-\gamma^2+1}{\gamma}=0 \Rightarrow \boxed{\gamma=\pm 1}$$

اگر $\gamma=1\Rightarrow 1+m+3=0\Rightarrow \boxed{m=-4}$

$$\Rightarrow x^3-4x^2+3=0$$

$$x\to\frac{1}{X}\Rightarrow X^3-\frac{4}{3}X+\frac{1}{3}=0$$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4\left(-\frac{4}{3}\right)^3+27\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$=-\frac{256}{27}+\frac{27}{9}=\frac{-175}{27}<0$$

پس: $m=-4$ قابل قبول است. و معادلهٔ سه ریشه حقیقی α، β و γ می‌تواند داشته باشد.

اگر $\gamma=-1\Rightarrow -1+m+3=0\Rightarrow \boxed{m=-2}$

$$\Rightarrow x^3-2x^2+3=0 \qquad x\to\frac{1}{X}\Rightarrow X^3-\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}=0$$

$$\Delta=4p^3+27q^2=4\left(-\frac{2}{3}\right)^3+27\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{49}{27}>0$$

پس در ازای $m=-2$ معادله یک ریشه حقیقی دارد پس $m=-2$ قابل قبول نیست.

مسأله ۴: در معادلهٔ $x^3-9x^2+(m-1)x-15=0$، اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=35$ ، m را بیابید.

حل:

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=9$$

طرفین تساوی را به توان (۲) می‌رسانیم.

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=81$$

$$35+2\left(\frac{c}{a}\right)=81\Rightarrow 35+2(m-1)=81$$

$$\boxed{\Rightarrow m=23}$$

تذکر: اتحاداولر:

$$\text{اگر}\begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

مسأله ۵: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$x^3-5x^2+m-1=0$$

باشد، m را چنان بیابید تا داشته‌باشیم:

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}=-\frac{3}{2}$$

حل:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{c}{d}=0$$

بنا به اتحاد اولر: $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}=3\left(\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}=3\left(\frac{1}{\frac{-d}{a}}\right) \Rightarrow -\frac{3}{2}=-3\left(\frac{1}{m-1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{m=3}$$

مسأله ٦: در معادلهٔ درجه سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله باشد و $k=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$، مقدار k را بیابید.

حل:

$$k+3=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+1+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+1+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+1$$

$$k+3=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow k+3=-\frac{b}{a}\left(-\frac{c}{d}\right) \Rightarrow k+3=\frac{bc}{ad}$$

$$\Rightarrow \boxed{k=\frac{bc}{ad}=-3}$$

مسأله ۷: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله $x^3+px+q=0$ باشد حاصل عبارت $M=\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$ را بیابید.

حل:

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=0$$

بنا به اتحاد اولر $\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

$$M=\frac{\alpha^3}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{3(\alpha\beta\gamma)}{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow \boxed{3=M}$$

مسأله ۸: اگر در معادلهٔ $x^3-8x^2+17x+m=0$، α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله باشد و داشته باشیم $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=134$، مقدار m را بیابید.

حل:

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=8$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=64$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\left(\frac{c}{d}\right)=64$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(17)=64$$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=30 \qquad (1)$$

در معادله به‌جای x یکبار α و یکبار β و یکبار γ را قرار می‌دهیم:

$$x^{۳} - ۸x^{۲} + ۱۷x + m = ۰$$

$$\begin{cases} \alpha^{۳} - ۸\alpha^{۲} + ۱۷\alpha + m = ۰ \\ \beta^{۳} - ۸\beta^{۲} + ۱۷\beta + m = ۰ \\ \gamma^{۳} - ۸\gamma^{۲} + ۱۷\gamma + m = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha^{۳}+\beta^{۳}+\gamma^{۳}) - ۸(\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\gamma^{۲})$$

$$+ ۱۷(\alpha+\beta+\gamma) + ۳m = ۰$$

$$۱۳۴ - ۸(۳۰) + ۱۷(۸) + ۳m = ۰ \Rightarrow \boxed{m = -۱۰}$$

مسأله ۹: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله $x^{۳} - ۳x + (m - ۲) = ۰$ باشد و داشته‌باشیم:

$$\alpha^{۵}+\beta^{۵}+\gamma^{۵} = -۱۵$$

مقدار m را بیابید.

$$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a} = ۰ \Rightarrow \alpha^{۳}+\beta^{۳}+\gamma^{۳} =$$

$$۳(\alpha\beta\gamma) = ۳\left(-\frac{d}{a}\right) = ۳(۲ - m)$$

$$\alpha+\beta+\gamma = ۰ \Rightarrow \alpha^{۲}+\beta^{۲}+\gamma^{۲}+۲(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) = ۰$$

$$\Rightarrow \alpha^{۲}+\beta^{۲}+\gamma^{۲}+۲\left(\frac{c}{a}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \alpha^{۲}+\beta^{۲}+\gamma^{۲} - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow \alpha^{۲}+\beta^{۲}+\gamma^{۲} = ۶$$

طرفین معادله را در $x^{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$x^{۵} - ۳x^{۳} + (m - ۲)x^{۲} = ۰$$

در معادله به‌جای x یکبار α و یکبار β و یکبار γ را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} \alpha^{۵} - ۳\alpha^{۳} + (m-۲)\alpha^{۲} = ۰ \\ \beta^{۵} - ۳\beta^{۳} + (m-۲)\beta^{۲} = ۰ \\ \gamma^{۵} - ۳\gamma^{۳} + (m-۲)\gamma^{۲} = ۰ \end{cases}$$

$$(\alpha^{۵}+\beta^{۵}+\gamma^{۵}) - ۳(\alpha^{۳}+\beta^{۳}+\gamma^{۳})$$

$$+ (m - ۲)(\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\gamma^{۲}) = ۰$$

$$(-۱۵) - ۹(۲ - m) + (m - ۲) \times ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{m = ۳}$$

مسأله ۱۰: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^{۳} - ۳x + m = ۰$ باشد و داشته‌باشیم: $\frac{۱}{\alpha^{۳}} + \frac{۱}{\beta^{۳}} + \frac{۱}{\gamma^{۳}} = ۲۴$

مقدار m را بیابید.

حل: ابتدا معادلهٔ درجه سوّم جدیدی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش $\alpha^{۳}$، $\beta^{۳}$ و $\gamma^{۳}$ باشد.

$$\begin{cases} x: & \text{ریشهٔ معادلهٔ مفروض} \\ y: & \text{ریشهٔ معادلهٔ جدید} \end{cases}$$

در معادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم: $y = x^{۳} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y}$

به توان ۳ می‌رسانیم: $y - ۳\sqrt[۳]{y} + m = ۰ \Rightarrow y + m = ۳\sqrt[۳]{y}$

$$y^{۳} + ۳my^{۲} + ۳m^{۲}y + m^{۳} = ۲۷y$$

$$y^{۳} + ۳my^{۲} + (۳m^{۲} - ۲۷)y + m^{۳} = ۰$$

ریشه‌های این معادله $y_۱ = \alpha^{۳}$ و $y_۲ = \beta^{۳}$ و $y_۳ = \gamma^{۳}$ است.

$$\frac{۱}{y_۱} + \frac{۱}{y_۲} + \frac{۱}{y_۳} = -\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{۱}{\alpha^{۳}} + \frac{۱}{\beta^{۳}} + \frac{۱}{\gamma^{۳}} =$$

$$\frac{۲۷ - ۳m^{۲}}{m^{۳}} = ۲۴$$

مجموع ضرایب صفر است. $\frac{۹ - m^{۲}}{m^{۳}} = \frac{۸}{۱} \Rightarrow ۸m^{۳} + m^{۲} - ۹ = ۰$

$$۸m^{۳} + m^{۲} - ۹ \;\; \underline{|\, m - ۱}$$
$$\qquad\qquad\qquad ۸m^{۲} + ۹m + ۹$$

$$\Rightarrow 8m^3 + m^2 - 9 = (m-1)(8m^2 + 9m + 9) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 1}, \quad 8m^2 + 9m + 9 = 0 \quad \Delta < 0$$

مسأله ۱۱ : دستگاه مقابل را حل کنید:

$$\begin{cases} 8 + 4x + 2y + Z = 0 \\ 27 + 9x + 3y + Z = 0 \\ 64 + 16x + 4y + Z = 0 \end{cases}$$

حل: معادلهٔ درجه سوم $t^3 + x t^2 + y t + Z = 0$ را در نظر می‌گیریم. اگر α و β و γ ریشه‌های این معادله باشد باتوجه به معادلات دستگاه $\alpha = 2$، $\beta = 3$ و $\gamma = 4$.

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -x \Rightarrow 2 + 3 + 4 = -x \Rightarrow \boxed{x = -9}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} = y \Rightarrow 6 + 8 + 12 = y \Rightarrow \boxed{y = 26}$$

$$\alpha.\beta.\gamma = -\frac{d}{a} = -Z \Rightarrow 2 \times 3 \times 4 = -Z \Rightarrow \boxed{Z = -24}$$

مسأله ۱۲ : معادلهٔ درجه‌سوم $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$ را در نظر بگیرید ثابت کنید:

$$tg^2 20° + tg^2 40° + tg^2 60° + tg^2 80° = 36$$

حل:

$$x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(1 - 3x^2) = 3x - x^3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

$x = tg\alpha$ فرض می‌شود $\Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = tg 3\alpha$$

$$3\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$$

k	α	$x = tg\alpha$
۰	$\frac{\pi}{9}$	$x_1 = tg\frac{\pi}{9}$
۱	$\frac{4\pi}{9}$	$x_2 = tg\frac{4\pi}{9}$
۲	$\frac{7\pi}{9}$	$x_3 = tg\frac{7\pi}{9}$
۳	$\frac{10\pi}{9}$	$x_1 = tg\frac{10}{\pi} = tg\frac{\pi}{9}$

در نتیجه معادلهٔ جبری فوق سه ریشه حقیقی متمایز دارد.

$$x_3 = tg\frac{7\pi}{9} \quad , \quad x_2 = tg\frac{4\pi}{9} \quad , \quad x_1 = tg\frac{\pi}{9}$$

$$x_3 = tg\frac{7\pi}{9} = tg\left(\pi - \frac{2\pi}{9}\right) = -tg\frac{2\pi}{9}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 3\sqrt{3}$$

طرفین رابه‌توان ۲ می‌رسانیم

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 27$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\left(\frac{c}{a} = -3\right) = 27$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 33$$

$$\Rightarrow tg^2\frac{\pi}{9} + tg^2\frac{4\pi}{9} + tg^2\frac{2\pi}{9} = 33$$

$$tg^2\frac{\pi}{3} = tg^2\frac{3\pi}{9} = 3$$

$$\Rightarrow tg^2\frac{\pi}{9} + tg^2\frac{2\pi}{9} + tg^2\frac{3\pi}{9} + tg^2\frac{4\pi}{9} = 36$$

$$\Rightarrow tg^2 20° + tg^2 40° + tg^2 60° + tg^2 80° = 36$$

حلّ معادلهٔ درجهٔ سوّم

هرگاه در معادلهٔ درجه سوّم $x^3 + px + q = 0$ داشته باشیم

$\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$ ، در این‌صورت $x = u + v$ اختیار کرده در معادله قرار می‌دهیم:

$$1)\ (u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) = 0$$

و چون x را مجموع دو مجهول u و v اختیار کرده‌ایم می‌توانیم بین u و v رابطهٔ دلخواهی اختیار کرده و آن‌را با معادلهٔ ۱ به‌منزلهٔ دو معادلهٔ دو مجهولی در نظر گرفته و u و v را پیدا کنیم و با هم جمع کنیم تا x به‌دست آید (روش کاردان):

$$\begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3v^3 = \dfrac{-p^3}{27} & \text{حاصل‌ضرب} \\ u^3 + v^3 = -q & \text{مجموع} \end{cases}$$

معادله‌درجه دومی که‌یك ریشهٔ آن u^3 و یك ریشهٔ آن v^3 است

$$Z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$u^3,\ v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{108}}$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

دستورکاردان

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}}}$$

هرگاه $\Delta = 0$ باشد خواهیم داشت:

$$x = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

این ریشه ساده معادله است زیرا علامت آن مخالف علامت q است.

و چون

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad \text{ریشهٔ مضاعف}$$

$$\boxed{\text{خلاصه}\ \Delta = 0 \quad x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}}$$

حل معادله در حالت $\Delta < 0$

فرض می‌کنیم $x = r\cos\theta$ باشد که برای تعیین x باید r و θ را پیدا کرد ($r > 0$).

$$x^3 + px + q = 0 \Rightarrow r^3\cos^3\theta + pr\cos\theta + q = 0$$

$$\Rightarrow \cos^3\theta + \frac{p}{r^2}\cos\theta + \frac{q}{r^3} = 0 \qquad (1)$$

می‌دانیم که

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \Rightarrow$$

$$\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta = 0 \qquad (2)$$

از مقایسه رابطه‌های ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{p}{r^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{r = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}}$$

$$\frac{q}{r^3} = -\frac{\cos 3\theta}{4} \Rightarrow \boxed{\cos 3\theta = -\frac{4q}{r^3}}$$

هرگاه $r > 0$ اختیار شود θ متناظر آن فرق می‌کند چون $\cos 3\theta$ به r هم بستگی دارد.

از معادلهٔ $\cos 3\theta = \frac{-4q}{r^3}$ سه مقدار متمایز برای $\cos\theta$ به‌دست می‌آید زیرا $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}}$$

مثال ۱: مطلوب است حل معادلهٔ $x^3+6x-20=0$

$$\Delta>0 \quad x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=$$
$$\sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}=2$$

مطلوب است حل معادلهٔ $x^3-6x+4\sqrt{2}=0$.

$$\Delta=0 \quad x_2=x_3=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$
$$x_1=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}=-2\sqrt{2}$$

مطلوب است حل معادلهٔ $x^3-3x-1=0$، $\Delta<0$.

$$x=r\cos\theta \quad r=2\sqrt{\frac{-p}{3}}=2$$
$$\cos 3\theta=\frac{-4q}{r^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow 3\theta=2K\pi\pm\frac{\pi}{3}$$
$$\theta=\frac{2}{3}K\pi\pm\frac{\pi}{9}, \quad \theta_1=\frac{\pi}{9}=20^\circ$$

لذا
$$\theta_2=\frac{7\pi}{9}=140^\circ \quad \theta_3=\frac{5\pi}{9}=100^\circ$$

$$\boxed{x=2\cos 20^\circ,\ 2\cos 100^\circ,\ 2\cos 140^\circ}$$

تذکر: باید موقعی‌که به K مقدار داده می‌شود θ_1 و θ_2 و θ_3 دارای کسینوسهای متفاوت باشند.

حل تقریبی معادله $f(x)=0$ (منظور ریشه‌های تقریبی می‌باشند).

فرض کنید a یک ریشهٔ تقریبی معادله $f(x)=0$ باشد بنابراین اگر $a+h$ ریشهٔ تقریبی بهتر آن باشد باید h را پیداکنیم. می‌دانیم که:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

حال اگر $f(a+h)$ را نزدیک به‌صفر فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{-f(a)}{h}\simeq f'(a), \quad \boxed{h\simeq-\frac{f(a)}{f'(a)}}$$

به‌همین ترتیب وقتی $a+h$ پیدا شد می‌توان ریشهٔ بهتری برای معادله به‌دست آورد.

مثال: به‌فرض آن‌که $x=2$ یک ریشهٔ تقریبی معادلهٔ $x^2-2=0$ فرض شود ریشهٔ بهتری برای این معادله پیداکنید:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-2\Rightarrow f'(x)=2x \\ f(2)=2,\ f'(2)=4 \end{cases}$$
$$a=2 \quad a+h=2-\frac{2}{4}=1/5$$

دقت کنید:

چقدر به‌صفر دور است؛ $f(2)=2^2-2=2$

چقدر بهتر است؛ $f(1/5)=1/5^2-2=0/25$

مجدداً $a=1/5$

$f(1/5)=0/25$ و $f'(1/5)=3$
$$a+h=1/5-\frac{0/25}{3}\simeq 1/417$$

حالا:

$$f(1/417)=1/417^2-2\simeq 0/007$$

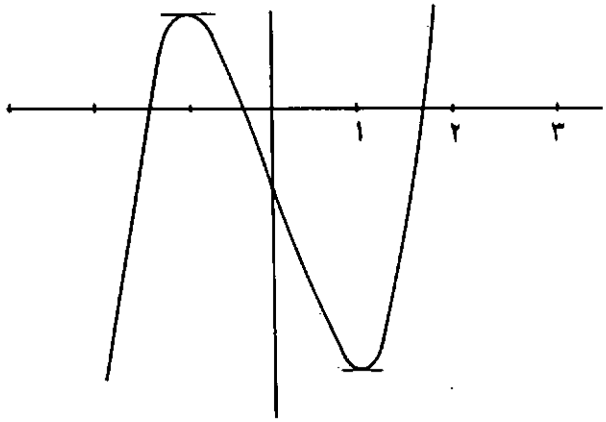
توجه می‌کنید که $1/417$ چه ریشهٔ بهتری برای معادلهٔ $x^2-2=0$ به‌حساب می‌آید.

حالا برای تعیین ریشه‌های تقریبی معادله $f(x)=0$ بخصوص معادلهٔ درجه سوم منحنی تابع $y=f(x)$ را رسم کنید و طول نقاط برخورد منحنی را با محور x ها معین کنید (خواهی نخواهی بین دو عدد متوالی می‌باشد) و با روش (نیوتن) ریشه‌های تقریبی معادله را با هر تقریبی که می‌خواهید حساب می‌کنید.

مثال: ریشه مثبت معادله $x^3-3x-1=0$ را تا ۰/۰۱ واحد حساب کنید:

$$y=x^3-3x-1 \qquad y'=3x^2-3=0 \qquad x=\pm1$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty \nearrow -3 \nearrow$		$1 \searrow$	$-1 \searrow$	$-3 \nearrow$	$1 \nearrow$	$+\infty$



ریشه مثبت معادله بین ۱ و ۲ می‌باشد:

$f(۱/۸)=-۰/۵۶۸$

$f(۱/۹)=۰/۱۵۹$

بنابراین ۱/۸ و ۱/۹ به‌ترتیب ریشه‌های معادله تا ۰/۱ تقریب نقصانی و اضافی می‌باشد.

حالا:

$f(۱/۸)=-۰/۵۶۸$

$f'(۱/۸)=۶/۷۲$

$$a+h=۱/۸+\frac{۰/۵۶۸}{۶/۷۲}\simeq ۱/۸۸$$

$f(۱/۸۸)=۰/۰۰۴۶۷۲$

چقدر به صفر نزدیک است: $f(۱/۸۷)<۰$

لذا ۱/۸۷ و ۱/۸۸ به‌ترتیب ریشه‌های معادله با ۰/۰۱ تقریب نقصانی و اضافی می‌باشند.

مسأله: معادله درجه سوم $x^3+px+q=0$ که ریشه‌های آن را α و β و γ می‌نامیم مفروض است. مطلوب است محاسبه $\Sigma\frac{1}{2\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}$ برحسب p و q.

در هر معادلهٔ درجه‌سوم $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=S^3-3PS+3R$ که $S=-\frac{b}{a}$ و $P=\frac{c}{a}$ و $R=-\frac{d}{a}$ لذا با توجه $S=0$ و $R=-q$.

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3q$$

معادلهٔ درجه سوّمی می‌نویسیم که ریشه‌های آن $y_1=\frac{1}{2\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}$ و $y_2=\frac{1}{2\beta^3+\alpha^3+\gamma^3}$ و $y_3=\frac{1}{2\gamma^3+\alpha^3+\beta^3}$ باشند.

$$y=\frac{1}{\Sigma\alpha^3+\alpha^3}=\frac{1}{-3q+\alpha^3}\Rightarrow\alpha^3-3q=\frac{1}{y},$$

$$\alpha=\sqrt[3]{3q+\frac{1}{y}}$$

حالا α را در معادله $x^3+px+q=0$ می‌بریم و

$$3q+\frac{1}{y}+p\sqrt[3]{3q+\frac{1}{y}}+q=0\Rightarrow$$

$$\boxed{(64q^3+3p^3q)y^3+(p^3+48q^2)y^2+12qy+1=0}$$

لذا:

$$\boxed{\Sigma\frac{1}{2\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}=-\frac{p^3+48q^2}{64q^3+3p^3q}}$$

آموزش ترجمه متون ریاضی (۵)

از کتاب: روشهایی در جبر
ترجمه: حمیدرضا امیری

3 The quadratic function and quadratic equations

3.1 Quadratic functions

The function f(x), where $f(x) = ax^2 + bx + c$, and a, b, c are constants, $a \neq 0$, is called a *quadratic function*, or sometimes a quadratic polynomial. From elementary algebra

$$(x+d)^2 = x^2 + 2dx + d^2.$$

Using this, we write

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{3.1}$$

The quadratic function f(x) has the following properties:

(i) $f(0) = c$.

(ii) As $x \to \pm\infty$; if $a > 0$, $f(x) \to +\infty$,
if $a < 0$, $f(x) \to -\infty$.

(iii) If $a > 0$, then, from Equation (3.1),

$$f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

The minimum value $(4ac - b^2)/(4a)$ is attained when $x = -b/(2a)$.
If $a < 0$, then

$$f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

The maximum value $(4ac - b^2)/(4a)$ is attained when $x = -b/(2a)$.

(iv) $f(x) = 0 \Rightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}. \tag{3.2}$$

۳ ـ توابع درجه دوّم و معادلات درجه دوّم

۳.۱. توابع درجه دوم

تابع $f(x) \equiv ax^۲ + bx + c$ که در آن a و b و c مقادیر ثابت و $a \neq ۰$، یک تابع درجه دوم، یا بعضی اوقات یک چند جمله‌ای درجه دوم نامیده می‌شود.

حال با توجه به اتحاد $(x + d)^۲ = x^۲ + ۲dx + d^۲$ و استفاده از آن، می‌توانیم بنویسیم:

$$ax^۲ + bx + c \equiv a\left(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \equiv a\left[\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a^۲}\right] \Rightarrow ax^۲ + bx + c \equiv a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a} \qquad (۳.۱)$$

تابع درجه دوّم f(x) دارای خواص زیر می‌باشد:

(۱) $f(۰) = c$

(۲) درحالتی‌که $x \to \pm\infty$، اگر $a > ۰$ آنگاه $f(x) \to +\infty$
اگر $a < ۰$ آنگاه $f(x) \to -\infty$

(۳) با توجه به رابطهٔ (۳.۱) اگر $a > ۰$ واضح است که $f(x) \geq \frac{(۴ac - b^۲)}{(۴a)}$.
در این حالت کمترین مقدار عبارت $\frac{(۴ac - b^۲)}{(۴a)}$ به ازای $x = \frac{-b}{(۲a)}$ به دست می‌آید.
اگر $a < ۰$ در این صورت $f(x) \leq \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$. در این حالت بیشترین مقدار عبارت $\frac{(۴ac - b^۲)}{(۴a)}$ به‌ازای $x = \frac{-b}{(۲a)}$ حاصل می‌شود.

(۴) اگر $f(x) = ۰$ خواهیم داشت:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}+\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a^{۲}}\right]=۰$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}=\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}$$

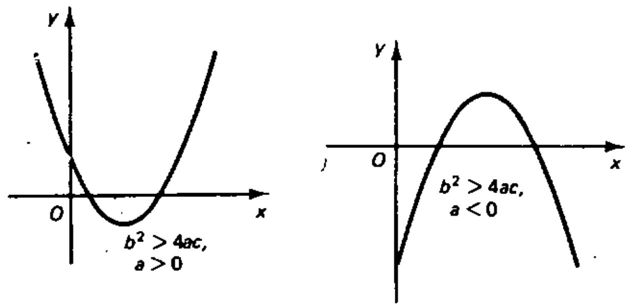
$$\Rightarrow \left(x-\frac{b}{۲a}\right)=\pm\frac{\sqrt{(b^{۲}-۴ac)}}{۲a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a} \qquad (۳.۲)$$

This result has an important graphical interpretation. There are three cases to consider, depending on whether the *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$ is positive, negative or zero.
(1) If $b^2 > 4ac$, the curve $y = f(x)$ cuts the x-axis at two distinct points. This, taken together with (ii), enables us to draw the sketches of the curves $y = f(x)$ as in Fig. 3.1.

این نتیجه یک تعبیر نموداری مهم در بر دارد. با توجه به مبین عبارت فوق یعنی $\Delta = b^{۲} - ۴ac$ که مثبت، منفی یا صفر باشد، ۳ حالت وجود دارد.

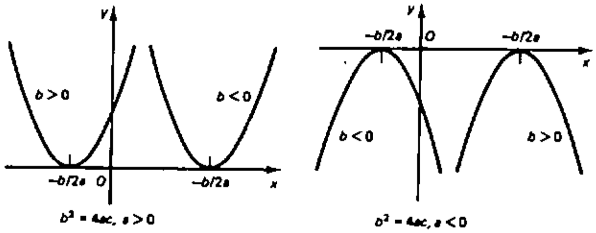
(۱) $b^{۲} > ۴ac$ $(\Delta > ۰)$، منحنی $y = f(x)$ محور xها را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند. در این وضعیت و با توجه به قسمت (۲) (اگر $a > ۰$ آنگاه $f(x) \to +\infty$ و اگر $a < ۰$ آنگاه $f(x) \to -\infty$) برای رسم منحنی $y = f(x)$ دو حالتِ ممکن حاصل می‌شود، که در شکل ۳.۱ مشاهده می‌کنید.



شکل ۳.۱

(2) If $b^2 = 4ac$, the curve $y = f(x)$ touches the x-axis, since the equation $f(x) = 0$ then has two equal roots at $x = -b/(2a)$.

(۲) اگر $b^{۲} = ۴ac$ $(\Delta = ۰)$، منحنی $y = f(x)$ بر محور xها مماس است، در این حالت معادلهٔ $f(x) = ۰$ دارای دو ریشهٔ مساوی با هم در $x = \frac{-b}{۲a}$ خواهد بود.



شکل ۳.۲

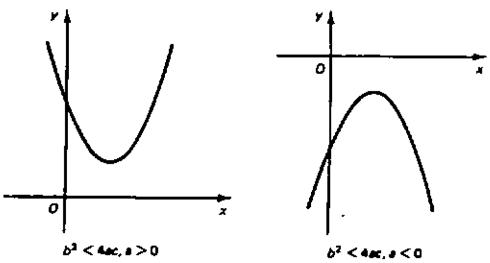
(3) If $b^2 < 4ac$, the equation $f(x) = 0$ has no real roots.
[We have seen above that when $\Delta < 0$, there are no real roots of the equation $f(x) = 0$. In such a situation there are always two complex roots. If we define i to be such that $i^2 = -1$, then, from formula (3.2),

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{(4ac - b^2)}}{2a}\quad]$$

(۳) اگر $b^{۲} < ۴ac$ $(\Delta < ۰)$، معادلهٔ $f(x) = ۰$ ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت.

توضیح: دیدیم که اگر $\Delta < ۰$ معادلهٔ $f(x) = ۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد. در این وضعیت همواره دو ریشهٔ مختلط موجود است. اگر تعریف کنیم $i^{۲} = -۱$، در این صورت، با توجه به فرمول (۳.۲) داریم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(-۱)(۴ac-b^{۲})}}{۲a}=\frac{-b}{۲a}\pm i\frac{\sqrt{(۴ac-b^{۲})}}{۲a}$$



(الف) شکل ۳.۳ (ب)

3.2 Quadratic equations

The equation $ax^2 + bx + c = 0$, where $a \neq 0$, is called a *quadratic equation*. From Equation (3.2) the roots of this quadratic equation are

$$\frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \qquad (3.3)$$

If we denote these roots by α and β, then

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta). \qquad (3.4)$$

۳.۲ـ معادلات درجه دوّم

معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$، زمانی که $a \neq ۰$، یک *معادلهٔ* درجه دوم نامیده می‌شود. با توجه به معادله (۳.۲) ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم عبارتند از:

$$\frac{-b \pm \sqrt{(b^۲ - ۴ac)}}{۲a} \qquad (۳.۳)$$

اگر ما این ریشه‌ها را با α و β نمایش دهیم، در این صورت داریم:

$$ax^۲ + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \qquad (۳.۴)$$

From Equation (3.3), or alternatively by equating coefficients of x^1 and x^0 in Equation (3.4), we find

$$\alpha + \beta = -b/a, \qquad (3.5a)$$
$$\alpha\beta = c/a. \qquad (3.5b)$$

It follows immediately from Equation (3.5b) that, when the roots are real, they are of the *same sign* if *a* and *c* are of the *same sign*. (From Equation (3.5a) it follows that they are of different sign from *b*.) The roots are of *opposite sign* if *a* and *c* are of *opposite sign*.

The above analysis indicates the following:

$$\left\{ f(x) = 0 \text{ has } \begin{matrix} \text{two distinct} \\ \text{two equal} \\ \text{no} \end{matrix} \text{ real roots} \right\} \Leftrightarrow \left\{ b^2 - 4ac \begin{matrix} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{matrix} \right\}.$$

با توجه به رابطهٔ (۳.۳)، یا با متحد قرار دادن ضرایب $x^۱$ و $x^۰$ در معادلهٔ «۳.۴»، خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \qquad (\text{۳.۵ الف})$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \qquad (\text{۳.۵ ب})$$

بلافاصله از رابطهٔ (۳.۵b ب) نتیجه می‌گیریم که، اگر a و c هم‌علامت باشند ($\frac{c}{a} > ۰$)، دو ریشه (α و β) متحدالعلامه‌اند. (از رابطهٔ «۳.۵a الف» نتیجه می‌گیریم که علامتِ آنها مخالفِ علامت b می‌باشند.) اگر a و c مختلف العلامه باشند، ریشه‌ها نیز مختلف العلامه خواهند بود.

تجزیه و تحلیل فوق در زیر نمایش داده شده است:

$f(x) = ۰$:
- ۲ ریشه حقیقی متمایز $(\Delta > ۰)$
- ۲ ریشه حقیقی برابر $(\Delta = ۰)$
- ریشه حقیقی ندارد $(\Delta < ۰)$

To solve a quadratic equation it is often not necessary to use the general formula (3.3). In simple cases, when the roots are integers or rational numbers, one can often express the quadratic function in terms of its factors, as in Equation (3.4), by inspection. The roots are then just α and β. If a factorisation is not immec ately obvious, one may try the factor theorem (p. 21) to obtain a factor.

برای حل یک معادلهٔ درجه ۲ حتماً لازم نیست از فرمول عمومی (۳.۳) استفاده شود. در حالتهای ساده، زمانی که ریشه‌ها صحیح یا گویا هستند، می‌توان معادله درجه دوم را برحسب عاملهایش بیان کرد (به معادلهٔ «۳.۴» توجه کنید) و ریشه‌ها یعنی α و β به راحتی حاصل می‌شوند. اگر تجزیه بلافاصله انجام پذیر نبود، سعی می‌کنیم از قضیهٔ عامل (صفحهٔ) برای به‌دست آوردن یک عامل، استفاده کنیم.

Example 1 Describe the important features and sketch the graph of:
(a) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$,
(b) $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$,
(c) $f_3(x) = -x^2 + 2x - 1$.

(a) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$.
(i) $f_1(0) = 5$.
(ii) As $x \to \pm\infty$, $f_1(x) \to \infty$.
(iii) $f_1(x) = (x^2 - 3x + 5)$

$$= \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5$$
$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}.$$

So $f_1(x)$ has a minimum value of $\frac{11}{4}$ when $x = \frac{3}{2}$, and so is never zero. The graph of $f_1(x)$ is shown in Fig. 3.4.

مثال (۱) قسمتهای مهمّ راجع به اشکالِ منحنیهای داده شده را توصیف کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

الف) $f_۱(x) = x^۲ - ۳x + ۵$

ب) $f_۲(x) = x^۲ - ۵x + ۶$

ج) $f_۳(x) = -x^۲ + ۲x - ۱$

الف) $f_۱(x) = x^۲ - ۳x + ۵$

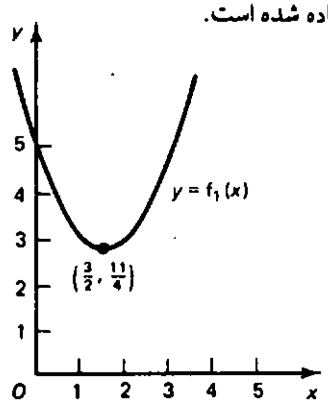
$(۱) f_۱(\circ) = ۵$

(۲) اگر $x \to \pm\infty$ ، $f_۱(x) \to +\infty$

$$(۳)\, f_۱(x) = x^۲ - ۳x + ۵ \equiv \left[x^۲ - ۳x + \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲\right] - \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ + ۵$$

$$\equiv \left(x - \frac{۳}{۲}\right)^۲ + \frac{۱۱}{۴} \geq \frac{۱۱}{۴}$$

بنابراین $f_۱(x)$ دارای کمترین مقدار خود به ازای $x = \frac{۳}{۲}$ بوده و مقدار آن برابر $\frac{۱۱}{۴}$ است، پس هیچگاه صفر نیست. نمودار $f_۱(x)$ در زیر نمایش داده شده است.



شکل ۳.۴

ب) $f_۲(x) = x^۲ - ۵x + ۶$

$(۱)\; f_۲(\circ) = ۶$

(۲) اگر $\to \pm\infty, f_۲(x) \to +\infty$

$$(۳)\; f_۲(x) = x^۲ - ۵x + ۶ \equiv \left[x^۲ - ۵x + \left(\frac{۵}{۲}\right)^۲\right]$$

$$-\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲ + ۶ \equiv \left(x - \frac{۵}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۴}$$

بنابراین $f_۲(x)$ کمترین مقدار خود را به ازای $x = \frac{۵}{۲}$ ، که مساوی با $-\frac{۱}{۴}$ می‌باشد، به دست می‌آورد.

$$f_۲(x) = \circ \Rightarrow \left(x - \frac{۵}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۴} = \circ \Rightarrow \left(x - \frac{۵}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

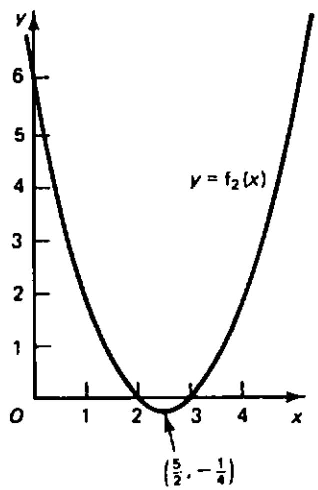
$$\Rightarrow \left(x - \frac{۵}{۲}\right) = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۳ \text{ یا } x = ۲$$

به روش دیگری ما می‌توانستیم $f_۲(x)$ را به صورت زیر تجزیه کنیم و بنویسیم.

$$f_۲(x) = (x - ۳)(x - ۲)$$

$$\Rightarrow f_۲(x) = \circ \text{ که } x = ۳ \text{ یا } x = ۲$$

نمودار $f_۲(x)$ در شکل ۳.۵ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۵

(b) $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$.
(i) $f_2(0) = 6$.
(ii) As $x \to \pm\infty$, $f_2(x) \to +\infty$.
(iii) $f_2(x) = x^2 - 5x + 6 = \left[x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$
$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

So $f_2(x)$ has a minimum value of $-\frac{1}{4}$ when $x = \frac{5}{2}$.

(iv) $f_2(x) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$
$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$
$\Rightarrow x = 3$ or 2.

Alternatively we could write

$f_2(x) = (x - 3)(x - 2)$
$\Rightarrow f_2(x) = 0$ when $x = 3$ or 2.

The graph of $f_2(x)$ is shown in Fig. 3.5.

مکان هندسی

• محمد هاشم رستمی

یکی از مهمترین و جالبترین مباحث هندسه،، مکان هندسی است، که در بخشهای دیگر هندسه نیز کاربردهای فراوان دارد.

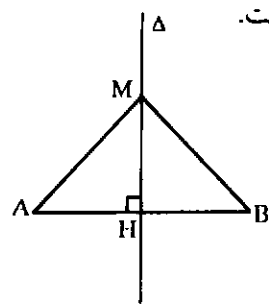
در این مقاله پس از تعریف مکان هندسی، ضمن معرفی مکانهای هندسی مهم، کاربردهایی از آنها و مسأله‌هایی در مورد تعیین مکانهای هندسی، ارائه خواهد شد. از اثبات مکانهای هندسی که به صورت قضیه در کتابهای درسی آمده‌اند خودداری خواهد شد، مگر آن که، روش دیگری برای اثبات آنها وجود داشته باشد، و یا نیازمند شرح و بسط بیشتری باشند.

تعریف: مجموعه‌ای از نقطه‌ها (یا خطها) که دارای خاصیت مشخصی باشند به قسمی که:

اولاً: هر نقطه (یاخط) متعلق به آن مجموعه، آن خاصیت را داشته باشد.

ثانیاً: هر نقطه (یا خط) که آن خاصیت را دارد به آن مجموعه تعلق داشته باشد، یک مکان هندسی نامیده می‌شود.

مثال ۱ : مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از سر دو پاره‌خط AB واقع در این صفحه به یک فاصله باشد (MA=MB)، عمودِ منصف پاره خط AB است.

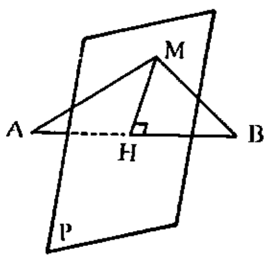


یعنی:

اولاً: هر نقطه‌ای که روی عمود منصف پاره‌خط AB باشد، از دونقطه A و B به یک فاصله است.

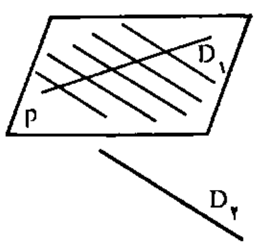
ثانیاً: هر نقطه‌ای که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره‌خط AB واقع است.

نکته: این مکان در فضا صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. (صفحهٔ P در شکل مقابل).

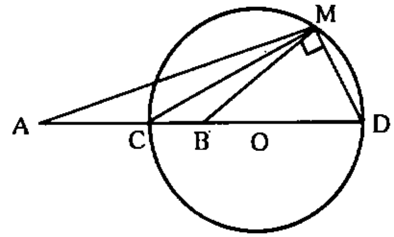


یعنی : مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، صفحهٔ عمود منصف آن پاره‌خط است.

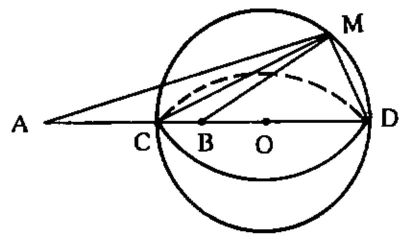
مثال ۲ : مکان هندسی خطهایی که از نقاط مختلف خط راست D_1 به موازات خط راست D_2 رسم می‌شوند، یک صفحه است که شامل خط D_1 است و با خط D_2 موازی می‌باشد.



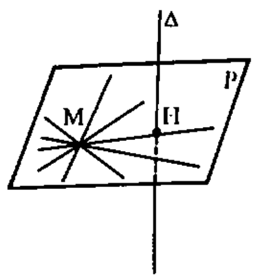
مثال ۳: مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت K ($K\neq 1$ و $K\neq 0$) باشد، ($\frac{MA}{MB}=K$)، دایره‌ای‌است‌که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس).



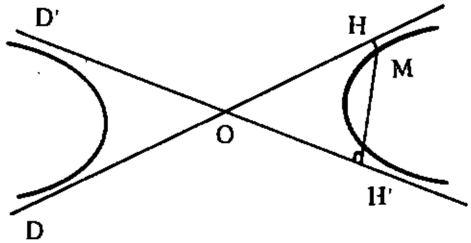
نکته: این مکان در فضا کره‌ای به قطر CD است، با توجه به اینکه (ABCD) یک تقسیم توافقی با نسبت K است.



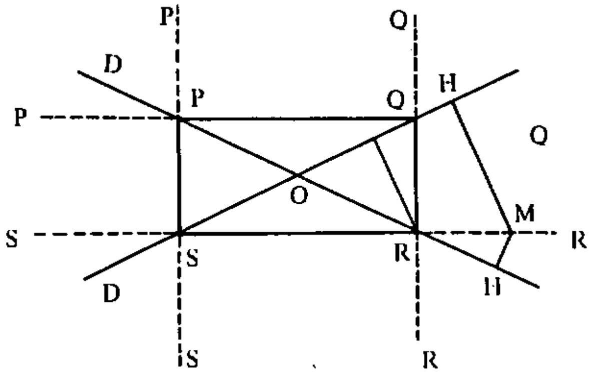
مثال ۴: مکان هندسی خطی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شود، صفحه‌ای است که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌گردد.



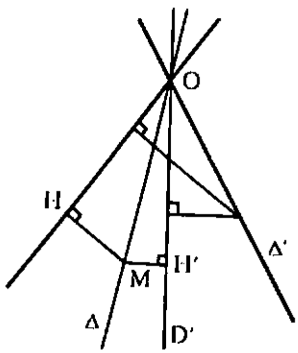
مثال ۵: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که حاصل ضرب فاصله‌های آن از دو خط متقاطع واقع در آن صفحه مقدار ثابتی باشد ($MH.MH'=K$)، یک هذلولی است که دو خط مفروض مجانبهای آن می‌باشند.



مثال ٦: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که تفاضل فاصله‌اش از دو خط متقاطع D و D' واقع در آن صفحه مقدار ثابت l باشد ($|MH-MH'|=l$) هشت نیم‌خط است، که این نیم خطها استداد اضلاع مستطیلی هستند که دو خط مفروض قطرهای آن، و فاصلهٔ هر رأس مستطیل از قطر مقابلش برابر l است.



مثال ۷: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که نسبت فاصله‌اش از دوخط متقاطع D و D' مقدار ثابت K($K\neq 0$)باشد، ($\frac{MH}{MH'}=K$)، دو خط Δ و Δ' است، که از نقطهٔ برخورد خطهای D و D' می‌گذرند، و چهار خط DD'ΔΔ' تشکیل یک دستگاه توافقی می‌دهند.



تعریف مکان هندسی مشخص می‌کند که هر مجموعه‌ای از نقطه‌ها، خطها و یا سطوح یک مکان هندسی نیست. زیرا این مجموعه‌ها، می‌تواند هر شکلی باشد، مانند یک یا چند نقطه، یک خط، یک صفحه، بخشی از یک خط و یا بخشی از یک صفحه. همچنین تعریف مکان هندسی مشخص می‌کند که برای اثبات قضیه‌هایی که به صورت مکان هندسی بیان شده‌اند دو قضیه (یک قضیه و عکس آن قضیه) را باید ثابت کرد.

مکان هندسی از دیر زمان مورد توجه ریاضیدانان بوده است. ارشمیدس Archimedes (۲۸۷ تا ۲۱۲ ق.م.) در آثار خود خاصیت سهمی را که یک مکان هندسی است به کاربرده است. همچنین آپولونیوس Apollonius برغه‌ای (۲۶۰ تا ۲۰۰ ق.م) اوّلین اثر مهم و مستقل در مورد مقاطع مخروطی (دایره،بیضی، هذلولی و سهمی) را نوشت، که همگی مکان هندسی می‌باشند و با استفاده از همین مکانهای هندسی، کپلر Kepler در سال ۱۶۰۴ آینه‌های خاصی را طراحی کرد که به آینه‌های سهموی معروفند. و در سال ۱۶۰۹ نظریهٔ حرکت خورشید مرکزی را در مقابل نظریه بطلمیوس که زمین مرکزی بود ارائه داد. همچنین آپولونیوس ثابت کرد، مکان هندسی نقطه‌ای که مختصات آن در رابطهٔ $ay=x+b$ ($a>0$ و $b>0$) صدق کند، یک خط راست است.

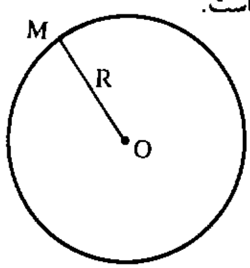
مکانهای هندسی علاوه بر آن که خود شامل قضایا و مسائل جالبی می‌باشند، در دیگر بخشهای هندسه نیز کاربردهای فراوانی دارند. از جمله مکانهای هندسی از ابزارهای مفید و مؤثر برای حل مسأله‌های ترسیم هندسی یا ساختمانهای هندسی است.

عده‌ای ساختمانهای هندسی یا ترسیمهای هندسی را عنصر اصلی آموزش ریاضی و وسیله‌ای نیرومند و قوی برای پرورش استعدادها در زمینه هندسه، و به طور کلی ریاضی می‌دانند،که این مطلب خود، اهمیت مکانهای هندسی را بیشتر نمایان می‌کند.

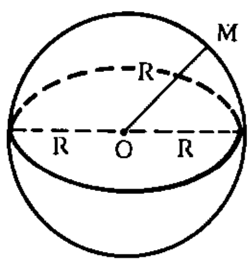
در مواردی از ما خواسته می‌شود که مکان هندسی یک نقطه یا یک خط را در صفحه یا فضا، مشخص کنیم. در این صورت باید ببینیم که آن مکان هندسی چه شکلی است و چه قسمتی از آن شکل به مکان هندسی نقطه یا خط داده شده تعلق دارد. **در این موارد نقطه‌های ثابت و خطهای ثابت همچنین مقدارهای ثابت موجود در مسأله اهمیّت زیادی دارند** که در زیر برخی حالتها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱ ـ در مسأله تنها یک نقطهٔ ثابت مانند O وجود دارد:

الف) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه P چنان حرکت کند که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشد، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.

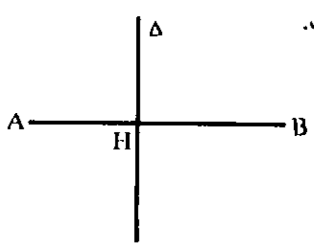


ب) اگر نقطهٔ متحرک M در فضا چنان حرکت کند که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشد، مکان هندسی نقطهٔ M کره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.

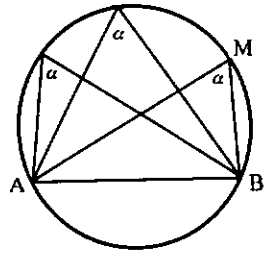


۲ ـ دو نقطهٔ ثابت مانند A و B در مسأله وجود دارد:

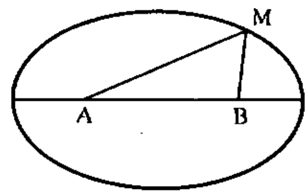
الف) اگر نقطهٔ متحرک M چنان حرکت کند که همواره از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله باشد، مکان هندسی نقطهٔ M عمودمنصف پاره‌خط AB است.



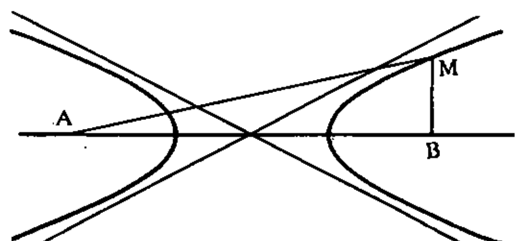
ب) اگر نقطهٔ متحرک M چنان حرکت کند که همواره رأس زاویه‌ای باشد که اندازه‌اش مقدار ثابت α است و اضلاعش از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند، مکان هندسی نقطه M کمان درخور زاویه α مقابل به پاره‌خط AB است.



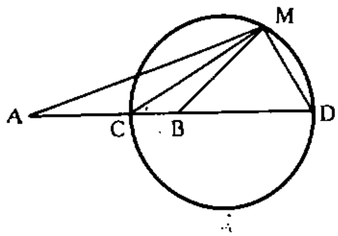
پ) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت ۲a ($2a>0$ و $2a>AB$) باشد ($MA+MB=2a$)، مکان هندسی نقطهٔ M یک بیضی است به کانونهای A و B و عدد ثابت ۲a.



ت) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که قدرمطلق تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت $2a>0$ باشد ($|MA-MB|=2a$)، مکان هندسی نقطهٔ M یک هذلولی به کانونهای A و B و عدد ثابت ۲a است.

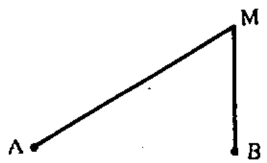


ث) اگر نقطهٔ متحرک M چنان در صفحه تغییر مکان دهد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت K ($K\neq 1$ و $K\neq 0$) باشد، ($\frac{MA}{MB}=k$)، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس).

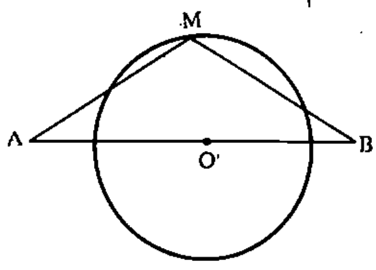


نکته: این مکان در فضا کره‌ای به قطر پاره‌خط CD است.

ج) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که حاصل ضرب فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت K باشد ($MA\cdot MB=K$)، مکان هندسی نقطهٔ M یک منحنی از درجهٔ چهارم است (مقطع غیر مخروطی است).



چ) در صورتی‌که نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت K^2 باشد ($MA^2+MB^2=K^2$)، مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است.



نکته: این مکان در فضا کره‌ای به مرکز O و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است.

بحث: این مکان هندسی وقتی وجود دارد که، $2K^2-AB^2\geq 0$ یا $K^2\geq \frac{AB^2}{2}$ باشد.

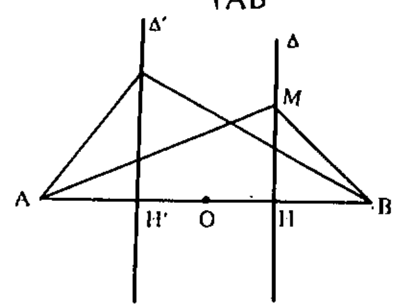
۱) در صورتی که $K^2=AB^2$ باشد، $R=\frac{AB}{2}$ یعنی شعاع دایرهٔ (یاکرهٔ) مکان هندسی برابر نصف پاره خط AB است.

۲) اگر $K^2>AB^2$ باشد، شعاع دایره (یاکرهٔ) مکان هندسی از $\frac{AB}{2}$ بیشتر است.

۳) اگر $K^2=\frac{AB^2}{2}$ باشد، دایره (یاکرهٔ) مکان هندسی به یک نقطه تبدیل می‌شود.

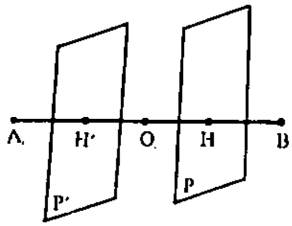
۴) در صورتی که $K^2<\frac{AB^2}{2}$ باشد، مسأله جواب ندارد.

ح) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مساوی مقدار ثابت K^2 باشد ($MA^2-MB^2=K^2$)، مکان هندسی نقطهٔ M خطی مانند Δ عمود بر خط AB است، به قسمی که، فاصلهٔ آن از نقطهٔ O وسط پاره خط AB برابر $OH=\frac{K^2}{2AB}$ است.



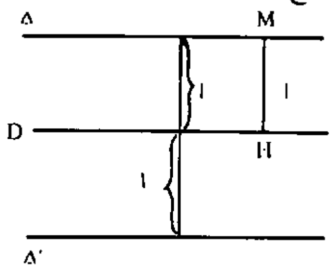
تبصره: اگر $MB^2-MA^2=K^2$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ M خطی مانند Δ' عمود بر خط AB است که این خط قرینهٔ خط Δ نسبت به نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB می‌باشد ($\overline{OH'}=\frac{K^2}{2\overline{BA}}$)، به طور کلی می‌توان گفت؛ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت، مقدار ثابتی باشد، دو خط راست عمود بر خط واصل بین آن دو نقطه است، به قسمی که این دو خط نسبت به نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه قرینهٔ یکدیگرند.

نکته: این مکان در فضا دو صفحهٔ عمود بر خط AB است، به قسمی که فاصلهٔ این دو صفحه از نقطهٔ O وسط پاره خط AB برابر $\frac{K^2}{2AB}$ است.

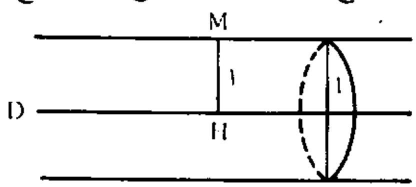


۳ـ در مسأله تنها یک خط ثابت مانند (l) وجود دارد:

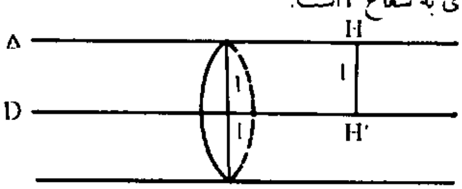
الف) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه، چنان حرکت کند که همواره فاصله‌اش از خط ثابت D برابر مقدار ثابت l باشد (MH=l)، مکان هندسی نقطه M دو خط Δ و Δ' موازی خط D و به فاصله ثابت l، واقع در طرفین آن می‌باشند.



ب) اگر نقطهٔ متحرک M در فضا چنان حرکت کند که همواره فاصله‌اش از خط ثابت D برابر مقدار ثابت K باشد، مکان هندسی نقطهٔ M یک سطح استوانی است که شعاع قاعدهٔ مقطع قائم آن برابر l است.



ج) اگر خط متحرک Δ در فضا چنان حرکت کند که همواره موازی خط ثابت D بوده ودرفاصلهٔ ثابت l از آن قرار داشته باشد، مکان هندسی خط Δ یک سطح استوانه‌ای دوار است که مقطع قائم آن دایره‌ای به شعاع l است.



(ادامه دارد)

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۸)

در این شماره نیز بررسی مجلهٔ آشنایی با ریاضیات را پی‌می‌گیریم.

به گشت و گذارمان ادامه می‌دهیم. گشت و گذاری که در آغاز نیّتمان به سریع بودن آن بوده و اکنون باتوجه به گلهای رنگا رنگ صفحه‌های مجله به کندی گراییده است. به‌هرحال از این مقاله هم دل می‌کَنیم و خوانندهٔ مشتاق را به اصل مرجع آن حوالت می‌دهیم و از سرآن می‌گذریم و به راهمان قدم می‌زنیم و باگذشتن از خیر یکی دو مقاله به مقالهٔ **آفرینندگان ریاضیات عالی**[۱] می‌رسیم و در آن دربارهٔ ایساک باروی[۲] (۱۶۷۷ - ۱۶۳۰) استاد نیوتن چنین می‌خوانیم که:

بی‌توقعی و فروتنی جزو عادتهای باروی بود و حتی به لباس پوشیدن خود هم توجهی نداشت. ظاهری موقر داشت، با قدی نه چندان بلند، لاغر و رنگ پریده. او چنان محجوب بود که حتی حاضر نمی‌شد برای تصویر خود، در برابر نقاش بایستد، نقاش تصویر او را پنهانی، وقتی دوستان موفق شدند توجه باروی را به‌جای دیگری جلب کنند کشید. باوجود این در عمق وجود باروی، هرگز خصلت مبارزه‌جویی، که از کودکی به آن شهرت داشت، خاموش نشد. وقتی که در «سمیرنا»* روی دریا بود، دزدان دریایی به کشتی حمله کردند، باروی تنها مسافری بود که همراه بافرماندهی در عرشه باقی ماند و حملهٔ متجاوزان را شکست داد. وقتی که کشیش شاهی بود ضرورت پیدا کرد که مدتی را با درباریان بگذراند. کشیش فروتن می‌بایست غرور اشراف را متواضعانه تحمل کند، ولی کشیش ما «از آنها نبود»؛ موضع باروی را می‌توان از گفت و گو، یا درست‌تر بگوییم، از دوئلی که بین او و کنت روچستر انجام گرفته است، تشخیص دهیم:

- دکتر، من شما را در حد کفش می‌دانم.
- کنت، من شما را در حد خاک می‌دانم.
- دکتر، من شما را در مرکز زمین می‌بینم.
- کنت، من شما را در آن طرف زمین می‌بینم.
- دکتر، من شما را در قعر جهنم می‌بینم.

باروی روی پاشنه‌هایش چرخید و گفت:

- من شما را در آن‌جا تنها می‌گذارم.

از مقالهٔ خوب **لگاریتمها**[۳] می‌گذریم، نیز از مقالهٔ **مسلسل مسأله‌های قدیمی** که با عنوان **مسأله‌های چینی**[۴] مطرح شده است - گرچه در این صورت از وزن شمشهای طلا و نقره و قیمت گاومیش و گوسفند بی‌خبر می‌مانیم - و به مقالهٔ **ریاضیات مرز سودمند بودن را مشخص می‌کند**[۵] می‌رسیم و در آن چنین می‌خوانیم:

هندسهٔ دبیرستانی حتی از ساده‌ترین چیزها، مثل مثلث و دایره، چنان شبکهٔ به هم بافته‌ای از قضیه‌ها ایجاد می‌کند که به سختی می‌توانید از آن خلاص شوید و این بیشتر به خاطر آن است که شما بدانید با چه موضوعی سروکار دارید: این را فایدهٔ آن می‌دانند. ولی در مورد «سودمند بودن» چه می‌توان گفت؟ «سودمندی» مفهومی کاملاً انتزاعی است که راه حلی را می‌پذیرد که کشش به سمت حداکثر رضایت را به وجود آورد.

---

* نام قدیمی و یونانی ازمیر در ترکیه (م.)

خط اصلی نظریهٔ کلی «سودمندی» عبارت است از بررسی پدیده‌هایی که در آنها نتیجه‌هایی که مورد علاقهٔ ماست، به پیشامد و تصادف مربوط باشد. در نظریه «سودمندی» این گونه پدیده‌ها را «شانس» یا «لاتاری» می‌نامند. به جز مفهوم مرسوم واژهٔ «لاتاری»، همهٔ انواع کارهای مربوط به بیمه، شرکت در قمار، درنظر گرفتن پدیده‌های خود به خودی و غیره را هم باید مربوط به آن دانست.

سه نفر را درنظر می‌گیریم. اگر اولی فردگرا باشد، تابع سودمندی او، به طور ساده، همان برد a_1 است که تمایل به زیاد کردن آن دارد.

حالا فرض می‌کنیم که اولی، دوستی فداکار برای دومی باشد، این به معنای آن است که سودمندی اولی a_2 است.

اگر اولی هم به‌فکر دومی هم به فکر سومی باشد، ولی کمی بیش‌از آنها هم دربارهٔ خودش بیندیشد، طبیعی است که تابع سودمندی او، به‌صورت:

$$a_1 + a_2 + a_3$$

در خواهد آمد.

ممکن است اوّلی، به «بی‌تفاوتی کاملی» علاقه‌مند باشد، یعنی بدون هیچ علاقهٔ مادی شخصی، به بقیه لطمه بزند (مثل روحیّهٔ اوباش). طبیعی است که در این حالت، تابع سودمندی به این صورت در می‌آید:

$$-(a_2 + a_3)$$

چگونه می‌توان حسادت اوّلی را نسبت به دومی نشان داد؟ روشن است که تمایل اوّلی در این است که دومی، در هرحال، بهتراز خود او نباشد. بنابراین، هدف اوّلی این است که اختلاف:

$$a_2 - a_1$$

را به‌حداقل برساند. و طبیعی است که تمایل اولی به این هدف را هم باید به عنوان تعریف حسد او نسبت به دومی قبول کرد.

خود خواهی را، به عنوان تمایلی می‌پذیریم که شخص نمی‌خواهد بدتر از دیگران باشد، شکل «ضعیفتر» آن این است که می‌خواهد «آخرین نفر» نباشد. و این متناظر با تابع سودمندی

$$a_1 - \text{Min}\,\{a_2, a_3\} \qquad (*)$$

است.[۶]

به‌همین ترتیب، جاه‌طلبی (به صورت «شدید» آن)، یعنی تمایل به این که «از همه بهتر» باشد. بنابراین، جاه طلبی اوّلی رامی‌توان به‌صورت به‌حداکثر رساندن تفاضل:

$$a_1 - \text{Max}\,\{a_2, a_3\} \qquad (**)$$

نشان داد.[۷]

روشن است که بین «ضعیفترین» خودخواهی و «شدیدترین» جاه‌طلبی ـ که با رابطه‌های (*) و (**) مشخص شده‌اند ـ مجموعه‌ای نامتناهی از انواع «احساسهای مربوط به ارزشهای شخصی» وجود دارد که متناظر با تابعهای بینابینی هستند.

این هم یک احساس دیگر: «مثل همه بودن»، که رابطهٔ متناظر آن را می‌توان به صورت حداقل کردن این رابطه نوشت:

$$\text{Max}\,\{|a_1 - a_2|, |a_1 - a_3|\}$$

انصاف یعنی چه؟ انصاف به این معناست که از تمایل شدید به بردهای شخصی و از برد متوسط دوری گزینیم، یعنی حداقل کردن این ماکزیمم:

$$\text{Max}\left\{\left|a_1 - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right|, \left|a_2 - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right|, \left|a_3 - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right|\right\}$$

یا رابطه‌ای شبیه به آن.

رسیدن به مناسبترین راه حلها و حداکثر سودمندی، از چیزهایی است که ریاضی‌دانها به آن توجه دارند، و نظریهٔ بازی به‌طوری جدی به این مسأله‌ها می‌پردازد.

در مقالهٔ علم و صنعت در پلانیورس[۸] به تجسمی از موجودات دو بعدی و زندگی آنها برمی‌خوریم. بعضی از مطالب خواندنی این مقاله که به قلم مارتین گاردنر است، به صورت زیر است:

در «سرزمین هموار[۹]» تذکر داده‌ام که «دست کم از لحاظ سرگرمی و تفریح هم که باشد، ارزشمند است که ویژگیها و سرشت

دنیای دو بعدی مورد مطالعه قرارگیرد و ابزار و وسایل مکانیکی ساده‌ای که ممکن است در چنین دنیایی به کار رود بررسی شود».

این تذکر انگیزه‌ای شد که الکساندر دودنی[۱۰] دنبالهٔ چنین فکری را بگیرد و در سالهای ۱۹۷۸ و ۱۹۷۹ بخشی از اندیشه‌های خود را در این مورد نشر کند.

پلانیورس یا دنیای دو بعدی سرزمینی است که اسم آن را آستریا[۱۱] گذاشته‌است. آستریا سیارهٔ دیسک مانندی است که در فضای مسطح می‌چرخد. حرکت ساکنین آستریا برانتهای لبهٔ سیاره انجام می‌گیرد. آنها می‌توانند جهت شرق و غرب و بالا و پایین را تشخیص بدهند ولی طبیعتاً دیگر شمال و جنوب ندارند.

دودنی با تکیه به اصل تشابه، به نکات زیر پی برد:

۱) پلانیورس هم یک توالی سه بعدی از «زمان و مکان» است.

۲) مادهٔ پلانیورس متشکل از ملکولها، اتمها و ذرات بنیادی است.

۳) انتقال انرژی در آن به‌صورت موجی و ذره‌ای است.

۴) دارای نور با تمام طول موجهایش می‌باشد که درنتیجه به‌وسیلهٔ عدسیهای مسطحه (دو بعدی) منکسر می‌شود. استفاده از عدسی، وجود چشمهای پلانیورسی، تلسکوپهای پلانیورسی و میکروسکپهای پلانیورسی را امکان‌پذیر می‌سازد.

۵) بعضی‌از قوانین اساسی پلانیورسی با همتاهاشان در دنیای سه بعدی، مطابقت کامل دارند، مثل: قانون علت و معلول، قوانین اوّل و دوم ترمودینامیک و قوانین مربوط به انرسی، گاز، اصطکاک، مغناطیس، الاستیسیته.

دودنی فرض را براین گذاشت که پلانیورس نیز با یک انفجار به‌وجود آمده و دائماً رو به انبساط و واکنش است. یک محاسبهٔ سرانگشتی، برمبنای قانون عکس فاصلهٔ جاذبه نشان می‌دهد که ـ بدون بستگی به مقدار جرم ـ سرانجام این واکنش باید در پلانیورس متوقف شود و پس‌از آن نوبت انقباض یا همکشی فرارسد.

آسمان شب ساکنین آستریا مسلماً قوسی از دایره خواهد بود که در طول آن ستارگانی به صورت نقطه‌هایی درخشان پراکنده خواهند بود.

آستریا می‌تواند خورشیدی هم داشته باشد که ضمن گردش به دور آن، در اثر چرخش به دور خودش، شب و روز هم ایجاد کند.

جالب این است که همان‌طور که موجودات چهار بعدی قادر به دیدن کلیهٔ اندامهای داخلی ما هستند، ما هم می‌توانیم ارگانهای داخلی هر حیوان دوبعدی‌یی را بخوبی ببینیم.

مردم آستریا مثلث شکلند و صورتهاشان همیشه به یک جهت متوجه است و دو دست در جلو، دو چشم در نزدیکی رأس مثلث و دو پا در زیر قاعدهٔ مثلث دارند، یعنی متقارنند. صورت مردها همیشه رو به مشرق و صورت زنها رو به مغرب قرار گرفته است. درنتیجه، آستریائیها مانند پرندگان یا اسبهای ما، دریک زمان می‌توانند دو جهت را ببینند. طبیعتاً آستریائیها برای عبور از یکدیگر یک راه بیشتر ندارند و آن خزیدن از زیر یا پریدن از روی یکدیگر است.

از پلانیورس بیرون می‌آییم[۱۲] و با پریدن از روی یک دو مقالهٔ همچنان مفید به چهارمین قسمت مقالهٔ **تلاشی برای تنظیم فرهنگ ریاضی**[۱۳] می‌رسیم. نویسنده در تلاش خود در کار تنظیم مقاله برای دانش‌آموزان موفق است، ولی ما در تلاشمان در کار گذشتن از سرمقاله توفیق نمی‌یابیم و ناچار به ذکر دو بخش آن که پیش‌از این هم ذکری از نام آنها به میان آمده است؛ می‌پردازیم:

پاپیروس ریند[۱۴] (به نام مالک آن A. H.Rhind ، مصرشناس انگلیسی) برای‌نخستین بار درسال ۱۸۷۷ ، و به‌وسیلهٔ **هایزن لومر**، مورد بررسی قرارگرفت. و به زبان آلمانی ترجمه شد. این پاپیروس که حدود ۲۰۰۰ سال پیش‌از میلاد نوشته شده، دارای مجموعه‌ای شامل ۸۴ مسأله با حل آنها است که به ریاضیات کار بسته مربوط می‌شوند و در آنها از عمل با کسرها، تعیین مساحت مستطیل، مثلث، ذوزنقه و دایره، و حجم مکعب مستطیل و استوانه صحبت شده‌است.

پاپیروس مسکو[۱۵] توسط مصرشناسان روسی بررسی و درسال ۱۹۳۰ به طور کامل به زبان آلمانی ترجمه شد. در این پاپیروس، ۲۵ مسأله، تقریباً شبیه همان مسأله‌های پاپیروس ریند حل شده است. در مسألهٔ چهاردهم آن، رابطهٔ دقیق محاسبهٔ حجم هرم ناقص

(باقاعده‌های مربعی) داده‌شده است. در مسألهٔ دهم، سطح جانبی نیم استوانه‌ای که ارتفاع آن برابر قطر باشد (یا، احتمالاً ، مساحت نیم کره) محاسبه شده‌است، و این نخستین نمونهٔ تعیین مساحت سطحهای منحنی در ادبیات ریاضی است.

گفتیم که یکی از ویژگیهای مجله در کنار پرداختن به تاریخ و آموزش و پرورش ریاضیات توجه به ریاضیات کار بسته یا عملی است. در این مورد و در همین مرجع[16] به دو مقالهٔ **کاربرد هندسه در علم جغرافیا**[17] و **ریاضی‌کردن فیزیک**[18] برخورد می‌کنیم که به این علت که خلاصه کردنشان زیان جدی به آنها می‌رساند از این کار صرف‌نظر می‌کنیم، و به شتاب از مطالب کتاب می‌گذریم و به شمارهٔ بعد[19] می‌رسیم.

این شماره با مقالهٔ **می‌بینیم یا به نظرمان می‌رسد**[20] آغاز می‌شود. اغلب مقالات این شماره دنبالهٔ مقاله‌های قبل است، و آخرین مقالهٔ آن **تعمیم بسط دو جمله‌ای**[21] می‌باشد. در این مقاله چنین می‌خوانیم که:

پاول لوکی[22] ریاضی‌دان و محقق آلمانی درسال ۱۹۴۸ میلادی هنگامی‌که مشغول ترجمهٔ قسمتی از مفتاح الحساب **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** بود متوجه شد که آنچه به نام بسط دو جمله‌ای نیوتن و مثلث حسابی پاسکال مشهور است، پیش‌از این دو ریاضی‌دان، توسط کاشانی و ریاضی‌دانهای دیگر اسلامی مطالعه و مدون شده است.

محمد باقریزدی[23] نیز در پایان مطلب دهم از باب اوّل عیون ـ الحساب فصلی به این موضوع اختصاص داده است.

دکتر محسن هشترودی علیه‌الرحمه در این باره چنین نوشته است:

بسط دو جمله‌ای جبری امروزه معمولاً به نام دوجمله‌ای نیوتن معروف است. چه اوّل بار علی‌الظاهر، نیوتن این محاسبات را مدون کرده است، ولی با ملاحظهٔ این‌که خیام در کارهای خود این بسط و قانون تشکیل ضرایب آن را به کاربرده است روشن می‌شود که دو جمله‌ای نیوتن و مثلث پاسکال پیش‌از این دو دانشمند، توسط خیام کشف و وضع شده است. دریکی از کنگره‌های بین المللی تاریخ علوم که در رم برپا شد دانشمندان خارجی به این امر اشاره کرده‌اند و روزنفلد از استادان دانشگاه مسکو پیشنهادی دایر برتغییر نام دوجمله‌ای و مثلث به نام خیام به کنگره تقدیم داشت.[24]

به سال ششم انتشار مجله می‌رسیم. در این سال ناشر پیشین مجله از ادامهٔ انتشار آن چشم می‌پوشد و سردبیر مجله که نمی‌خواهد این یگانه نشریهٔ عمومی ریاضیات به زبان فارسی تعطیل‌شود انتشارآن را با همان سبک و شیوهٔ پیشین، اما ناگزیر با بهایی گرانتر، دنبال می‌کند.[25]

اولین مقالهٔ اولین شمارهٔ سال ششم **معادله‌های دیفرانسیلی و اهمیت آنها در دانشهای طبیعی**[26] است. در این مقاله که ساده‌ترین نوعهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی را مورد بررسی قرار می‌دهد سخن از کاربرد این معادلات در محاسبهٔ سرعت حرکت مستقیم‌الخط، تجزیهٔ رادیواکتیو، جذب نور، غلظت محلول، سردکردن جسم، ساده‌ترین مدارهای الکتریکی، سقوط جسم، نوسانهای ناشی از نیروی کشسان فنر، و روش مدلسازی ریاضی به میان می‌آید.

در مقالهٔ **انحنای فضا**[27] در شرح احوال و آثار برنارد ریمان[28] ریاضی‌دان آلمانی چنین آمده است که:

دربهار سال ۱۸۵۴، یک ریاضی‌دان آلمانی به نام برنارد ریمان بشدت نگران آیندهٔ خود و امتحانی بود که بزودی در پیش داشت. او در آن ایام بیست و هشت ساله بود و هنوز هیچ درآمدی نداشت. با چند سکه‌ای که پدرش (یک کشیش پروتستان در یکی از شهرهای کوچک هانوور) هر ماه برایش می‌فرستاد، زندگی محقری را می‌گذراند. برنارد با فروتنی به پدر و برادرش می‌نوشت[29] که اغلب استادان مشهور دانشگاه، در برلین و گوتینگن، بی‌هیچ دلیلی محبت فوق‌العاده‌ای نسبت به وی ابراز می‌کنند. در این زمان، او مدرک دکتریش را گرفته بود و برای آن که به سمت دانشیاری (بدون دریافت حقوق) منصوب شود،باید خطابهٔ قابل قبولی در محضر کلیهٔ اعضای دانشکدهٔ فلسفه در گوتینگن ایراد می‌کرد. برنارد سه موضوع را پیشنهاد کرده بود. در آن روزها به برادرش نوشت: «دو موضوع اول

را بخوبی تهیه کرده بودم، اماگوس موضوع سوم را انتخاب کرد و حالا به زحمت افتاده‌ام.»

کارل فردریک گوس، سرکردهٔ ریاضی‌دانان آلمان و مایهٔ مباهات دانشکدهٔ خود بود. در تصور برنارد از عرش اعلا، مبل‌کارِ گوس از بارگاه ربانی فاصلهٔ چندانی نداشت. (این برداشت، امروزه نیز در گوتینگن عمومیت دارد.) عنوان موضوعی که گوس برای سخنرانی ریمان جوان برگزید، عبارت بود از: «فرضهایی که پایهٔ هندسه راتشکیل می‌دهند.» گوس در مورد این عنوان چیزی جز چند بررسی مبهم انتشار نداده بود، با این حال، این موضوع را بر دو موضوع دیگری که ریمان پیشنهاد کرده بود ترجیح داد، زیرا کنجکاو بود ببیند این مرد جوان درمورد چنین موضوع ژرف و غریبی چه خواهد گفت.

درمقالهٔ **تابع یا عمل وکردار**[۲۹] درتعریف تابع یا فونکسیون[۳۱] چنین می‌خوانیم که: تابع از یک یا چند متغیر، عمل یاکرداری است که به موجب آن یک یا چند متغیر تبدیل به متغیر دیگر می‌شود. **فرگه** در منطق ذات هر مفهوم را با تابع بیان می‌کند و **اشپینگلر** تابع را عدد باختری می‌نامد و آن را مشخص فرهنگ مغرب زمین می‌داند.

در مقالهٔ **آفرینندگان ریاضیات عالی**[۳۲] که یکی از مقالات مسلسل این مجموعه است در شرح حال لایب نیتز فیلسوف و ریاضی‌دان بزرگ آلمانی چنین آمده است که:

باید به این نکته اشاره کنیم که هر قدر کشفهای لایب نیتز در ریاضیات بزرگ باشد، برای خود او، همهٔ آنها، تنها جزئی از مسألهٔ فلسفی مورد نظرش را تشکیل می‌داد، مسأله‌ای که حل آن، تمامی زندگی لایب نیتز را پرکرده، همچون خط سرخی از میان تمامی کارهای او عبور می‌کند. برای این‌که بتوانیم ماهیت این مسأله راروشن کنیم، باید به یاد بیاوریم که در فلسفهٔ لایب نیتز، نقش عمده، به عهدهٔ هماهنگی و توازن عمومی است. جهانی که برآن یک نظام هماهنگ حکومت می‌کند، نمی‌تواند جهانی یگانه نباشد، و درنتیجه، باید روش یگانه‌ای هم برای شناخت آن وجود داشته باشد. ولایب نیتز، نمونه و سرمشق کامل این روش را در ریاضیات می‌دید. البته، روش ریاضی، به خودی خود روشی عام نیست و نمی‌تواند باشد، زیرا تنها حوزهٔ کمیتها را در برمی‌گیرد. ولی، روش ریاضی نمونه‌ای است که با سرمشق قرار دادن آن می‌توان چنان آلگوریتمی ساخت (واژهٔ «آلگوریتم» را برای نخستین بار، لایب نیتزبه کاربرده است)، که بتواند همهٔ مفهومها را در بربگیرد، همان‌طور که ریاضیات، کمیتها را در برگرفته است.

به مقالهٔ **هفت فاجعه**[۳۳] می‌رسیم. گرچه قبلاً در مورد مطلب مربوط به آن یعنی **نظریهٔ فاجعه‌ها** سخن گفته‌ایم، بااین همه به ذکر چند نکته از آن می‌پردازیم:

تولد ستارهٔ جدید، بازشدن گل یا به‌وجود آمدن شهر، اینها پیش - آمدهایی عادی هستند، ولی در واقع هرکدام از آنها، تعادلی راکه قبلاً برقرار بوده است، به صورتی ناگهانی به هم می‌زنند. تمامی عالم افلاکی، در حرکت تکاملی خود، به‌حالت تعادلی دیگر منتقل می‌شود. کارهای **پرفسور رنه‌توم**، ریاضی‌دان فرانسوی، می‌تواند در درک این جهشها به ماکمک کند.

«**نظریهٔ ویژگیهای نگاشتهای قابل دیفرانسیل‌گیری**» را، اگر در اصطلاحها تجربهٔ کافی نداشته‌باشیم، می‌توان به ترتیب دیگری هم بیان کرد مثلاً، برای امان دادن به گوش، که ناچار به شنیدن اصطلاحی به این دور و درازی نباشد، می‌توان از اصطلاح کوتاه «نظریهٔ فاجعه‌ها» استفاده کرد.

بیان آسانتر می‌شود، ولی معنا و مفهوم آن چیست؟ چه بساکه این کوتاه کردن اصطلاح، خواننده را به گمراهی بکشاند و ذهن او را به طرف زلزله یا آتش سوزی، سقوط هواپیما یا ورشکستگی مالی بکشاند. ولی در این مقاله، به هیچ موضوعی از این قبیل برخورد نخواهید کرد. در این‌جا، دربارهٔ گلوله‌ای که دریک شیار خمیده می‌غلتد، و دربارهٔ قرصی که به کمک نیروهای وارد برآن درحال تعادل است، و با به هم خوردن‌وناپایداری تعادل، حالت خود را از دست می‌دهد و ... صحبت می‌شود.

در این نظریه، به هروضعی که موجب دگرگونی تندی در حالت یک دستگاه بشود و هر به هم خوردگی ناگهانی که در تداوم جریان یک روند به‌وجود آید، فاجعه گفته می‌شود.

نظریهٔ فاجعه‌ها، شاخه‌ای از آنالیز ریاضی است.

به‌طور کلی، همهٔ مسأله‌های مربوط به نظریهٔ فاجعه‌ها را می‌توان به این صورت تنظیم و روشن کرد: طبیعت جهشها چه‌گونه است که ضمن گذار از یک حالت تعادلی به حالت دیگر، جنبهٔ تدریجی تغییر را از دست می‌دهند؟

از مقالهٔ **ریاضیات و تصمیم‌گیری جمعی**[۳۴] که در آن جمعی می‌خواهد براساس خواستهای اعضایش تصمیمی بگیرد می‌گذریم و دریک دو مقالهٔ بعدی نیز توقف نمی‌کنیم و به مقالهٔ معماهای مکانیکی[۳۵] می‌رسیم که در آن از معماهایی سخن می‌رود که تنها برصفحهٔ کاغذ نوشته نشده‌اند، بلکه از چند وسیلهٔ مخصوص و معمولا ساده درست شده‌اند، و در حل آنها باید از دستها نیز کمک گرفت. از این مقاله نیز گذر می‌کنیم و به مقالهٔ **ریاضی‌دانان ایران**[۳۶] می‌رسیم و در آن در مورد **ابوجعفر خازن** چنین می‌خوانیم:

ابوجعفر محمد بن حسین صاغانی خراسانی خازن (ریاضی‌دان و منجم ثلث سوم قرن سوم و نیمهٔ اول قرن چهارم هجری) یکی از بزرگترین رجال ریاضی و نجوم درنیمهٔ اول قرن چهارم هجری است. وی در اواخر عمر یا در تمام آن در شهر ری می‌زیست و نوشته‌اند که در دستگاه رکن الدولهٔ دیلمی صاحب مقام و عزت بوده است. عمر طولانی یافت و در بین سالهای ۳۵۰/۹۶۱ و ۳۶۰/۹۷۱ در گذشت.

ابوجعفر خازن علاوه برمقام بلندی که در نجوم و ریاضیات داشت در ساختن آلات نجومی و به‌کاربردن آنها مهارت کامل داشت و در زمان خود در این فن مشهور بود. چنان‌که ریاضی‌دانهای بزرگ مانند: ابونصر عراق و بیرونی و ابوالجود و عمرخیام و نصیرالدین طوسی بارها در نوشته‌های خود از وی و آثارش گفت و گو کرده‌اند.

عمرخیام در کتاب جبر و مقابلهٔ خود نوشته است که معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$x^3 + a = cx^2$$

را که ماهانی نتوانسته بود حل کند و آن را ممتنع انگاشته بود، ابوجعفرخازن به‌وسیلهٔ قطوع مخروطی حل کرد.

برای این‌که وسوسه نشویم و کار به درازا نکشد از بقیهٔ مطالب این شماره بسرعت می‌گذریم و به شمارهٔ بعد[۳۷] می‌رسیم.

اولین مقالهٔ شمارهٔ بعد مجموعه‌ها[۳۸] است. در این مقاله چنین می‌خوانیم:

مجموعه چیست و چه معنایی دارد؟ اگر شرافتمندانه بخواهید، باید بگوییم که تعریفی برای این مفهوم نداریم. تعریف یعنی چه؟ تعریف را، مثلاً می‌توان به این معنی دانست که ابتدا چیزی کلّیتر از مفهوم موردنظر خود نام ببریم، سپس در این محدودهٔ کلی، مرزهایی را مشخص کنیم که مفهوم مورد نظر ما را از همهٔ مفهومهای دیگر جدا کند (یعنی، خصلتها و ویژگیهایی که این مفهوم را از دیگر مفهومها متمایز می‌کند، معین کنیم).

در مورد مفهوم «مجموعه» هیچ مفهومی را که نسبت به آن کلّیتر باشد نمی‌شناسیم (و باید گفت، همین عام بودن مفهوم مجموعه‌است که موجب شده‌است یکی از بنیانیترین نقشها را در ریاضیات امروزی داشته باشد).

اما وقتی تعریف مجموعه را نمی‌دانیم چه‌گونه می‌توانیم مثلاً از مجموعهٔ مشخصی مثل مجموعهٔ اعداد طبیعی صحبت کنیم؟ و در این مورد نوعی ناسازگاری وجود ندارد؟

جواب این است که جای هیچ‌گونه سازگاری نیست. این درست است که مجموعه، به‌عنوان یک مفهوم انتزاعی ریاضی، قابل تعریف نیست، ولی برای تعریف یک مجموعهٔ مشخص، به هیچ دشواری برنمی‌خوریم.

در مقالهٔ **ابن سینا**[۳۹] چنین می‌خوانیم که:

پدرش از اهل بلخ بود و خود او به سال ۳۷۰ / ۹۸۰ درنزدیکی

بخارا متولد شد و درسال ۴۲۸ / ۱۰۳۷ درهمدان درگذشت و هم اکنون آرامگاه وی در آن‌جا دیده می‌شود.

مهمترین اثر ریاضی ابن سینا همان است که در کتاب «شفا» آورده است وبعضی از آنها عبارتنداز:

الف. دستور تشکیل عددهای مثلث:

عددهای مثلث عددهایی هستند که از جمع کردن جمله‌های متوالی رشتهٔ طبیعی عددها به دست می‌آیند مانند:

$$۱ , ۲ , ۳ , ٦ , ۱۰ , ۱۵ , ۲۱ , \ldots$$

دستور تشکیل این عددها این است[۴۰]:

$$T_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

ب. مجموع هرعدد مثلث و عدد مثلث ما قبل آن مساوی است با مربع مرتبهٔ آن یعنی:[۴۱]

$$T_{n-۱} + T_n = n^۲$$

ج. دستور تشکیل عددهای مخمس :

عددهای مخمس عددهایی هستند که از جمع کردن جمله‌های متوالی تصاعد حسابی زیر حاصل می‌شوند:

$$۱ , ۴ , ۷ , ۱۰ , ۱۳ , ۱٦ , ۱۹ , \ldots$$

عددهای مخمس ابتدا از واحد عبارتنداز:

$$۱ , ۵ , ۱۲ , ۲۲ , ۳۵ , ۵۱ , \ldots$$

این عددها را از آن جهت مخمس می‌نامند که می‌توان آنها را به شکل پنج ضلعی‌منتظم مرتب کرد. دستور تشکیل دادن این عددها این است:

$$T_n = n^۲ + T_{n-۱} = \frac{(۳n-۱)n}{۲}$$

شمارهٔ بعد یعنی شمارهٔ ۴ سال ششم یا شمارهٔ مسلسل ۲۴ **بامقالهٔ معادله‌ها و نامعادله‌ها** آغاز می‌شود که قسمت اعظم مطالب آن را به خود اختصاص می‌دهد. و با مقالهٔ مسلسل **ریاضی‌دانان ایران** به قلم **ابوالقاسم قربانی** ادامه می‌یابد. این مقاله در مورد **ابن صلاح همدانی** ریاضی‌دان و فیلسوف و طبیب نیمهٔ اول سدهٔ ششم هجری است، که به خصوص در ریاضیات صاحب‌نظر بوده و مسائل دقیق و مشکلی را که در آثار متقدمان خودمی‌دیده‌مورد بحث و نقادی قرار می‌داده است.

شمارهٔ بعدی راکه در این جا مورد بررسی قرار می‌دهیم شمارهٔ **۵** سال ششم یا شمارهٔ مسلسل **۲۵** است. اولین مقالهٔ این شماره **زنان و ریاضیات** است که به شرح حال **هی پاتی** که قبلاً هم ذکری از او به میان آمده، می‌پردازد. در مقالهٔ **مسأله‌های قدیمی**[۴۲] به مسأله‌های ایرانی توجه شده و درضمن آن مسائل زیر آمده است:

مسأله‌هایی از خوارزمی

۱. دریک مثلث متساوی‌الساقین، که طول هرساق آن برابر ۱۰ و طول قاعدهٔ آن برابر ۱۲ است، یک مربع محاط کنید.

۲. عددی را پیدا کنید که اگر $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ آن را از آن کم کنیم، ۸ باقی بماند.

مسأله‌هایی ازکرجی

۳. عددی پیداکنید که ازضرب آن در $۳ + \sqrt{۵}$، عدد ۱ به‌دست آید.

۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲ + ۶^۲ = z^۲ \\ xz = y^۲ \\ xy = ۱۰ \end{cases}$$

مسألهٔ عمرخیام

۵. این معادله را حل کنید:

$$\frac{۱}{x^۲} + \frac{۲}{x} = ۱\frac{۱}{۴}$$

مسأله‌یی از بهاءالدین عاملی

٦. h ارتفاع و r و R شعاعهای دو قاعدهٔ بالا و پایین یک مخروط ناقص است. ارتفاع مخروط کامل متناظر با آن را بیابید.

مسأله‌یی از غیاث‌الدین جمشید کاشانی

۷. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، تساوی زیر برقرار است:

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$$

سرانجام آخرین شماره‌ای را که دراین مقاله مورد بررسی قرار می‌دهیم شمارهٔ ۶ سال ششم به شمارهٔ مسلسل ۲۶ است.

یکی از مقاله‌های جالب این شماره مقالهٔ **روش مونت کارلو**[43] است. این روش عبارت است از روش عددی حل مسأله‌های ریاضی به کمک نمونه برداری از کمیتهای تصادفی. تاریخ پیدایش این روش را سال ۱۹۴۹ دانسته‌اند و این آن زمان است که مقالهٔ «**روش مونت کارلو**» در آن منتشر شد. مبتکران این روش جان فون فویمان و استانیسلاو اولام ریاضی‌دانهای آمریکایی هستند. مقاله را خلاصه نمی‌کنیم چه این کار به یک دست بودن آن لطمه می‌زند و خوانندهٔ علاقه‌مند را به خود مقاله ارجاع می‌دهیم.

در مقالهٔ **ریاضی‌دانان ایران** راجع به **محمد باقریزدی**[44] چنین می‌خوانیم که:

مهمترین اثر ریاضی محمد باقریزدی از ریاضی دانهای دورهٔ صفویه کتاب **عیون الحساب** است که به عربی نوشته که به تقلید مفتاح ـ الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی فراهم آورده است.

در این کتاب حالات خاصی از معادلهٔ درجه پنجم حل شده‌است. نیز محاسبهٔ $a^n - b^n$ با معلوم بودن a ، b ، n آورده شده است. در پایان مطلب ششم از باب هفتم کتاب فصلی در استخراج عددهای متحاب دارد که در آن ابتدا قاعدهٔ معروف ثابت بن‌قره را برای محاسبهٔ عددهای متحاب بیان می‌کند و سپس قاعده‌ای از خود شرح می‌دهد و با همان قاعده دو عدد متحاب ۹۳۶۳۵۸۴ و ۹۴۳۷۰۵۶ را به‌دست می‌آورد.

این دو عدد را نخستین بار در اروپا دکارت ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی در سال ۱۶۳۸ میلادی به‌دست آورد. یزدی تألیف کتاب عیون الحساب را در سال ۱۰۴۷ هجری قمری یعنی سال ۱۶۳۷ میلادی به پایان رسانیده و یقیناً این دو عدد را پیش از آن تاریخ حساب کرده بوده است.

عیون‌الحساب توسط ملامحمدباقربن میراسماعیل خاتون آبادی به زبان فارسی ترجمه شده است.

آخرین سخن این شماره که آخرین حرف مقالهٔ ما نیز هست تحت عنوان **به‌خوانندهٔ «آشتی با ریاضیات**[45]» و چنین است.

با همهٔ دشواریها ساختیم و به هر نحوی بود سال ششم «آشتی با ریاضیات» را به پایان رساندیم. مهر دوستان و استقبال «عاشقانه»ی خوانندگان، تکیه گاه اصلی ما در تحمل سختیها و از میان برداشتن مانعها بود. دشواری و مانع، گاه چنان بود که حتی بسیاری از آشنایان «اهل فن» ناامید می‌شدند و تلاش ما را بیهوده می‌دانستند.

دریغ، که ناچار بودیم، قسمت عمدهٔ وقت و نیروی خود را در راه برطرف کردن دشواریهای «قانونی»، «مالی» و «اداری» صرف کنیم و تنها سهم ناچیزی از آنها را برای بالا بردن کم و کیف نشریهٔ خود درنظر بگیریم. تهیهٔ مطلب، ویراستاری، چاپ و پخش یک نشریهٔ علمی، سازمان می‌خواهد و آرامش خیال. و ما از هر دو محروم بودیم و امید، که بتدریج به آنها دست یابیم.

علی‌رغم میل خود، و با وجود اطلاعی که از جیب تقریباً خالی خوانندگان خود داریم، ناچار شدیم «آشتی با ریاضیات» را گرانتر کنیم. برای سال آینده (سال ۱۳۶۲)، تک شمارهٔ نشریه ۱۵۰ ریال و اشتراک سالانهٔ آن ۹۰۰ ریال خواهد بود.

امیدواریم بتوانیم نخستین شمارهٔ سال هفتم «آشتی با ریاضیات» را اوّل فروردین ۱۳۶۲ در اختیار شما قرار دهیم.

یادداشتها

۱. همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۲ ، صفحهٔ ۵۶ ، ترجمهٔ پرویزشهریاری.
۲. آیزک برو مؤلف کتاب درسهایی از اپتیک و هندسه.
۳. همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۲ ، صفحهٔ ۶۸ ، ترجمهٔ پرویزشهریاری.
۴. همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۲ ، صفحهٔ ۷۸.
۵. همان مرجع، سال پنجم شمارهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱.

۶. منظور از { ... } Min کوچکترین عدد از عددهای داخل ابروهاست.
۷. منظور از { ... } Max بزرگترین عدد از عددهای داخل ابروهاست.
۸. همان مرجع، سال پنجم، شمارهٔ ۳ ، صفحهٔ ۱۵ ، ترجمهٔ هرمز شهریاری، Planiverse به معنای جهان دو بعدی یا دنیای مسطحه است. این واژه مترادف با Universe که به معنای کائنات یا جهان سه بعدی خودمان است، به کار گرفته‌شده‌است (م.)
۹. داستانی طنزآمیز از Edvin Abbott Abbott.
۱۰. Alexander Keewatin Dewdney دانشمند کامپیوتر اُنتاریوی غربی، W. Ontario
۱۱. Astria.
۱۲. البته اگر داخلش رفته باشیم؛ این سخن یادآور این بیت پرمعنی از مثنوی شریف است:

بــاردیگر مـا بـه قـصه آمـدیم ... ما از این قصه برون خود کی شـدیم

۱۳. همان مرجع، سال پنجم، شمارهٔ ۳، صفحهٔ ۷۲، نویسنده پرویز شهریاری.
۱۴. این پاپیروس در موزهٔ بریتانیا نگهداری می‌شود و چنین می‌گویند که کلمهٔ paper . یا مشابه‌های آن در زبانهای اروپایی مشتق از آن است.
۱۵. این پاپیروس هم مربوط به دانش ریاضی مصر باستان است.
۱۶. مرجع مذکور در شمارهٔ ۳۶.
۱۷. نویسنده : مجید همراه.
۱۸. نویسنده : فرهاد قابوسی.
۱۹. یعنی، شمارهٔ ۴ سال پنجم.
۲۰. همان مرجع، سال پنجم، شمارهٔ ۴ ، صفحهٔ ۱ ، ترجمهٔ پرویز شهریاری.
۲۱. همان مرجع، سال پنجم، شمارهٔ ۴ ، صفحهٔ ۹۶ ، پرویز خیزرانی.
۲۲. P. Lukey.
۲۳. محمد باقر زین‌العابدین یزدی از ریاضی‌دانان دورهٔ صفویه.
۲۴. ظاهراً این موضوع به ریاضی‌دانهای دیگر نیز مربوط می‌شود.
۲۵. نام ناشر این شماره مشخص نیست اما بهای آن ۱۲۰ ریال رقم زده شده‌است.
۲۶. آشتی با ریاضیات سال ششم شمارهٔ ۱ ، صفحهٔ ۳ ، ترجمهٔ پرویز شهریاری.
۲۷. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۱ ، صفحهٔ ۳۲ ، ترجمهٔ محمدباقری.
۲۸. Bernhard Riemann.
۲۹. با نامه‌ای که غیاث‌الدین جمشید کاشانی به پدرش نوشته و قسمتی از آن در شمارهٔ اول برهان تحت عنوان ادب ریاضی آمده است مقایسه شود.
۳۰. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۱ ، صفحهٔ ۵۲ ، دکتر اسدالله آل بویه.
۳۱. function.
۳۲. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۱ ، صفحهٔ ۵۶ ، ترجمهٔ پرویز شهریاری.
۳۳. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۳۷ ، ترجمهٔ پرویزشهریاری.
۳۴. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۵۳ ، شهریار شهریاری.
۳۵. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۷۲ ، ترجمهٔ هرمز شهریاری.
۳۶. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۹۳ ، ابوالقاسم قربانی.
۳۷. یعنی، سال ششم شمارهٔ ۳.
۳۸. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۳ ، صفحهٔ ۲۴۹ ، ترجمهٔ پرویز شهریاری.
۳۹. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۳ ، صفحهٔ ۲۹۸ ، ابوالقاسم قربانی.
۴۰. در واقع عددهای مثلث مجموعات عددهای طبیعی یا مجموعات یک تصاعد حسابی با جملهٔ اوّل ۱ و قدر نسبت ۱ را مشخص می‌کنند.
۴۱. امروزه این فورمولها را فورمولهای بازگشتی «recursive» می‌نامند.
۴۲. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۵ صفحهٔ ۵۴۷ ، ترجمهٔ پرویز شهریاری.
۴۳. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۶ صفحهٔ ۶۰۳ ، ترجمهٔ پرویز شهریاری، کیومرث پریانی.
۴۴. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۶ صفحهٔ ۶۷۳ ، ابوالقاسم قربانی.
۴۵. همان مرجع، سال ششم شمارهٔ ۶ صفحهٔ ۷۲۲.

ادب و ریاضی

ریاضی‌دانهای شهودی (یا اشراقی) از جمله گریس، ویل، بروئر، هیتینگ «Griss»، «Weyl»، «Brouwer»، «Heyting»،

آنچه را که غلط است، آنچه را که تناقضی در برندارد و آنچه را که بنا به ساختمان منطقی خود حقاً قانونی شاخته می‌شود، مشخص می‌کنند.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه، پرویز شهریاری

مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در هندسهٔ فضایی (قسمت سوّم)

● پرویز شهریاری

۷. قضیّه‌های مربوط به خطهای راست موازی

قضیّهٔ ۴. اگر از هریک از دو خط راست موازی مفروض، صفحه‌ای بگذرانیم و، درضمن، این صفحه‌ها متقاطع باشند، آن وقت فصل مشترک این صفحه، باهریک از دو خط راست مفروض، موازی است.

شرط: $a \parallel b$، $a \subset \alpha$، $b \subset \beta$، $\alpha \cap \beta = c$.

حکم: $c \parallel a$، $c \parallel b$.

اثبات. چون $a \parallel b$ و $c \subset \beta$، بنابراین، بنابر معیار موازی بودن خط راست و صفحه $a \parallel \beta$، ولی در این صورت، باتوجه به قضیّهٔ ۳ باید داشته باشیم $a \parallel c$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود: $b \parallel c$.

قضیّهٔ ۵. اگر هریک از دو خط راست مفروض، موازی باخط راست سوم باشد، آن وقت خود این دو خط راست باهم موازیند.

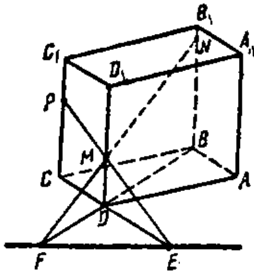
شرط: $a \parallel c$، $b \parallel c$.

حکم: $a \parallel b$.

اثبات. حالتی را درنظر می‌گیریم که، این سه خط راست، بریک صفحه نباشند. نقطهٔ دلخواه M را، روی خط راست a، انتخاب می‌کنیم و از M، صفحهٔ α، و از b و M، صفحهٔ β را می‌گذرانیم (بخش ۳، نتیجهٔ ۱). بنابرقضیهٔ ۴، خط راست MN (فصل مشترک این دو صفحه)، باخط راست b و همچنین، با خط راست c موازی است. از نقطهٔ M نمی‌توان دو خط راست، موازی باخط راست c، رسم کرد (بخش ۳، مسأله). بنابراین، خط راست MN بر a منطبق است. ولی چون $(MN) \parallel b$، پس $a \parallel b$.

مسأله. روی شکل ٦، متوازی السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ دیده می‌شود که، هر شش وجه آن، به شکل متوازی الاضلاع‌اند. نقطه‌های M، N و P، به ترتیب، به یالهای DD_1، BB_1 و CC_1 تعلق دارند. درضمن $(DC) \nparallel (MP)$. فصل مشترک دو صفحهٔ MNP و ABC را پیدا کنید.

حل: برای رسم خط راست موردنظر، کافی است دونقطه از فصل مشترک صفحه‌های MNP و ABC را پیدا کنیم. هریک از این گونه نقطه‌ها را، می‌توان، به‌عنوان نقطهٔ مشترک دو خط راست متقاطع به دست آورد که یکی از آنها متعلق به صفحهٔ MNP و



شکل ٦

دیگری متعلق به صفحهٔ ABC باشد. یکی از این نقطه‌ها، عبارت است از نقطهٔ E، محل برخورد خطهای راست MP و DC که روی

وجه DCC_1D_1 قرار دارند. خطهای راست DD_1 و BB_1، که با خط راست AA_1 موازی‌اند، باهم موازی می‌شوند (قضیهٔ ۵). بنابراین، نقطهٔ دوم F را، به‌عنوان محل برخورد خطهای راست MN و DB پیدا می‌کنیم (این دو خط راست، به صفحه DBB_1 تعلق دارند).

کوتاه‌شدهٔ حل: ۱) $E=(MP)\cap(DC)$، ۲) $F=(MN)\cap(DB)$، ۳) (EF). بنابر اصل موضوع برخورد صفحه‌ها، EF همان خط راست مورد نظر است.

پرسشها و مسأله‌ها

۵۵. متوازی السطوح قائم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. ۱) ثابت کنید مقطع آن با هر صفحه‌ای که از یک ضلع قاعده بگذرد، متوازی الاضلاع است؛ ۲) محیط مقطع ABMN را محاسبه کنید، به شرطی که $|AB| = ۵$ ، $|BC| = ۳$ ، $|CM| = ۴$.

۵۶. ذوزنقهٔ ABCD ، $([AB] \parallel [CD])$ و نقطهٔ M در بیرون صفحهٔ ذوزنقه، مفروضند. فصل مشترک صفحه‌هایی را پیدا کنید که ۱) یکی از M و (CD) و دیگری از M و (AB) گذشته باشد؛ ۲) یکی از M و (AD) و دیگری از M و (BC) بگذرد.

۵۷. قاعدهٔ هرم SABCD، یک متوازی الاضلاع است. فصل مشترک صفحه‌هایی را پیدا کنید که از دووجه‌روبه روی هرم گذشته‌اند.

۵۸. می‌دانیم $b \parallel a$ و $a \parallel c$. ثابت کنید $b \parallel c$.

۵۹. متوازی الاضلاعهای ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ روی دوصفحهٔ مختلفند. ثابت کنید $|A_1A| = |B_1B|$.

۶۰. صفحهٔ α بایکی از دو خط راست موازی باهم، موازی است. ثابت کنید، خط راست دوم هم، باصفحهٔ α موازی است.

۶۱. می‌دانیم، یکی از دوخط راست موازی، صفحه‌ای را قطع کرده‌است. ثابت کنید، خط راست دوم هم، این صفحه را قطع می‌کند.

۶۲. اجتماع همهٔ خطهای راست دو به دو موازی را پیدا کنید که، هریک از آنها، خط راست مفروضی را قطع کرده‌است.

۶۳. متوازی السطوح AC_1 (شکل ۶) مفروض است. ثابت کنید ۱) یالهای AA_1 و CC_1 ؛ ۲) یالهای AB و D_1C_1 ؛ ۳) یالهای AD و B_1C_1 موازیند و طولی برابر دارند.

۶۴. نقطهٔ M در درون یال B_1C_1 از متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ قرار دارد. مقطع متوازی‌السطوح را باصفحه‌ای پیدا کنید که ۱) از (DC) و M ؛ ۲) از (AD) و M گذشته باشد.

۶۵. مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. می‌دانیم $M \in [AB]$ ، $N \in [AA_1]$ و $P \in [CD]$. ۱) مقطع مکعب مستطیل را باصفحهٔ MNP پیدا کنید؛ ۲) محیط این مقطع را محاسبه کنید،به‌شرطی‌که $|AB| = ۸$، $|BC| = ۷$، $|AA_1| = ۶$ و نقطه‌های مفروض در وسط یالهای متناظر باشند.

۶۶. متوازی السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده شده است. نقطهٔ برخورد خط راست AC_1 را باصفحه‌ای پیدا کنید که از یالهای AB و C_1D_1 می‌گذرد.

۸. وضع دو صفحه نسبت به‌هم. معیار موازی بودن دو صفحه

دو حالت را، برای وضع دو صفحه نسبت به هم، می‌شناسیم: ۱) وقتی که دوصفحه برهم منطبق باشند و، این وضع، وقتی پیش می‌آید که دو صفحه، سه نقطهٔ مشترک غیرواقع بریک خط راست، داشته‌باشند (اصل موضوع صفحه)؛ ۲) وقتی که دوصفحه یکدیگر را قطع کرده باشند و، این وضع، وقتی پیش‌می‌آید که دو صفحه، متمایز و نقطهٔ مشترکی داشته باشند (اصل موضوع برخورد صفحه‌ها).

حالت سومی هم وجود دارد: دو صفحه می‌توانند نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. وجود چنین صفحه‌هایی را در بخش ۹ (مسأله) ثابت خواهیم کرد. در این جا هم، دو حالت اوّل و سوم را، یک حالت به‌حساب می‌آوریم.

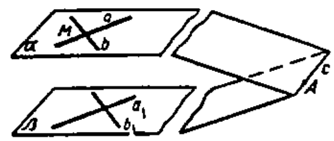
تعریف. دو صفحه را موازی گویند وقتی که: یا نقطهٔ مشترکی‌نداشته باشند و یا برهم منطبق باشند.

موازی بودن دو صفحهٔ α و β را، به صورت $\alpha \parallel \beta$ نشان می‌دهیم.

قضیه ٦ (معیار موازی بودن دو صفحه). اگر دو خط راست متقاطع از صفحهٔ α، به‌ترتیب، با دو خط راست واقع بر صفحهٔ β موازی باشند، آن وقت، این صفحه‌ها موازیند.

شرط: $\{a,b\} \subset \alpha$، $a \cap b = M$، $\{a_1,b_1\} \subset \beta$، $a \parallel a_1$، $b \parallel b_1$.

حکم: $\alpha \parallel \beta$.

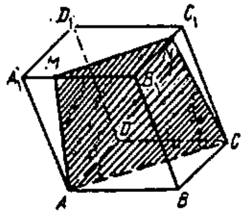


شکل ۷

اثبات: حالتی را درنظر می‌گیریم که α و β، دو صفحهٔ مختلف باشند (شکل ۷) و از برهان خُلف استفاده می‌کنیم. اگر دو صفحه در نقطهٔ A مشترک باشند، با توجه به اصل موضوع برخورد دو صفحه، باید صفحه‌های α و β در خط راستی مثل c، مشترک باشند. صفحه‌های α و β، به‌ترتیب از خطهای راست a و a_1، که باهم موازیند، می‌گذرند. بنابراین، بنابرقضیهٔ ۴ (بخش ۷) $a \parallel c$. همین صفحه‌هااز خطهای‌راست‌موازی b و b_1 هم‌می‌گذرند، یعنی $b \parallel c$. به این ترتیب، از نقطهٔ M واقع بر صفحهٔ α، دو خط راست مختلف a و b، موازی خط راست c در می‌آیند که اصل توازی را نقض می‌کند. بنابراین، فرض وجود نقطهٔ مشترک A، در دوصفحهٔ α و β، نادرست است و $\alpha \parallel \beta$

دو صفحهٔ α و β، اگر باشرط قضیه سازگار باشند، ممکن است برهم منطبق شوند؛ در این حالت‌هم، بنا به تعریف، دو صفحه موازیند. از تعریف صفحه‌های موازی و خطهای راست موازی نتیجه می‌شود: **فصل مشترک دو صفحهٔ موازی باصفحهٔ سوم، دو خط راست موازیند.**

مسأله. مقطع متوازی السطوح AC_1 را با صفحهٔ α پیدا کنید که از رأسهای A و C و نقطهٔ M، در درون یال A_1B_1 گذشته باشد (شکل ۸).



شکل ۸

حل. با رسم پاره‌خطهای راست AC و AM، فصل مشترک صفحهٔ α، با دو وجه به‌دست می‌آید. چون دو وجه ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ موازیند، بنابراین فصل مشترکهای آنها باصفحهٔ α، باهم‌موازی می‌شوند. یعنی باید [MN] را موازی [AC] رسم کرد. سرانجام، پاره‌خط راست NC را رسم می‌کنیم. ذوزنقهٔ AMNC مقطع موردنظر است.

پرسشها و مسأله‌ها

٦٧. نمونه‌هایی از صفحه‌های موازی را، دور و بر خود پیدا کنید.

٦٨. آیا دو صفحه موازیند اگر: ۱) خط راستی واقع بریکی، باخط راستی واقع برصفحهٔ دیگر موازی باشد، ۲) دو خط راست واقع بریک صفحه، با دو خط راست واقع برصفحهٔ دیگر موازی باشند؟

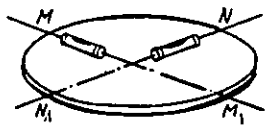
٦٩. برای متوازی السطوح AC_1 (شکل ۸) روشن کنید: ۱) $(DCC_1) \parallel (ABB_1)$ و $(BCC_1) \parallel (ADD_1)$؛ ۲) قاعدهٔ منشور قائم ذوزنقه است. ثابت کنید، بین وجه‌های جانبی این منشور، تنها دوجه موازی باهم، وجود دارد.

۷۰. نقطه‌های M، N و P، به‌ترتیب در وسط یالهای DA، DB و DC از چهار وجهی ABCD واقعند. ثابت کنید، این سه نقطه روی یک خط راست نیستند و $(MNP) \parallel (ABC)$.

۷۱. خطهای راست a، b و c که بریک صفحه نیستند، درنقطهٔ O مشترکند. روی هریک از این خطهای راست و در دو طرف نقطهٔ

O، بـــه‌ترتیب، نقطه‌هـــای A_1 و A_2، B_1 و B_2، C_1 و C_2 را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، دو صفحهٔ $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$، وقتی مـوازیـنـد کـه داشـتـه بـاشـیـم: $|OA_1| = |OA_2|$، $|OB_1| = |OB_2|$، $|OC_1| = |OC_2|$.

۷۲. ۱) ثابت کنید، اگر هریک از دو خط راست متقاطع واقع بریک صفحه، موازی با صـفحه‌ای دیگـر بـاشند، آن وقت ایـن دو صفحه باهم موازیند؛ ۲) برای این که افقی بودن یک تیغه را آزمایش کنند، از دو تراز (شبیه شکل ۹) استفاده می‌کنند. به چه مناسبت باید ترازها را، روی دو خط راست متقاطع قرار داد؟



شکل ۹

۷۳. اگر داشته باشیم $a \subset \alpha$، $b \subset \beta$ و $\alpha \parallel \beta$، خطهای راست a و b، نسبت به هم، چه وضعی دارند؟

۷۴. ثـابت کـنید، مـجموعهٔ خطهـای راسـتی کـه از یک نـقطه می‌گذرند و با صفحهٔ مفروضی موازیند، روی یک صفحه واقعند.

۷۵. آیا ممکن است، دوخط راستی که از برخورد دو صفحه بـا صفحهٔ سوم به دست می‌آیند، با هم موازی باشند؟

۷۶. ۱) ثابت کنید، دو پاره خـط راست مـوازی کـه دو انتهـای هریک از آنها روی دو صفحه‌موازی باشند، طولی برابر دارنـد؛ ۲) آیا ممکن است، دو پاره خط راست ناموازی که دو انتهای هریک از آنها، روی دو صفحهٔ موازی قرار دارند، طولی برابر داشته باشند؟

۷۷. متوازی السطـوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطه‌هـای $M \in [AA_1]$، $N \in [CC_1]$ و $P \in [C_1D_1]$ مفروض‌اند. مقطع متوازی السطوح را با صفحهٔ MNP پیدا کنید.

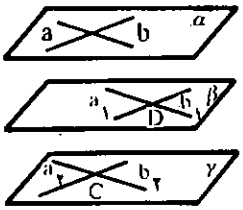
۷۸. روی یـــالهای AD و B_1C_1 از مـــتوازی‌الســـطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$، نقطه‌های M و N داده شده‌اند. مـطلوب است مقطع متوازی السـطوح بـاصفحه‌ای کـه از نقطه‌هـای M و N موازی با یال AB رسم شده است.

۹. ویژگیهای صفحه‌های موازی

قضیهٔ ۷ . اگر دو صفحه، باصفحهٔ سوم موازی باشند، خـود بـاهم موازیند.

شرط: $\alpha \parallel \gamma$، $\beta \parallel \gamma$.

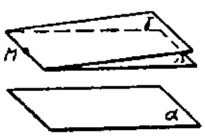
حکم: $\alpha \parallel \beta$.



شکل ۱۰

اثبات. در صفحهٔ α، دو خـط راست متقـاطع a و b را رسـم می‌کنیم (شکل ۱۰). از هرکدام از این خطهای راست و نقطهٔ دلخواه C از صفحهٔ γ، صفحه‌ای می‌گذرانیم (این دو صفحهٔ کـمکی روی شکل نشان داده نشده است). این صفحه‌ها، صـفحهٔ γ را در دوخـط راست متقاطع a_2 و b_2 قطع می‌کنند؛ درضمن $a \parallel a_2$ و $b \parallel b_2$ (بخش ۸ را ببینید). باهمین استدلال، برای دو صفحهٔ α و β، خطهای راست $a_1 \parallel a_2$ و $b_1 \parallel b_2$ به‌دست می‌آیند. در این صورت، بنا برقضیهٔ ۵ (بخش ۷) داریم: $a \parallel a_1$ و $b \parallel b_1$ و از آن‌جا، $\alpha \parallel \beta$.

مسألهٔ ۱ . ثابت کنید، از هر نقطهٔ مفروض، یک صفحه، و تنها یک صفحه می‌توان موازی باصفحهٔ مفروض رسم کرد.



شکل ۱۱

حل. فرض می‌کنیم، نقطهٔ M روی صفحهٔ مفروض α نباشد. دو خط راست متقاطع a و b را، در صفحهٔ α رسم می‌کنیم. از نقطه M، خط راست $a_1 \parallel a$ و $b_1 \parallel b$ را باتوجه به مسألهٔ بخش ۳، درنظر

می‌گیریم. از دو خط راست a_1 و b_1، صفحهٔ منحصر به فرد β می‌گذرد (بخش ۳، نتیجهٔ ۲). باتوجه به معیار موازی بودن دو صفحه: $\alpha \parallel \beta$. ثابت می‌کنیم، β تنها صفحه‌ای است که با شرط مسأله سازگار است.

فرض می‌کنیم، توانسته باشیم، صفحهٔ دیگر γ را (غیراز β)، از نقطهٔ M موازی باصفحهٔ α رسم کنیم (شکل ۱۱). بنابر قضیه ۷، دو صفحهٔ β و γ موازیند، ولی این دوصفحه، بنابر اصل برخورد صفحه‌ها، متقاطعند، یعنی γ نمی‌تواند صفحه‌ای غیراز β باشد.

اگر $M \in \alpha$، آن وقت، تنها صفحه‌ای که از M می‌گذرد و با α موازی است، خود صفحهٔ α است.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید، از هریک از دو خط راست متنافر، می‌توان صفحه‌ای عبور داد، به‌نحوی که دو صفحهٔ حاصل، باهم‌موازی باشند.

حل. a و b را دو خط راست متنافر می‌گیریم. از نقطهٔ دلخواه M، واقع برخط راست a، خط راست a_1 را موازی با b رسم می‌کنیم و، سپس از a و a_1، صفحهٔ α را می‌گذرانیم. به همین ترتیب، نقطهٔ N را برخط راست b انتخاب و از آن جا خط راست b_1 را موازی با a رسم می‌کنیم و از b و b_1، صفحهٔ β را می‌گذرانیم. صفحه‌های α و β باهم موازیند. (چرا؟)

پرسشها و مسأله‌ها

۷۹. دو صفحهٔ متقاطع را درنظر می‌گیریم. آیا می‌توان صفحه‌ای پیدا کرد که با این دو صفحه موازی باشد؟

۸۰. ۱) ثابت کنید، اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحهٔ موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع خواهد کرد؛ ۲) ثابت کنید، هرصفحه، دست کم چهار صفحهٔ شامل وجه‌های یک متوازی السطوح را قطع می‌کند.

۸۱. می‌دانیم $\alpha \parallel \alpha_1$، $\beta \parallel \beta_1$، $\alpha \cap \beta = c$، $\alpha_1 \cap \beta_1 = c_1$. ثابت کنید $c \parallel c_1$.

۸۲. ۱) ثابت کنید، اگر خط راستی، با یکی از دو صفحهٔ موازی، موازی باشد، با دیگری هم موازی است؛ ۲) خط راستی، یکی از دو صفحهٔ موازی را قطع کرده است؛ ثابت کنید، این خط راست، صفحهٔ دوم را هم قطع می‌کند؛ ۳) یک صفحه و خط راستی موازی با آن، داده شده‌است. صفحه‌ای را پیدا کنید که با صفحهٔ مفروض موازی باشد و از خط راست مفروض بگذرد.

۸۳. مقطع چهار وجهی ABCD را با صفحه‌ای که ازنقطهٔ M واقع در درون یال AB، موازی با وجه DBC رسم شده است، پیدا کنید.

۸۴. از رأس چهار وجهی، صفحه‌ای موازی با وجه رو به رو رسم کرده‌ایم. فصل مشترک این صفحه را باصفحه‌هایی که از وجه‌های دیگر چهار وجهی می‌گذرند، پیدا کنید.

۸۵. هرم SABCD (باقاعدهٔ ABCD) داده شده است. مقطع آن را با صفحه‌ای که از نقطهٔ $M \in [AB]$ موازی با صفحهٔ SAD رسم شده است، پیدا کنید.

ادامه دارد...

تفریح اندیشه ۳

در شکل مقابل به چند طریق کلمهٔ مهر را می‌توان خواند؟

م

م ه م

م ه ر ه م

م ه م

م

جواب در صفحهٔ ۹۶

ترجمهٔ سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

توابع گزاره‌ای[1] و سورها[2]

● غلامرضا یاسی‌پور

۱. قضایای فردی[3] و قضایای عمومی[4]

روشهای منطقی[5]ای که تاکنون مورد بحث قرار گرفته‌اند تنها در مورد استدلالهایی[6] به کار می‌روند که درستی[7]شان به‌روشی که طبق آن گزاره‌های ساده[8] به‌طور تابع ارزشی[9] به گزاره‌های مرکب[10] ترکیب شده‌اند وابسته است. آن روشها را در مورد استدلالهایی چون استدلال زیر نمی‌توان به کار برد:

تمام انسانها میرا هستند.
سقراط انسان است.
بنابراین سقراط میراست.

درستی چنین استدلالی به ساختمان منطقی[11] داخلی گزاره‌های نامرکبی[12] که استدلال شامل آنهاست بستگی دارد. برای ارزیابی چنین استدلالهایی باید روشهای تحلیل گزاره‌های نامرکب و علامتی کردن ساختارهای[13] داخلی‌شان را توسعه دهیم.

مقدّمهٔ[14] دوم استدلال قبل یک قضیّهٔ فردی (شخصیه) است، که اظهار می‌کند شخص سقراط صفت انسان بودن را داراست. در این مورد «سقراط» را موضوع[15] و «انسان» را محمول[16] می‌نامیم. هر قضیّهٔ فردی (موجبه[17]) اظهار می‌کند فردی که به آن با عبارت موضوعش اشاره کرده است دارای صفتی که توسط عبارت محمولش معین شده، می‌باشد، و در این مورد افراد را نه تنها به عنوان اشخاص، بلکه هر شیء، چون حیوان، شهر، ملت، سیاره یا ستاره، که به آن صفات را می‌توان به‌صورت معنی‌داری حمل کرد در نظر می‌گیریم. این صفات را نه تنها با صفت، بلکه با اسم یا حتی فعل نیز، می‌توان معین کرد، و به این ترتیب «شهره ترسو است» و «شهره می‌ترسد» همان معنی را دارند که می‌توان آن را با «شهره دارای ترس است» نیز بیان کرد.

در علامتی کردن قضایای فردی، حرف کوچک « a » تا « w » را برای نمایش دادن افراد، معمولاً با استفاده از حروف اول نام فرد برای نمایش دادن آن فرد، به کار می‌بریم، به علت این‌که این علائم افراد را نمایش می‌دهند آنها را «ثابتهای فردی[18]» می‌نامیم. برای معرفی کردن صفات از حروف بزرگی که ابتدای آن صفاتند استفاده می‌کنیم. به این ترتیب در زمینهٔ استدلال قبل «سقراط» را با حرف کوچک « s » و صفات «انسان» و «میرا» را با حروف بزرگ « E » و « M » نمایش می‌دهیم.

برای بیان کردن یک قضیّهٔ فردی به صورت علامتی، علامت محمول آن را در سمت چپ علامت موضوع آن می‌نویسیم. به این ترتیب «سقراط انسان است» را به صورت «Es» و «سقراط میراست» را به صورت «Ms» نمایش می‌دهیم.

با بررسی اشکال علامتی قضایای فردی‌ای که دارای یک محمولند، مشاهده می‌کنیم تمام آنها قالب مشترکی دارند، و هریک از اشکال علامتی قضایای فردی «ارسطو انسان است»، «بوستون انسان است»، «کالیفرنیا انسان است»، «دکارت انسان است»، ... که عبارت از «Ea»، «Eb»، «Ec»، «Ed»، ... می‌باشند، شامل علامت صفتی «E» که پس از آن ثابت فردی می‌آید، است. در این صورت عبارت «Ex» را برای علامتی کردن قالب مشترک تمام قضایای فردی‌ای که اظهار می‌کنند افرادی دارای صفت انسانند به کار می‌بریم. حرف کوچک «x»ی که به متغیر فردی[19] موسوم است ـ یک مشخص

کنندهٔ مکان صرف است که دلالت می‌کند که ثابت فردی را برای به‌دست آوردن یک قضیهٔ فردی کجا می‌توان نوشت. قضایای فردی «Ea»، «Eb»، «Ec»، «Ed»، ... یا راست یا دروغند؛ اما «Ex» نه راست نه دروغ، و نه قضیه است. عباراتی چون «Ex» را «توابع گزاره‌ای[۲۰]» می‌نامند. این توابع به صورت عباراتی تعریف می‌شوند که شامل متغیرهای فردی‌اند و زمانی که به جای متغیرهای فردی‌شان ثابتهای فردی قرار داده شود به صورت قضیه یا گزاره در می‌آیند. هر قضیهٔ‌فردی را می‌توان به‌صورت یک مثال جانشین[۲۱] تابع گزاره‌ای‌یی که آن قضیه با قراردادن یک ثابت فردی به جای متغیر فردی آن تابع گزاره‌ای از آن به دست می‌آید در نظر گرفت. عمل به دست آوردن یک قضیه از یک تابع گزاره‌ای با قراردادن ثابت به جای متغیر، «تمثیل[۲۲]» نامیده می‌شود. قضایای فردی منفی «ارسطو انسان نیست» و «بوستون انسان نیست»، که به صورت «~Ea» و «~Eb» نمایش داده می‌شوند، با استفاده از تمثیل از تابع گزاره‌ای «~Ex» که این قضایا مثالهای جانشین آنند نتیجه می‌شوند. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که علائمی غیر از علائم صفت و متغیرهای فردی می‌توانند در توابع گزاره‌ای رخ دهد.

قضایای عمومی‌ای چون «هر چیز میراست» و «چیزی میراست» در این که شامل اسامی افراد نیستند با قضایای فردی تفاوت دارند. اما، آنها را نیز می‌توان به صورت نتیجهٔ توابع گزاره‌ای، گرچه نه با استفاده از تمثیل بلکه با استفاده از عملی موسوم به تعمیم[۲۳] یا «تسویر[۲۴]» در نظر گرفت. به این ترتیب، مثال اول، یعنی «هرچیز میراست» را می‌توان به طرق دیگر به‌صورت

«با معلوم بودن هر شیء فردی هرچه که باشد، آن (شیء) میراست»

بیان کرد، در این‌جا ضمیر موصول «آن» اشاره به کلمهٔ «شیء» که در گزارهٔ پیش از آن آمده است دارد. در این مورد می‌توانیم متغیر فردی «x» رابه‌جای ضمیر «آن» ومقدمش رابرای تفسیر قضیهٔ‌عمومی اوّل به صورت

«با معلوم بودن هر x، x میراست»

به کار ببریم. سپس می‌توانیم از علامتی که قبلاً معرفی شده، برای نوشتن آن به صورت «با معلوم بودن هر x، Mx» استفاده کنیم. عبارت «با معلوم بودن هر x» به «سورعمومی[۲۵]» موسوم است و به‌صورت «(x)» علامتی می‌شود. بنابراین با به کار بردن این علامت جدید می‌توانیم به‌طور کامل قضیهٔ عمومی اوّلمان را به صورت:

$$(x)\ Mx$$

علامتی کنیم. به همین ترتیب می‌توانیم قضیهٔ عمومی دوممان، یعنی «چیزی میراست» را متوالیاً به صورتهای:

حداقل یک چیز وجود دارد که میراست.
حداقل یک چیز وجود دارد به‌طوری که آن چیز میراست.
حداقل یک x وجود دارد به‌طوری که x میراست.
و به صورت
حداقل یک x وجود دارد به‌طوری که Mx

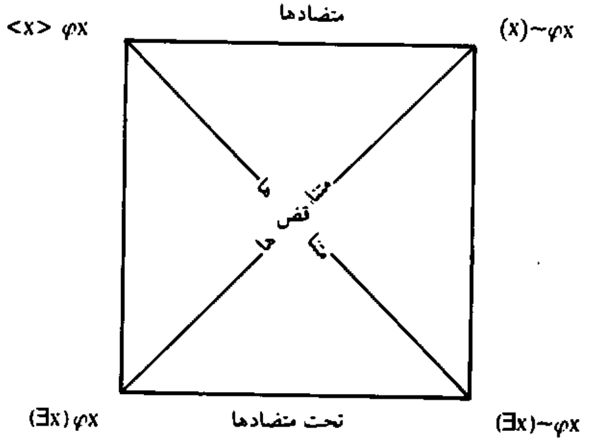
تفسیر کنیم. عبارت «حداقل یک x وجود دارد به‌طوری که» به «سور وجودی[۲۶]» موسوم است و به صورت «(∃x)» علامتی می‌شود. به این ترتیب با به کار بردن این علامت جدید می‌توانیم به طور کامل قضیهٔ عمومی دوممان را به صورت:

$$(\exists x)\ Mx$$

علامتی کنیم. به این ترتیب قضیهٔ عمومی از تابع گزاره‌ای با قراردادن سور عمومی یا سور وجودی در جلو آن ساخته می‌شود. واضح است که تسویر عمومی[۲۷] یک تابع گزاره‌ای اگر و فقط اگر تمام مثالهای جانشین آن تابع گزاره‌ای راست باشند، راست است، و تسویر وجودی[۲۸] یک تابع گزاره‌ای اگر و فقط اگر حداقل یک مثال جانشین راست داشته باشد، راست می‌باشد. اگر قبول داشته باشیم که حداقل یک فرد موجود است در این صورت هر تابع گزاره‌ای حداقل یک مثال جانشین (راست یا دروغ) دارد. تحت این فرض، اگر تسویر عمومی یک تابع گزاره‌ای راست باشد، در این صورت تسویر وجودی آن نیز باید راست باشد.

می‌توانیم با بررسی دو قضیهٔ عمومی اضافی «چیزی میرا نیست» و «هیچ چیز میرا نیست»، که نقیضهای[۲۹] مربوط به دو قضیهٔ عمومی اوّلی که مورد بررسی قرار گرفته‌اند می‌باشند، نشان دهیم که رابطهٔ

دیگری بین تسویر عمومی و وجودی موجود است. «چیزی میرا نیست» به صورت «$(\exists x) \sim Mx$» و «هیچ چیز میرا نیست» به صورت «$(x) \sim Mx$» علامتی می‌شود. این دو نشان می‌دهند که نقیض تسویر عمومی (وجودی) یک تابع گزاره‌ای منطقاً هم ارز[30] تسویر وجودی (عمومی) تابع گزاره‌ای جدید است که از قراردادن علامت نقیض در جلو تابع گزاره‌ای اوّل حاصل می‌شود. در این صورت چون حرف یونانی فی را برای نمایش دادن هر علامت صفتی به کار بریم، می‌توانیم روابط عمومی بین تسویر عمومی و وجودی را برحسب جدول مربع شکل زیر توصیف کنیم:



با فرض وجود حداقل یک فرد، می‌توانیم بگوییم که: دو قضیهٔ بالای مربع متضاد[31] اند، یعنی ممکن است هر دو دروغ باشند اما نمی‌توانند هر دو راست باشند، دو قضیهٔ پایین مربع تحت متضادها[32] هستند یعنی می‌توانند هر دو راست باشند اما نمی‌توانند هر دو دروغ باشند، قضایایی که در دو سر مقابل اقطار قرار دارند متناقض[33] اند، که از آنها یکی باید راست و دیگری دروغ باشد، و بالاخره، در هر ضلع، راستی قضیهٔ بالا مستلزم راستی قضیه‌ای است که مستقیماً پایین آن است.

منطق قدیم بر چهار نوع قضیهٔ موضوع محمولی، که با مثالهای زیر توضیح داده شده‌اند، تأکید کرده است:

تمام انسانها میرا هستند.
هیچ انسانی میرا نیست.
بعضی انسانها میرا هستند.
بعضی انسانها میرا نیستند.

این قضایا به ترتیب به صورت «موجبهٔ کلیه[34]»، «سالبهٔ کلیه[35]»، «موجبهٔ جزئیه[36]» و «سالبهٔ جزئیه[37]» دسته‌بندی شده‌اند، و نوعشان بار دیگر به ترتیب به صورت «A»، «E»، «I»، «O» مختصر شده است. (فرض بر این است که این نامهای حرفی از لاتین و از «AffIrme» و «nEgO» به معنای «تأیید می‌کنم» و «حاشا می‌کنم» آمده باشند.) این چهار صورت مخصوص قضایای موضوع محمولی به کمک توابع گزاره‌ای و سورها بسادگی علامتی می‌شوند.

مرجع:

Symbolic Logic
Irving M. Copi

یادداشتها

1. Propositional Functions
2. Quantifiers
3. Singular propositions
4. General propositons
5. Logical Techniques
6. Arguments
7. Validity
8. Simple statements
9. Truth functionally
10. Compound statements
11. Logical structure
12. Noncompound statements
13. Structures
14. Second premiss
15. Subject
16. Predicate
17. Affirmative
18. Individual constants
19. Individual variable
20. Propositional functions
21. Subsititution instance
22. Instantiation
23. Generalization
24. Quantification
25. Universal quantifier
26. Existential quantifier
27. Universal quantification
28. Existential quantification
29. Negations
30. Equivalent
31. Contraries
32. Subcontraries
33. Contradictories
34. Universal affirmative
35. Universal negative
36. Particular affirmative
37. Particular negative

دوران در هندسه تحلیلی

(مورد استفاده دانش آموزان سوم و چهارم ریاضی ـ فیزیک)

● محمد ابراهیم گیتی زاده

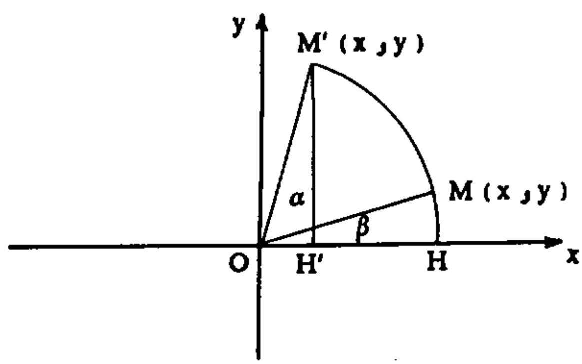
۱ ـ دوران در صفحهٔ حول مبدأ مختصات

۱ ـ ۱. تعریف:

در صفحه محورهای مختصات قائم xoy زاویه جهت‌دار α را که اندازهٔ جبری آن در جهت مثلثاتی مثبت باشد درنظر می‌گیریم. اگر متناظر هر نقطه M از این صفحه M' را چنان اختیار کنیم که $OM' = OM$ و $(\widehat{OM}, OM') = \alpha$ باشد، آنگاه نقطهٔ M' را تبدیل یافتهٔ نقطهٔ M در دوران به زاویهٔ α گرد مبدأ مختصات می‌نامیم و به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$R_o^{\alpha}(M) = M'$

متقابلاً، نقطهٔ M تبدیل یافتهٔ نقطهٔ M' در دوران به زاویهٔ $(-\alpha)$ گرد مبدأ مختصات خواهد بود، $R_o^{-\alpha}(M) = M'$



۱ ـ ۲. محاسبهٔ مختصات دوران یافته یک نقطه.

در شکل بالا، فرض می‌کنیم که تبدیل یافتهٔ نقطهٔ M (x , y) در دوران R_o^{α} نقطهٔ $M'(X,Y)$ باشد. باتوجه‌به‌این‌که $(O\widehat{X}, OM) = \beta$ ، $(O\widehat{M}, OM') = \alpha$ ، $\overline{OH} = x$ ، $\overline{OH'} = X$ ، $\overline{HM} = y$ و $\overline{H'M'} = Y$ ، در دو مثلث OMH و $OM'H'$ می‌توان نوشت:

$$OM = \frac{x}{\cos\beta} \quad , \quad OM' = \frac{X}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$OM' = OM \Rightarrow \frac{X}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{x}{\cos\beta}$$

$$X = \frac{x\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = \frac{x(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}{\cos\beta}$$

$$= x\cos\alpha - x\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta$$

اما در مثلث OMH، $\mathrm{tg}\beta = \frac{y}{x}$. پس:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

در همان مثلث و به روش مشابه خواهیم داشت:

$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

بنابراین:

$$R_o^{\alpha}\left[M(x,y)\right] = M'(X = x\cos\alpha - y\sin\alpha\ ,$$

$$Y = \sin\alpha + y\cos\alpha)$$

در این‌صورت می‌توان گفت که ماتریس دوران به زاویهٔ α حول مبدأ مختصات عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix}$$

متقابلاً، نقطهٔ $M(x , y)$ تبدیل یافته نقطه $M'(x , y)$ در دوران $R_o^{-\alpha}$ است، یعنی:

$$R_o^{-\alpha}\left[M'(X,Y)\right] = M\,(x = X\cos\alpha + Y\sin\alpha,$$
$$y = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha)$$

مثلاً تبدیل یافتهٔ نقطه $M(۲ \text{ و } -۴)$ در دوران به زاویهٔ ۳۰° و به مرکز مبدأ مختصات عبارت است از:

$$M' \left| \begin{array}{l} X = ۲\cos ۳۰^\circ + ۴\sin ۳۰^\circ = \sqrt{۳} + ۲ \\ Y = ۲\sin ۳۰^\circ - ۴\cos ۳۰^\circ = ۱ - ۲\sqrt{۳} \end{array} \right.$$

و برعکس، اگر نقطهٔ $M'(\sqrt{۳} + ۲, ۱ - ۲\sqrt{۳})$ رابه زاویه (-۳۰°) گرد مبدأ مختصات دوران دهیم، نقطه $M(۲ \text{ و } -۴)$ به‌دست می‌آید،

$$M \left| \begin{array}{l} x = (\sqrt{۳}+۲)\cos(-۳۰^\circ) - (۱-۲\sqrt{۳})\sin(-۳۰^\circ) \\ y = (\sqrt{۳}+۲)\sin(-۳۰^\circ) + (۱-۲\sqrt{۳})\cos(-۳۰^\circ) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow M(۲ \text{ و } -۴)$$

اکنون به دوران یافته‌های نقطهٔ $M(x , y)$ درحالتهای خاص زیر توجه کنید:

الف . $R_o^{\alpha}\left[M(۰ , ۰)\right] = M'(۰ , ۰)$

یعنی، دوران یافته مرکز دوران بر خودش منطبق است.

ب . $\alpha = ۰ \Rightarrow M'(x , y)$

یعنی، دوران صفر یک تبدیل همانی است.

ج . $\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow M'(-x , -y)$

یعنی، دوران به زاویهٔ ۱۸۰° تقارن نسبت به مبدأ مختصات است.

د . اگر زاویهٔ خط OM با محور ox برابر β باشد:

$$\alpha = \pi - ۲\beta \Rightarrow M' \left| \begin{array}{l} x\cos(\pi - ۲\beta) - y\sin(\pi - ۲\beta) \\ x\sin(\pi - ۲\beta) + y\cos(\pi - ۲\beta) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$M' \left| \begin{array}{l} -x\cos ۲\beta - y\sin ۲\beta \\ x\sin ۲\beta - y\cos ۲\beta \end{array} \right.$$

چون $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x}$ است، پس از قراردادن مقادیر:

$$\cos ۲\beta = \frac{۱ - \operatorname{tg}^۲\beta}{۱ + \operatorname{tg}^۲\beta} = \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲}$$

$$\sin ۲\beta = \frac{۲\operatorname{tg}\beta}{۱ + \operatorname{tg}^۲\beta} = \frac{۲xy}{x^۲ + y^۲}$$

و ساده‌ کردن، $M'(-x , y)$ به‌دست می‌آید. یعنی، دوران به زاویهٔ $\pi - ۲\beta$، که β زاویهٔ خط OM با محور ox است، تقارن نسبت به محور عرضها است.

هـ. با همان فرض که β زاویهٔ خط OM با محور ox باشد، به طریق مشابه ثابت می‌شود:

$$\alpha = -۲\beta \Rightarrow M'(x , -y)$$

یعنی: این دوران، تقارن نسبت به محور طولها است.

مثال. نقطهٔ $A(۲ \text{ و } ۴)$ را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به‌اندازه‌ای دوران می‌دهیم تا بر خط $y = ۲x + \sqrt{۲}$ قرار گیرد. کوچکترین اندازهٔ زاویهٔ دوران را پیدا کنید.

طریقهٔ اول. دوران یافته نقطهٔ A را A' فرض می‌کنیم و مختصات آن‌را بر حسب زاویه دوران، که α درنظر گرفته می‌شود، به‌دست می‌آوریم.

$$A' \begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = ۴\cos\alpha - ۲\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = ۴\sin\alpha + ۲\cos\alpha \end{cases}$$

چون نقطهٔ A' بر خطِ به معادلهٔ $y = ۲x + \sqrt{۲}$ قرار دارد،

$$۴\sin\alpha + ۲\cos\alpha = ۲(۴\cos\alpha - ۲\sin\alpha) + \sqrt{۲}$$

$$۸\sin\alpha - ۶\cos\alpha = \sqrt{۲}$$

معادله را برحسب $tg\,\frac{\alpha}{۲}$ می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$(۶ - \sqrt{۲})\,tg^{۲}\frac{\alpha}{۲} + ۱۶\,tg\frac{\alpha}{۲} - (۶ + \sqrt{۲}) = ۰$$

از حلِّ این معادله $tg\frac{\alpha}{۲} = \sqrt{۲} - ۱$ ، $tg\frac{\alpha}{۲} = -\frac{۲۵\sqrt{۲} + ۳۱}{۱۷}$

به‌دست می‌آید که به جواب قابل قبول آن $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ است.

طریقه دوم: ابتدا معادلهٔ دایره‌ای می‌نویسیم که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن طول OA باشد. نقطهٔ تلاقی این دایره با خط $y = ۲x + \sqrt{۲}$ که با شرط مسأله مطابقت دارد نقطهٔ A' است.

سپس زاویهٔ بین دو خط OA و OA' را، که زاویهٔ دوران است، به‌دست می‌آوریم:

$$OA^{۲} = ۲۰ \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} = ۲۰$$

$$\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} = ۲۰ \\ y = ۲x + \sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$۵x^{۲} + ۴\sqrt{۲}x - ۱۸ = ۰ \Rightarrow A'(\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲})$$

$$m_{OA} = \frac{۱}{۲}\ ,\ m_{OA'} = ۳$$

$$tg(OA, OA') = \left| \frac{m_{oA} - m_{oA'}}{۱ + m_{oA}.m_{oA'}} \right| = ۱$$

$$\Rightarrow (OA \widehat{;} OA') = \frac{\pi}{۴}$$

تمرین

۱ ـ دوران یافتهٔ نقطهٔ $M(x, y)$ را در هریک از حالتهای زیر پیدا کنید:

الف: $\alpha = ۹۰°$ ب: $\alpha = -۹۰°$ ج: $\alpha = ۴۵°$

۲ ـ نقطهٔ A (۲ و ۴) را به چه زاویه‌ای در جهت مثلثاتی دهیم تا دوران یافته آن به فاصلهٔ ۲ از نیمساز ناحیهٔ اول محورهای مختصات قرار گیرد؟

۱ ـ ۳. دوران یک شکل:

قضیهٔ ۱. مکان هندسی دوران یافته‌های نقاط هر خط راست، یک خط راست است. یا، دوران یافته هر خط راست، یک خط راست است.

برهان. خط راست d به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ و نقطهٔ متغیر $M\left(t, -\frac{at + c}{b}\right)$ را روی آن درنظر می‌گیریم. تبدیل یافتهٔ این نقطه در دوران R_o^{α} نقطهٔ M' است به‌طوری که

$$M' \begin{cases} X = t\cos\alpha + \frac{at + c}{b}\sin\alpha \\ Y = t\sin\alpha - \frac{at + c}{b}\cos\alpha \end{cases}$$

ثابت می‌کنیم مکان هندسی نقطه M' وقتی t تغییر کند یک خط راست است. برای این منظور بین رابطه‌های X و Y پارامتر t را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} bX - c\sin\alpha = t(b\cos\alpha + a\sin\alpha) \\ bY + c\cos\alpha = t(b\sin\alpha - a\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\frac{bX - c\sin\alpha}{bY + c\cos\alpha} = \frac{b\cos\alpha + a\sin\alpha}{b\sin\alpha - a\cos\alpha}$$

پس از ساده کردن، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$a(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + b(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + c = ۰ \quad (۱)$$

این معادله، نمایش یک خط راست مانند d' است. چون مختصات نقطهٔ $M'(X, Y)$ دوران یافتهٔ هر نقطهٔ $M(x, y)$ از خط d، در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند، و به‌عکس، تبدیل یافتهٔ هر نقطهٔ $M'(X, Y)$ از خط d' در دوران $R_O^{-\alpha}$ بر خط d واقع است، لذا معادله (۱) معادلهٔ دوران یافته خط d است.

دستور. برای نوشتن معادلهٔ تبدیل یافتهٔ یک خط معلوم در دوران R_O^{α}، کافی است در معادله این خط x را $x\cos\alpha + y\sin\alpha$ و y را به $-x\sin\alpha + y\cos\alpha$ تبدیل کنیم.

مثال: معادله تبدیل یافته خط d به معادلهٔ $x + y = ۱$ در دوران $R_O^{۴۵°}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x \longrightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y)$$

$$y \longrightarrow -x\sin\alpha + y\cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(-x+y)$$

$$d: x + y = ۱ \longrightarrow d': y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

متقابلاً، خط d تبدیل یافته خط d' در دوران $R_O^{-۴۵°}$ است، زیرا:

$$y \longrightarrow -x\sin(-۴۵°) + y\cos(-۴۵°) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y)$$

$$d': y = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \longrightarrow d: x + y = ۱$$

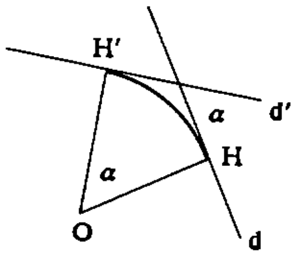
تذکر. نماد $\longrightarrow$ را بخوانید «... تبدیل می‌شود به ...».

نتیجه. اگر d و d' دو خط متناظر در دوران R_O^{α} باشند و از نقطهٔ O دو خط OH و OH' را بر این دو خط عمود کنیم:

اولاً: H و H' در این دوران دو نقطه متناظرند.

ثانیاً: چون $OH = OH'$، پس مرکز دوران از دو خط متناظر به یک فاصله است.

● یکی از روشهای ترسیم دوران یافتهٔ یک خط، مانند d، استفاده از نتیجه بالا است. به این طریق که از نقطهٔ O (مرکز دوران) خط OH را بر خط d عمود کرده تبدیل یافته نقطه H (پای عمود) را تعیین می‌کنیم و آن‌را H' می‌نامیم. خط d' که از نقطه H' بر خط OH' عمود شود دوران یافتهٔ خط d خواهد بود.



قضیهٔ ۲. در دوران R_O^{α}، زاویه‌های بین دو خط متناظر d و d' با $|\alpha|$ و $\pi - |\alpha|$ برابرند.

برهان. اثبات قضیه با توجه به شکل بالا به آسانی ممکن می‌شود، اما به روش تحلیلی، خط d و دوران یافتهٔ آن خط d' را به معادله‌های زیر درنظر می‌گیریم:

$$d: y = ax + b$$

$$d': -x\sin\alpha + y\cos\alpha = a(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \Rightarrow$$

$$y(\cos\alpha - a\sin\alpha) - x(\sin\alpha + a\cos\alpha) = b$$

ضریب زاویه‌ای خط d مساوی a و ضریب زاویه‌ای خط d' برابر $\frac{\sin\alpha + a\cos\alpha}{\cos\alpha - a\sin\alpha}$ است، بنابراین اگر زاویهٔ بین این دو خط را ω فرض کنیم، داریم:

$$\mathrm{tg}\,\omega = \pm\frac{\frac{\sin\alpha + a\cos\alpha}{\cos\alpha - a\sin\alpha} - a}{۱ + \frac{a(\sin\alpha + a\cos\alpha)}{\cos\alpha - a\sin\alpha}} = \pm\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\omega = |\alpha|\ ,\ \omega' = \pi - |\alpha|$$

نتیجه. دوران یافته هر زاویه با آن زاویه برابر است،

$$\left[R_O^{\alpha}(AB) = A'B',\ R_O^{\alpha}(BC) = B'C'\right] \Rightarrow A'\hat{B'}C' = A\hat{B}C$$

قضیهٔ ۳. دوران یافته هر پاره، با آن پاره‌خط برابر است.

برهان. دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ و دوران یافته‌های آنها $A'(X_۱, Y_۱)$ و $B'(X_۲, Y_۲)$ را درنظر می‌گیریم.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,,$$
$$A'B'=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2}$$

اما،

$$\begin{cases} X_2-X_1=(x_2-x_1)\cos\alpha-(y_2-y_1)\sin\alpha \\ Y_2-Y_1=(x_2-x_1)\sin\alpha+(y_2-y_1)\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'B'=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$A'B'=AB$$

قضیهٔ ۴. تبدیل یافته هر شکل در هر دوران، با آن شکل برابر است.

برهان. چون در هر دوران تبدیل یافته هر پاره‌خط، با آن پاره‌خط و تبدیل یافته هر زاویه، با آن زاویه برابر است، بنابراین دوران یافته هر شکل، با آن شکل برابر خواهد بود.

۱ ـ ۴. معادله دوران یافتهٔ یک منحنی:

هرگاه منحنی C به معادلهٔ $f(x,y)=0$ حول مبدأ مختصات به زاویه α دوران کند، معادله منحنی C' تبدیل یافتهٔ آن در این دوران، با تبدیل x به $x\sin\alpha+y\cos\alpha$ ...

$$\begin{cases} x \longrightarrow x\cos\alpha+y\sin\alpha \\ y \longrightarrow -x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x,y)=0 \longrightarrow f(X,Y)=$$
$$f(x\cos\alpha+y\sin\alpha,\,-x\sin\alpha+y\cos\alpha)=0$$

مثال: منحنی C به معادلهٔ $y^2+y+x-1=0$ را حول مبدأ مختصات به زاویهٔ $90°$ دوران می‌دهیم. معادلهٔ منحنی C' تبدیل یافته آن را بنویسید.

حل:

$$\begin{cases} x \to x\cos 90°+y\sin 90°=y \\ y \to -x\sin 90°+y\cos 90°=-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$C: y^2+y+x-1=0 \to C': y=-x^2+x+1$$

۱ ـ ۵: دوران مقاطع مخروطی

معادله هر مقطع مخروطی به‌صورت کلی

$$F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

نوشته می‌شود که در آن ضریبهای a و b و c و d و e و f اعداد حقیقی فرض می‌شوند. برحسب آن که عبارت b^2-ac عددی منفی، صفر، یا مثبت باشد، ثابت می‌شود که نوع مقطع مخروطی به‌ترتیب بیضی، سهمی، یا هذلولی است. درحالت خاصی که $b=0$ است، معادله مقطع مخروطی فاقد جمله xy، یعنی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$G(x,y)=a'x^2+c'y^2+d'x+e'y+f'=0 \qquad (2)$$

در این حالت محور یا محورهای مقطع مخروطی به موازات محورهای مختصات بوده و مشخصات آن به آسانی تعیین می‌شوند. درحالی که اگر $b\neq 0$ یعنی معادله شامل جملهٔ xy باشد، به‌دست آوردن این مشخصات نسبتاً مشکل است. اما، با عمل دوران می‌توانیم معادلهٔ (۱) را به معادله نوع (۲) تبدیل کنیم. برای این منظور، در دوران R_O^{α} زاویهٔ α را چنان تعیین می‌کنیم که معادله تبدیل یافتهٔ معادلهٔ (۱) فاقد جملهٔ xy باشد. این تبدیل به‌صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$(x \to x\cos\alpha+y\sin\alpha,\ y \to -x\sin\alpha+y\cos\alpha) \Rightarrow$$
$$F(x,y)=0 \to a(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+$$
$$2b(x\cos\alpha+y\sin\alpha)(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)+$$
$$c(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2+d(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+$$
$$e(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)+f=0$$

سادهٔ شدهٔ ضریب جملهٔ xy در معادلهٔ بالا، عبارت $2b\cos 2\alpha-(c-a)\sin 2\alpha$ است که باید مساوی صفر شود:

$$۲b\cos ۲\alpha - (c-a)\sin ۲\alpha = ۰ \Rightarrow tg\,۲\alpha = \frac{۲b}{c-a} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{۱}{۲}\left(arctg\frac{۲b}{c-a} + k\pi\right)$$

با انتخاب هر زاویهٔ α از رابطهٔ بالا، دورانِ R_o^α معادله نوع (۱) را به معادلهٔ نوع (۲) تبدیل می‌کند که در آن جمله xy وجود ندارد و در نتیجه محورهای منحنی آن با محورهای مختصات موازیند. در حقیقت، زاویهٔ α که به این ترتیب به‌دست می‌آید زاویه‌ای است که بین یکی از محورهای مختصات و یکی از محورهای مقطع مخروطی، قبل از دوران، تشکیل می‌شود.

حالت خاص. اگر $a = c$ باشد،

$$tg\,۲\alpha = \pm\infty \Rightarrow ۲\alpha = \pm\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{۴}$$

مثال: منحنی C به معادلهٔ $y = \frac{۱}{۲}\left(x \pm \sqrt{۱۲ - ۳x^۲}\right)$ مفروض است.

اولاً ـ تحقیق کنید این منحنی یک مقطع مخروطی از نوع بیضی است.

ثانیاً ـ این بیضی را حول مبدأ مختصات به زاویهٔ α دوران می‌دهیم تا محورهای آن با محورهای مختصات موازی شوند. پس از تعیین زاویه α، معادله تبدیل یافته این بیضی و از آن‌جا طولهای اقطار بزرگتر و کوچکتر آن را پیدا کنید.

حل: اولاً ـ معادلهٔ مفروض پس از حذف رادیکال و ساده‌کردن به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x^۲ - xy + y^۲ - ۳ = ۰$$

معادلهٔ بالا با معادلهٔ کلی مقطع مخروطی قابل مقایسه است و در آن:

$a = ۱$ ، $b = -\frac{۱}{۲}$ ، $c = ۱$ ، $d = ۰$ ، $e = ۰$ ، $f = -۳$

چون $b^۲ - ac < ۰$، نوع این مقطع مخروطی بیضی است.

ثانیاً ـ چون $a = c = ۱$ است، می‌توانیم زاویهٔ دوران را $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ اختیار کنیم. بنابراین:

$$\left[x \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y), y \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(-x+y)\right] \Rightarrow$$

$$x^۲ - xy + y^۲ - ۳ = ۰ \longrightarrow \frac{x^۲}{۲} + \frac{y^۲}{۶} = ۱$$

منحنی معادلهٔ اخیر یک بیضی است که محور کانونی آن با محور عرضها موازی است و طولهای دو قطر بزرگتر و کوچکتر آن، که با اقطاربزرگتر و کوچکتربیضی C متناظرند، $۲\sqrt{۶}$, $۲\sqrt{۲}$ هستند. اگر زاویه دوران را $\left(-\frac{\pi}{۴}\right)$ اختیار کنیم، معادلهٔ تبدیل یافته منحنی C به‌صورت $\frac{x^۲}{۶} + \frac{y^۲}{۲} = ۱$ در می‌آید که منحنی نمایش آن یک بیضی است که محور کانونی آن به موازات محور طولها است.

۱ ـ ٦: چند مثال

مثال ۱: اگر خط d' به معادلهٔ $y = -۳x + m$ تبدیل یافته خط d به معادله $y = ۲x + ۱$ در دورانِ R_o^α باشد، ابتدا زاویهٔ α، که حاده فرض می‌شود، و سپس ضریب m را تعیین کنید.

حل: طبق قضیّهٔ ۲، زاویهٔ دوران در این‌جا، مساوی زاویه حادهٔ بین دو خط متناظر d و d' است. بنابراین:

$$tg\,\alpha = \left|\frac{-۳-۲}{۱-۶}\right| = ۱ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

اکنون، معادله دوران یافته خط d را در دوران $R_o^{۴۵^\circ}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\left[x \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y), y \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(-x+y)\right] \Rightarrow$$

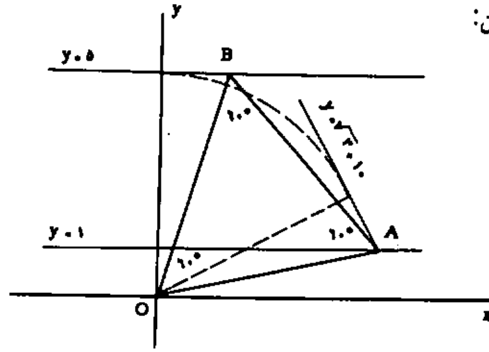
$$d: y = ۲x + ۱ \qquad d': y = -۳x - \sqrt{۲}$$

از مقایسه دو معادلهٔ $y = -۳x + m$, $y = -۳x + \sqrt{۲}$ که برای خط d' داریم، نتیجه می‌شود: $m = -\sqrt{۲}$

مثال ۲: نقطه O (مبدأ مختصات) یک رأس مثلث متساوی‌الاضلاع OAB است که در آن، رأس A بر خط $y = ۱$ و رأس B بر خط $y = ۵$ قرار دارد. مختصات دو رأس A و B را، که مثبت فرض می‌شوند، پیدا کنید.

حل: اگر OAB مثلث مطلوب باشد، چون $\hat{AOB} = ۶۰^\circ$ و

$OA = OB$ است می‌توان گفت رأس A تبدیل یافته رأس B در دوران $\bar{R}_O^{-۶۰°}$ و رأس B دوران یافته رأس A در دوران $R_O^{۶۰°}$ است.
بنابراین:



از برخورد خط $y = ۱$ با تبدیل یافته خط $y = ۵$ در دوران $\bar{R}_O^{-۶۰°}$، رأس A و از برخورد خط $y = ۵$ با تبدیل یافته خط $y = ۱$ در دوران $\bar{R}_O^{۶۰°}$، رأس B به‌دست می‌آید. محاسبهٔ مختصات این دو نقطه به‌صورت زیر است:

تعیین تبدیل یافتهٔ خط $y = ۵$ در دوران $\bar{R}_O^{-۶۰°}$:

$$y \longrightarrow -x\sin(-۶۰°) + y\cos(-۶۰°) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x + \frac{۱}{۲}y$$

$$y = ۵ \longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}x + \frac{۱}{۲}y = ۵ \Rightarrow y = -\sqrt{۳}x + ۱۰$$

تعیین مختصات رأس A:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{۳}x + ۱۰ \\ y = ۱ \end{cases} \Rightarrow A(۳\sqrt{۳}, ۱)$$

تعیین تبدیل یافتهٔ خط $y = ۱$ در دوران $R_O^{۶۰°}$

$$y \longrightarrow -x\sin ۶۰° + y\cos ۶۰° = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + \frac{۱}{۲}y$$

$$y = ۱ \longrightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + \frac{۱}{۲}y = ۱ \Rightarrow y = \sqrt{۳}x + ۲$$

تعیین مختصات رأس B:

$$\begin{cases} y = \sqrt{۳}x + ۲ \\ y = ۵ \end{cases} \Rightarrow B(\sqrt{۳}, ۵)$$

مثال ۳: تابع هموگرافیک $y = \frac{۲x + ۱}{x - ۱}$ مفروض است. منحنی آن را حول مبدأ مختصات به زاویهٔ معینی، که آن را پیدا می‌کنید، دوران می‌دهیم تا یک هذلولی که محورهای آن با محورهای مختصات موازی هستند، پدید آید. معادلهٔ این هذلولی و معادله‌های محورهای آن را بنویسید و از آن‌جا، معادله‌های محورهای تقارن منحنی تابع هموگرافیک مفروض را به دست آورید.

حل: تابع مفروض پس از حذف مخرج به‌صورت زیر در می‌آید،

$$xy - ۲x - y - ۱ = ۰$$

منحنی این تابع یک مقطع مخروطی از نوع هذلولی است، زیرا

$$b^۲ - ac > ۰ \quad \text{و} \quad b = \frac{۱}{۲} \text{ ، } a = c = ۰$$

برای این که محورهای این منحنی در دوران R_O^{α} به موازات محورهای مختصات درآیند، چون $a = c$ است می‌توان زاویهٔ دوران را $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ اختیار کرد. بنابراین:

$$\left[x \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y),\ y \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(-x+y)\right] \Rightarrow$$

$$xy - ۲x - y - ۱ = ۰ \longrightarrow y^۲ - x^۲ - \sqrt{۲}x - ۳\sqrt{۲}y - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\left(y - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲}{۶} - \frac{\left(x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲}{۶} = ۱$$

منحنی معادلهٔ اخیر یک هذلولی متساوی‌القطرین به مرکز $O'\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\right)$ است که محورهای آن به معادله‌های $y = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$, $x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ به موازات محورهای مختصات هستند. اگر این دو خط را حول مبدأ مختصات به زاویهٔ $\left(\frac{-\pi}{۴}\right)$ دوران دهیم معادلات دو محور تقارن منحنی تابع هموگرافیک داده شده به‌دست می‌آیند:

$$\left[x \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x-y),\ y \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y)\right] \Rightarrow$$

$$x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x-y) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow y = x + ۱$$

$$y=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y)=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow y=-x+۳$$

اگر زاویهٔ دوران را $\alpha=\frac{-\pi}{۴}$ اختیار کنیم تابع هموگرافیک مفروض به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود که منحنی آن یک هذلولی است که محور کانونیش با محور طولها موازی است:

$$\frac{(x-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲}{۶}-\frac{(y-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{۶}=۱$$

تذکر. منحنی هر تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، $(c\neq ۰)$، یک هذلولی است که نقطهٔ $H(-\frac{d}{c}$ و $\frac{a}{c})$ محل تلاقی مجانبها و مرکز تقارن آن است. این منحنی دو محور تقارن دارد که از نقطهٔ H می‌گذرند و با محور طولها زاویه‌های $\frac{\pi}{۴}$ و $-\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند، یعنی به معادلات زیر هستند:

$$y=x+\frac{a+d}{c}\ ,\ y=-x+\frac{a-d}{c}$$

دربارهٔ دوران یک منحنی لازم است به نکتهٔ زیر نیز توجه شود:

گرچه، دوران هیچ‌گونه تغییری در شکل یک منحنی پدید نمی‌آورد و فقط آنرا تغییر مکان می‌دهد، اما تبدیل یافتهٔ معادله منحنی، ممکن است هیچ‌یک از ویژگیهای خود معادله را نداشته باشد. برای مثال رابطهٔ $F(x,y)=xy-۲x-y-۱=۰$ را با رابطهٔ دوران یافتهٔ منحنی آن به زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$، که در مثال ۳ به‌صورت: $G(x,y)=y^۲-x^۲-\sqrt{۲}x-۳\sqrt{۲}y-۲=۰$ به‌دست آمد، در چند مورد مقایسه می‌کنیم:

الف. دامنهٔ تعریف و برد رابطهٔ $F(x,y)=۰$ عبارتند از: $D_F=R-\{۱\}$ و $R_F=R-\{۲\}$. درصورتی که دامنهٔ تعریف و برد رابطهٔ $G(x,y)=۰$ برابرند با:

$$R_G=]-\infty,\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۶}]\cup[\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+\sqrt{۶},+\infty[,D_G=R$$

ب. رابطهٔ $F(x,y)=۰$ یک تابع یک به یک و بنابراین معکوس‌پذیر است، درحالی که رابطهٔ $G(x,y)=۰$ اصولاً تابع نیست.

ج. منحنی معادلهٔ $F(x,y)=۰$ نقطه ماکسیمم یا مینیمم ندارد، امّا رأسهای کانونی منحنی معادلهٔ $G(x,y)=۰$، یعنی:

$$A'(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۶})\ ,\ A(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}+\sqrt{۶})$$

نقاط ماکسیمم و مینیمم آن هستند.

تمرین

۱ ـ خط $۴x+۳y=۱۲$ را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازهٔ کوچکترین زاویه، دوران می‌دهیم تا با محور طولها موازی شود. زاویهٔ دوران (α) و معادله تبدیل یافته این خط را تعیین کنید.

جواب: $\alpha=\text{Arc tg}\frac{۴}{۳}$ و $y=\frac{۱۲}{۵}$

۲ ـ نقطهٔ O (مبدأ مختصات) یک رأس مثلث متساوی‌الساقین OAB است که در آن $\hat{O}=۳۰^\circ$ و $OA=OB$. اگر رأس A بر خط (d) به معادلهٔ $y=x\sqrt{۳}-۲$ و رأس B بر خط (δ) به معادلهٔ $y=x+\sqrt{۳}$ واقع باشند، مختصات این دو رأس را پیدا کنید.

جواب: $A(\frac{۲\sqrt{۳}+۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}+۲}{۲})$ ، $B(۱,\sqrt{۳}+۱)$

۳ ـ سهمی (c) به معادلهٔ

$$۳x^۲+۲\sqrt{۳}xy+y^۲-۴x+۴\sqrt{۳}y+۸=۰$$

را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا به سهمی (c′) که محورش با محور طولها موازی باشد تبدیل شود؛

اولاً: اندازه کوچکترین زاویهٔ دوران را پیدا کنید

ثانیاً: معادلات سهمی (c′) و مختصات رأس، مختصات کانون، معادله محور و معادله خط هادی در آن را تعیین کنید.

ثالثاً: با استفاده از مشخصات سهمی (c′) که به‌دست آورده‌اید، مشخصات سهمی (c) را از طریق دوران معکوس معین کنید.

جوابها:

اولاً: $\alpha=\frac{\pi}{۳}$

ثانیاً: $C':y^۲=۲(x-۲),S'(۲,۰),F'(\frac{۵}{۲},۰),y=۰,x=\frac{۳}{۲}$

ثالثاً:

$$S(۱,-\sqrt{۳}),F(\frac{۵}{۴},\frac{-۵\sqrt{۳}}{۴}),$$

$$y+\sqrt{۳}x=۰,\sqrt{۳}y-x+۳=۰$$

پارامترهای جبری متجانس

● دکتراحمد شرف‌الدین

مقدمه

مفهوم پارامترهای جبری متجانس حائز اهمیت است. دانش‌آموزان باید از این مفهوم آگاهی داشته باشند. عدم آشنایی با این مفهوم موجب اشتباه در حل بعضی مسائل می‌شود. درسطرهای آینده در این مورد توضیح می‌دهیم و مثالهای متعدد ذکر می‌کنیم. این مثالها را طوری طرح کرده‌ایم که محاسبات آنها بسیار کوتاه باشد تا توجه دانش‌آموز کاملاً به درک نقش پارامترهای جبری متجانس متمرکز باشد.

پارامترهای هندسی و پارامترهای جبری

هرشرط مشخص کنندهٔ یک شکل هندسی یک پارامتر نامیده می‌شود مثلاً چون خط مستقیم با دو نقطه مشخص می‌شود می‌گوییم خط مستقیم دو پارامتر دارد. دایره با سه نقطه‌اش مشخص می‌شود از این جهت می‌گوییم دایره سه پارامتر دارد: هر نقطه از یک شکل یک پارامتر محسوب می‌شود مگر نقاط مخصوص مثلاً رأس بیضی دوپارامتر محسوب می‌شود. وقتی می‌گوییم نقطه A رأس یک بیضی است یعنی این که نقطه A متعلق به بیضی است (یک شرط) و به‌علاوه یکی از محورهای بیضی از نقطه A می‌گذرد (شرط دوم).

هنگامی که معادله یک خط راست را در هندسه تحلیلی می‌نویسیم نمی‌توانیم اوضاع مختلف خط راست را به توسط دوپارامتر مشخص کنیم. به عنوان مثال اگر معادله خط را به صورت $y = px + q$ بنویسیم خطوط $x = a$ (خطوط موازی بامحور yها) را نمی‌توان با آن معادله به دست آورد. همچنین می‌دانیم که خط راست دایره‌ای است که شعاع آن بی‌نهایت است. اگر معادله دایره را به صورت $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ بنویسیم هیچ گاه از این معادله، معادله خطوط مستقیم به‌دست نمی‌آید.

برای فایق آمدن براین مشکل پارامترهای جبری متجانس به‌کار می‌بریم یعنی معادله خط راست را به‌صورت $ax + by + c = 0$ می‌نویسیم که جمیع اوضاع خط راست را نشان می‌دهد و معادله دایره رابه صورت $\lambda(x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ می‌نویسیم به‌ازای $\lambda = 0$ خطوط راست به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۱. معادله‌خطوطی راکه‌ازمبدأمختصات‌برمنحنی C به معادله

$$y^2 - x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

مماس رسم می‌شوند بنویسید.

حل. معادله خطوطی راکه بر مبدأ مختصات می‌گذرند به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = mx \quad (2)$$

جوابهای دستگاه معادله‌های زیر مختصات نقاط تقاطع منحنی C و خط به معادلهٔ (۲) می‌باشند:

$$\begin{cases} y^2 - x - 2y + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases} \quad (3)$$

از حذف y بین دو معادله دستگاه بالا، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$m^2x^2 - (1 + 2m)x + 1 = 0 \quad (4)$$

جوابهای معادله (۴) طولهای نقاط تقاطع منحنی C و خط (۲) می‌باشند. شرط تماسی‌خط (۲) و منحنی C چنین است:

$$\Delta = 4m + 1 = 0 \quad (5)$$

$$m = -\frac{۱}{۴}$$

معادله خط مماس چنین است:

$$(۶)\quad y = -\frac{۱}{۴}x$$

معادلهٔ (۱) معادله یک سهمی است و نقطه (۰ , ۰) O روی منحنی c قرار ندارد زیرا مختصات نقطه O در معادله (۱) صدق نمی‌کنند. پس چرا فقط یک معادله برای خطوط مماس به‌دست آمده است؟

علت آن است که در نوشتن معادله خط، پارامتر جبری متجانس به‌کار نبرده‌ایم. معادله کلی خطوطی که از مبدأ مختصات می‌گذرند به‌صورت (۲) نیست که به صورت زیر است:

$$(۷)\quad ax = by$$

در معادله (۲) هیچ مقداری نمی‌توان به m نسبت داد تا خط نمایش آن محور yها باشد. معادله (۲) کلیه خطوط ماربر مبدأ مختصات را نشان می‌دهد بجز خط $y'y$ را. در مسألهٔ (۱)، محور yها مماس بر سهمی c است. معادله (۲) محور y رانشان نمی‌دهد، از این جهت دستگاه معادله‌های (۳) فقط معادله یک خط مماس را به دست داده است.

برای جست‌وجوی معادله‌های خطوط مماس، دستگاه معادله‌های زیر را می‌نویسیم:

$$(۸)\quad \begin{cases} y^۲ - x - ۲y + ۱ = ۰ \\ ax = by \end{cases}$$

y را بین دو معادله حذف می‌کنیم. چنین می‌نویسیم:

$$(۹)\quad y = \frac{a}{b}x$$

اما این هنگامی ممکن است که $b \neq ۰$ باشد. پس دو حالت درنظر می‌گیریم.

الف. اگر $b = ۰$ باشد در این صورت معادلهٔ دوم دستگاه (۸) می‌شود:

$$(۱۰)\quad x = ۰$$

حال بررسی می‌کنیم که آیا خط به معادله (۱۰) برمنحنی c مماس است یا نه. در معادله اول دستگاه به جای x مقدار آن یعنی صفر قرار می‌دهیم حاصل می‌شود:

$$(۱۱)\quad y^۲ - ۲y + ۱ = ۰$$

معادله (۱۱) دارای جواب مضاعف $y = ۱$ است. پس خط $x = ۰$ در نقطه‌ای به عرض $y = ۱$ برمنحنی c مماس است.

ب. اگر $b \neq ۰$ باشد معادله دوم دستگاه (۸) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱۲)\quad y = \frac{a}{b}x$$

قرار می‌دهیم $\frac{a}{b} = m$ معادله (۱۲) به صورت $y = mx$ در می‌آید. در این صورت دستگاه معادله‌های (۸) به‌صورت دستگاه معادله‌های (۳) نوشته می‌شود و به‌وسیله آن معادله خط مماس دیگر به صورت (۶) به دست می‌آید. با این ترتیب با به‌کارگیری پارامترهای جبری متجانس یعنی با به‌کارگیری معادله (۷) معادله هر دو خط مماس را به دست می‌آوریم.

اگر معادله (۱) را به‌صورت $(y - ۱)^۲ = x$ بنویسیم به آسانی معلوم می‌شود که منحنی c یک سهمی است که درنقطه $S(۰ , ۱)$ برمحور yها مماس است.

مسألهٔ ۲. دایره c به معادله

$$(۱۳)\quad x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y + ۴ = ۰$$

مفروض است. معادله خطوطی راکه از مبدأ مختصات می‌گذرند و بردایره c مماسند بنویسید.

حل. معادلهٔ خطوطی که برمبدأ مختصات می‌گذرند به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱۴)\quad y = mx$$

مختصات نقاط تقاطع دایره c و خط (۱۴) جوابهای دستگاه معادله‌های زیراند:

$$(۱۵)\quad \begin{vmatrix} x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y + ۴ = ۰ \\ y = mx \end{vmatrix}$$

از حذف y بین دو معادله دستگاه (۱۵) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(۱۶)\quad (۱ + m^۲)x^۲ - ۲(۱ + ۲m)x + ۴ = ۰$$

شرط تماس خط (۱۴) و دایره (۱۳) چنین است:

$$\Delta = ۴m - ۳ = ۰$$

$$m = \frac{۳}{۴}$$

معادله خط مماس چنین است: $y = \frac{3}{4}x$

نقطه O (مبدأ مختصات) در خارج از دایره C است زیرا مختصات مرکز دایره C عبارت‌است از (۲ و ۱) و شعاع آن ۱ = r است. فاصله O از مرکز دایره $\sqrt{5}$ است.

چرا با وجود آن‌که نقطه O خارج از دایره است برای خطوط مماس فقط یک معادله به‌دست آمده است. علت این امر آن است که در نوشتن معادلهٔ خطوط مار بر مبدأمختصات **پارامترهای جبری متجانس** به‌کار نبرده‌ایم. برای به‌دست آوردن جواب کامل، معادلهٔ خطوط مار بر مبدأمختصات را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$ax = by$$

و سپس همان شیوه استدلال مسأله (۱) را به‌کار می‌بریم. معادله هر دو خط مماس به دست می‌آید.

اکنون مسأله دیگری در شماره (۴) مطرح می‌کنیم که اگر در حل آن پارامترهای جبری متجانس به‌کار نبریم دچار اشتباه می‌شویم. برای این منظور ابتدا با حل مسأله (۳) ذهن خواننده را آماده می‌کنیم و سپس مسألهٔ (۴) را که هدف اصلی، است مطرح می‌کنیم.

مسألهٔ ۳. معادله درجه دوم

$$(17)\quad -2x^2 + y^2 - xy + 3x - 1 = 0$$

مفروض است. ثابت کنید نمودار این معادله از دو خط راست تشکیل شده است.

حل: معادله خطوط راست رابه صورت زیر می‌نویسیم:

$$(18)\quad y = px + q$$

دستگاه معادله‌های زیر، مختصات نقاط تقاطع خط (۱۸) و نمودار (۱۷) را به‌دست می‌دهد:

$$(19)\quad \begin{cases} -2x^2 + y^2 - xy + 3x - 1 = 0 \\ y = px + q \end{cases}$$

اگر نمودار معادله (۱۷) از دو خط راست تشکیل شده باشد آنگاه می‌توان مقادیر p و q را طوری اختیار کرد که خط (۱۸) نمودار (۱۷) را در بی‌نهایت نقطه قطع کند.

از حذف y بین دو معادله دستگاه معادله‌های (۱۹)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(20)\quad (p^2 - p - 2)x^2 + (2pq - q + 3)x + q^2 - 1 = 0$$

جوابهای معادله (۲۰) طولهای نقاط تقاطع خط (۱۸) و نمودار معادله (۱۷) اند. اگر نمودار معادله (۱۷) از دو خط راست تشکیل شده باشد می‌توان p و q را طوری انتخاب کرد که معادله (۲۰) دارای بی‌نهایت جواب باشد. برای آن‌که معادله (۲۰) دارای بی‌نهایت جواب باشد لازم و کافی است هر سه ضریب آن صفر باشند یعنی:

$$(21)\quad \begin{cases} p^2 - p - 2 = 0 \\ 2pq - q + 3 = 0 \\ q^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

جوابهای این دستگاه معادله‌ها چنین است:

$$\begin{cases} p = 2 \\ q = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p = -1 \\ q = 1 \end{cases}$$

پس نمودار معادله (۱۷) از دو خط راست به معادلات زیر تشکیل شده‌اند.

$$y = 2x - 1 \qquad y = -x + 1$$

تبصره: مسألهٔ (۳) را می‌توان به‌صورت زیر مطرح کرد:

عبارت زیر را به حاصل‌ضرب دو عبارت درجهٔ اول برحسب x و y تجزیه کنید.

$$-2x^2 + y^2 - xy + 3x - 1$$

توجه. مسأله (۴) که در سطور آینده مطرح می‌کنیم از همان نوع مسأله (۳) است. در حل مسألهٔ (۳) نیازی به بکارگیری پارامترهای جبری متجانس نبود. اما در حل مسألهٔ (۴) باید پارامترهای جبری متجانس به‌کار بریم. مسأله (۳) را فقط از این نظر مطرح کردیم که ذهن خواننده برای مسأله (۴) آماده شود.

مسألهٔ ۴. ثابت کنید نمودار معادله زیر از دو خط راست تشکیل شده است:

$$(22)\quad x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0$$

حل. معادله خط راست رابه صورت زیر می‌نویسیم:

$(۲۳)\ y = px + q$

دستگاه معادله‌های زیر مختصات نقاط تقاطع خط (۲۳) و نمودار معادله (۲۲) را به دست می‌دهند.

$$(۲۴)\ \left|\begin{array}{l} x^۲ + xy - ۲x - y + ۱ = ۰ \\ y = px + q \end{array}\right.$$

از حذف y بین دو معادله دستگاه (۲۴) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(۲۵)\ (۱ + p)\,x^۲ + (q - p - ۲)\,x - q + ۱ = ۰$$

جوابهای معادله (۲۵) طولهای نقاط تقاطع خط (۲۳) و نمودار (۲۲) اند. اگر نمودار (۲۲) متشکل از دو خط راست باشد آنگاه می‌توان مقادیر p و q را طوری اختیار کرد که معادله (۲۵) دارای بی‌نهایت جواب باشد. برای آن‌که معادلهٔ (۲۵) دارای بی‌نهایت جواب باشد لازم و کافی است که هر سه ضریب آن صفر باشند یعنی:

$$(۲۶)\ \left|\begin{array}{l} ۱ + p = ۰ \\ -q + ۱ = ۰ \\ q - p - ۲ = ۰ \end{array}\right.$$

جواب این دستگاه معادلات چنین است:

$$p = -۱ \quad \text{و} \quad q = ۱$$

پس معادله (۲۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(۲۷)\ y = -x + ۱$$

اما، معادله (۲۲) از درجه دوم است و نمی‌تواند فقط شامل یک خط باشد.

نقص حل در کجاست؟ نقص حل‌ما، این است که پارامترهای جبری متجانس به کار نبرده‌ایم. معادله (۲۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(x - ۱)\,(y + x - ۱) = ۰$$

پس نمودار معادله (۲۲) از دو خط راست به معادله‌های $x - ۱ = ۰$ و $y + x - ۱ = ۰$ تشکیل شده است. در معادله (۲۳) نمی‌توان مقادیری به p و q نسبت داد تا آن معادله به‌صورت $x - ۱ = ۰$ در آید. از این جهت است که با به‌کارگیری معادله (۲۳) نتوانستیم معادله هر دو خط تشکیل دهنده نمودار معادله (۲۳) را به‌دست آوریم.

در سطور زیر پارامترهای جبری متجانس به‌کار می‌بریم تابرمشکل فایق آییم.

برای حل مسأله، معادله خط راست را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲۸)\ ax + by + c = ۰$$

مختصات نقاط تقاطع خط به معادله (۲۸) و نمودار معادله (۲۲) جوابهای دستگاه معادله‌های زیرانده:

$$(۲۹)\ \begin{cases} x^۲ + xy - ۲x - y + ۱ = ۰ \\ ax + by + c = ۰ \end{cases}$$

دو حالت درنظر می‌گیریم:

الف. اگر $b = ۰$ باشد آنگاه معادله دوم دستگاه معادله‌های (۲۹) به‌صورت $x = \alpha$ (خطوط موازی محور yها) در می‌آید. حال بررسی می‌کنیم که آیا می‌توان مقداری به α نسبت داد تا خط $x = \alpha$ بخشی از نمودار معادله (۲۲) باشد. برای این منظور α باید بتواند مقداری بگیرد که تساوی زیر به‌ازای جمیع مقادیر y برقرار باشد:

$$\alpha^۲ + \alpha y - ۲\alpha - y + ۱ = ۰$$

و یا

$$\alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ + y(\alpha - ۱) = ۰$$

پس باید دو تساوی زیر باهم برقرار باشند:

$$\alpha - ۱ = ۰$$

$$\alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = ۰$$

به‌ازای $\alpha = ۱$ هر دو تساوی برقرار است پس خط $x = ۱$ بخشی از نمودار معادله (۲۲) است.

ب. اگر $b \neq ۰$ باشدمعادله(۲۸)رابه‌صورت $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم $p = \frac{-a}{b}$ و $q = \frac{-c}{b}$. در این صورت معادله (۲۸) به‌صورت $y = px + q$ نوشته می‌شود و دستگاه معادله‌های (۲۹) به‌صورت دستگاه معادله‌های (۲۴) در می‌آید که به‌وسیلهٔ آن بخش‌دیگرنمودارمعادله (۲۲) به‌صورت‌معادله (۲۷) به‌دست می‌آید.

آشنایی با مشاهیر ریاضی جهان

غلامرضا یاسی‌پور

از:

Oxford Dictionary of Mathematics

آبـل، نـیل هـنریک «Abel, Niels Henrik» (۱۸۰۲ - ۱۸۲۹) در خانوادهٔ کشیشی در نروژ متولد شد. درسن ۱۹ سالگی، ثابت کرد که چند جملهٔ عمومی بیشتر از درجهٔ ۴ نمی‌تواند بااستفاده از استخراج ریشه‌ها، حل شود. به‌عبارت دیگر، برای ریشه‌های معادلاتی چنین، فرمولی مشابه فرمول آشنای درجه دوم‌ها موجود نیست. آبل عهده‌دار توسعه‌های اساسی نظریهٔ توابع جبری نیز بود. این کار مهمترین کار او بود. نامش غبارت آبلی «abelian» را به ما داده است. درسن ۲۶ سالگی، درست چند روز قبل از این که نامه‌ای دریافت کند که در آن انتصابش به‌عنوان استاد در برلین اعلام شده بود، در فقر و فاقه مرد.



آپولونیوس پرگائی «Apollonious of perga» (حدود ۱۹۰ - ۲۶۲ ق.م.). آپولونیوس طی دوران طلائی ریاضیات یونان به‌کار اشتغال داشت و کم و بیش معاصر ارشمیدس بود، و در مورد سیارات به حرکت اپی‌سیکلیکی تأکید داشت. معروفترین اثرش که تا دوران جدید اثری قاطع راجع به مقاطع مخروطی: بیضی، سهمی و هذلولی بوده، مخروطات «The Conics» است.



ارشمیدس «Archimedes» (۲۱۲ - ۲۸۷ ق . م) ارشمیدس یکی از بزرگترین ریاضی‌دانهایی است که کارهایی اساسی در هندسه و نظریه‌های هیدرواستاتیک و تعادل انجام داده. در ریاضیات محض، بیشتر به خاطر اکسیوم ارشمیدس در نظریهٔ دستگاه عددهای حقیقی به

خاطر می‌آید. روشش به گونهٔ قابل‌توجهی مدرن است و مسائل هندسی مورد بررسیش بسیار فریبنده‌اند. کارهایی نظیر کارهای اوست که لیتل وود «Little Wood» را به این دلالت کرد که اعلام کند که ریاضی‌دانهای یونانی «نه دانش‌آموزانی باهوش که اشخاصی از دانشگاهی دیگر» بوده‌اند. جالبترین اثرش، به‌نام روش «The method» بار دیگر در ۱۹۰۶ کشف شد. ممکن است ارشمیدس فریاد «یافتم» «Eureka» را کشیده و برهنه در خیابانهای سیراکیوز دویده باشد یا نباشد، ولی محققاً توسط سربازی رمی به قتل رسیده، واقعه‌ای که پایان عصری در ریاضیات را رقم زد.



آرگان، ژان روبرت «Argand, Jean Robert» (۱۷۶۸ - ۱۸۲۲) آرگان ریاضی‌دانی سوئیسی بود که یکی از چند شخصی است که نمایش هندسی اعداد مختلط را اختراع کرد، از جملهٔ افراد دیگر گاوس و وسل‌اند. این موضوع وجه تسمیهٔ نمودار آرگان «Argand diagram» را توضیح می‌دهد.

خانوادهٔ برنولی. «Bernoulli family» خانوادهٔ برنولی از باسل «Basle». گروهی از ریاضی‌دانهای بزرگ، که بعضی از آنها



در واقع بسیار مهم بودند، به عمل آورد. معروفترین آنها برادران برنولی، ژاکوب و ژان، و دانیل پسر ژان‌اند. ژاکوب (۱۶۵۴ - ۱۷۰۵) کارهای بسیاری در حساب دیفرانسیل و انتگرال تازه مطرح شده در آن زمانها انجام داد، اما به خاطر سهمش در نظریهٔ احتمال، یعنی کتاب «Ars conjectandi» که در ۱۷۱۳، بعداز مرگش به چاپ رسید، به‌خاطر ماندنی است. اعداد برنولی به نام ژاکوب نامگذاری شده‌اند. کارهای ژان (۱۶۶۷ - ۱۷۴۸) به‌طور قطعی‌تر در حوزهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال بود و او یکی از بنیانگذاران حساب تغییرات «Calculus of Variatiop» است. در نسل بعد، دانیل (۱۷۰۰ - ۱۷۸۲) عضوی از این خانواده بود که در هیدرودینامیک کارهایی انجام داد و در آن قضیهٔ برنولی را به نام خود به جا گذاشت.

بول جورج «Boole, George» (۱۸۱۵ - ۱۸۶۴) بول ریاضی‌دانی انگلیسی ویکی از آباءِ مؤسس منطق‌ریاضی است. اثر مهم او، که درسال ۱۸۵۴ به چاپ رسید، تحقیق در قوانین تفکر «Investigation of the Laws of Thought» اوست. نوع استدلال علامتی‌ای که بول مطرح کرد، به مطالعهٔ جبرهای بولی، که از اهمیت جاری در محاسبه و جبر برخوردار است، انجامید. کارهای بول، همراه با کارهای افراد دیگر مکتب انگلیسی چون دومورگان

«De Morgan» و پی‌کاک «Peacock» راه توسعه جبر صوری جدید را هموار کرد.



بورباکی، نیکلا «Bourbaki Nicolas» ژنرال ان. بورباکی مرد نظامی فرانسوی ناشناخته‌ای با فعالیتهای بسیار است. بیشتر در این قرن زاده شده و بیشتر عمرش هنوز باقی مانده است. از ۱۹۳۹ به‌بعد، بررسی انسیکلوپدی مانندی را در ریاضیات محض به نام مقدمات «Elements» به طبع رسانده، که نفوذ آن به اشکال مختلف به‌عنوان عمیق یا مصیبت بار توصیف شده و بدون شک پهناور است. در این مدت پرچمدار مکتبی، که می‌تواند مکتب ساختارگرای «Structuralist School» ریاضیات جدید نامیده شود، بوده است.

کانتور، ژرژ «Cantor، Georg» (۱۹۱۸-۱۸۴۵) کانتور در سن پطرزبورگ «St petersburg» تولد یافت، اما بیشتر عمر خود را در هال «Halle» به سر برد. قسمت آخر عمرش با بیماریهای روانی مکرر تیره و تاربود و اوقات بسیاری را در آسایشگاه گذراند. عمیقترین کارهایش در ریاضیات نظریهٔ مجموعه‌های نامتناهی و اعداد نامتناهیش بود، و تمایز بین مجموعه‌های شمارا و ناشمارایش از اهمیّت خاصی برخوردار است. او را می‌توان به‌عنوان ریاضی‌دانی که بی‌نهایت را آزاد ساخت درنظر گرفت.



کوشی، آگوستین لویی «Cauchy, Augustin -louis» (۱۸۵۷ - ۱۷۸۹) کوشی یکی از مهمترین ریاضی‌دانهای اوایل قرن نوزدهم و چهرهٔ مسلط ریاضیات فرانسوی بود. آثارش در زمینه‌های وسیعی از ریاضیات تغییر می‌کند، اما وی بخصوص به‌عنوان یکی از پایه‌گذاران آنالیز ریاضی دقیق به‌خاطر مانده است. کارهای عمیقی در مورد مفاهیم پیوستگی و همگرایی انجام داد و نتایج آن در نظریهٔ توابع مختلط برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی بسیار آشناست.



طرح و حل مسائل

اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۷)

از کتاب: حل مسأله از طریق مسأله

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

بامدادی برفی سنگین با آهنگی یک نواخت آغاز به‌باریدن کرد. برف روبی در ساعت هشت پیش از ظهر به‌کار آغازید. در نه پیش از ظهر ۲ میل رفته بود. تا ده پیش از ظهر ۳ میل حرکت کرده بود. با فرض این که برف روب مزبور در ساعت، حجم ثابتی از برف را می‌روبد، زمان آغاز بارش برف را معین کنید.

حل: تصور این که در مسأله، اطلاعات کافی برای جواب دادن به سؤال موجوداند، مشکل است. اما، اگر راهی موجود باشد، باید به طور سیستماتیک ابتدا با استفاده از شناختن مقادیری که مجهول‌اند اقدام کنیم. در این مورد، نماد نویسی زیر را معرفی می‌کنیم: فرض می‌کنیم t زمانی را که از شروع برف آمدن منقضی شده است نمایش دهد و T زمانی (اندازه گرفته شده از $t=0$) باشد که در آن برف روب از کار می‌ایستد. فرض می‌کنیم $x(t)$ مسافتی باشد که برف روب در زمان t رفته است (تنها به $x(t)$ی به ازای $t \geq T$ علاقه‌مندیم). سرانجام، فرض می‌کنیم $h(t)$ عمق برف در زمان t را نمایش دهد.

اکنون آمادهٔ ترجمهٔ مسأله به عبارات علامتی هستیم. این واقعیت که برف با آهنگی یک نواخت می‌بارد بدین معنی است که عمق آن با آهنگی ثابت افزایش می‌یابد؛ یعنی:

$$\frac{dh}{dt} = c, \qquad c \text{ ثابت}$$

با انتگرال گرفتن از دو طرف داریم:

$$h(t) = ct + d \qquad c\text{ ،}d \text{ ثابت}$$

از آن جا که $h(0)=0$ ، $d=0$ را به دست می‌آوریم. به این ترتیب $h(t) = ct$.

این حقیقت که برف روب برف را با آهنگی یک نواخت می‌روبد بدین معنی است که سرعت برف روب به طور معکوس متناسب با عمق برف در هر زمان t است (به عنوان مثال: دو برابر عمق برف متناظر با نصف سرعت برف روب است). از لحاظ علامتی، به ازای $t \geq T$؛

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{h(t)} \qquad k \text{ ثابت}$$

$$= \frac{k}{ct} = \frac{K}{t}, \ K = \frac{k}{c} \qquad \text{ثابت}$$

با انتگرال گرفتن از دو طرف داریم:

$$x(t) = K \log t + C, \qquad C \text{ ثابت}$$

در این مورد سه شرط داده شده‌اند: زمانی که $t=T$، $x=0$، زمانی که $t = T + 1$ ، $x = 2$ و زمانی که $t = T + 2$، $x = 3$.
با دو شرط از شرایط فوق می‌توان K و C را محاسبه کرد، و سومی را می‌توان برای T حل کرد. آشکار می‌شود که (تفصیلات کار در این جا جالب نیستند).

$$T = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0/618 \text{ ساعت} \approx 37 \text{ دقیقه و } 5 \text{ ثانیه}$$

به این ترتیب، در ساعت ۷:۲۲:۵۵ پیش از ظهر برف آغاز به باریدن کرده است.

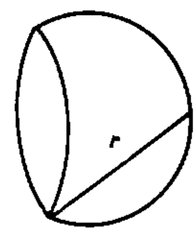
مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۷)

● ب. ریچموند، ت. ریچموند
● ترجمه : نغمه شریک زاده

ویژگی همسطحی منطقه‌ها

پرسشی قدیمی که در بسیاری از کتب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به چشم می‌خورد، مسألهٔ مناطق یک کره است: تحقیق کنید، چنانچه کره‌ای توسط دو صفحهٔ موازی، h واحد جدا از یکدیگر، قطع شود، آنگاه، مساحت رویهٔ منطقهٔ بین دو صفحهٔ مزبور، تنها به h بستگی دارد، واز موقع صفحات مستقل است. از آن‌جا که این ویژگی، همواره مورد توجه دانش‌آموزان بوده‌است، آشنا و شناخته شده است. این ویژگی پیامد بلافصل نتیجهٔ زیر از ارشمیدس است که به کمک شکل تشریح شده است.

قضیّه . مساحت رویهٔ هرقطعه از کره برابر مساحت دایره‌ای است به شعاعی برابر با خطی از رأس قطعهٔ مزبور تا نقطه‌ای بردایرهٔ قاعدهٔ منطقهٔ کرهٔ مورد بحث.



مساحت رویه $= \pi r^2$

با بررسی کرهٔ مزبور، به مثابهٔ رویه‌ای دورانی با محور تقارنی عمود بر صفحات قاطع آن، طبیعی است که پرسش معمول مذکور در فوق را، با طرح این پرسش که چه رویه‌های دورانی دیگری از ویژگی همسطحی منطقه‌ها بهره‌ورند، توسیع دهیم. واضح است که استوانه چنین است. آیا دیگرانی نیز موجودند؟ دو راه حل را که بسادگی، برای غیردانشجویان قابل وصولند، تازه یا فتن به این مسأله، از نظرگاه‌هایی متفاوت، ارائه می‌دهیم.

برای بیان دقیق مسأله، فرض می‌کنیم $y = g(x)$، خم نامنفی تکه‌ای ـ هموار، تعریف‌شده بر $[a,b]$ باشد، و حول‌محور x دوران نماید. منطقه‌ای به‌پهنای h $(h \le b-a)$ از رویهٔ حاصله، بخشی از رویهٔ محصور بین صفحات $x = x_0$ و $x = x_0 + h$ است، که در آن $x_0 \in [a, b-h]$. چه رویه‌های دورانی‌ای با ویژگی همسطحی منطقه‌ها، equal area zones property (E.A.Z) وجوددارند، چنان‌که به‌ازای هرپهنای $h \in [0, b-a]$ سطح رویهٔ

$$S(x,h)=\int_{x}^{x+h} 2\pi g(t)\sqrt{1+g'(t)^2}\,dt \quad (x\in[a,b-h])$$

از منطقه‌ای به پهنای h، تنها تابعی از h بوده، مستقل از x باشد؟

دو نکته را می‌توان در باب دو رویه‌ای که می‌دانیم دارای ویژگی E.A.Z. هستند، کره و استوانه، ملحوظ داشت. نخست، ملاحظه می‌شود که خمهای مولد آنان، دایره و خط، تنها خمهای مسطح‌اند، با خمیدگی ثابت و نامنفی. دوم آن‌که، در تحقیق‌دارا بودن ویژگی E.A.Z این دو رویه، آشکار می‌شود که در هر دو مورد، انتگرالده

$f(t) = 2\pi g(t)\sqrt{1+g'(t)^2}$ ثابت است، که واضحاً، شرطی کافی برای دارابودن ویژگی .E.A.Z است. در نخستین راه حلمان، نشان خواهیم داد که شرط مزبور، در مورد خم هموار $g(t)$، لازم نیز می‌باشد.

فرض می‌کنیم $g(t)$، بر $[a, b]$، هموار و نامنفی است. به ازای hی ثابت، انتگرال سطح رویهٔ $S(x, h)$ فوق، صورت $S(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$ را خواهد داشت، که در آن $f(t) = 2\pi g(t)\sqrt{1+g'(t)^2}$. چنانچه رویهٔ حاصل آمده از $g(t)$ دارای ویژگی .E.A.Z باشد، به ازای hی ثابت، $S(x)$ ثابت خواهدبود، بنابراین:

$$\frac{d}{dx}S(x) = \frac{d}{dx}\int_x^c f(t)dt + \frac{d}{dx}\int_c^{x+h} f(t)dt = 0$$

با به کاربردن قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال، در می‌یابیم که به ازای هر $x \in [a, b-h]$، $f(x)=f(x+h)$، بنابراین $f(x)$، بر $[a, b]$، h – دوره‌ای است. از آن‌جاکه این بحث، به ازای هر $h \in [0, b-a]$ برقرار است، ثابت بودن انتگرالده $f(t)$ مقرر می‌گردد.

حال، برای تعیین این‌که به ازای چه خمهای $y = g(x)$ ی، انتگرالده $f(x)$ ثابت است، باید معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کرد:

$$y\sqrt{1+y'^2} = c$$

اگر $c = 0$، آنگاه $g(x) \equiv 0$، بنابراین می‌توان فرض کرد که $c \neq 0$. نتیجه می‌شود که به‌ازای هر x، $y = g(x) \neq 0$، و بامربع کردن طرفین معادله و حل آن برحسب y'، به‌دست می‌آوریم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{c^2}{y^2}-1} \qquad (1)$$

چنانچه در بازه‌ای، $y \equiv c$، $y = g(x)$ ثابت خواهد بود، و رویهٔ متناظر بر آن بازه، استوانه است. بنا به پیوستگی، اگر به ازای $x_0 \in [a,b]$ ای، $g(x_0) \neq c$، آنگاه‌دربازهٔ I ای‌شامل x_0، $g(x) \neq c$ خواهدبود، و تفکیک متغیرها، چنین به‌دست خواهد داد:

$$\left[\left(\frac{c}{y}\right)^2 - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy = \pm dx$$

با جایگذاری $u = c/y$ و انتگرالگیری به دست می‌آوریم:

$$\int \frac{c\,du}{u^2\sqrt{u^2-1}} = \pm\int dx$$

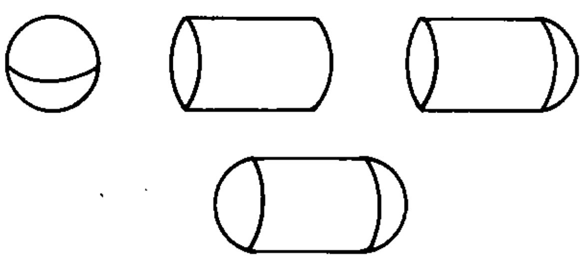
جانشینی مثلثاتی $u = \csc\theta$، به دست می‌دهد:

$$cu^{-1}\sqrt{u^2-1} = \pm x + k$$

یا

$$y^2 + (\pm x + k)^2 = c^2$$

از این صورت، روشن می‌شود که خم متناظر واقع بر I، بخشی از نیم‌دایره‌ای‌است به شعاع c و مرکزواقع در $(\pm k, 0)$. این موضوع، همراه با همواری g، مستلزم این است که، به‌ازای $x_1 < x_2$، چنانچه $g(x_1) = c = g(x_2)$، آنگاه‌به‌ازای‌هر $x \in [x_1, x_2]$، $g(x) = c$. به این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که دوران خمی نامنفی و هموار رویه‌ای با ویژگی .E.A.Z به دست می‌دهد، اگر و تنها اگر رویهٔ مزبور، کره، استوانه، «سیلو»، یا «کپسول» باشد.

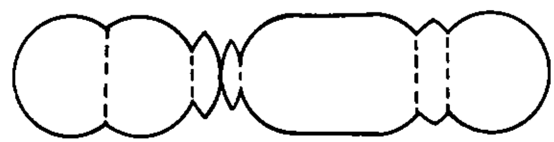


تنها رویه‌های هموار دارای ویژگی .E.A.Z

همگی این چهار رویه را می‌توان به‌صورت مناطقی از یک کپسول توصیف کرد؛ کپسولی که استوانه‌ای است به ارتفاع $h \geq 0$،

با نیم‌کره‌ای جفت شده به هر انتهای آن. در پی آن، معادلهٔ دیفرانسیل (۱) می‌تواند با جانشینی $u = y^2$ حل شود، که به معادلهٔ دیفرانسیل دیگری منجر خواهد شد که تنها با استفاده از قاعدهٔ توان، قابل انتگرالگیری است. همچنین، پاسخهای (۱) فوق، این حقیقت را بیان می‌دارند که پوش خانواده‌ای از پاسخهایی به معادلهٔ دیفرانسیلی از مرتبهٔ اول، پاسخی به معادلهٔ دیفرانسیل نیز می‌باشد. پوش کره‌هایی به شعاع c، به مرکز واقع در $(\pm k , 0)$، استوانه‌ای به مرکز c است.

نتیجه می‌شود که اگر $g(x)$ خم تکه‌ای ـ هموار نامنفی پیوسته‌ای باشد، مولد رویه‌ای دورانی با ویژگی E.A.Z.، آنگاه رویهٔ مزبور باید «زنجیره‌ای از مهره‌هایی باشد که هر مهره منطقه‌ای از کپسولی به شعاع ثابت c است.



زنجیره‌ای از مناطق یک کپسول

گذشته از اثبات مستقیمی که در بالا داده شد، باشهودی کافی، می‌توان بحث منحصربه فردی را تا نشان دادن این‌که مناطق یک کپسول، تنها رویه‌های هموار دارای ویژگی E.A.Z. اند، دنبال کرد. چون بحثی که در زیر می‌آید.

فرض می‌کنیم g خم نامنفی هموار بر $[a , b]$ بوده، مولد رویه‌ای دورانی با ویژگی E.A.Z.، و باهمان تابع مساحت رویهٔ $S(h) = 2\pi rh$ باشد، آن‌چنان‌که کرهٔ مربوط‌ه‌با $c(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تولید شده باشد. اگر $g(x_0) > r$، آنگاه

$$2\pi g(x_0)\sqrt{1+g'(x_0)^2} > 2\pi r = 2\pi c(x_0)\sqrt{1+c'(x_0)^2}$$

و بنابه پیوستگی، $\varepsilon > 0$ ی وجود دارد، چنان‌که به ازای هر $x \in I = [x_0 - \varepsilon , x_0 + \varepsilon] \cap [a , b]$،

$$2\pi g(x)\sqrt{1+y'(x)^2} > 2\pi c(x)\sqrt{1+c'(x)^2}$$

که این متناقض خواهد بود با این‌که مساحت رویهٔ هر منطقهٔ تولید شده با g در بازهٔ I، سطح بزرگتری از منطقه‌ای به همان پهنا، تولید شده با $c(x)$ دارد. بنابراین، به‌ازای هر x، $g(x) \le r$، که در این صورت، به‌ازای هر x_0، z_0 ی موجود است، چنان که $g(x_0) = c(z_0)$، $g'(x_0)$ و $c'(z_0)$ علاماتی مخالف هم ندارند. اگر $g'(x_0) \neq c'(z_0)$، آنگاه، چون در بالا، نتیجه می‌گیریم که $\varepsilon > 0$ ی موجود است، چنان که به‌ازای $|\delta| < \varepsilon$،

$$\left| 2\pi g(x_0+\delta)\sqrt{1+g'(x_0+\delta)^2} - 2\pi c(z_0+\delta)\sqrt{1+c'(z_0+\delta)^2} \right| > 0$$

و متناقض با اینکه g و c رویه‌هایی با مناطق همسطح تولید می‌کنند. بنابراین $g'(x_0) = c'(z_0)$، هرگاه $g(x_0) = c(z_0)$. نتیجه می‌شود که بر هر بازه‌ای که g وارونپذیر است، یعنی، بر هر بازه‌ای که $g'(x) \neq 0$، یا هم ارزآن، $g(x) \neq r$، g باتبدیل افقی بخشی از خم c، سازگار است. استفاده از بحثی برمبنای همواری، چنانچه در حل پیشین ارائه شد، نتیجه‌ای مبنی براینکه رویهٔ تولید شده با g، باید منطقه‌ای از یک کپسول باشد را به دست خواهد داد.

تمرین اندیشه ۳

به جای ستاره‌ها چه ارقامی می‌توان قرار داد تا این تساوی برقرار شود:

$$*\,*\,*\,4\,*\,*\times 7 = 6743\,*\,56$$

ترجمهٔ سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحهٔ ۹۶

نظریهٔ گراف

Discrete Mathematics
Stephen A. Wiitala
Associate Professor of Mathematics
Norwich University

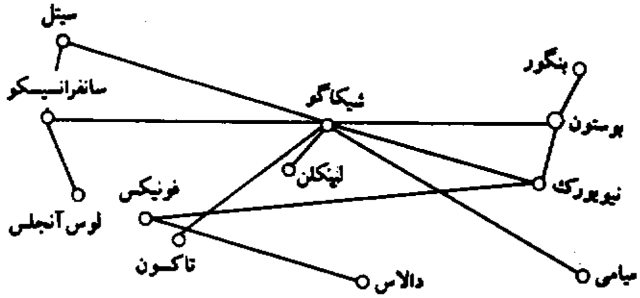
ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

۱. گرافها چیستند؟

مفهوم گراف[۱] یکی از مفیدترین مفاهیم ریاضیات گسسته[۲] و یکی از جالب توجه‌ترین آنها از لحاظ ریاضی است. در واقع، تقریباً تمامی ما گرافها را گاه‌گاه ملاحظه کرده و به‌کار برده‌ایم. به‌عنوان مثال، شکل ۱، نقشهٔ مسیر خطوط هوایی X، را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱.

طبیعی است که تعدادی سؤال درمورد نقشهٔ شکل ۱ مطرح شود.



شکل ۱. نقشهٔ خطوط هوایی

۱. آیا کسی می‌تواند از میامی به دالاس برود؟

۲. برای رفتن از بوستون به لوس‌آنجلس چند بار باید هواپیما عوض کنیم؟

۳. اگر کارمندان فرودگاه شیکاگو اعتصاب کنند و فرودگاه بسته شود باز هم رفتن از بوستون به لوس‌آنجلس امکان‌پذیر است؟

۴. اگر خطوط هوایی X تصمیم متوقف کردن تمام پروازهای از بوستون به نیویورک را بگیرد، باز هم می‌توان از ونکوور به فونیکس رفت؟

۵. آیا می‌توان جمیع مسیرهای خط هوایی X را بدون دوبار گذشتن از یک مسیر طی کرد؟

■

در مورد نقشهٔ فوق بی‌اغراق می‌توان دهها سؤال دیگر مطرح کرد، و چنین برمی‌آید که اغلب آنها مثالهایی از انواع سؤالهایی هستند که ریاضیات در مورد گرافها مطرح می‌کند. پاسخ سؤالهای مشابه سؤالهای فوق را غالباً می‌توان در نظریهٔ عمومی گرافها[۳] یافت.

مثال دیگری درنظر می‌گیریم.

مثال ۲.

در این‌حالت شکل ۲ شبکه‌ای کامپیوتری[۴] را نمایش می‌دهد که در آن دایره‌ها، میکروکامپیوترها[۵] را نمایش می‌دهند. مربعها، میکروکامپیوترهایی را نمایش می‌دهند که برای دادن علامت[۶] از یک مدار[۷] به مدار دیگر، نیز برای پردازش داده‌ها[۸] به‌کار می‌روند. لوزی، کامپیوترمرکزی[۹] را در قلب شبکه مشخص می‌کند، و خطوط، مدارهای واصل شبکه را نمایش می‌دهند.

شخصی که مایل به دسترسی داشتن به شبکه است یکی از مینی‌کامپیوترها را از میکروکامپیوترخود می‌گیرد و از طریق خطوط در دسترس برای ارتباط یافتن با کامپیوتر مطلوب تغییر مسیر می‌دهد.

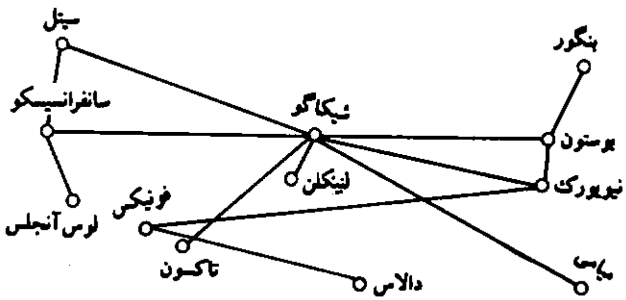
دستگاه می‌تواند برای فرستادن پیام بین میکروکامپیوترها به‌کار رود، یا استفاده کننده می‌تواند برای انجام پردازش اطلاعاتی[10] به یکی از کامپیوترهای بزرگتر رجوع کند. در این مورد نیز به‌طور طبیعی بعضی سؤالها مطرح می‌شوند:

۱. آیا میکروکامپیوتر واقع در سیتل می‌تواند پیامی به میکروکامپیوتر واقع در میامی بفرستد؟

۲. چند تغییر مسیر برای گرفتن پیام فرستاده شده از بوستون به لوس‌آنجلس لازم است؟

۳. اگر مینی‌کامپیوتر واقع در شیکاگو خاموش شود، می‌توان باز هم پیامی از بوستون به لوس‌آنجلس فرستاد؟

۴. اگر مدارهای بین بوستون و نیویورک از کار بیفتند، می‌توان باز هم پیامی از بنگور به فونیکس فرستاد؟



شکل ۲. شبکهٔ کامپیوتری

۵. آیا انتشار سلسله‌ای از علائم که به هر مدار واقع در شبکه دقیقاً یکبار برسد امکان‌پذیر است؟

■

واضح است که سؤالهای فوق تنها سؤالهایی که شخص می‌تواند در مورد تصاویر مذکور مطرح کند، یا شاید حتی مهمترینشان، نیست، اما آنها برد مفاهیم داخل در نظریهٔ گراف را مطرح می‌کنند. جالب است که توجه داشته باشیم که می‌توان از شیءِ ریاضی یکسانی در بررسی کاربردهایی در میادینی به همان اندازهٔ عدم ارتباط ظاهری حمل و نقل و ارتباطات استفاده کرد. این حقیقت که چنین کاربردهای متنوعی را می‌توان با استفاده از یک نظریه بررسی کرد جنبه‌های مفید تجرید ریاضی[11] را به شخص نشان می‌دهد.

کشف این مطلب که یک نظریهٔ واحد، اطلاعاتی در مورد کاربردهایی این‌همه متفاوت به‌دست می‌دهد هیجان‌آور است. کلید به کار انداختن طرح کلی مورد نظر، توصیف به‌قدر کفایت محتاطانهٔ دستگاه ریاضیمان به چنان طریقی است که آن را برحسب نظریهٔ قبلی قابل درک، و در عین حال در نواحی‌ای که مایل به استفاده از آن در آنها هستیم فایده‌مند کند. در مورد نظریهٔ گراف، اصطلاحات[12] و نمادهای[13] نظریهٔ مجموعه‌ها[14] به هدفمان کمک می‌کنند.

۲. مفاهیم اصلی و تعاریف

رأسها و یالها

مفهوم گراف مفهومی ساده است. در این مورد آنچه که نیاز به انجام دادن آن داریم تنظیم این مفهوم است که نقاطی[15] (موسوم به رؤوس[16]) داریم که به‌طور مستقیم توسط قطعه خطهایی[17] (موسوم به یالها[18]) به نقاط دیگر وصل شده‌اند. اغلب موضوعهای جالب توجه نظریهٔ گراف شامل جریان ردیابی دنباله‌های یالها (موسوم به مسیرها[19])ی یک گراف است. در این صورت اهمیّت دارد که در تعاریفمان چنان دقیق باشیم که ابهامی که بتواند در بحث مربوط به این موضوع رخ دهد موجود نباشد. تعریفمان از گراف از همه لحاظ جامع[20] نیست، زیرا به بعضی از وضعیات ممکن مهم (چون یالهای یک راهه[21]، طوقهٔ رأس[22]، یا بیش از یک واصل یک زوج رأس) نمی‌پردازد، اما شروع بررسی، مفاهیم اساسی گرافها را ممکن می‌سازد.

تعاریف

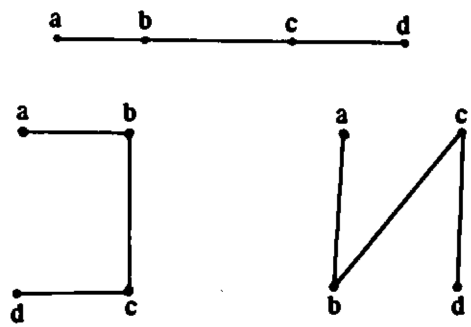
گراف زوج مرتب[23] (V , E) ای است که در آن V مجموعه‌ای موسوم به **مجموعهٔ رأسی**[24] و E مجموعه‌ای شامل زیر مجموعه‌های با دو عضو V است. مجموعهٔ E **مجموعهٔ یالی**[25] نام دارد، و چنین می‌گوییم که a و b توسط یک یال وصل شده‌اند اگر $\{a , b\}$ متعلق به E باشد.

گاهی به اعضای V، بخصوص در کاربردهایی از نظریهٔ گراف که رجوع به شبکه‌های ارتباطاتی[26] دارند، به‌عنوان گره‌ها[27] اشاره می‌کنیم.

در تصور گراف یا نمایش نموداری آن، مجموعهٔ V را شامل نقاط یا رؤوس (مانند شهرها یا کامپیوترهای مثالهامان در بخش ۱) درنظر می‌گیریم، و سپس کمانهایی بین رؤوسی که با یالی به هم وصل شده‌اند، رسم می‌کنیم.

مثال ۳.

نمودار $G = (V,E)$ را، که در آن $V = \{a,b,c,d\}$ و $E = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}\}$، درنظر می‌گیریم. این نمودار را می‌توان به هریک از سه طریق نشان داده شده در شکل ۳ نمایش داد.



شکل ۳.

باید توجه داشته باشیم که هرچند نمودارهای فوق متفاوت به‌نظر می‌رسند، تماماً دارای خواص یکسان‌اند؛ در واقع، اگر دو نمودار زیر را مستقیم کنیم، نتیجهٔ کار در هر حال نمودار واقع در بالا خواهد بود. در هر نمودار می‌توان توسط مسیری که از b به c می‌رود از a به d رفت؛ و اگر هر یک از قطعات موجود شکسته شود، دیگر رفتن از a به d ممکن نخواهد بود.

■

چنین می‌گوییم که هریک از نمودارهای واقع در شکل ۵.۳ نمایش تصویری[28] G است، زیرا هریک نمایش بصری[29] خواص ریاضی[30] در ارتباط با G را به‌دست می‌دهد. توجه داشته باشید که بازسازی توصیف قبلی یک گراف از نمایش تصویری آن آسان است. درنتیجه، معمولاً جز در مواردی که سروکار داشتن با جنبه‌های فنی یا نظری[31] نظریهٔ گراف مورد نیاز باشد، با نمایش تصویری گرافها کار می‌کنیم.

مسیرها

تعریف

مسیر دنباله‌ای از رؤوس یک گراف است که در آن هر زوج رأس متوالی[32] یالی از آن گراف باشد.

در گراف Gی مثال ۳، $abcd$ یک مسیر است، زیرا، $\{a,b\}$، $\{b,c\}$، و $\{c,d\}$ تماماً یالهای G اند. گفته می‌شود که یک مسیر مسیری از اوّلین رأس فهرست شده به آخرین رأس فهرست شده است. نیز ممکن است که مسیر را به‌عنوان دنباله‌ای از یالها که در آن هر زوج یال متوالی[33] رأسی مشترک[34] دارند، تعریف کنیم. این تعریف جدید نیز کاملاً مفید است، و ما غالباً، هرجاکه مناسب باشد، از یکی به دیگری می‌رویم. در این صورت مسیر $abcd$ی موصوف در فوق، با توجه به این نظرگاه، به مسیر $\{a,b\}\ \{b,c\}\ \{c,d\}$ تبدیل می‌شود. تعاریف زیر بعضی از اصطلاحهای مهم تکمیلی مربوط به مسیرهای ارتباط دهندهٔ رؤوس (یالها) را به‌دست می‌دهند.

تعاریف

مسیر ساده[35] مسیری است که درآن هیچ یالی تکرار نشده است.

مسیر مقدماتی[36] مسیری است که درآن هیچ رأسی تکرارنشده است.

مدار[37] مسیری است که از یک رأس آغاز و به همان رأس انجام می‌کند.

مدار ساده[38] مسیری ساده است که مدار است.

دور[39] مداری است که در آن رأس اوّلیه[40] دو بار رخ می‌دهد و هیچ رأس دیگری تکرار نمی‌شود.

در این مرحله لازم است که به اخطار زیر توجه داشته باشیم. اصطلاحها و نمادهای نظریهٔ گراف بسیار متنوع‌اند. عباراتی[41] که در این‌جا به کار برده‌ایم عباراتی هستند که در کتب دیگر ملاحظه‌شان کرده‌ایم، اما این عبارات به هیچ وجه استاندارد نیستند. زیرا به‌علت این که نظریهٔ گراف زمینهٔ ریاضی نسبتاً جدیدی است، اصطلاحهای آن، وقت کافی برای استاندارد شدن نداشته‌اند. عباراتی چون «ردپا[42]»، «خط سیر[43]»، «سفر[44]» و غیره غالباً در کتب نظریهٔ گراف و مقالات ریاضی[45] به‌چشم می‌خورند، معانی آنها می‌توانند منطبق بر معانی‌ای که برای عبارات دیگر داده‌ایم باشند (یا نباشند). به این ترتیب هنگام خواندن مطلبی در مورد نظریهٔ گراف، برای اطمینان یافتن از درک معنی مورد نظر نویسنده از یک عبارت، نیازمند دقت بسیاریم. اصطلاحهای زیر استانداردترند.

تعاریف

یک نمودار **مرتبط** یا همبند[46] است اگر با معلوم بودن هر دو رأس متمایزی مسیری از یکی به دیگری موجود باشد.

گرافی را که مرتبط نیست **نامرتبط** یا ناهمبند[47] می‌گویند.

در زبان روزمره گرافی را مرتبط می‌گوییم که به‌صورت یک قطعه «به هم وصل» باشد. درحالت مربوط به نقشهٔ خط سیر هوایی، کلمهٔ مرتبط به این معنی است که هر دو شهر واقع در سیستم مزبور می‌توانند توسط دنباله‌ای از پروازهای تنها در ارتباط با آن خط هوایی، به هم وصل شوند. و در حالت مربوط به شبکهٔ ارتباطاتی، کلمهٔ مزبور به این مفهوم است که هر دو گروهٔ واقع در سیستم می‌توانند با یکدیگر در ارتباط باشند. اگر گرافی نامرتبط باشد، در این‌صورت به «قطعاتی» تقسیم می‌شود که آنها را مؤلفه[48] می‌نامیم.

قضیهٔ ۱:

فرض می‌کنیم $G = (V,E)$ یک گراف باشد. نسبت R بر V را با xRy تعریف می‌کنیم اگر و تنها اگر $x = y$ یا مسیری از x به y موجود باشد. R نسبتی هم ارزی[49] است.

اثبات:

آن را به‌عنوان تمرین وامی‌گذاریم.

قضیهٔ ۲:

فرض می‌کنیم $G = (V,E)$ و R چون در قضیهٔ ۱ تعریف شده باشد. در این صورت G مرتبط است اگر و تنها اگر یک طبقهٔ هم‌ارزی[50] منفرد در مورد نسبت R موجود باشد.

اثبات:

در اثبات گزاره‌ای به‌صورت $p \leftrightarrow q$، باید هم $p \to q$ هم $q \to p$ را اثبات کنیم. کار را با این فرض که G مرتبط است آغاز می‌کنیم.

در مورد هر زوج رأس متمایز a و b مسیری از a به b موجود، و به این ترتیب aRb راست است. از آنجا که به ازای جمیع مقادیر a، aRa نیز صادق است، داریم: $\forall x \forall y\,(xRy)$، که به این معنی است که V تنها طبقهٔ هم ارزی R است.

اگر تنها یک طبقهٔ هم ارزی R موجود باشد و x و y رؤوسی متمایز باشند، نتیجه می‌شود که xRy، زیرا x و y در طبقهٔ هم ارزی یکسانی قراردارند. از آنجا که x و y مساوی نیستند، باید مسیری از x به y موجود باشد. از آنجا که x و y دلخواه بودند، مسیر واصل هر دو رأس متمایز از G ای وجود دارد، و بنابراین G مرتبط است.

زیرگرافها

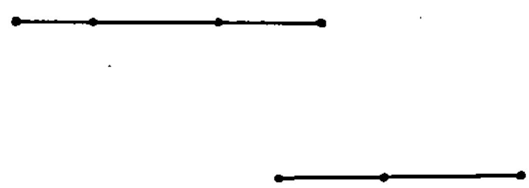
تعاریف

زیرگراف[51] گراف (V,E) گراف (V', E') ی است که در آن V' زیر مجموعه‌ای[52] از V و E' شامل یالهایی واقع در E است که تنها رؤوس V' را به هم وصل می‌کنند.

اگر S زیرمجموعه‌ای‌از V باشد، **زیرگراف حاصل‌از S**[53]، گرافی با مجموعهٔ رأسی S و مجموعهٔ یالی شامل جمیع یالهایی‌از G است که رؤوس S را به هم وصل می‌کنند.

اگر G گراف موصوف در مثال ۳ باشد. ($V = \{a,b,c,d\}$ و $E = \{\{a, b\} , \{b,c\} , \{c,d\}\}$)، گراف (V', E') که در آن $V' = \{a,b,c\}$ و $E' = \{\{a,b\} , \{b,c\}\}$ زیرگرافی از G (و در واقع، زیرگراف فراهم شده و توسط مجموعهٔ $\{a,b,c\}$) است.

به بیان ساده‌تر[۵۴]، زیرگراف، گرافی است که دارای بعضی از رؤوس گراف اصلی و بعضی از یالهای گراف اصلی است. در این‌جا G′ زیرگرافی از G است.



مؤلفه‌ها:

یکی از زمینه‌های جالب در بررسی یک گراف تعیین این مطلب، که چون آن گراف مرتبط نباشد چه اتفاقی رخ می‌دهد، است. مفهوم مؤلفه برای کمک به بحث در مورد این وضعیت مطرح شده و درک آن نسبتاً آسان است. مؤلفه به‌عنوان زیرگرافی از گراف اصلی، که مرتبط و تا حد امکان بزرگ باشد، درنظر گرفته می‌شود. در واقع، غالباً این تعریف به‌کار می‌رود که مؤلفهٔ یک گراف، زیرگرافی مرتبط و ماکسیمال[۵۵] است، و بسیار ممکن است که مایل باشیم مؤلفهٔ یک گراف را برحسب این عبارات درنظر بگیریم. گرافی که مرتبط نیست به تعدادی مؤلفه تقسیم می‌شود. بحث زیر تعریف دیگری از مؤلفه را به‌دست می‌دهد، و به این علت جالب توجه است که موجب می‌شود به مفاهیم طبقات هم ارزی یک نسبت هم ارزی برگردیم.

قضیهٔ ۳:

اگر C طبقهٔ هم ارزی نسبت R موصوف در قضیهٔ ۱ باشد، در این‌صورت زیرگراف حاصل از C، مرتبط است.

اثبات:

اثبات قضیهٔ ۳ بسیار شبیه اثبات نیمهٔ دوم قضیهٔ ۲ است. فرض می‌کنیم a و b رؤوس متمایزی در C باشند. در این‌صورت aRb، و بنابراین مسیر $ax_1 \quad x_2 , \dots , x_nb$ ای از a به b موجود است. در واقع، به‌ازای جمیع i ها، aRx_i (چرا؟)، بنابراین هر x_i نیز در C هست. به این ترتیب مسیر مزبور مسیری از a به b ی واقع در C است.

> **تعریف**
>
> مؤلفهٔ یک گراف زیرگرافی حاصل از طبقهٔ هم ارزی نسبت R موصوف در قضیهٔ ۱ است.

نتیجه:[۵۶]

یک گراف مرتبط است اگر و تنها اگر تنها یک مؤلفه داشته باشد.

اثبات:

به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

■

نتیجه:

مؤلفهٔ یک گراف زیرگرافی مرتبط است.

اثبات:

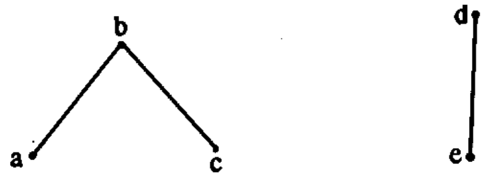
به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

■

قضیهٔ ۳ و دو نتیجه‌اش نشان می‌دهند که تعریف مؤلفه، چنان که در فوق مطرح شده، واقعاً زیرگراف مرتبط ماکسیمال را به‌دستمان می‌دهد. این زیرگراف مرتبط گراف اصلی است که به آن نمی‌توان چیز بیشتری از گراف اصلی بدون نامرتبط ساختن آن زیرگراف افزود.

مثال ۴:

گراف G رسم شده در زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:



زیرگراف حاصل از رؤوس a ، b ، c مؤلفه‌ای از G است. باید توجه داشته باشیم که این‌زیرگراف مرتبط است، اما جهد در افزودن چیز بیشتری از G به آن آن را نامرتبط می‌کند. زیرگراف با رؤوس b و e نیز مؤلفه‌ای از G است. مؤلفه‌های مزبور «بزرگترین» قطعات مرتبط گراف مورد بحث هستند.

■

درجات رؤوس

> **تعاریف**
>
> یک رأس بر یک **یال واقع**[۵۷] است اگر آن رأس عضوی از آن یال باشد. (از لحاظ تصویری، رأسی واقع بر یک یال است اگر یکی از دو سر آن یال باشد.)
>
> درجهٔ[۵۸] یک رأس تعداد یالهایی است که آن رأس بر آنها واقع است. (در بعضی حالات مناسب است که مجاز کنیم گرافها طوقه، یا یالهایی به‌صورت $\{a\} = \{a , a\}$ داشته باشند. طوقه به‌صورت دوبار واقع بودن یالی بر رأس منفردش درنظرگرفته می‌شود زیرا این رأس به‌صورت هر دو سر آن به کار می‌رود. گرافهای ما معمولاً بدون طوقه‌اند.)

قضیهٔ ۴:

در هر گراف، مجموع درجات رؤوس دو برابر تعداد یالهاست.

اثبات:

در این مورد تمام چیزی که باید به‌آن توجه کنیم این است که، هنگام محاسبهٔ مجموع درجات رؤوس، هر یال باید دوبار ـ به ازای هر سرش یکبار ـ به‌حساب آید. در واقع، آنچه هم‌اکنون مطرح کردیم احتمالاً کافی است، اما برای توضیح تکنیک اثباتی متعارف در نظریهٔ گراف، این اثبات را صوری[۵۹] تر می‌کنیم. برای انجام این کار با استفاده از استقرا عمل می‌کنیم. می‌انگاریم که $P(n)$ این‌گزاره که مجموع درجات رؤوس گرافی با n یال ۲n است، باشد.

مرحلهٔ مبنایی[۶۰]. اگر گرافی دارای یال نباشد، در این‌صورت درجهٔ هر رأس صفر است و مجموع مورد نظر نیز صفر است، که دقیقاً گزارهٔ $P(۰)$ می‌باشد.

مرحلهٔ استقرایی[۶۱]. فرض می‌کنیم $P(k)$ ، و نشان می‌دهیم که $P(k+۱)$ از آن نتیجه می‌شود. برای انجام این کار، گراف G با $k + ۱$ یال را درنظر می‌گیریم، در این‌صورت نیاز به نشان دادن این داریم که درجات رؤوس آن $۲k + ۲$ است. برای انجام این عمل، گراف G' ی را، که به استثنای این که یکی از یالهایی را که متعلق به G است ندارد، همان G است، درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که یال مفقوده[۶۲] $\{a,b\}$ باشد. مجموع درجات رؤوس G' ، بنا به این فرض که $P(k)$ صادق است (فرض استقرا[۶۳]) ، زیرا G' دارای k یال است، برابر ۲k می‌باشد. اما، برای ساختن G از G' ، تمام آنچه که لازم است برگرداندن یال $\{a,b\}$ به G' است. این کار درجهٔ رأس a را به اندازهٔ ۱ و درجهٔ b را به اندازهٔ ۱ واحد افزایش داده، به این ترتیب به مجموع درجات ۲ واحد اضافه کرده مجموع درجات جمیع رؤوس را به $۲k + ۲$ می‌رساند، و به این ترتیب مرحلهٔ استقرایی تکمیل می‌شود.

اثبات فوق گرچه طولانی است، اما تکنیک بسیار مفیدی را در مورد اثباتهای استقرایی[۶۴] واقع در نظریهٔ گراف، یعنی حذف چیزی برای برگشتن به فرض استقرا و بعد بازگرداندن آن برای به کار آمدن گزارهٔ مورد نظر در حالت بالاتر بعدی، به‌دست می‌دهد. از آن‌جا که متغیر[۶۵] n واقع در گزارهٔ $P(n)$ تعداد یالهاست، اثباتی چون اثبات

فوق را گاهی استقرا بر تعداد یالها می‌نامند. تکنیکهای مشابهی در مورد استقرا بر تعداد رأسها به‌کار می‌روند. تعداد معتنابهی از قضایای مربوط به نظریهٔ گراف به این شیوه[66] اثبات می‌شوند.

اکنون به بیان نتیجه‌ای از این قضیّه که بعداً به‌کار می‌آید می‌پردازیم.

■

نتیجه:

در هر گراف، تعداد رؤوسی که درجهٔ فرد[67] دارند عددی زوج[68] است.

اثبات:

مجموع درجات رؤوس عددی زوج است، و برای این‌که چنین شود، تعداد جمله‌های فرد واقع در این مجموع نمی‌تواند عددی فرد باشد.

■

مجموعهٔ مسأله‌ای ۲:

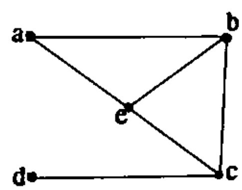
کارهای زیر را در مورد گرافهای ارائه شده در مسائل ۱ تا ۴، انجام دهید:

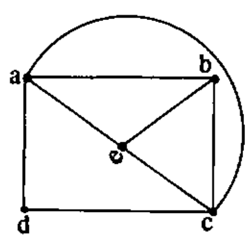
(الف) توصیفی صوری از گراف مربوطه (به‌صورت زوج مرتبی از مجموعه‌ها) بنویسید.

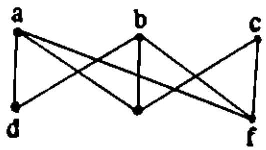
(ب) درجهٔ هر رأس را بیابید.

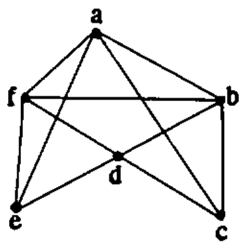
(ج) تعداد یالها را محاسبه کنید.

(د) قضیّهٔ ۱ را تحقیق کنید.







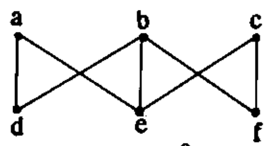


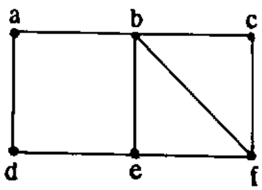
کارهای زیر را در مورد هرگراف واقع در مسائل ۵ تا ۸ انجام دهید (البته اگر ممکن باشد و اگر ممکن نباشد، بگویید که نیست):

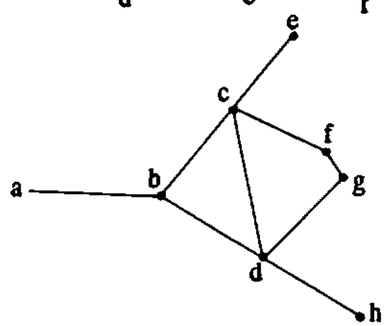
(الف) مسیری مقدماتی از a به f بیابید.

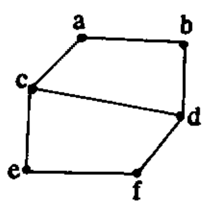
(ب) مسیری ساده از a تا f بیابید که مقدماتی نباشد.

(ج) مسیری از a به f بیابید که ساده نباشد.







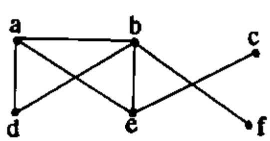


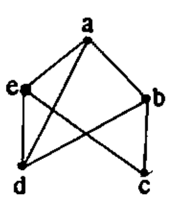
کارهای زیر را درمورد هر گراف واقع در مسائل ۹ تا ۱۲ بیابید:

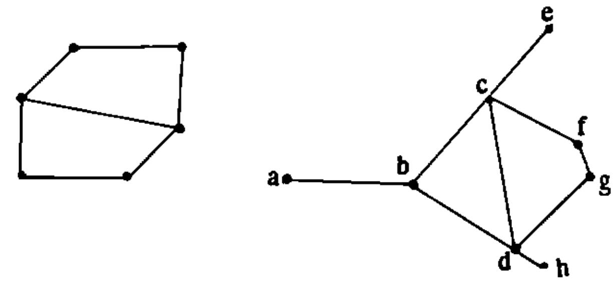
(الف) مداری را بیابید که دور نباشد.

(ب) مداری را بیابید که ساده نباشد.

(ج) مداری ساده بیابید.







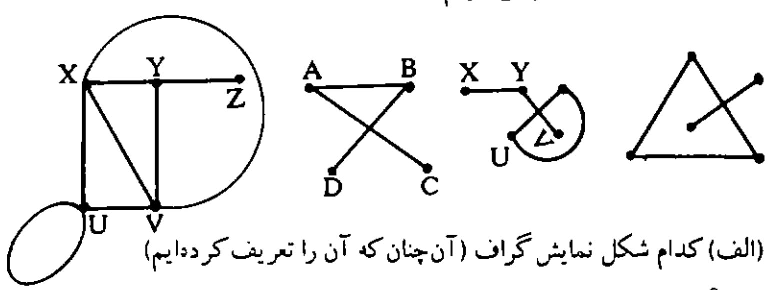
۱۳. با استفاده از گراف مسألهٔ ۵، زیرگراف حاصل از مجموعهٔ رأسی {a,b,c,f} را بیابید.

۱۴. با استفاده از گراف مسألهٔ ۸، زیرگراف حاصل از مجموعهٔ رأسی {a,c,d,f} را بیابید.

۱۵. با استفاده از گراف مسألهٔ ۷، هر یک از زیرگرافهای حاصل از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ رأسی حاصل از حذف رأسی منفرد از مجموعهٔ رأسی مزبور را بیابید.

۱۶. با استفاده از گراف مسألهٔ ۶، دستورهای مسألهٔ ۱۵ را تکرار کنید.

۱۷. اشکال زیر را درنظر می‌گیریم.



(الف) کدام شکل نمایش گراف (آن‌چنان که آن را تعریف کرده‌ایم) است؟

(ب) کدام یک نمایش گراف مرتبط است؟

(ج) در مورد گرافهایی که مرتبط نیستند، مؤلفه‌های آنها را مشخص کنید.

۱۸. ثابت کنیداگر مسیری از a تا b در گرافی موجود باشد، آنگاه مسیری مقدماتی از a تا b وجود دارد.

۱۹. قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۲۰. گزارهٔ واقع در اثبات قضیهٔ ۳ را که بر این است که هر x_i ای مشمول در C می‌باشد، توجیه کنید.

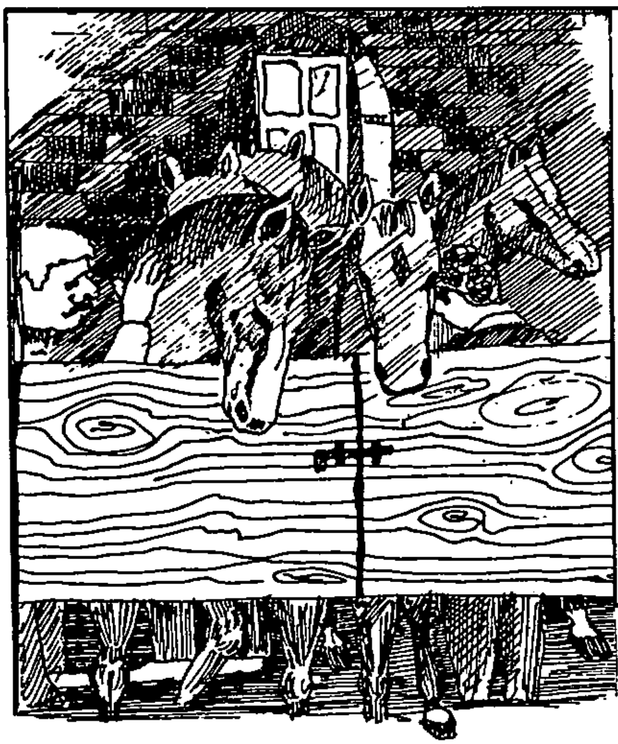
۲۱. نتیجهٔ اول قضیهٔ ۳ را اثبات کنید (یک گراف مرتبط است اگر و تنها اگر یک مؤلفه داشته باشد.)

۲۲. نتیجهٔ دوم قضیهٔ ۳ را اثبات کنید (مؤلفهٔ یک گراف زیرگرافی مرتبط است.)

یادداشتها

1. Graph
2. Discrete Mathematics
3. General Theory of Graphs
4. Computer Network
5. Microcomputers
6. Signal
7. Circuit
8. Data
9. Mainframe Computer
10. Information Processing
11. Mathematical Abstraction
12. Terminology
13. Notation
14. Set Theory
15. Points
16. Vertices
17. Line Segments
18. Edges
19. Paths
20. Inclusive
21. One - Way Edges
22. Loop on a Vertex
23. Ordered Pair
24. Vertex Set
25. Edge Set
26. Communications Networks
27. Nodes
28. Pictorial Representation
29. Visual Representation

30. Mathematical Properties
31. Technical or Theoretical Aspects
32. Successive Pair of Vertices
33. Successive Pair of Edges
34. Vertex in Common
35. Simple Path
36. Elementary Path
37. Circuit
38. Simple Circuit
39. Cycle
40. Initial Vertex
41. Terms
42. Trail
43. Route
44. Journey
45. Mathematical Papers
46. Connected
47. Disconnected
48. Components
49. Equivalence Relation
50. Equivalence Class
51. Subgraph
52. Subset
53. Induced by
54. Informally
55. Maximal Connected Subgraph
56. Corollary
57. Incident
58. Degree
59. Formal
60. Basic Step
61. Induction Step
62. Missing Edge
63. Induction Hypothesis
64. Induction Proofs
65. Variable
66. Manner
67. Odd
68. Even Number



تفریح اندیشه ۴

در طویله‌ای چند نفر آدم با چند رأس اسب وجود دارند. آنها مجموعاً ۲۲ سر و ۷۲ پا دارند. چند نفر آدم و چند نفر اسب در آن‌جا هستند؟

ترجمهٔ سیمین دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحهٔ ۹۶

اصل حُجره‌ها

● مهدی نساجی، سال سوّم دبیرستان

در ریاضیات، اصولی وجود دارند که گرچه به‌نظر بسیار ساده و بدیهی می‌آیند، امّا درمواقع حسّاس به کمک ریاضی‌دان آمده، بعضاً باعث حلّ مسائل مشکلی می‌شوند. به‌عنوان مثال می‌توانیم به اصول ضرب و ردّ و شمول اشاره کنیم. ذیلاً به یکی از این اصول بدیهی که در حلّ مسائل ما را یاری می‌کند، توجّه می‌کنیم.

اصل لانه کبوتری (لانه زنبوری)

دکتر علی‌رضا جمالی در مجلّهٔ رشد ریاضی شمارهٔ ۱۷ تعریف آن را چنین آورده است: «فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند و (m<n) در این صورت اگر n شیئی را در m حجره قرار دهیم به هر صورت اعمّ از این‌که حجره‌ها خالی بماند یا نه، حدّاقل یکی از این حجره‌ها حاوی دو شیء یا بیشتر از این اشیا خواهد بود».

چون این تعبیر را می‌توان برای کبوترها یا زنبورها و لانه‌هایشان هم داشت لذا به آن اصل لانه کبوتری و یا لانه زنبوری هم می‌گویند.

حال می‌خواهیم چند مسأله را با توجّه به این اصل حلّ کنیم:

مسألهٔ اوّل : اگر در یک میهمانی ۴۰۰ نفر وجود داشته باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت که حدّاقل ۲ نفر از آنها دریک روز به‌دنیا آمده‌اند؟

حل : بلی، زیرا اگر n را تعداد افراد و m را تعداد روزهای سال بگیریم چون $m = ۳۶۵ < ۴۰۰ = n$ پس طبق اصل حجره‌ها حدّاقل دو نفر وجود دارند که دریک روز به‌دنیا آمده‌باشند مثلاً در روز سوم دی ماه.

به مسألهٔ بعد که شبیه همین مسأله است توجّه کنید:

مسألهٔ دوّم : در مجموعه‌ای متشکل از ۸ نفر، حداقل دو نفر موجودند که روز تولد آنها دریکی از روزهای هفته مثلاً شنبه است. (حل برعهدهٔ خواننده می‌باشد.)

مسألهٔ سوّم : اثبات کنید حداقل دو درخت در دنیا وجود دارند که تعداد برگهایشان مساوی است (باید توجه داشت که تعداد برگهای پربرگترین درخت جهان از تعداد کلّ درختان جهان کمتر است که واقعاً هم چنین است).

حل: m عبارت است از عدهٔ برگهای درختی که بیشترین تعداد برگها را درمیان مجموعهٔ همهٔ درختان‌داراست. ضمناً عدّهٔ همهٔ درختان روی زمین را n درنظر بگیریم. باتوجه به فرض m<n، پس بنابر اصل حجره‌ها حداقل دو درخت وجود دارند که تعداد برگهایشان یکی است.

مسألهٔ چهارم : اثبات کنید برروی زمین حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد موهای سرشان یکی می‌باشد.

(می‌دانیم که تعداد موهای پرموترین انسان (حدود ۳۰۰،۰۰۰ تار مو) از تعداد کل انسانها (حدود ۵،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰ نفر) کمتر می‌باشد.)

حل : این مسألهٔ همان مسألهٔ قبل است که فقط نوع طرح آن تغییر کرده است.

مسألهٔ پنجم : یک گلّه گاو شامل ۷ رأس گاو، به رنگهای قهوه‌ای، سیاه، و سفید می‌باشد. اگر گاوها متعلق به دو نفر باشند ثابت کنید یکی از این دو نفر حداقل دارای دو گاو هم رنگ می‌باشد.

حل : این گاوها را به هرطریق که بین این دو نفر تقسیم کنیم، همواره یک نفر وجود خواهدداشت که حداقل چهار گاو متعلق به اوست. (به تقسیم‌بندی زیر توّجه کنید.)

شخص B	شخص A
۶	۱
۵	۲
۴	۳
۳	۴
۲	۵
۱	۶

می‌بینیم که درهرحالت همواره یک‌نفرحداقل‌دارای ۴ رأس‌گاو است.

پس چون یک نفر درهرحالت حداقل دارای چهار گاو است و سه نوع رنگ موجود است، پس بنابراصل حجره‌ها حداقل دو گاو همرنگ متعلق به یکی از آنها می‌باشد.

مسألهٔ ششم : فرض کنیم که $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ مجموعه‌ای متشکل از $n + 1$ عدد طبیعی باشد، ثابت کنید در این مجموعه حداقل دو عدد مانند a_i و a_j $(i \neq j)$ وجود دارد که:

$$a_i - a_j = k \, . \, n \quad (k \in z)$$

حل : باتوجه به‌قاعده تقسیم داریم:

$$a_i = k' \, . \, n + r'$$

$$a_j = k'' \, . \, n + r'' \quad (k' \, , \, k'' \in z \, , \, 0 \leq r' \, , \, r'' < n)$$

می‌دانیم که r' و r'' به‌ترتیب باقیمانده‌های تقسیم دو عدد a_i و a_j بر n می‌باشند، حال اگر ما بتوانیم اثبات کنیم که در این مجموعه حداقل دو عدد مثل a_i و a_j وجود دارند که دارای باقیمانده‌های یکسان می‌باشند مسأله حل می‌شود.

می‌گوییم ما $n + 1$ عدد طبیعی داریم که اگر تمامی عددهای این مجموعه را بر n تقسیم کنیم بزرگترین باقیمانده، $n - 1$ و کوچکترین باقیمانده، صفر خواهدبود.

رشتهٔ باقیمانده‌ها $\quad 0 \, , \, 1 \, , \, 2 \, , \dots , \, n - 1$

تعداد باقیمانده‌ها nتا است لذا تعداد عددهای مجموعه‌از تعداد باقیمانده بیشتر است؛ به عبارت دیگر $n < n + 1$، پس مطابق اصل لانه کبوتری حدّاقل دو عدد وجود دارند مانند a_i و a_j که باقیمانده‌هایشان با هم برابر است پس $r' = r''$:

$$a_i = k' \, . \, n + r'$$

$$a_j = k'' \, . \, n + r'' \;\Rightarrow a_i - a_j = (k' - k'').n$$

$$r' = r'' \qquad k' - k'' = k \in z \;\Rightarrow a_i - a_j = k.n$$

مسألهٔ هفتم : عدد طبیعی n مفروض است ثابت کنید یک عدد طبیعی با ارقام صفر و یک موجود است (در مبنای ده) که بر n قابل قسمت می‌باشد.

حل : $n + 1$ عدد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$0, 1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots1}_{n \text{ تا}}$$

بر طبق مسألهٔ قبل حداقل ۲ عدد از بین این عددها مانند a و b $(a>b)$ موجودند که تفاضلشان بر n بخش‌پذیراست. واضح است که $a - b$ واجد خاصیت حکم مسأله است، یعنی فقط از ارقام صفر و یک تشکیل شده‌است، پس یک عدد طبیعی با ارقام صفر و یک موجود است که بر n قابل قسمت می‌باشد.

مسألهٔ هشتم : ثابت کنید دریک میهمانی اگر n نفر حضور داشته باشند حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد دوستانشان با هم برابر است. (اگر A با B دوست باشد B هم با A دوست است.)

حل : کسی‌که کمترین دوست را دارد تعداد دوستانش صفر است و کسی که بیشترین دوست را دارد تعداد دوستانش $n - 2$ می‌باشد چون او به‌غیر از خودش و کسی‌که هیچ دوست ندارد با بقیه دوست است.

$$0, 1, 2, \dots, n - 2$$

باتوجه به رشتهٔ فوق افراد این میهمانی $n - 1$ نوع دوست می‌توانند داشته باشند در صورتی‌که n نفرند پس طبق اصل حجره‌ها دو نفر وجود دارند که تعداد دوستانش برابر است.

مسألهٔ نهم : (المپیاد جهانی سال ۱۹۷۲) مجموعه‌ای از عددهای دو رقمی با ده عضومتمایز در دستگاه عددنویسی دهدهی مفروض است. ثابت کنید که همیشه می‌توان دو زیر مجموعهٔ جدا از هم از این مجموعه انتخاب کرد که مجموع عضوهای آنها با هم برابر باشند.

حل: می‌دانیم مجموعهٔ n عضوی $S = \{a_1 , a_2 , ... , a_n\}$ دارای 2^n زیر مجموعه است بنابراین مجموعهٔ مفروض دارای $1024 = 2^{10}$ زیر مجموعه خواهد بود. عددهای مجموعهٔ S' $(S' \subset S)$ همگی دو رقمی‌اند بنابراین از ۹۹ بزرگتر نیستند. به این ترتیب مجموع عضوهای هر زیر مجموعه نمی‌تواند از 99×10 یعنی ۹۹۰ بیشتر باشد. (در واقع مجموع عددهای مجموعهٔ S' از این عدد هم کمتر است، بیشترین مجموع وقتی به‌دست می‌آید که ده عدد عضو مجموعهٔ S' عددهای پشت سرهم از ۹۰ تا ۹۹ باشند که در این صورت مجموع آنها ۹۴۵ خواهدبود.) چون هر یک از ۹۹۰ یا بهتر بگوییم ۹۴۵ مجموع ممکن است به یکی از ۱۰۲۴ زیر مجموعه متعلق باشند، بنابر اصل حجره‌ها دست کم دو زیر مجموعهٔ S'_i و S'_j وجود دارند که مجموع عضوهای آن برابرند و این حکم مسأله را اثبات می‌کند.

مسألهٔ دهم: (المپیاد کشور انگلیس سال ۱۹۷۰) ثابت کنید از هر مجموعه‌ای که شامل n عدد طبیعی باشد، می‌توان زیر مجموعه‌ای غیرتهی چنان انتخاب کرد که مجموع عضوهای آن بر n بخش‌پذیر باشد.

حل: فرض کنید برای مجموعه‌ای که شامل n عدد طبیعی $a_1 ، a_2 ، ... ، a_n$ است حکم مسأله درست نباشد در این‌صورت هیچ‌کدام از عددهای زیر:

$$S_1 = a_1 , S_2 = a_1 + a_2 , ... , S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

بر n بخش‌پذیر نیستند از آن جا که عددهای فوق در تقسیم بر n، به تعداد $n - 1$ (بجز صفر) باقیماندهٔ ممکن خواهند داشت، بنابر اصل حجره‌ها دو عدد S_i و S_j $(j>i)$ پیدا می‌شود که در تقسیم بر n باقیمانده‌های برابر داشته باشند. بنابراین تفاضل آنها:

$$S_j - S_i = a_{i+1} + ... + a_j = k . n \qquad k \in z$$

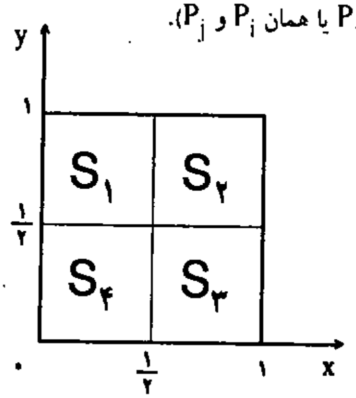
بر n بخش‌پذیر است. حال اگر به عددهای $a_{i+1} ، ... ، a_j$ بنگریم خود اعضای یک زیر مجموعه از مجموعهٔ اصلی ما می‌باشند که مجموع آنها بر n بخش‌پذیر است، این همان چیزی است که فرض ما را نقض می‌کند و درستی حکم اثبات می‌گردد.

مسألهٔ یازدهم: مجموعه‌ای شامل ۱۳۶۹ عدد طبیعی است، ثابت کنید می‌توان زیرمجموعه‌ای غیرتهی از این مجموعه جدا کرد که مجموع عضوهای آن بر ۱۳۶۹ بخش‌پذیر باشد.

حل: این مسأله از مسائل المپیاد آزمایشی ریاضی دبیرستان امام صادق علیه‌السّلام در سال ۱۳۶۹ انتخاب شده است که حالتی خاص از مسأله قبل می‌باشد و حلّ آن در حالت کلی n بررسی شده‌است.

مسألهٔ دوازدهم: مربع S به‌طول واحد مفروض است، در داخل این مربع پنج نقطهٔ $P_1 ، P_2 ، ...$ و P_5 را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که d_{ij} فاصلهٔ P_i و P_j باشد. ثابت کنید حداقل زوجی از این نقاط مانند: P_i و P_j موجودند $(i \neq j)$ به‌طوری که $d_{ij} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

حل: مجموعهٔ نقاط داخل ناحیهٔ S را به چهار مجموعهٔ جدا از هم‌مانند شکل افراز می‌کنیم. چون ما مربع را به چهار مربع متمایز از هم تقسیم کرده‌ایم، پس بنابراصل حجره‌ها دو نقطه از پنج نقطهٔ $P_1 ، P_2 ، ... ، P_5$ بایددریکی‌از زیرمجموعه‌های $S_1 ، S_2 ، S_3$ و S_4 باشند (مثلاً P_1 و P_2 یا همان P_i و P_j).



می‌دانیم d_{ij} بیشترین مقداری که می‌تواند پیدا کند کمتر از قطر است پس باتوجه به رابطهٔ فیثاغورس، $d_{ij} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

حال آیا حکم فوق با تبدیل $\frac{1}{\sqrt{2}}$ به عدد کوچکتر باقی می‌ماند؟ (اثبات بر عهدهٔ خواننده می‌باشد.)

مسألهٔ چهاردهم : (المپیاد کشور انگلیس سال ۱۸۶۶) ثابت کنید از بین ۵۲ عدد درست دلخواه همیشه می‌توان دو عدد طوری انتخاب کرد که مجموع یا تفاضل آنها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

حل : همهٔ باقیمانده‌های ممکن تقسیم بر ۱۰۰ را به‌ترتیب زیر گروه‌بندی می‌کنیم:

(۰ , ۱۰۰) ، (۱ , ۹۹) ، (۲ , ۹۸) ، ... ، (۵۰ , ۵۰)

(البتّه لازم به تذکر است که ۱۰۰ باقیمانده نیست و همچنین دوبار از عدد ۵۰ استفاده کرده‌ایم که این اشکالی به حل وارد نمی‌کند.)

از آن‌جا که تعداد گروه‌ها برابر ۵۱ و تعداد عددهای مفروض برابر ۵۲ است، اگر باقیمانده‌های مساوی نداشته‌باشیم بنابر اصل حجره‌ها دو عدد پیدا می‌شود که باقیماندهٔ آنها بر ۱۰۰ ، با یکی از این گروهها تطبیق می‌کند. در این صورت مجموع این دو عدد بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است، اگر باقیمانده‌های مساوی داشته‌باشیم در این صورت تفاضل آنها بر ۱۰۰ بخش‌پذیر خواهدبود.

مسألهٔ پانزدهم : (المپیاد کشور یوگسلاوی سال ۱۹۷۷) ۲۰ عدد طبیعی $a_1 < a_2 < \dots < a_{20}$ که از ۷۰ تجاوز نمی‌کنند داده شده است. ثابت کنید در بین تفاضلهای $a_j - a_i$ $(j>i)$ دست کم چهار عدد برابر پیدا می‌شود.

حل : از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که حکم مسأله نادرست باشد، در این‌صورت بین ۱۹ عدد:

$$a_{20} - a_{19} ، a_{19} - a_{18} ، \dots ، a_2 - a_1$$

چهار عدد برابر پیدا نمی‌شود. بنابراین در بین آنها از عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ و ۶ نمی‌توان بیش‌از سه بار پیدا کرد، دست کم یکی از این عددها از ۶ بزرگتر است پس:

$$a_{20} - a_1 = (a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+\dots+(a_2-a_1) \geq 7+(6+6+6)+(5+5+5)+\dots+(1+1+1)=70$$

درصورتی‌که ما می‌دانیم: $a_{20} - a_1 < 70 - 1 = 69$

زیرا هیچ‌کدام از عددهای طبیعی فوق از ۷۰ بزرگتر نیستند. پس فرض ما غلط است در نتیجه حکم ثابت است.

تمرینها

۱ـ اطلاعاتی در دست است که هیچ شخصی در سرش بیش از ۳۰۰,۰۰۰ تار مو ندارد و طبق یک سرشماری جدید جمعیت شهر نیویورک ۷,۷۸۱,۹۸۴ نفر است. ملاحظه می‌شود که در شهر نیویورک حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد موهای سرشان برابر است. بزرگترین عدد صحیحی که می‌توان در ادعای زیر به‌جای n قرار داد چه‌قدر است؟

«درشهر نیویورک n شخص وجود دارند که تعداد موهای سرشان برابر است.»

۲ـ در یک گلّه گاوهای دو دهکده چهار رنگ گاو وجود دارد: قرمز، سفید، سیاه، و خالدار. تعداد گاوها روی هم ۶۵ رأس است. ما می‌دانیم که در میان هر پنج گاو همرنگ حداقل دو گاو همسن وجود دارد. نشان دهید که سه گاو از یک دهکده وجود دارند که همرنگ و همسن می‌باشند.

۳ـ فرض کنیم اطلاع داریم که حداقل یکی از a_1 و b_1 دارای ویژگی P و حداقل یکی از a_2 و b_2 دارای ویژگی P و حداقل یکی از a_3 و b_3 دارای ویژگی P هستند. ثابت کنید حداقل دو تا از a_1 و a_2 و a_3 و یا حداقل دوتا از b_1 و b_2 و b_3 دارای ویژگی P هستند.

۴ـ شطرنج بازی ۱۱ هفته فرصت دارد خود را برای شرکت در سابقه‌ای آماده سازد. برای این منظور تصمیم می‌گیرد هر روز حداقل یک دست بازی کند ولی برای این که خسته نشود در هیچ هفته بیش از ۱۲ دست بازی ننماید و برطبق تصمیم عمل می‌کند. ثابت کنید که چند روز متوالی هست که در طی آنها جمعاً ۲۰ دست‌بازی کرده است.

۵ـ فرض کنیم A مجموعهٔ متشکل از ۷ عدد متمایز طبیعی باشد که هیچ یک از ۲۴ تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید که عددهای حاصل از حاصل جمع اعضای هریک از زیر مجموعه‌های تهی A نمی‌توانند دو به دو متمایز باشند، یعنی حداقل دو زیر مجموعه وجود دارد که حاصل جمع اعضای آن مساوی است.

۶- (المپیاد کشور یوگسلاوی سال ۱۹۸۱) مجموعهٔ عددهای ۱ و ۲ و ... و ۱۰۰ را به ۷ زیر مجموعه افراز کرده‌ایم. ثابت کنید در یکی از این زیر مجموعه‌ها یا چهار عدد a و b و c و d وجود دارد که:

$$a + b = c + d$$

و یا سه عدد e و f و g وجود دارد به نحوی که

$$e + f = 2g$$

۷- مسائل المپیاد جهانی سالهای ۱۹۷۸ و ۱۹۸۵ را ملاحظه کنید.

فهرست منابع

۱- مقالهٔ اصل حجره‌ها و استعمال آن ترجمهٔ دکتر علیرضا جمالی مجلّهٔ رشد ریاضی شمارهٔ ۱۷.

۲- ویژه‌نامهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزی کشور، مجلّهٔ ریاضی‌دان جوان شماره‌های ۱ و ۲.

۳- ایوان نیون، ترجمهٔ علی عبیدی، بتول جذبی، ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم، از سری کتب ریاضیات پیش دانشگاهی - شمارهٔ ۱۵، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۴- ترجمه و تألیف پرویز شهریاری - ابراهیم عادل، مسأله‌های المپیادهای ریاضی، انتشارات فاطمی.

۵- جمعی از مؤلفان شوروی، ترجمه پرویز شهریاری، مسأله‌های المپیاد ریاضی در کشورهای مختلف، انتشارات فردوس

۶- واسیلیف، ترجمه پرویز شهریاری، آمادگی برای المپیاد ریاضی، انتشارات فاطمی.

۷- مسائل المپیاد آزمایشی ریاضی، دبیرستان نمونه امام صادق علیه‌السّلام (واقع در سه راه آذری).

ادب و ریاضی

مَثَل غولان

در جزیره‌ای گروهی از غولهای محیل و وحشی زندگی می‌کردند که چون وحشی بودند هر خارجی وارد در ساحل را می‌کشتند وچون محیل بودند، کاری می‌کردند که آن خارجی خود محکومیت خود را اعلام کند. بدین ترتیب که سؤالی از او می‌کردند، اگر جواب صحیح می‌داد، او را در پیشگاه الههٔ راستی و اگر جواب غلط می‌داد، در پیشگاه الههٔ دروغ قربانی می‌کردند. روزی در برابر یک خارجی زیرکتر از خود این سؤال دور از احتیاط را مطرح کردند. سرنوشت تو چه خواهد بود؟

وخارجی پاسخ داد: «شما مرا قربانی الههٔ دروغ خواهید کرد»

جواب مزبور، این بحث را برای غولان پیش آورد: آیا این شخص راست گفته است؟ نه، زیرا در این صورت باید او را قربانی الههٔ راستی کرد. پس آیا خلاف حقیقت را بیان داشته است؟ بازهم نه، زیرا لازم بود که او را در پیشگاه الههٔ دروغ قربانی کرد ودر این صورت او راست گفته بود ... مثل مورد بحث، این را دیگر بیان نمی‌کند که خارجی مزبور در جزیره سر سلسلهٔ پادشاهان شد.

مثل فوق نشان می‌دهد که هیچ مطلبی ذاتاً صحیح یا غلط نیست و می‌تواند حالت سومی هم داشته باشد، حتی می‌تواند بر حسب ماهیت، از این نظر که آن را با چه چیزی مقایسه می‌کنند، کیفیتهای مختلفی داشته باشد.

سرگذشت آنالیز ریاضی

آندره دولاشه،پرویز شهریاری

جواب نامه‌ها

آقای فرزاد هوانورد، دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

از نامهٔ شما متشکریم. مجلهٔ برهان، از مسائل و مقالات ارسالی خوانندگان خود همیشه استقبال می‌کند. منتهی از بین ارسال شده‌ها، آن مقاله‌هایی را برمی‌گزینند که حاوی مطالبِ برجستهٔ درسی باشد ودر ضمن سعی ما بر این است، مجله را به تاریخ ریاضی و زندگینامه‌های برخی از دانشمندان نامی مزیّن کنیم.

خانم ارکیده صرّاف دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

با تشکر از ارسال حلّ چند تست، به عرض می‌رسانیم که سعی کنید روی مسائل مسابقه‌ای کار کنید و تنها حل این گونه مسائل را ارسال کنید که در صورت صحیح بودن آن، از طرف مجله جایزه‌ای به رسم یاد بود به شما تعلق خواهد گرفت.

آقای محمّد نوری، دبیر دبیرستانهای تهران

با تشکر از مقالهٔ ارسالی شما در رابطه با حکم بزرگ فرما (با عنوان «معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای هر $n > ۲$ در مجموعهٔ اعداد صحیح غیر صفر ممتنع است»)، به عرض حضرت عالی می‌رسانیم که طبق آخرین خبر رسیده شده؛ این حکم به وسیلهٔ یکی از اساتید دانشگاه پرینستون به نام «اندریو وایلز» (A.Wills) حل شد که اثبات وی هنوز تحت بررسی است.

خانم مژگان اسماعیل نیا، دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (مشهد)

با تشکر از ارسال دو مسألهٔ حل شده، به عرض شما می‌رسانیم که در گوشه وکنار این کشور، دبیران پرکار و زحمت‌کشی گمنام وجود دارند که می‌توانند نمونه و الگویی برای دیگر دبیران باشند. در همین جا از تمامی آنها از جمله دبیر مورد نظر کلاس شما، سپاسگزاری می‌کنیم.

آقای روح‌ا... خدیر، دانش‌آموز سال دوّم (تهران)

سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری همراه با حلِّ آن، برای مجله بفرستید تا در آینده به نام خودتان به چاپ برسد.

آقای حسین سبزرو، دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

با تشکر از ارسال نامه، امیدواریم بتوانیم در جای مناسب مطالب شما را چاپ کنیم.

آقای احسان مهتدی، دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

با تشکر از نامهٔ شما باید به عرض برسانیم که پاسخگویی به مسائل شخصی جزو هدفهای مجله نیست ولی چون مسأله مورد نظر شما مشکلی عمومی بوده است مسأله و حل آن را در این‌جا می‌آوریم.

مسأله: معادلهٔ

$$\left(\sqrt{۳+\sqrt{۳}}\right)^x + \left(\sqrt{۳+\sqrt{۳}}\right)^x = ۶$$

را حل کنید.

حل: معادله را به شکل ساده شدهٔ زیر می‌نویسیم:

$$۲\left(\sqrt{۳+\sqrt{۳}}\right)^x = ۶ \Rightarrow \left(\sqrt{۳+\sqrt{۳}}\right)^x = ۳$$

$$\Rightarrow\ x = \log^{۳}_{\sqrt{۳+\sqrt{۳}}}$$

آقای رشید مقدسی، دانش‌آموز رشته ریاضی (شیروان)

با تشکر از مقالهٔ شما به عرض می‌رسانیم که امیدواریم امکان درج آن در شماره‌های بعدی مجله به‌وجود آید.

آقای فرید آزادگان (اهواز)

از شما راه حلّی که برای تست مندرج در شمارهٔ (۵) ارائه داده‌اید تشکر می‌کنیم. البته در شمارهٔ تست اشتباهی رخ داده است؛ در اصل گزینهٔ شمارهٔ (۳) تست صحیح است. یادآور می‌شویم که $\cos x = 1$ و $\cos x = \frac{-3}{5}$ برای معادلهٔ $\sin x = 2\cos x + 2$ قابل قبول می‌باشند. ولی برای معادلهٔ اوّلیّه تست فقط جواب $\frac{-3}{5}$ قابل قبول می‌باشد. در ضمن در همین جا راه حلِّ شما را همراه با صورت آن می‌آوریم:

از تساوی زیر مقدار $\cos x$ را به دست آورید:

$$\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^{2n-1}+3\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)^{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$$

حل: می‌دانیم:

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}=\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$$

زیرا:

$$\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$$

پس داریم:

$$4\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right)^{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\Rightarrow\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right)^{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$$

از طرفی داریم:

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

پس داریم:

$$\cos x=\frac{1-2^2}{1+2^2}=\frac{-3}{5}$$

آقای سید رضا موسوی، دانش آموز رشته ریاضی (تبریز)

با تشکر، درصورت تکراری نبودن مسائل ارسالی شما از آن استفاده خواهد شد.

خانم نسترن مؤذن (فیروزآباد فارس)

با تشکر امیدواریم بتوانیم مطلب شما را در شماره‌های بعدی مجله به چاپ برسانیم.

آقای مهدی شاهوردی (تفرش)

از ارسال دو مسألهٔ حل شده شما متشکریم. به اطلاع می‌رسانیم که درصورت لزوم از آنها استفاده خواهد شد.

آقای محسن نجفی؛ دانش آموز رشته ریاضی (گناباد)

با تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که مجلهٔ ریاضی برهان یک مجلهٔ تعلیمی و در عین‌حال متنوع است که هدف بیشتر ارتقای سطح ریاضی دانش‌آموزان عزیز این مرزوبوم است. بدیهی است در چنین مجله‌ای مطالب طنز و جدول و ... کمتر مورد توجه است. متذکر می‌شویم که ادب ریاضی و تفریح اندیشه به‌نحوی طراحی و انتخاب شده‌اند که علاوه بر تنوع بخشیدن به مجله از نظر سرگرمی و تفریح فکری، کاربردی آموزشی دارد.

خانم رضوان سعیدی؛ دانش آموز رشته تجربی (اراک)

ضمن تشکر از دو مسأله حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که امید است برای شماره‌های بعدی از آنان استفاده شود.

آقای رضا جعفری؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

با تشکر از نامهٔ شما یادآور می‌شویم که مجله ریاضی برهان مجله‌ای دانش‌آموزی است و برای عموم دانش‌آموزان کشور می‌تواند مفید واقع شود. بنابراین سعی کنید که مسائل و مقالات تمام شماره‌های مجله را مورد بررسی دقیق قرار دهید.

آقای حمید ایزدیان (اصفهان)

با تشکر از ارسال مسائل حل شدهٔ شما؛ درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای رسول شمشادی (رشت)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما متذکر می‌شویم که مسائل باید همراه با حل ارائه شود و همچنین در سطح دانش‌آموزان دبیرستان باشد.

آقای احسان امیری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (مشهد)

پس از عرض سلام متقابل و تشکر از دو مسألهٔ حل شدهٔ شما؛ درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای اسماعیل مهدوی؛ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی (آمل)

از مسألهٔ حل شده ارسالی شما متشکریم.

خانم مریم موسوی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اهواز)

با تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما امید است در شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده شود.

آقای یزدان عقاقیری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

از مقالهٔ ارسالی شما تشکر می‌کنیم. درصورت امکان، در جای مناسب از آن استفاده خواهد شد.

آقای حمید رضا احمدیان (همدان)

با تشکر از مقالهٔ ارسالی شما، درصورت امکان از آن استفاده خواهد شد.

آقای صابر آذری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (قائم شهر)

با تشکر از مسائل ارسالی شما، درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای حمید رضا محمودی هاشمی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

برای ارسال چند معما و تفریح اندیشه تشکر می‌کنیم. درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد

خانم سهیلا جعفری (داراب)

با تشکر و قدردانی از مقالهٔ شما تحت عنوان «تعیین باقیمانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد» به عرض می‌رسانیم که الگوریتم کلی روش خود را با توضیحات کافی ارسال دارید تا درصورت امکان در جای مناسب به نام خودتان به‌چاپ برسد.

آقای یوسف محمدی پورنوین؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

با تشکر از مسائل ارسالی شما یادآور می‌شویم که پاسخگویی به مسائل شخصی دانش‌آموزان جزو اهداف مجله نیست و مسائلی را که به‌منظور چاپ ارائه می‌دهید حتماً باید با جواب باشد.

آقای علیرضا خلیق؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

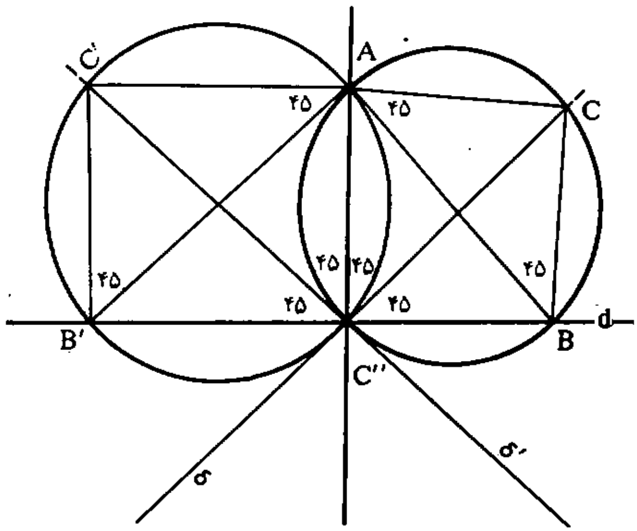
از زحمات شما برای ارسال جواب برخی از مسائل و تستهای برهان ۶ سپاسگزاریم. در ضمن یادآور می‌شویم که تنها ارسال حل مسائل مسابقه‌ای مورد نظر است.

آقای علی ایمانیان (نجف آباد)

با تشکر از مقالهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که فرمول ارائه شده برای محیط بیضی که از طریق ترسیمی به آن رسیده‌اید یک فرمول تقریبی است $P = \pi\,(a + b)$ که از مدتها پیش تا به حال از آن در کارهای عملی استفاده می‌شود.

حل مسأله‌های مسابقه‌ای برهان ۷

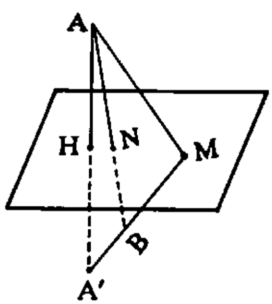
حل ۱ـ حل از خانم لیلا سلطان‌زاده دانش‌آموز سال دوم ریاضی دبیرستان فرزانگان تبریز.
فرض می‌کنیم مسأله حل شده‌باشد و مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC ($C=90°$) جواب مسأله باشد.



دراین صورت اندازهٔ زوایای A و B از این مثلث هر کدام °۴۵ خواهدبود. ازنقطه ثابت A عمود ″AC را بر خط ثابت d فرودمی‌آوریم (پس ″C نقطه‌ای‌است‌ثابت) واز ″C به C وصل می‌کنیم. چهار ضلعی C″ACB محاطی است زیرا $C''=C=90°$ است. پس: $AC''C=BC''C=45°$ است. یعنی خط ″CC نیمساز زاویهٔ قائمهٔ ثابت AC″B است. لذا نقطه ″C روی نیمساز زاویهٔ AC″B قرار دارد. بالعکس هر نقطه‌ای از این نیمساز می‌تواند رأس مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی به رأس قائم C باشد که یک رأس آن نقطهٔ ثابت A و رأس دیگرش B روی خط ثابت d قرار داشته باشد (اگر نقطهٔ دلخواه B را روی خط d اختیار و از این نقطه به A وصل کنیم و به قطر AB یک دایره رسم نماییم این دایره از نقطه ″C می‌گذرد و نقطهٔ دیگر تقاطعش با نیمساز زاویه ″C ، نقطهٔ C رأس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین موردنظراست). بنابراین مکان هندسی موردنظر خط δ نیمساز زاویهٔ AC″B است. همچنین خط ′δ نیمساز زاویهٔ AC″B′ نیز جواب دیگر مسأله است.

حل ۲ـ حل از آقای حسن ولی‌زاده دانش‌آموز سال چهارم ریاضی ـ فیزیک دبیرستان شهید شهریکندی مهاباد.

$A(0,-1,1)$ و $B(2,-1,0)$ و $P: x-2y-2z-3=0$



حل الف: نقاط A و B در دو طرف صفحهٔ P قرار دارند زیرا $P(A)\,.\,P(B)<0$ است.

$$P(A)\,.\,P(B)=(+2-2-3)(2+2-3)=-3<0$$

حل ب: قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به صفحهٔ P پیدانموده نقطهٔ ′A می‌نامیم از ′A به B وصل می‌کنیم نقطه برخورد A′B با صفحهٔ P جواب مسأله است زیرا چون نقاط A و B در طرفین صفحهٔ P واقع‌اند تفاضل نقطهٔ M از دو نقطهٔ A و B

یعنی MB ـ MA بیشترین مقدار ممکن است.

$P : x - ۲y - ۲z - ۳ = ۰$

$A(۰, -۱, ۱)$ ، بردار نرمال صفحهٔ $P(۲, -۲, -۲) \Rightarrow V(۱, -۲, -۱)$

$$AH / \frac{x}{۱} = \frac{y+۱}{-۲} \ \frac{z-۱}{-۲}$$

$$x = \frac{y+۱}{-۲} = \frac{z-۱}{-۲} = t$$

$$\Rightarrow \quad x - ۲y - ۲z - ۳ = ۰$$

$$(x = t , y = -۲t - ۱ , z = -۲t + ۱) \Rightarrow$$

$$t - ۲(-۲t - ۱) - ۲(-۲t + ۱) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۹t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۳} \Rightarrow H(\frac{۱}{۳}, -\frac{۵}{۳}, \frac{۱}{۳})$$

$$x_A + x_{A'} = ۲x_H \Rightarrow ۰ + x_{A'} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x_{A'} = \frac{۲}{۳}$$

$$y_A + y_{A'} = ۲y_H \Rightarrow -۱ + y_{A'} = -\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow y_{A'} = -\frac{۷}{۳}$$

$$z_A + z_{A'} = ۲z_H \Rightarrow ۱ + z_{A'} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow z_{A'} = -\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow A' \left| \begin{array}{l} \frac{۲}{۳} \\ -\frac{۷}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} ۲ \\ -۱ \\ ۰ \end{array} \right. \quad \Rightarrow A'B / \frac{x-۲}{۲/۳-۲} = \frac{y+۱}{-۷/۳+۱} = \frac{z-۰}{-۱/۳-۰}$$

$$\Rightarrow \frac{x-۲}{۴} = \frac{y+۱}{۴} = z$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-۲}{۴} = \frac{y+۱}{۴} = z = t \\ x - ۲y - ۲z - ۳ = ۰ \end{array} \right\} \Rightarrow M(\frac{۸}{۳}, -\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۶})$$

حل ج : چون نقاط A و B در دو طرف صفحهٔ P واقع‌اند پس نقطهٔ N که نقطهٔ برخورد پاره‌خط AB با صفحهٔ P است جواب است یعنی نقطه‌ای است که مجموع فاصله‌اش از دو نقطه A و B کمترین مقدار ممکن است.

$$A(۰, -۱, ۱) \qquad B(۲, -۱, ۰)$$

$$AB \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{۲} = \frac{z-۱}{-۱} \\ y = -۱ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{۲} = \frac{z-۱}{-۱} \\ y = -۱ \\ x - ۲y - ۲z - ۳ = ۰ \end{array} \right. \Rightarrow N \left| \begin{array}{l} \frac{۳}{۲} \\ -۱ \\ \frac{۱}{۴} \end{array} \right.$$

مسائل مسابقه‌ای

● حمیدرضا امیری

می‌دانید که شرط $v = ۱.v$ برای هر $v \in V$ در یک فضای برداری، جزء اصول فضای برداری است. آیا این شرط را نمی‌توان از شروط دیگر نتیجه گرفت به‌عبارت دیگر آیا می‌توانید مجموعه‌ای چون V با دو عمل جمع و ضرب اسکالر روی IR معرفی کنید که همهٔ شرایط فضای برداری را به جز شرط $v = ۱.v$ داشته باشد؟

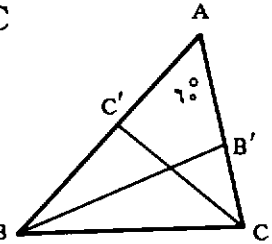
مسائل برای حل

● هندسه: محمدهاشم رستمی
● ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
● جبر و مثلثات: احمد قندهاری - محمدرضا هاشمی - مهدی قمصری

مسائل ریاضیات سال اول

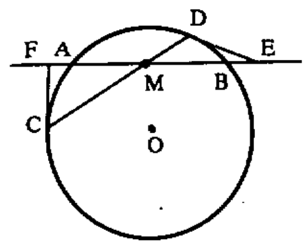
۱- در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A مساوی ۶۰ درجه و BB' و CC' نیمسازهای زوایای B و C می‌باشند. ثابت کنید که:

$B\hat{B}'C = A\hat{C}'C$



۲- از نقطه M وسط وتر AB از دایرهٔ به مرکز O، خطی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط C و D قطع کند. در نقطه‌های C و D خطهایی مماس بردایره رسم می‌کنیم تا امتداد وتر AB را در نقاط E و F قطع کنند. ثابت کنید که $AF = BE$ است.

فرستنده: آقای اشکان شکوری، دانش‌آموز از رشت.



۳- هرگاه گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ نادرست و گزارهٔ $(\sim p \wedge r)$ درست باشد، ارزش گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$ را تعیین کنید.

۴- هرگاه $A = \{(x+y), (۲n+۱), ۲z\}$ و $B = \{۳, (۲y+۴), ۶\}$ مقادیر ممکن برای x و y و z را محاسبه کنید.

۵- حاصل عبارت $\sqrt{۲-\sqrt{۳}} \times \sqrt[۴]{۷+۴\sqrt{۳}}$ را محاسبه کنید.

۶- معادله $a^۲(x-a) = b^۲(x-b)$ را حلّ و بحث کنید.

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

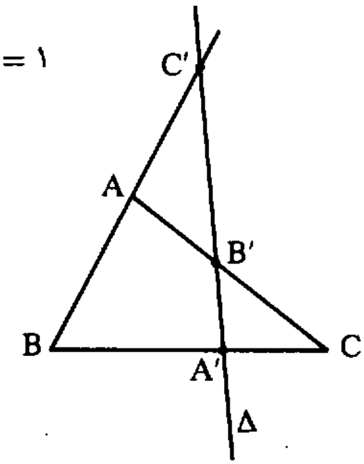
۱- در مثلث ABC اندازهٔ اضلاع عبارتند از: $AB = ۴۰$، $AC = ۸۱$ و $BC = ۹۹$ سانتی‌متر.

الف) اندازهٔ نیمساز زاویهٔ داخلی A را پیدا کنید.

ب) ثابت کنید که $\hat{A} = ۲\hat{B}$ است.

۲- قضیهٔ منولائوس: هرگاه موربی اضلاع یا امتداد اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط A'، B' و C' قطع کند، ثابت کنید که:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = ۱$$



۳- رابطهٔ R روی Z به شکل زیر تعریف شده است، خواص این رابطه را بررسی کنید:

$\forall x, y \in Z, x R y \Leftrightarrow xy \geq ۰$

۴ـ خاصیت یک به یکی و پوشایی را برای تابع با ضابطهٔ زیر بررسی کنید: $f : IR^{۲} \to IR^{۲}$

$$f(x , y) = (\frac{۲x - ۳}{x + ۲} , \frac{۳y + ۱}{y - ۴})$$

اگر تابع پوشا نیست، چه تغییری در مجموعهٔ دوم بدهیم تا پوشا شود؟

۵ ـ ماتریس زیر را که درایه‌های آن با ضابطه مشخص شده‌اند به شکل یک ماتریس با درایه‌های معین بنویسید:

$$A = [a_{ij}]_{۳\times۳} \text{ که } a_{ij} = \begin{cases} (i+j) & i - j = ۰ \\ (i+j) & |i-j| = ۱ \\ (i+j) & |i-j| = ۲ \end{cases}$$

۶ـ به‌ازای مقادیر مختلف m در وجود و علامت ریشه‌های معادله زیر بحث کنید:

$$mx^{۲} - ۲(m + ۱)x + (m - ۱) = ۰$$

۷ ـ دورأس مقابل مربعی روی دوخط $x + y - ۴ = ۰$ و $x + y + ۲ = ۰$ قرار دارد و قطر مربع بر این دو خط عمود است. مجموع مساحتهای دایره‌های محاطی و محیطی این مربع را بیابید.

مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ـ کنج $S - xyz$ را که‌در آن $x\hat{S}z = ۹۰^\circ , x\hat{S}y = y\hat{S}z = ۶۰^\circ$ است در نظر می‌گیریم. روی یالهای Sx و Sy و Sz به ترتیب نقاط B و A و C را چنان اختیارمی‌کنیم که $SA = a$ و $SB = SC = ۲b$ باشد.

الف) ثابت کنید یال SA بر BC عمود است.

ب) طول اضلاع و مساحت مثلث ABC را برحسب a و b حساب کنید.

ج) اگر نقطه‌های B و C ثابت بمانند و نقطهٔ A بریال Sy تغییر مکان دهد، بین a و b چه رابطه‌ای برقرار باشد تا مساحت مثلث ABC می‌نیمم شود.

د) فرض می‌کنیم $a = b$ باشد، در این حالت:

اولاً) اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌ای را که یال آن BC است محاسبه کنید.

ثانیاً) ثابت کنید یال SA برصفحهٔ مثلث ABC عمود است و سپس حجم هرم SABC رابرحسب a پیداکنید.

ازآقای م ـ اـ گیتی‌زاده دبیرریاضی

۲ـ فرض کنید T یک تابع یک به یک و پوشا از فضای برداری $(V , + , ۰)$ به فضای برداری $(W , \oplus , ۰)$ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\forall x , y \in V , T(x + y) = T(x) \oplus T(y)$

ب) $\forall r \in IR , \forall x \in V , T(r.x) = r \cdot T(x)$

اولاً: ثابت کنید $T(\bar{o}_v) = \bar{o}_w$ (تأثیر T روی صفر فضای V، صفر فضای W خواهد شد) و ثانیاً: اگر بردارهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n در فضای V استقلال خطی داشته باشند، آنگاه بردارهای $T(x_۱)$، $T(x_۲)$، ...، $T(x_n)$ نیز در W استقلال خطی دارند.

۳ـ ثابت کنید:

$$a'b'c' + a'b'c + a'bc' + ab'c' + a'b + a'c + bc' = a' + c'$$

۴ـ معین کنید با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت که: الف) مضرب ۵ باشند. ب) فرد بوده و از ۴۰۰۰۰ بزرگتر باشند. ج) اعداد زوج در مکانهای فرد قرار داشته‌باشند.

۵ـ $\frac{\sin(x^{۳} - ۳x + ۲)}{(x - ۱)^{۲}}$ حد وقتی $x \to ۱$ را بیابید.

۶ـ در تابع $y = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}$ ثابت کنید بین مشتقات آن رابطه $۳xy'' + ۵y' = ۰$ برقرار است.

۷ـ معادلهٔ مثلثاتی $\cos 8x\,(\sin x + \sin 9x) = 2$ را حل کنید.

۸ـ $\mathrm{tg}\ 7x$ را برحسب $\mathrm{tg}\ x$ بنویسید و به‌کمک آن حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید:

$$S = \mathrm{tg}^4\frac{\pi}{7} + \mathrm{tg}^4\frac{2\pi}{7} + \mathrm{tg}^4\frac{3\pi}{7}$$

$$S = \mathrm{tg}^6\frac{\pi}{7} + \mathrm{tg}^6\frac{2\pi}{7} + \mathrm{tg}^6\frac{3\pi}{7}$$

۹ـ تساوی $\mathrm{Arctg}\frac{1}{2} + \mathrm{Arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ را به طریق هندسی اثبات کنید.

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(-1, 2, 3)$ نسبت به خط $D: 3x - 1 = -2y + 3 = z - 1$ را پیدا کنید.

۲ـ ثابت کنید دایره‌های به معادلهٔ $x^2 + y^2 + (m^2 - 1)x - 2my + (m + 1)^2 = 0$ به ازای همهٔ مقادیر m بر دایرهٔ ثابتی عمودند و معادلهٔ این دایرهٔ ثابت را پیدا کنید.

۳ـ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(-1, 2)$ و $B(3, -2)$ می‌گذرد و روی محور طولها وتری به طول می‌نیمم ایجاد می‌کند.

۴ـ معادلهٔ هذلولی را بنویسید که نقطهٔ $C(-1, 1)$ مرکز و $F(-1, 3)$ یک کانون و $A(-1, 2)$ یک رأس کانونی آن باشد.

۵ـ می‌دانیم ترکیب شرطی از چپ در ترکیبهای فصلی، عطفی و شرطی توزیع‌پذیر است، با این فرض ثابت کنید ترکیب شرطی از چپ در ترکیب دو شرطی نیز توزیع‌پذیر است.

$$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$$

۶ـ حلقهٔ $(M_{n\times n}, +, \times)$ را درنظرمی‌گیریم اگر ماتریس A عضوثابتی از این حلقه باشد، ثابت کنید مجموعهٔ $K = \{B \mid AB = BA\}$ یک زیر حلقهٔ $M_{n\times n}$ است.

۷ـ ثابت کنید که مجموع مکعبهای سه عدد صحیح متوالی بر ۹ بخش‌پذیر است.

۸ـ به‌روش استقرا ثابت کنید که $10^{3^n} - 1$ بر 3^{n+2} بخش‌پذیر است.

۹ـ معادلات مجانبهای منحنی‌مکان نقطهٔ

$$M \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{t + 4}{t(t - 2)} \\ y = \dfrac{t - 4}{t(t + 2)} \end{array} \right.$$

را بیابید.

۱۰ـ مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع:

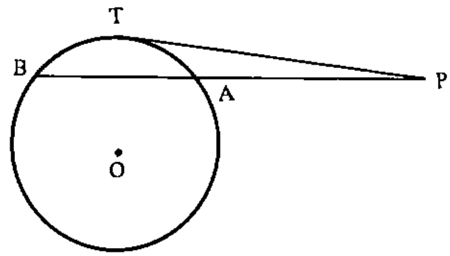
$$y = \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$$

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ ارتفاع وارد بر وتر در مثلثی قائم‌الزاویه، آن مثلث را به دو مثلث چنان تجزیه می‌کند که مساحت یکی، سه برابر مساحت دیگری است. درصورتی‌که اندازهٔ ارتفاع‌وارد بروتر این مثلث مساوی $2\sqrt{3}$ باشد، اندازهٔ مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۲ـ از نقطهٔ P مماس PT به طول ۸ سانتی‌متر را بردایرهٔ O رسم می‌کنیم و از همین نقطه قاطع PAB را چنان نسبت به دایره رسم

می‌کنیم که $PA = \frac{۳}{۴} PT$ باشد. اندازهٔ وتر AB را محاسبه کنید.



فرستندهٔ مسائل ۱ و ۲ : آقای یوسف‌زاده (نقده)

۳ـ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ و β' و α' ریشه‌های معادلهٔ $a'x^۲ + b'x + c = ۰$ باشند، معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن: $\frac{\alpha}{\beta'} + \frac{\beta}{\alpha'}$ و $\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'}$ باشند.

۴ـ سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی مفروض است، اگر به جملهٔ وسطی ۸ واحد اضافه شود؛ تصاعد به یک تصاعد عددی تبدیل می‌شود. ولی اگر در تصاعد عددی به دست آمده به آخری ۶۴ واحد اضافه کنیم، تصاعد مجدداً به تصاعد هندسی تبدیل می‌شود. مطلوب است محاسبه آن سه‌عدد.

۵ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$۱ + \log_۲^{\sin} + (\log_۲^{\sin})^۲ + ... = \frac{۲}{۳}$$

فرستنده: آقای نادر مطیع دانش‌آموز رشته ریاضی(تهران)

۶ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$tg\, x = ۲ \cos \frac{x}{۲}$$

فرستنده: آقای علی‌رضاخانی (تهران)

۷ـ ثابت کنید که عبارت m مربع کامل است:

$$m = \frac{۲(۱ - \sin^۳ x - \cos^۳ x)}{\sin x + \cos x + ۲}$$

فرستنده: آقای نادر مطیع دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ـ اگر $|\overrightarrow{AB}| = ۱۰\, cm$ باشد، و این بردار را به دوبردار در دو راستای عمود برهم که یکی از آنها با AB زاویهٔ $۳۰°$ می‌سازد، تجزیه کنیم، اندازهٔ مؤلفه‌ها را پیدا کنید.

۲ـ خط Δ و مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. ارتفاع AH و میانهٔ AM از این مثلث را رسم می‌کنیم و قرینهٔ محوری مثلث ABC نسبت به خط Δ را پیدا کرده، مثلث $A'B'C'$ می‌نامیم. در صورتی که $AH = ۸\sqrt{۲}$ و $B'C' = ۶\sqrt{۲}$ باشد اندازهٔ مساحت مثلث ABM را پیدا کنید.

۳ـ چهار وجهی منتظم به ضلع $۴\sqrt{۳}$ مفروض است. مرکز و شعاع کرهٔ محیطی این چهار وجهی را مشخص کنید و حجم کرهٔ محیطی را به دست آورید.

۴ـ درصورتی که داشته باشیم: $f(x) = \frac{x - ۲}{x + ۱}$ و $(fog)(x) = - f(x)$ دامنهٔ تابع g را بیابید.

فرستند: آقای اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشته‌تجربی (آمل)

۵ـ مشتق مرتبهٔ nام $y = \sin x$ را به‌دست آورید.

۶ـ حدّ تابع باضابطهٔ $f(x) = \frac{۵^{x+۱} + ۳^{x+۱}}{۵^{x-۱} + ۳^{x-۱}}$ را وقتی $x \to \pm\infty$ حساب کنید.

فرستندهٔ مسائل ۲ و ۳ : خانم‌نسرین‌احمدی نقدهی دانش‌آموز رشته ریاضی (نقده)

۷ـ مشتق تابع باضابطهٔ زیر را حساب کنید:

$$y = (xx^۲x^۳...x^n)^{\frac{۱}{۲+۴+۶+...+۲n}} \quad (n \in N)$$

۸ـ درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید:

الف) $(\cos a - \sin a)(\cos ۲a - \sin ۲a) + \sin ۳a = \cos a$

ب) $tg(\frac{\pi}{۶} + \frac{\beta}{۲})\, tg(\frac{\pi}{۶} - \frac{\beta}{۲}) = \frac{۲\cos\beta - ۱}{۲\cos\beta + ۱}$

۹ـ معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\cot g\, x = tg\, 20^\circ + 2tg\, 40^\circ + 4\cot g\, 80^\circ$

ب) $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$

فرستندهٔ مسائل ۱ و ۲ : آقای اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشته تجربی (آمل)

ریاضیات سال چهارم تجربی

(ازکتاب جبر پایه، تألیف محمدهاشم رستمی)

۱ـ تابع پارامتری $\begin{cases} x = 2\sin\alpha - 1 \\ y = 3 + \cos 2\alpha \end{cases}$ مفروض است. مطلوب است محاسبهٔ y'_x و x'_y .

۲ـ تابع باضابطهٔ $y = \frac{ax + 3}{x + a + 2}$ مفروض است. اولاً: به‌ازای مقادیر مختلف a درجهت تغییرات این تابع بحث کنید. ثانیاً: ثابت کنید که نمودار تغییرات این تابع در ازای مقادیر مختلف a از دو نقطهٔ ثابت که مختصات آنها را محاسبه خواهید کرد، می‌گذرد.

۳ـ خط $\Delta : (a + 1)x + y + 2a = 0$ مفروض است. مقدار a را به قسمی تعیین کنید که این خط، قائم بردایرهٔ به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ باشد.

۴ـ دو دایره $C: 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - \frac{3}{2} = 0$ و $C': x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ مفروضند. اولاً: وضع این دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید. ثانیاً: طول مماس مشترکهای داخلی و خارجی این دو دایره را درصورت وجود محاسبه کنید.

۵ـ مطلوب است محاسبهٔ: $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$ و $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x - 1}}\, dx$

کسانی که یک یا هر دو مسأله از مسائل مسابقه‌ای برهان ۷ را حل کرده‌اند:

۱ـ آقای حسین سبزرو

۲ـ خانم لیلا سلطان‌زاده، دوم ریاضی فرزانگان تبریز

۳ـ خانم الهام امت‌پاک از بجنورد

۴ـ آقای حسن ولی‌زاده، چهارم ریاضی دبیرستان شهید شهریکندی مهاباد

۵ـ خانم آزاده علوی، دبیرستان فرزانگان امینی اصفهان

۶ـ آقای اسماعیل قیصری از سقز

۷ـ آقای مهران خراسانی از گرگان

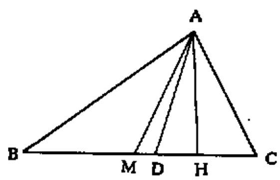
۸ـ آقای محمدرضا ضرابی از تهران

۹ـ خانم مریم عباسی، سوم ریاضی دبیرستان غیرانتفاعی مریم از مشهد

حل مسائل برهان شماره ۸

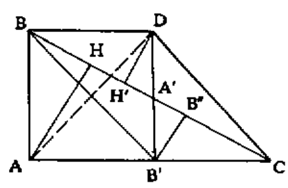
حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ در مثلث ABC، فرض می‌کنیم $AB>AC$ باشد. ارتفاع AH و میانهٔ AM و نیمساز AD را رسم می‌کنیم. چون $AB>AC$ است، پس: $M\hat{A}B<M\hat{A}C$



در نتیجه نیمساز AD داخل زاویهٔ MAB واقع نیست. از طرفی $H\hat{A}B>H\hat{A}C$ می‌باشد. پس نیمساز AD داخل زاویهٔ HAC قرار ندارد. در نتیجه نیمساز AD داخل زاویهٔ MAH یعنی داخل زاویهٔ بین ارتفاع و میانه نظیر رأس A واقع است.

۲ ـ وسط ضلع AC را نقطهٔ B' و وسط وتر BC را نقطهٔ A' می‌نامیم. چهار ضلعی $BB'CD$ متوازی الاضلاع است زیرا اقطارش در نقطهٔ A' یکدیگر را نصف کرده‌اند. (دو مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین ABB' و DAB' با هم برابرند، پس: $DB' = AB$ است). از طرفی $A'B' = \frac{1}{2}AB$ پس $A'B' = \frac{1}{2}DB'$. یعنی



نقطهٔ A' وسط پاره‌خط DB' است و نقطهٔ A' وسط وتر BC نیز می‌باشد پس $BB'CD$ متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین رئوس B' و D از قطر BC به یک فاصله‌اند. یعنی $B'B'' = DH'$. اما $B'B'' = \frac{1}{2}AH$ است. (زیرا $B'B'' \parallel AH$ وسط AC است.) پس $AH = 2DH'$ می‌باشد.

۳ ـ چون گزاره‌های $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ هر دو درست هستند بنابراین باید $p \equiv q$ زیرا در غیر این‌صورت یکی از دو گزارهٔ فوق نادرست خواهد شد، از طرفی:

$$\sim p \equiv T \rightarrow p\equiv F \rightarrow q \equiv F \rightarrow \sim q \equiv T$$

$$(\sim p \wedge r) \equiv T \rightarrow r \equiv T$$

بنابراین با توجه به نتایج به‌دست آمده داریم:

$$(\sim p \Rightarrow q) \equiv F \quad , \quad (\sim q \Leftrightarrow p) \equiv F$$
$$\Rightarrow \left[(\sim q \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)\right] \equiv T$$

۴ ـ گزارهٔ شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ را در دو حالت ممکن که می‌تواند موجود باشد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

I) اگر $(p \wedge q) \equiv T$ که واضح است $q \equiv p \equiv T$ و بلافاصله نتیجه می‌گیریم $(p \vee q) \equiv T$ پس $[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)] \equiv T$.

II) اگر $(p \wedge q) \equiv F$ که در این حالت گزارهٔ شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ به انتفای مقدم همواره درست است، لذا گزارهٔ فوق در هر حالت دارای ارزش درست بوده و یک استلزام منطقی است.

۵ ـ

$$\frac{Ax - A + 2Bx - B}{(2x-1)(x-1)} = \frac{11x - 8}{(2x-1)(x-1)}$$
$$\Rightarrow (A+2B)x - (A+B) \equiv 11x - 8$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A+2B = 11 \\ A+B = 8 \end{cases} \Rightarrow B = 3 \;,\; A = 5$$

۶ ـ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a + c = b + 2$$
$$a^2 + c^2 + 2ac = b^2 + 4 + 4b$$
$$\Rightarrow a^2 - b^2 + c^2 = 4 + 4b - 2ac$$
$$\Rightarrow a^2 - b^2 + c^2 = 4\left(1 + b - \frac{ac}{2}\right)$$

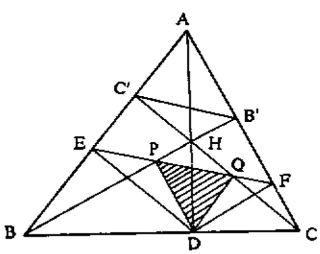
حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ (حل از حسین اصلانی دانش‌آموز از تبریز) محل تلاقی ارتفاعات مثلث را H می‌نامیم. در مثلثهای ADE و ADF داریم:

$$HC' \parallel DE \Rightarrow \frac{AC'}{AE} = \frac{AH}{AD} \quad (1)$$

$$HB' \parallel DF \Rightarrow \frac{AB'}{AF} = \frac{AH}{AD} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{AC'}{AE} = \frac{AB'}{AF} \Rightarrow B'C' \parallel EF$$



در مثلثهای $CB'C'$ و $CB'B$ می‌توان نوشت:

$$QF \parallel B'C' \Rightarrow \frac{CQ}{QC'} = \frac{CF}{FB'} \quad (3)$$

(۴) $DF \parallel BB' \Rightarrow \frac{CD}{DB}=\frac{CF}{FB'}$

(۳) و (۴) $\Rightarrow \frac{CQ}{QC'}=\frac{CD}{DB} \Rightarrow DQ \parallel BC' \Rightarrow D\hat{Q}C = 90^\circ$

در نتیجه چهارضلعی DQFC محاطی است. پس $P\hat{Q}D = A\hat{C}D$.

به‌روش مشابه ثابت می‌شود که، $DP \perp BB'$. یعنی: $B\hat{P}D = 90^\circ$

و چهارضلعی DBEP محاطی، و از آنجا $Q\hat{P}D = A\hat{B}C$ است.

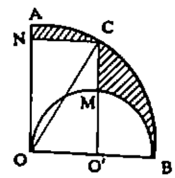
بنابراین مثلث DPQ با مثلث ABC متشابه است.

۲ ـ (حل از غلامرضا روشندل)

چون $AB = C_4 = 10\sqrt{2}$ است پس:

$$C_4 = R\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow R = 10$$

در نتیجه: $OA = OB = 10$ و $OO' = 5$



در مثلث قائم‌الزاویهٔ OO'C داریم:

$OC = 10$ و $OO' = 5 \Rightarrow$

$O'C = \sqrt{100-25} = 5\sqrt{3} \Rightarrow$

$S_{OO'CN} = 5\times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

نیم دایرهٔ به قطر OC $\quad S = \frac{1}{2}\pi(5)^2 = \frac{25\pi}{2}$

ربع دایرهٔ AOB، $\quad S = \frac{1}{4}\pi(10)^2 = 25\pi$

قسمت هاشور خورده S = ربع دایرهٔ AOB S

$-\ (S_{OO'CN} + S_{O'BM})$ (ربع دایره

مطلوب $\quad S = 25\pi - (25\sqrt{3} + \frac{25\pi}{4}) = \frac{75\pi}{4} - 25\sqrt{3}$

۳ ـ چون A و B دو مجموعهٔ جدا از هم می‌باشند، پس $(A\cap B)=\phi$ پس:

$$(B\times A)(-B\times B') = B\times(A-B') = B\times(A\cap B) = B\times\phi = \phi$$

۴ ـ هرگاه رابطه‌ای چون R هم خاصیت تقارنی و هم خاصیت پاد تقارنی داشته باشد، می‌بایست زیرمجموعه‌ای از رابطهٔ همانی باشد و اگر R روی یک مجموعهٔ K عضوی تعریف شده باشد، رابطهٔ همانی دارای K زوج مرتب است یعنی K عضوی است که در این‌صورت 2^k زیر مجموعه دارد مثلاً:

اگر {۳ و ۲ و ۱} = A در این‌صورت:

{(۳ و ۳)(۲ و ۲) و (۱ و ۱)} = I رابطه همانی روی A است که $2^3 = 8$ زیر مجموعه دارد.

۵ ـ داریم: $f: IR^+ \to IR^+$ ابتدا به بررسی خاصیت

$$f(x)=\sqrt{x^2+x-1}$$

یک به یکی می‌پردازیم.

فرض کنیم: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1^2+x_1-1} = \sqrt{x_2^2+x_2-1}$

$\Rightarrow x_1^2+x_1-1 = x_2^2+x_2-1 \Rightarrow (x_1^2-x_2^2) = (x_2-x_1)$

$\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)+(x_1-x_2)=0$

$\Rightarrow (x_1-x_2)\left[(x_1+x_2+1)\right]=0$

چون $0<x_1,x_2 \Rightarrow x_1+x_2+1\neq 0 \Rightarrow x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2$

پس تابع یک به یک است.

حال فرض کنیم: $y\in IR^+,\ y=\sqrt{x^2+x-1}\Rightarrow y^2=x^2+x-1$

$\Rightarrow x^2+x-(1+y^2)=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(1+y^2)}}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{4y^2+5}}{2}$ یا $x=\frac{-1-\sqrt{4y^2+5}}{2}$

که واضح است برای هر $y\in IR^+$ همواره $x\in IR^+$ یافت می‌شود بنابراین تابع پوشا است.

۶ ـ

$\lg_9^{16}=a \Rightarrow \lg_3^{4} = a \Rightarrow \lg_3^{2^2}=a$

$\Rightarrow 2\lg_3^{2} = a \Rightarrow \lg_3^{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{\lg_2^{3} = \frac{2}{a}}$

$\lg_4^{3\sqrt{3}} = \lg_4^{3\times 3^{\frac{1}{2}}} = \lg_{2^2}^{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}\lg_2^{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{3}{2a}$

۷ ـ $A\ \big|{}^{4}_{-1}$ روی نیمساز ربع اوّل یا سوم. $B\ \big|{}^{x}_{x}$

$AB=\sqrt{(x-4)^2+(x+1)^2}=\sqrt{13}$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2-6x+17}=\sqrt{13}\Rightarrow 2x^2-6x+17=13$

$\Rightarrow 2x^2-6x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow B_1\big|{}^{1}_{1} \quad B_2\big|{}^{2}_{2}$

۸ ـ

$x^2+y^2 = (a\cos\alpha - b\sin\alpha)^2+(a\sin\alpha+b\cos\alpha)^2$

$= a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha - 2ab\sin\alpha\cos\alpha$

$+ a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha + 2ab\sin\alpha\cos\alpha$

$= \sin^2\alpha\,(a^2+b^2) + \cos^2\alpha\,(a^2+b^2)$

$= (a^2+b^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = a^2+b^2$

۹ ـ

$$\sin(\underbrace{Arccos\tfrac{3}{5}}_{\alpha}) = \cos(\underbrace{Arcsin\tfrac{3}{5}}_{\beta})$$

باید ثابت کنیم: $\sin\alpha = \cos\beta$

بنا به فرض داریم:

$Arccos\frac{3}{5}=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\frac{9}{25}=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}$

$\Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{16}{25} \Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{4}{5}$ ①

$Arcsin\frac{3}{5}=\beta \Rightarrow \sin\beta=\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \cos^2\beta = 1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow \cos^2\beta=\frac{16}{25}$

$\Rightarrow \cos\beta=\pm\frac{4}{5}$ ②

پس از ① و ② داریم:

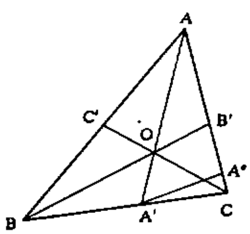
$\sin\alpha = \cos\beta$

درنتیجه تساوی برقرار است.

حل مسائل سال سوم ریاضی

۱ ـ حل الف: همان‌طوری که در برهان ۷ دیدیم اگر نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای 'AA و 'BB و 'CC از مثلث ABC باشد، داریم: $OA=\frac{1}{p}\sqrt{bcp(p-a)}$ ،

$OB=\frac{1}{p}\sqrt{acp(p-b)}$ و $OC=\frac{1}{p}\sqrt{abp(p-c)}$



پس اگر در رابطهٔ OB. OC = a.OA مقادیر فوق را قرار دهیم داریم:

$\frac{1}{p}\sqrt{acp(p-b)}\times\frac{1}{p}\sqrt{abp(p-c)} = a\times\frac{1}{p}\sqrt{bcp(p-a)}$

$\Rightarrow (p-b)(p-c) = p(p-a)$

امّا می‌دانیم مثلثی که رابطهٔ فوق در آن برقرار باشد، در رأس A قائم‌الزاویه است.

ب: اگر تصویر نقطهٔ A' روی ضلع AC را A'' بنامیم، در مثلث $AA'A''$ داریم:

$$AA''=AA'.\cos\frac{A}{2} \quad ، \quad AA'=d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

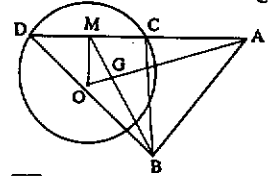
و

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\Rightarrow AA''=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}\times\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\frac{2p(p-a)}{b+c}$$

$$\Rightarrow AA''=\frac{2p(p-a)}{b+c}$$

۲ـ میانهٔ BM از مثلث BCD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد میانه‌های این مثلث را G می‌نامیم. می‌دانیم که مکان هندسی نقطهٔ M وسط وتر CD وقتی قاطع ACD حول نقطهٔ A دوران کند دایره‌ای است به قطر AO (یا قسمتی از دایرهٔ به قطر A وقتی نقطه A خارج دایرهٔ O واقع است).



از طرفی بنا به خاصیت میانه‌های مثلث، $\frac{\overline{BG}}{\overline{BM}}=\frac{2}{3}$ است یعنی: $(G)=H_B^{\frac{2}{3}}(M)$. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ G دایره‌ای است، مجانس دایرهٔ به قطر AO (یا مجانس بخشی از دایرهٔ به قطر AO)، نسبت به مرکز تجانس B و نسبت تجانس $\frac{2}{3}$.

۳ـ اگر $A\subseteq B$ که $(A\cup B)=B$ و چون B زیرفضا است پس: $(A\cup B)$ نیز زیرفضا است و اگر $B\subseteq A$، $(A\cup B)=A$ و باز هم $(A\cup B)$ زیرفضا خواهد بود.

حال فرض کنیم $(A\cup B)$ یک زیرفضای V است ثابت می‌کنیم: $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$.

اثبات به برهان خلف: فرض کنیم $A\not\subseteq B$ و $B\not\subseteq A$، چون $A\not\subseteq B$ پس: عضوی چون x در A هست به قسمی که $x\notin B$ یعنی: $x\notin B$ و $x\in(A\cup B)$. از طرف دیگر و به همین روش داریم:
$y\in(A\cup B)$ و $y\notin A$

حال چون: x و y هر دو عضو $(A\cup B)$ بوده و $(A\cup B)$ زیرفضا است پس: $(x+y)\in(A\cup B)$ که نتیجه می‌شود:
$(x+y)\in A$ یا $(x+y)\in B$

حال اگر مثلاً: $(x+y)\in A$، داشتیم که $x\in A$ پس $-x\in A$ و چون A زیرفضا است پس: $(x+y)-x\in A$ یعنی: $y\in A$ که این تناقض است و اگر $(x+y)\in B$ به همین روش ثابت می‌شود $x\in B$ که باز هم تناقض است بنابراین فرض خلف باطل است و حکم برقرار می‌باشد.

۴ـ کافی است ثابت کنیم مجموعهٔ

$$A=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f(-x)=-f(x)\}$$

نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است:

اگر: $f_1(x),f_2(x)\in A\Rightarrow(f_1+f_2)(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)$

$=-f_1(x)-f_2(x)=-\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=-(f_1+f_2)(x)$

$\Rightarrow(f_1+f_2)\in A$ نسبت به جمع بسته است:

اگر: $r\in\mathbb{R},f_1\in A\Rightarrow(rf_1)(-x)=rf_1(-x)=-rf_1(x)$

$=-(rf_1)(x)\Rightarrow(rf_1)\in A$ نسبت به ضرب اسکالر بسته است:

۵ـ ابتدا باید ثابت کنیم: $a*(b*c)=(a*b)*c$ که تحقیق این تساوی (شرکت پذیری) با توجه به اتحاد $(ab'+a'b)'=ab+a'b'$ ساده و به‌عهدهٔ خواننده.

عضو خنثی در جبر بول نسبت به این عمل صفر است زیرا:

$0*a=a*0=a'.0+a.0'=0+a.1=0+a=a$

متقابل هر عضو نسبت به عمل * خودِ همان عضو است زیرا:

$a*a=a'a+aa'=0+0=0$

بنابراین $(B,*)$ یک گروه است و می‌دانیم در گروه‌ها قانون حذف برقرار است بنابراین:

الف) اگر $ab'+a'b=a\Rightarrow a*b=a\Rightarrow\cancel{a}*b=\cancel{a}*0\Rightarrow b=0$

ب) اگر $ab'+a'b=0\Rightarrow a*b=0\Rightarrow\cancel{a}*b=\cancel{a}*a\Rightarrow b=a$

۶ـ

$y=x+\sqrt{-x^2+2}$

$-x^2+2\ge0\Rightarrow x^2\le2\Rightarrow-\sqrt2\le x\le\sqrt2$

$D_f=[-\sqrt2,\sqrt2]$

برد تابع: شرط اوّلیه: $y\ge x,\ -\sqrt2\le x\le\sqrt2\Rightarrow y\ge-\sqrt2$

$y-x=\sqrt{-x^2+2}\Rightarrow y^2+x^2-2yx=-x^2+2$

$2x^2-2yx+(y^2-2)=0$

$\Delta'\ge0\Rightarrow y^2-2y^2+4\ge0$

$\Rightarrow y^2\le2\Rightarrow-2\le y\le2$ ، $y\ge-\sqrt2$ $\Rightarrow-\sqrt2\le y\le2$

$\Rightarrow$ برد تابع: $[-\sqrt2,2]$

۷ـ

$$y'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{\Delta x}\times\frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^4}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2(x+\Delta x)^2}}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^4}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2(x+\Delta x)^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x\left(3\sqrt[3]{x^4}\right)}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x\left(3x\sqrt[3]{x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x\left(3\sqrt[3]{x}\right)x}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

۸ـ

$5-3\sqrt3=3+2-\sqrt3-2\sqrt3$

$=(3-\sqrt3)-(2\sqrt3-2)$

$=\sqrt3(\sqrt3-1)-2(\sqrt3-1)$

$=(\sqrt3-1)(\sqrt3-2)$

$=2(\sqrt3-1)\left(\frac{\sqrt3}{2}-1\right)$

$=2\left(tg\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}}\times2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-8\sqrt2\sin^2\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$

۹ـ

$1+\sqrt2\sin3x=\sin2x$

$1+\sqrt2(3\sin x-4\sin^3x)=1-2\sin^2x$

$1+3\sqrt2\sin x-4\sqrt2\sin^3x-1+2\sin^2x=0$

$\sin x(3\sqrt2-4\sqrt2\sin^2x+2\sin x)=0$

$\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x_1=k\pi$

$-4\sqrt2\sin^2x+2\sin x+3\sqrt2=0$

$\Rightarrow\Delta'=1+24=25$

$\sin x=\frac{-1\pm5}{-4\sqrt2}=\frac{-\sqrt2}{2}=\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\Rightarrow$

$$\begin{cases}x_2=2k\pi-\frac{\pi}{4}\\ x_3=2k\pi+\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ ابتدا تصاویر $\vec{V}_1$ را مشخص می‌کنیم.

$\vec{V}_1\parallel\vec{V}_2,\ \ \vec{V}_2(2,-1,3)$

$$\Rightarrow \vec{V}_1(2k, -k, 3k)\ ,\ \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 42 \Rightarrow 4k + k + 9k = 42$$

$$\Rightarrow 14k = 42 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow \vec{V}_1(6, -3, 9)$$

برای محاسبهٔ طول تصویر قائم بردار $\vec{V}_1$ روی صفحهٔ xoy باید زاویهٔ بین این بردار و صفحهٔ xoy را به‌دست آوریم. می‌دانیم که صفحه xoy به معادلهٔ $z = 0$ است. پس:

$$z = 0 \Rightarrow \vec{V}(0, 0, 1)$$

$\vec{V}_1$ (۹ و ۳− و ۶)، تصاویر بردار نرمال صفحهٔ xoy

$$\Rightarrow \cos(\vec{V}_1, \vec{V}) = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}}{|\vec{V}_1|\ |\vec{V}|} = \frac{9}{1\times\sqrt{36+9+81}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{126}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \sin(\vec{V}_1, \vec{V}) = \sqrt{\frac{5}{14}}\ ,\ (\vec{OH}, \vec{V}_1) = \frac{\pi}{2} - (\vec{V}_1, \vec{V})$$

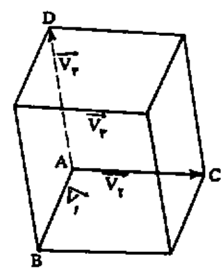
$$\overline{OH} = |\vec{V}_1| \times \cos(\vec{OH}, \vec{V}_1)$$

$$= |\vec{V}_1| \times \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\vec{V}_1, \vec{V})\right]$$

$$\Rightarrow \overline{OH} = |\vec{V}_1|\ \sin(\vec{V}_1, \vec{V})$$

$$= 3\sqrt{14} \times \sqrt{\frac{5}{14}} = 3\sqrt{5}$$

۲ـ فرض می‌کنیم $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{V}_3 = \vec{i} + \vec{j}$ باشد، در این‌صورت $\vec{V}_1(3, -4, 2)$ و $\vec{V}_2(4, 2, 3)$ و $\vec{V}_3(1, 1, 0)$ است.



و حجم متوازی‌السطوحی که این سه بردار یالهای جانبی آن باشند، برابر قدر مطلق حاصل ضرب مختلط سه بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ است. یعنی: $V = |\vec{V}_1\ \vec{V}_2\ \vec{V}_3|$ متوازی‌السطوح

اما: $\vec{V}_1\ \vec{V}_2\ \vec{V}_3 = \vec{V}_1 . (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

و

$$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3(-3, 3, 2) \Rightarrow \vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -9 - 12 + 4 = -17$$

واحد حجم ۱۷ = V متوازی‌السطوح ⇐

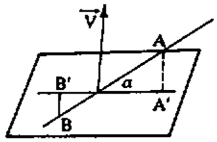
۳ـ الف) پای عمودهای مرسوم از نقاط A و B بر صفحهٔ P را به ترتیب A' و B' می‌نامیم خواهیم داشت:

$A(1, 3, -1)$ و $B(-2, 0, 1)$

$$P: 2x + y - 2z - 3 = 0 \Rightarrow \overline{AA'} = \frac{2+3+2-3}{\sqrt{4+1+4}} = +\frac{4}{3}$$

نقاط A و B در دو طرف صفحهٔ P واقعند

$$\overline{BB'} = \frac{-4-2-3}{3} = -3 \Rightarrow$$



ب) زاویهٔ خط AB با صفحهٔ P، متمم زاویهٔ این خط با بردار نرمال صفحهٔ P است. پس:

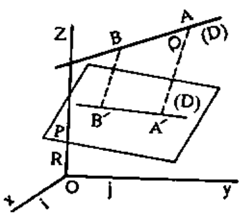
$$P: 2x + y - 2z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{V}(2, 1, -2)$$

$$\vec{AB}(3, 3, -2)$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{AB}) = \frac{6+3+4}{\sqrt{4+1+4}\times\sqrt{9+9+4}} = \frac{13}{3\sqrt{22}}$$

$$(\vec{V}, \vec{AB}) = \mathrm{Arccos}\frac{13}{3\sqrt{22}} \Rightarrow \alpha = 90° - \mathrm{Arccos}\frac{13}{3\sqrt{22}}$$

۴ـ بر خط D صفحه‌ای مانند Q می‌گذرانیم که بر صفحهٔ P عمود باشد. خط D' فصل مشترک صفحهٔ Q و صفحهٔ P جواب مسأله است.



$$D: 2x - 1 = -y + 2 = 3z \Rightarrow D: \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3z + y - 2 = 0 \end{cases}$$

معادلهٔ دسته صفحهٔ گذرنده بر D:

$$\alpha(2x + y - 3) + \beta(3z + y - 2) = 0$$

معادله دسته صفحهٔ گذرنده بر خط D:

$$2\alpha x + (\alpha + \beta)y + 3\beta z - 3\alpha - 2\beta = 0$$

شرط عمود بودن دو صفحه $aa' + bb' + cc' = 0$،

$$P: x + y - 2z - 2 = 0$$

$$2\alpha + \alpha + \beta - 6\beta = 0 \Rightarrow 3\alpha - 5\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{3}\beta \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ Q:

$$\frac{10}{3}\beta x + \frac{8}{3}\beta y + 3\beta z - 7\beta = 0 \Rightarrow 10x + 8y + 9z - 21 = 0$$

$$D': \begin{cases} 10x + 8y + 9z - 21 = 0 \\ x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow D': \frac{x - \frac{5}{2}}{-25} = \frac{y + \frac{1}{2}}{19} = \frac{z}{2}$$

معادلهٔ کانونیک تصویر قائم خط D روی صفحهٔ P:

۵ـ

$$\sim\left[(r\Rightarrow s)\Rightarrow\left(s\Rightarrow(s\wedge t)\right)\right] \equiv (r\Rightarrow s)\wedge\sim\left[s\Rightarrow(s\wedge t)\right]$$

$$\equiv (r\Rightarrow s)\wedge\left[s\wedge\sim(s\wedge t)\right] \equiv (\sim r\vee s)\wedge\left[\underbrace{s\wedge(\sim s\vee\sim t)}_{(s\wedge\sim t)}\right]$$

$$\equiv (\sim r\vee s)\wedge(s\wedge\sim t) \equiv \left[\underbrace{(\sim r\vee s)\wedge s}_{\text{جذب}}\right]\wedge\sim t \equiv s\wedge\sim t$$

۶ـ

$$\left[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\wedge q)\right]\Rightarrow(q\Rightarrow p)$$

$$\equiv\left[(\sim p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)\right]\Rightarrow(q\Rightarrow p)$$

$$\equiv\left[\sim(\sim p\vee q)\vee(p\wedge q)\right]\Rightarrow(q\Rightarrow p)$$

$$\equiv\left[(p\wedge\sim q)\vee(p\wedge q)\right]\Rightarrow(\sim q\vee p)$$

$$\equiv\left[p\wedge(\underbrace{\sim q\vee q}_{T})\right]\Rightarrow(\sim q\vee p)$$

$$\equiv p\Rightarrow(\sim q\vee p) \equiv \sim p\vee(p\vee\sim q)$$

$$\equiv(\sim p\vee p)\vee\sim q \equiv T\vee\sim q \equiv T$$

۷ـ مجموعهٔ داده شدهٔ زیر مجموعهٔ IR است، بنابراین برای اثبات میدان بودنِ آن کافی است ثابت کنیم زیرحلقهٔ IR است که در این‌صورت حلقهٔ جابجایی بودن آن تأمین می‌شود (IR یک حلقهٔ جابجایی است که فاقد مقسوم علیه صفر است) و می‌توان نتیجه گرفت که مجموعهٔ مفروض یک حوزهٔ درست است و برای آن‌که میدان باشد باید عناصر غیر صفر آن وارون‌پذیر باشند. برای اثبات زیرحلقه بودن باید این مجموعه نسبت به دو عمل تفاضل و ضرب بسته باشد که بررسی آن به‌عهدهٔ دانش‌آموزان و چون $1 = 1 + 0\sqrt[3]{2} + 0\sqrt[3]{4}$ پس:

این مجموعه یکدار است و عضو خنثی نسبت به عمل ضرب معمولی را دارد پس:

$$(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^{-1} = 1$$

و برای یافتن $(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^{-1}$ از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC)(A + B + C)$$

$$\Rightarrow \frac{A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC}{A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC}(A + B + C) = 1$$

$$\Rightarrow (A + B + C)^{-1} = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC}{A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC}$$

$$\Rightarrow (a+b\sqrt[۳]{۲}+c\sqrt[۳]{۴})^{-۱} = \frac{a^۲+b^۲\sqrt[۳]{۴}+۲c^۲\sqrt[۳]{۲}-ab\sqrt[۳]{۲}-ac\sqrt[۳]{۴}-۲bc}{\underbrace{a^۳+۲b^۳+۴c^۳-۶abc}_{K}}$$

$$= \frac{a^۲-۲bc}{k}+\frac{-ab+۲c^۲}{k}\sqrt[۳]{۲}+\frac{b^۲-ac}{k}\sqrt[۳]{۴}$$

$$= a'+b'\sqrt[۳]{۲}+c'\sqrt[۳]{۴}$$

۸ـ فرض کنیم S یک حوزهٔ درست متناهی باشد، واضح است که اگر یک حوزهٔ درست، یکدار باشد وارون‌پذیر نیز خواهد بود؛ بنابراین برای این‌که ثابت کنیم S میدان است باید ثابت کنیم S یکدار است. حال اگر $S_۱$ و $S_۲$ و ... و S_n، n عنصر متمایز اعضای S باشند، و عنصر $S_۱$ را با همهٔ عناصر S بنابر قانون ضرب آن ترکیب کنیم، نتایج به‌دست آمده n عنصر متمایز است که باید در حلقه باشند؛ زیرا اگر مثلاً:

$S_۱ S_k = S_۱ S_p$، با توجه به این‌که S یک حوزهٔ درست است قانون حذف در آن برقرار است و $S_۱$ را از طرفین حذف کرده و خواهیم داشت: $S_k = S_p$ که با متمایز بودنِ اعضای S تناقض دارد، پس باید عضوی در S باشد به قسمی که ترکیب آن با $S_۱$ خودِ $S_۱$ باشد، این عضو را e می‌نامیم که همان عضو خنثی است، زیرا:

الف) $s_۱e = es_۱ = s_۱ \rightarrow$ ثابت شد

ب) به ازای هر s_k در S اگر $s_۱s_k = s_p$ در این‌صورت:

$s_۱s_k e = e.s_۱s_k = (es_۱)s_k = s_۱s_k$

$\underline{s_۱s_k = s_p}\; s_pe = es_p = s_p$

پس S یک حوزهٔ درستِ (حلقهٔ جابجایی فاقد مقسوم علیه صفر) یکدار است و چون مقسوم علیه صفر ندارد لذا، هر عضو غیر صفر آن وارون‌پذیر است، بنابراین یک میدان است.

۹ـ

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x^۳+x}-\sqrt[۳]{۲}}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x^۳+x}-\sqrt[۳]{۲}}{x-۱} \times \frac{\sqrt[۳]{(x^۳+x)^۲}+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲(x^۳+۱)}}{\sqrt[۳]{(x^۳+x)^۲}+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲(x^۳+۱)}}$$

این تابع در $x_۰ = ۱$ مشتق‌پذیر است:

$$= \lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+x-۲}{(x-۱)(۳\sqrt[۳]{۴})}$$

$$= \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۲)}{(x-۱)(۳\sqrt[۳]{۴})} = \frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۴}}$$

۱۰ـ

$$y = \frac{x^۲+bx+c}{x^۲+۱} \Rightarrow y'$$

$$= \frac{(۲x+b)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+bx+c)}{(x^۲+۱)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{۲x^۳}+۲x+bx^۲+b-\cancel{۲x^۳}-۲bx^۲-۲cx}{(x^۲+۱)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow -bx^۲+۲(۱-c)x+b = ۰$$

حاصل جمع طولها صفر است.

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} = ۰ \Rightarrow -\frac{۲(۱-c)}{-b} = ۰ \Rightarrow ۲-۲c = ۰ \Rightarrow \boxed{c=۱}$$

$$y = \frac{x^۲+bx+c}{x^۲+۱} \Rightarrow yx^۲+y = x^۲+bx+c$$

$$\Rightarrow (y-۱)x^۲-bx+y-c = ۰$$

حال اگر در معادلهٔ بالا قرار دهیم $\Delta = ۰$ معادله‌ای درجهٔ ۲ بر حسب y به‌دست می‌آید که ریشه‌های آن همان عرضهای نقاط اکسترمم است.

$$\Delta = ۰ \Rightarrow b^۲-۴(y-۱)(y-c) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴y^۲-۴(۱-c)y-b^۲+۴c = ۰$$

چون حاصل ضرب عرضها برابر با صفر است پس: $\frac{c}{a} = ۰$ یعنی:

$$\frac{۴c-b^۲}{۴} = ۰ \Rightarrow ۴c-b^۲ = ۰ \overset{c=۱}{\Rightarrow} b^۲ = ۴ \Rightarrow b = \pm ۲$$

$$\boxed{\Rightarrow y = \frac{x^۲+۲x+۱}{x^۲+۱}}$$

حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ با استفاده از قضیهٔ تالس داریم:

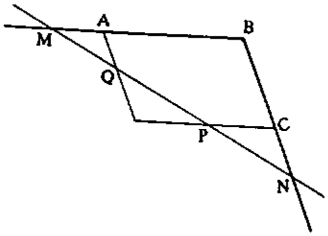
$$AQ \parallel BN \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MQ}{MN} \qquad (۱)$$

$$PC \parallel MB \Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{NM}{NP} \qquad (۲)$$

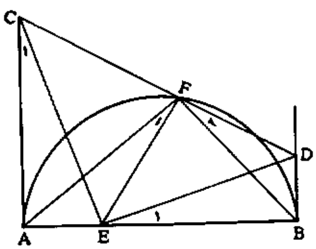
$$CN \parallel DQ \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{NP}{PQ} \qquad (۳)$$

$$MA \parallel DP \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{PQ}{MQ} \qquad (۴)$$

$$(۱)\times(۲)\times(۳)\times(۴) \Rightarrow \frac{MA}{MB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{PC}{PD}\times\frac{QD}{QA} = ۱$$



۲ـ از نقطهٔ F به نقاط A و B وصل می‌کنیم. زاویهٔ $A\hat{F}B = ۹۰°$ است. همچنین از نقطهٔ E به نقطه‌های C و D وصل می‌کنیم، چهارضلعیهای AEFC و EFDB محاطی‌اند پس $\hat{F}_۱ = \hat{F}_۲$ از طرفی $\hat{E}_۱ = \hat{F}_۲$ و $\hat{C}_۱ = \hat{F}_۱$ زیرا اضلاعشان دو به دو بر هم عمودند.



لذا $C_۱ = E_۱$ و از آن‌جا دو مثلث قائم الزاویهٔ ACE و BED متشابه‌اند. پس داریم:

$$\frac{AC}{EB} = \frac{AE}{DB} \Rightarrow AC.DB = EB.EA = CT$$

۳ـ ثابت می‌کنیم:

$$a(a+۱)(a+۲)(a+۳)+۱ = (a^۲+۳a+۱)^۲$$

داریم:

$$a(a+۳)(a+۱)(a+۲)+۱$$
$$= (a^۲+۳a)(a^۲+۳a+۲)+۱$$

با فرض $a^۲+۳a = A$ داریم:

$$= A(A+۲)+۱ = A^۲+۲A+۱$$
$$= (A+۱)^۲ = (A+۱)(A+۱)$$

پس خواهیم داشت:

$$a(a+۱)(a+۲)(a+۳)+۱ = (a^۲+۳a+۱)^۲$$

۴ـ به‌طور کلی در حل معادلاتی که به فرم کلی $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ می‌باشند، اگر از چهار عدد a و b و c و d مجموع دو عدد با مجموع دو عدد دیگر برابر باشند، مثلاً داشته باشیم:

$$a + b = c + d$$

معادله را می‌توان با روش ساده و مقدماتی حل کرد. پس چون برای معادلهٔ فوق داریم:

$$۲ - ۳ = ۴ - ۵$$

$$\underbrace{(x+۲)(x-۳)}\ \underbrace{(x+۴)(x-۵)} = ۷۲$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$(x^۲ - x - ۶)(x^۲ - x - ۲۰) = ۷۲$$

با فرض: $t = x^۲ - x$ خواهیم داشت:

$$(t-۶)(t-۲۰) = ۷۲ \Rightarrow t^۲ - ۲۶t + ۱۲۰ = ۷۲$$

$$t^۲ - ۲۶t + ۴۸ = ۰ \Rightarrow t_۱ = ۲ \ ,\ t_۲ = ۲۴$$

$$\begin{cases} x^۲ - x = ۲ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow & \begin{vmatrix} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = ۲ \end{vmatrix} \\ x^۲ - x = ۲۴ \Rightarrow x^۲ - x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow & \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_۳ = \frac{۱ + \sqrt{۹۷}}{۲} \\ x_۴ = \frac{۱ - \sqrt{۹۷}}{۲} \end{vmatrix}$$

۵- داریم:

$$x^۲ + y^۲ = (x+y)^۲ - ۲xy = ۲ + ۲a$$

$$\Rightarrow ۱۴ - ۲xy = ۲ + ۲a \Rightarrow xy = p = ۶ - a$$

$$x + y = s = \pm\sqrt{۱۴} \Rightarrow \begin{vmatrix} x + y = s = \pm\sqrt{۱۴} \\ xy = p = ۶ - a \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow Z^۲ - SZ + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - (\pm\sqrt{۱۴})Z + (۶ - a) = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۱۴ - ۲۴ + ۴a \geq ۰ \Rightarrow a \geq \frac{۵}{۲}$$

۶- داریم:

$$\begin{cases} a_n = a_۱ + (n-۱)d \\ a_m = a_۱ + (m-۱)d \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_n = a_۱ + nd - d \\ a_m = a_۱ + md - d \end{vmatrix}$$

از تفاضل دو رابطهٔ اخیر داریم:

$$a_n - a_m = nd - md \Rightarrow a_n - a_m = d(n - m)$$

$$\Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

۷-

$$\sin^۴\frac{\pi}{۸} + \sin^۴\frac{۷\pi}{۸} + \sin^۴\frac{۳\pi}{۸} + \sin^۴\frac{۵\pi}{۸} =$$

$$\sin^۴\frac{\pi}{۸} + \sin^۴\left(\pi - \frac{۷\pi}{۸}\right) + \sin^۴\frac{۳\pi}{۸} + \sin^۴\left(\pi - \frac{۵\pi}{۸}\right) =$$

$$۲\sin^۴\frac{\pi}{۸} + ۲\sin^۴\frac{۳\pi}{۸} = ۲\left(\sin^۴\frac{\pi}{۸} + \cos^۴\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۸}\right)\right)$$

$$= ۲\left(\sin^۴\frac{\pi}{۸} + \cos^۴\frac{\pi}{۸}\right) = ۲\left(۱ - ۲\sin^۲\frac{\pi}{۸}\cos^۲\frac{\pi}{۸}\right)$$

$$= ۲\left(۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲\frac{۲\pi}{۸}\right) = ۲\left(۱ - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) = ۲\left(\frac{۳}{۴}\right) = \frac{۳}{۲}$$

۸- با فرض $x = ۱۲y$ داریم:

$$۲\cos\frac{x}{۶} - \sin\frac{x}{۴} + ۱ = ۰ \quad \xrightarrow{x = ۱۲y}$$

$$۲\cos ۲y - \sin ۳y + ۱ = ۰$$

$$۲(۱ - ۲\sin^۲ y) - ۳\sin y + ۴\sin^۳ y + ۱ = ۰$$

$$۴\sin^۳ y - ۴\sin^۲ y - ۳\sin y + ۳ = ۰$$

$$۴\sin^۲ y(\sin y - ۱) - ۳(\sin y - ۱) = ۰$$

$$(\sin y - ۱)(۴\sin^۲ y - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \sin y - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin y = ۱ \Rightarrow \sin y = \sin\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow y_۱ = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x_۱ = ۱۲y_۱ \Rightarrow x_۱ = ۲۴k\pi + ۶\pi$$

$$۴\sin^۲ y - ۳ = ۰ \Rightarrow \sin y = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_{۲,۳} = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ y_۴ = ۲k\pi + \frac{۴\pi}{۳} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_{۲,۳} = ۲۴k\pi \pm ۴\pi \\ x_۴ = ۲۴k\pi + ۸\pi \\ x_۵ = ۲۴k\pi + ۱۶\pi \end{vmatrix}$$

حل مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

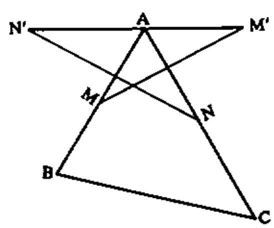
۱- الف: با توجه به خاصیت تقارن محوری داریم:

$$M'\hat{A}N = N\hat{A}M = ۶۰°$$

$$N'AM = M\hat{A}N = ۶۰°$$

$$M'\hat{A}N' = M'\hat{A}N + N\hat{A}M = M\hat{A}N'$$

$$\Rightarrow M'\hat{A}N' = ۳M\hat{A}N = ۳ \times ۶۰ = ۱۸۰°$$



پس سه نقطهٔ M' و A و N' روی یک خط راست واقعند.

ب)

$$AM' = AM = \frac{AB}{۲} \qquad (۱)$$

$$AN' = AN = \frac{AC}{۲} \qquad (۲)$$

$$M'N' = AM' + AN' = \frac{۱}{۲}(AB + AC)$$

درصورتی که $\hat{A} \neq ۶۰°$ باشد سه نقطهٔ M' و A و N' روی یک خط راست قرار نخواهند داشت و در این‌صورت مثلث $M'AN'$ به‌وجود خواهد آمد که در این مثلث:

$$M'N' < AM' + AN' = \frac{۱}{۲}AB + \frac{۱}{۲}AC$$

$$\Rightarrow M'N' < \frac{۱}{۲}(AB + AC)$$

۲- می‌دانیم که اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی چند بردار بر یک محور، برابر است با جمع جبری تصاویر آن بردارها بر آن محور. پس اگر $\vec{V} = \vec{V}_۱ + \vec{V}_۲ + \vec{V}_۳ + \vec{V}_۴$ اختیار شود داریم:

$$+۱ = ۴\sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۴} + ۶\cos\frac{\pi}{۳} + ۵\cos\frac{\pi}{۲} + ۱۲\cos(ox, \vec{V}_۴)$$

$$\Rightarrow ۱ = ۴ + ۳ + ۰ + ۱۲\cos(ox, \vec{V}_۴)$$

$$\Rightarrow \cos(ox, \vec{V}_۴) = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow (ox, \vec{V}_۴) = ۱۲۰°$$

۳-

$$|\vec{a}| = ۲\sqrt{۲} \ ,\ |\vec{b}| = ۶ \quad (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{۴}$$

$$\vec{a}.(\vec{a} - ۳\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} - ۳\vec{a}.\vec{b} =$$

$$|\vec{a}|^۲ - ۳|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= (۲\sqrt{۲})^۲ - ۳(۲\sqrt{۲})(۶)\cos\frac{\pi}{۴} = ۸ - ۳۶ = -۲۸$$

۴- شرایط معین بودن تابع به قرار زیر است:

$$۱)\ ۲x^۲ - ۲x + ۵ \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۴x^۲ - ۲x + ۵ = ۰ \\ \Delta' = ۱ - ۲۰ = -۱۹ < ۰ \end{cases}$$

چون ضریب $x^۲$ مثبت است و $\Delta < ۰$ پس عبارت همواره مثبت است

$$۲)\ ۱ + ۲x \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{-۱}{۲}$$

$$۳)\ (۱ - \sqrt{۱ + ۲x})^۲ \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۰$$

$$۴)\ \left(\frac{۲x}{۱ - \sqrt{۱ + ۲x}}\right)^۲ < ۲x + ۹$$

$$\Rightarrow \frac{۴x^۲}{(۱ - \sqrt{۱ + ۲x})^۲} < ۲x + ۹$$

$$\frac{۴x^۲(۱ + \sqrt{۱ + ۲x})^۲}{(۱ - \sqrt{۱ + ۲x})^۲(۱ + \sqrt{۱ + ۲x})^۲} < ۲x + ۹$$

فرض می‌کنیم $y = \sqrt{۱ + ۲x}$

$$(۱ + \sqrt{۱ + ۲x})^۲ < ۲x + ۸$$

پس داریم:

$$(۱ + y)^۲ < y^۲ + ۷ \Rightarrow ۱ + y^۲ + ۲y < y^۲ + ۷ \Rightarrow y < ۳$$

$\sqrt{۱+۲x} < ۳ \Rightarrow x < ۴$

و در نتیجه، دامنهٔ تابع از اشتراک شرایط اخیر حاصل می‌شود:

$$D_f = \left\{x \mid \frac{-۱}{۲} \le x < ۴ \ , \ x \neq ۰\right\}$$

۵-

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} (\sin x - \cos x)\, tg\, ۲x = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{cotg\, ۲x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{tg(\frac{\pi}{۲}-۲x)} = \sqrt{۲}\lim \frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{tg(-۲)(x-\frac{\pi}{۴})}$$

با فرض:

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{۴} = \alpha \\ x\to\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \alpha\to ۰ \end{cases}$$

داریم:

$$=\sqrt{۲}\lim_{\alpha\to۰}\frac{\sin\alpha}{tg(-۲\alpha)} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}\lim_{\alpha\to۰}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\times\frac{-۲\alpha}{tg(-۲\alpha)}$$

$$=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\lim_{\alpha\to۰}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\times\lim_{\alpha\to۰}\frac{-۲\alpha}{tg(-۲\alpha)}$$

$$=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\times۱\times۱=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

۶-

$۵\sin x = \sin(۲y+x)$

$\Rightarrow ۵\sin(x+y-y)=\sin(x+y+y)$

$\Rightarrow ۵\sin(x+y)\cos y - ۵\cos(x+y)\sin y$

$=\sin(x+y)\cos y+\cos(x+y)\sin y$

$\Rightarrow ۴\sin(x+y)\cos y = ۶\cos(x+y)\sin y$

پس از تقسیم طرفین بر عبارت $۲\cos y\cos(x+y)\neq۰$ داریم:

$۲tg(x+y)=۳tg\, y$

۷- الف) چون $\sin ۳۰° = \frac{۱}{۲}$ و $\sin ۹۰° = ۱$ پس باید ثابت کنیم:

$$۸\sin ۱۰°\sin ۵۰°\sin ۷۰° = ۱$$

می‌دانیم:

$\sin ۷۰° = \cos ۲۰°, \sin ۵۰° = \cos ۴۰°, \sin ۸۰° = \cos ۱۰°$

طرف چپ تساوی را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{۴\times۲\sin۱۰°\cos۱۰°\sin۵۰°\sin۷۰°}{\cos۱۰°}$$

$$=\frac{۴\sin۲۰°\cos۲۰°\sin۵۰°}{\cos۱۰°}=\frac{۲\sin۴۰°\sin۵۰°}{\cos۱۰°}$$

$$=\frac{۲\sin۴۰°\cos۴۰°}{\cos۱۰°}=\frac{\sin۸۰°}{\cos۱۰°}=\frac{\cos۱۰°}{\cos۱۰°}=۱$$

ب) طرف چپ را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۲\sin۵°}(۲\sin۵°\sin۱۰° + ۲\sin۵°\sin۲۰° + ۲\sin۵۰°\sin۳۰° + ۲\sin۵°\sin۴۰° + ۲\sin۵°\sin۵۰°)$$

پس خواهیم داشت:

$$=\frac{۱}{۲\sin۵°}(\cos۵°-\cos۱۵°+\cos۱۵°-\cos۲۵°+\cos۲۵° - \cos۳۵°+\cos۳۵°-\cos۴۵°+\cos۴۵°-\cos۵۵°)$$

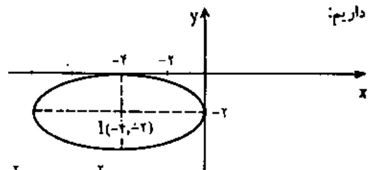
و در نتیجه پس از اختصار لازم داریم:

$$=\frac{۱}{۲\sin۵°}(\cos۵°-\cos۵۵°)=\frac{۲\sin۳۰°\sin۲۵°}{۲\sin۵°}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin۲۵°\ \cos cs\ ۵°$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱- با توجه به شکل زیر مشاهده می‌شود که محور کانونی بیضی فوق موازی محور طولها است. پس $a = ۴$ و $b = ۲$ است. پس داریم:



$$\frac{(x+۴)^۲}{۱۶}+\frac{(y+۲)^۲}{۴}=۱$$

۲- داریم: $a=b$ و $a^۲+b^۲=c^۲$ و $O'(۳,-۳)\ , c=۳\sqrt{۲}$

$$\Rightarrow ۲a^۲=c^۲\Rightarrow۲a^۲=۱۸\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=۳, a=b=۳$$

پس داریم:

$$\frac{(x-۳)^۲}{۹}-\frac{(y+۳)^۲}{۹}=۱\Rightarrow(x-۳)^۲-(y+۳)^۲=۹$$

۳- مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم، بر سهمی می‌توان رسم کرد خطِ هادی سهمی است، پس داریم:

$$(y+۳)^۲=-۸(x-۲)$$

$$\Rightarrow S(\alpha=۲,\beta=-۳)\ ,\ ۲p=-۸\Rightarrow p=-۴$$

معادلهٔ خط هادی سهمی: $x=\alpha-\frac{p}{۲}=۲+\frac{۴}{۲}=۴\Rightarrow x-۴=۰$

۴- داریم:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{tg^{۲n}x}{\cos^۲x}dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}tg^{۲n}x(۱+tg^۲x)dx$$

$$=\left[\frac{tg^{۲n+۱}x}{۲n+۱}\right]_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{tg^{۲n+۱}(\frac{\pi}{۴})}{۲n+۱}=\frac{۱}{۲n+۱}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{۱}{۲n+۱}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{۲n+۱}=\frac{۱}{۲}$$

حل مسائل مثلثات سال چهارم تجربی

۱- به ترتیب می‌توان نوشت:

$a(\sin x\pm\cos x)+b\sin x\cos x=c$

$a(\sin x\pm\cos x)=c-b\sin x\cos x$

$a^۲(۱\pm\sin۲x)=(c-\frac{b}{۲}\sin۲x)^۲$

$a^۲\pm a^۲\sin۲x=c^۲-bc\sin۲x+\frac{b^۲}{۴}\sin^۲۲x$

پس از اختصار لازم داریم:

$\frac{b^۲}{۴}\sin^۲۲x-(bc\pm a^۲)\sin۲x+(c^۲-a^۲)=۰$

شرط وجود جواب: $\Delta=(bc\pm a^۲)^۲-b^۲(c^۲-a^۲)\ge۰$

پس از اختصار لازم داریم: $\Rightarrow \quad \Delta=a^۲\pm۲bc+b^۲\ge۰$

برای معادلهٔ $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x=c$ باید داشته باشیم: $\Delta=a^۲-۲bc+b^۲\ge۰$

پس اگر $\Delta<۰$ و یا $a^۲+b^۲<۲bc$ معادله فوق ریشه حقیقی ندارد.

همچنین برای معادلهٔ $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x=c$ باید داشته باشیم: $\Delta=a^۲-۲bc+b^۲\ge۰$

۲-

$a=b\cos\hat C+c\cos\hat B$

$a^۲=b^۲\cos^۲\hat C+c^۲\cos^۲\hat B+۲bc\cos\hat C\cos\hat B$

می‌دانیم: $\cos\hat A=-\cos(\hat B+\hat C)$

پس داریم: $\cos\hat A=-(\cos\hat B\cos\hat C-\sin\hat B\sin\hat C)$

$\Rightarrow\cos\hat B\cos\hat C=\sin\hat B\sin\hat C-\cos\hat A$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$a^۲=b^۲\cos^۲\hat C+c^۲\cos^۲\hat B+۲bc\sin\hat B\sin\hat C-۲bc\cos\hat A$

$=(۲R\sin\hat B)(۱-\sin^۲\hat C)+(۲R\sin\hat C)^۲(۱-\sin^۲\hat B)$

$+۲(۲R\sin\hat B)(۲R\sin\hat C)-۲bc\cos\hat A$

پس از اختصار لازم داریم:

$=۴R^۲(\sin^۲\hat B+\sin^۲\hat C)-۲bc\cos\hat A$

$=۴R^۲(\frac{b^۲+c^۲}{۴R^۲})-۲bc\cos\hat A=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat A$

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

حل:

۱	۱۳	۳	۲۵	۲۳
۲۱	۱۸	۱۱	٦	۹
۲۲	۱۹	۱۲	۱۰	۲
۵	۸	۱۵	۲۰	۱۷
۱٦	۷	۲۴	۴	۱۴

جواب ۲

حل: با هر (م) که در منتهی الیه سمت چپ، راست، پایین، وبالای شکل قرار دارد یکبارکلمهٔ مهر را می‌توان خواند پس: ۴=۴×۱ و با هر (م) که در گوشهٔ شکل واقع است ۲ بار کلمهٔ مهر خوانده می‌شود. پس ۸=۲×۴ بار؛ لذا در مجموع به **۱۲**صورت مـی تـوان کـلمهٔ مـهر را از روی شکـل داده شـده خـوانـد. زیـرا: ۱۲=۸+۴

جواب ۳

حل: رقم اوّل باید عددی باشد که پس از ضرب شدن در ۷ حاصل آن به ٦ ختم شود. این عدد فقط می‌تواند ۸ باشد. پس خواهیم داشت:

$$* * * ۴ * ۸ \times ۷ = ٦۷۴۳ * ۵٦$$

۸ × ۷ می‌شود ۵٦ پس برای این‌که رقم دوّم حاصل ضرب ۵ باشد لازم است که حاصل ضرب ۷ در رقم دوّم عدد اوّل به صفرختم شود پس رقم دهگان این عدد فقط صفرمی‌تواند باشد.

یعنی داریم:

$$* * * ۴۰۸ \times ۷ = ٦۷۴۳ * ۵٦$$

رقم صدگان حاصل ضرب ۸ می‌باشد زیرا: ۲۸ = ۴ × ۷ به ۸ ختم می‌شود. پس:

$$* * * ۴۰۸ \times ۷ = ٦۷۴۳۸۵٦$$

به همین ترتیب رقمهای دیگر مشخص می‌شود و خواهیم داشت:

$$۹٦۳۴۰۸ \times ۷ = ٦۷۴۳۸۵٦$$

جواب ۴

حل: اگر در این محّل فقط آدم وجود داشت چون ۲۲ سر وجود دارد پس مجموع پاهای آنها ۴۴ = ۲ × ۲۲ می‌شد. امّا چون تعداد پاها ۷۲ تاست پس ۲۸ = ۴۴ − ۷۲ یعنی ۲۸ پااضافه می‌باشد وچون هر اسب از هرآدم ۲ پابیشتردارد، پس ۱۴ = ۲ : ۲۸ بنابراین: ۱۴ اسب و ۸ آدم در آن محّل هستند.

In the name of God

Borhān

VOL. 3. No. 2
Serial numbers ; 9
Winter 1994

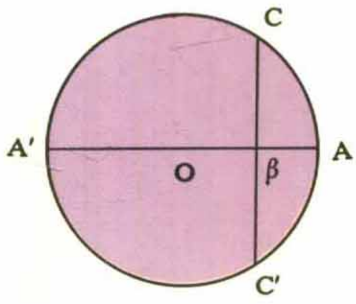
Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication- No. 268, Iranshahr-e -Shomali Ave. Tehran Iran Post code: 15875

Contents:

1. The first word
2. You, too, may be successful in your mathematics lessons — Parviz shahriari
3. Cubic equation and its solution — A. Ghandehari and M. Gkamsari
4. Instruction of translation of mathematics articles — Hamid Reza Amiri
5. Locus — M. H. Rostami
6. A brief history of Persian mathematics journals
7. Fundamental concepts and axioms in solid geometry — Parvis shahriari
8. Propositional functions and quantifiers — Golam Reza Yassipour
9. Rotation in analitic geometry — M. A. Gitizadeh
10. Homogeneous algebraic parameters — Ahmad Sharafeddin
11. Acquaintance with famous mathematicians — Golam Reza Yassipour
12. Solving a fundamental problem of mathematics by elementary methods
13. Short articles of authentic mathematics journals — Naghmeh Sharikzadeh
14. Graph theory — Golam Reza Yassipour
15. Pigeonhole principle — Mehdi Nassaji
16. Answers to letters
17. Solutions of contest problems
18. Contest problems
19. Problems — Amiri, Ghandehari, Rostami, Hashemi
20. Solutions and hints of problems

ابوالوفای بوزجانی و رسم هفت ضلعی منتظم



گوس، ریاضی‌دان بزرگ آلمانی در سدهٔ ۱۹، روشن کرد: هرچندضلعی منتظم دلخواه را نمی‌توان به یاری خط کش و پرگار در دایره محاط کرد. گوس، در ضمن ثابت کرد، اگر p عددی اول و m توانی از ۲ باشد و داشته باشیم:

$$p = ۲^{m} + ۱$$

آن‌وقت می‌توان راهی برای رسم p ضلعی منتظم محاط دردایره پیداکرد. مثلاً برای

$۴ = ۲^{۲}$ و $۱۷ = ۲^{۴} + ۱$

خودگوس، روش رسم ۱۷ ضلعی منتظم محاط دردایره را، به یاری خط کش و پرگار، پیداکرد.

باوجوداین، ریاضی‌دانان ایرانی ـ که در دوران دوم ریاضیات کاربردی (از دوران‌های تکامل ریاضیات) به‌سرمی‌بردند، می‌کوشیدند تا روش رسم چندضلعی‌های منتظم محاط در دایره را، به تقریب و به‌نحوی که در عمل لازم است، پیداکنند.

به‌عنوان‌نمونه، ابوالوفای‌بوزجانی (سده چهارم هجری قمری = سده دهم میلادی) این روش تقریبی را برای به‌دست آوردن پاره‌خط راستی که برابر با ضلع هفت ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مفروض باشد، داده‌است. روش او، از روی شکل روشن است:

$$|AA'| = ۲R\ ;\ \ |AB| = \frac{R}{۲}\ ;\ CC' \perp AA'$$

پاره‌خط راست CB (یا C'B)، به‌تقریب، طولی برابر با طول ضلع هفت ضلعی منتظم محاط در دایره دارد.

آیا می‌توانید میزان خطا را، در این روش تقریبی، پیداکنید؟

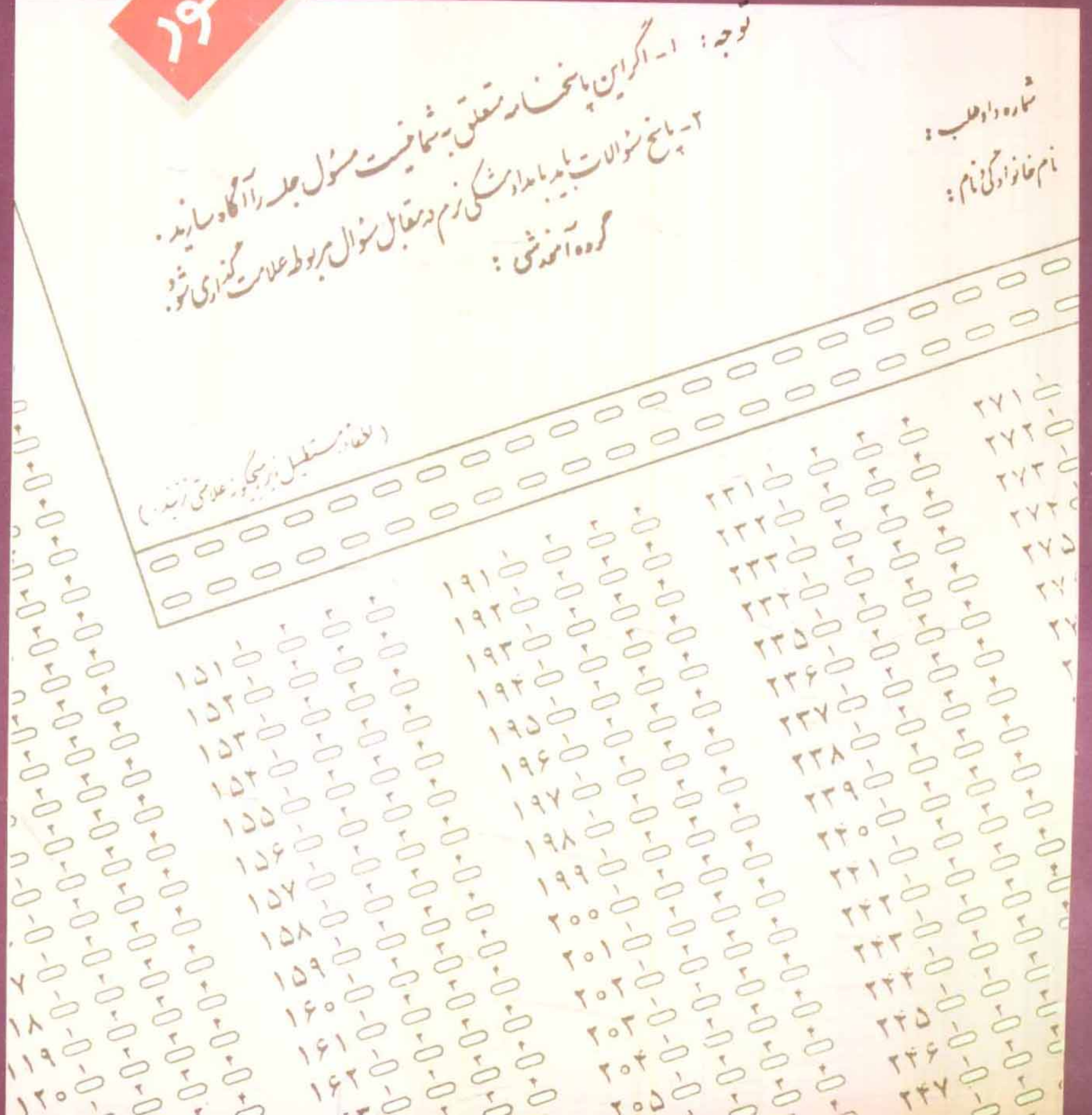
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱

ویژه نامه کنکور



زمستان ۱۳۷۲ بها ۱۲۵۰ ریال چاپ دوم

بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

مؤلفین:

• حمیدرضا امیری • محمدهاشم رستمی

• مهدی قمصری • احمد قندهاری

• سید محمدرضا هاشمی موسوی

(با تشکر از همکاری و راهنمایی‌های ارزندهٔ آقایان:

پرویز شهریاری و غلامرضا یاسی‌پور)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا: مهرزاد طاهری

• رسام: فرخ نیکزاد • تیراژ: ۱۵۰۰۰ نسخه

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحک واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

• مقدمه ۱

• تستهای جبر و آنالیز / مهدی قمصری و احمد قندهاری ۲

• تستهای مثلثات / مهدی قمصری و احمد قندهاری ۸

• تستهای ریاضیات جدید / حمیدرضا امیری ۱۳

• تستهای هندسه / محمدهاشم رستمی ۲۲

• تستهای جبر و مثلثات تجربی / محمدرضا هاشمی ۳۰

• پاسخ تشریحی تستهای جبر و آنالیز / ۴۱

• پاسخ تشریحی تستهای مثلثات / ۴۷

• پاسخ تشریحی تستهای ریاضیات جدید / ۵۲

• پاسخ تشریحی تستهای هندسه / ۶۲

• پاسخ تشریحی تستهای جبر و مثلثات تجربی / ۷۳

☐ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه شهید بهرام جوینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۶۰۰۷، ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، فاکس ۸۸۲۰۵۹۹

بسمه تعالی

مقدمه

مؤلفین ویژه‌نامه با اینکه موافقت چندانی با امتحان کنکور به صورتی که هم اکنون رایج است، یعنی به صورت تستهای چهارجوابی، آن هم در موضوع ریاضیات، ندارند و وجود چنین امتحاناتی را به ضرورت پذیرفته‌اند، و به این ترتیب باز هم به ضرورت، دست به تألیف ویژه‌نامه‌ای در مورد تستهای ریاضیات زده‌اند، این‌کار را با توجه به اهداف زیر به انجام رسانیده‌اند:

۱ـ سعی بر این داشته‌اند که نکات مهمّ تستهای کنکور را بیان کرده و خطاهای احتمالی آنها را بنمایانند.

۲ـ کوشیده‌اند در این زمینه سؤالاتی را مطرح کنند که بیش از آنکه به حافظه مربوط باشند به تفکر نیاز داشته‌باشند و در اصل همین گونه سؤالات را، به خصوص در زمینه ریاضیات، جایز می‌دانند و به دست‌اندرکاران سؤالات کنکور توصیه می‌کنند که حتی‌المقدور از نوع همین سؤالات مطرح کنند. (پیشنهاد می‌شود مسئولین محترم و دست‌اندرکاران طرح سؤالات و تستهای کنکور اولاً: از تستهای پنج جوابی استفاده کنند و ثانیاً: تستها را مفهومی‌تر طرح کرده و مدت پاسخگویی به هر تست را ۲/۵ الی ۳ دقیقه درنظر بگیرند که هم احتمال زدن تست به صورت شانسی کم شود و هم دانش‌آموزانی که مطالب درسی را به صورت عمیق‌تر درک کرده‌اند جوابگو باشند.)

۳ـ بر این نیت بوده‌اند که تستهای کنکور را از راههای حتی‌المقدور ساده و متفاوت با راههای مکرری که در کتب مشابه تکرار شده‌اند حل کنند و به این ترتیب غنای راههای حل یک مسأله را به دانش آموزان نشان دهند.

۴ـ در طرح سؤالات آمده در متن، با این مقصود حرکت کرده‌اند که مطالب اصلی و کلیدی ریاضیات را مطرح کنند و با سؤالاتی معدود، حداکثر بررسی معلومات را به‌عمل آورند.

به هر صورت این ویژه‌نامه شامل حدوداً ۳۷۰ تست با حل تشریحی در زمینه‌های جبر و آنالیز ـ مثلثات، ریاضیات جدید و هندسه (ریاضی و تجربی) از سالهای اول تا چهارم می‌باشد.

و اما تا چه اندازه در این اهداف توفیق یافته‌اند خدا داناتر است و خوانندگان نکته‌سنج خواهند دانست و البته تذکر خواهند داد، و به خصوص، تقاضا داریم که کاستیها را خاطر نشان کنند تا در چاپهای آینده مرتفع گردد.

والسلام خرداد ماه ۱۳۷۲

تستهای جبر و آنالیز

(سالهای اوّل، دوّم، سوّم، و چهارم ریاضی)

● مهدی قمصری و احمد قندهاری

۱ - حاصل $\frac{1}{\sqrt[7]{(3-2\sqrt{2})^2}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt[7]{17+6\sqrt{2}}$ ۲) $\sqrt[7]{17+12\sqrt{2}}$

۳) $\frac{1}{\sqrt[7]{(3-\sqrt{2})^5}}$ ۴) $\sqrt[7]{(3-2\sqrt{2})^5}$

۲ - اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله $x^2+2ax-3a^2=0$ باشد و رابطه $(x'+x'')(x'-x'')^2=4$ برقرار باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱-

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۳ - اگر $\begin{cases}5x+3y+7z=1/7\\2x+y+3z=0/3\end{cases}$ ، آنگاه $(x+y+z)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۱/۳

۳) ۱/۴ ۴) ۱/۱

۴ - اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله $x^3-6x^2-4x+(m-1)=0$ باشد و داشته باشیم:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}=1$$

آنگاه مقدار m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۷ ۴) ۹

۵ - اگر در بسط $(2x+2y)^n$ ضریب جمله سوم مساوی ضریب جمله پنجم باشد بزرگترین ضریب بسط فوق کدام است؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۱۴۸۰

۳) ۱۲۸۰ ۴) ۱۳۰۰

۶ - جوابهای نامعادله $(x-1)^2-|x-1|-2<0$ ، کدام است؟

۱) $|x|<2$ ۲) $-1<x<4$

۳) $-2<x<3$ ۴) $-1<x<3$

۷ - اگر $f(x)=x^2-3x+2$ و $g(x)=x^3-3x$ ، معادله $f[g(x)]=0$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

۱) دو ۲) چهار

۳) پنج ۴) شش

۸ - اگر $f(x)=ax^7+bx^5+cx^3-7$ و $f(-11)=11$ ، آنگاه $f(11)$ برابر است با:

۱) ۱۱- ۲) ۱۱

۳) ۲۵ ۴) ۲۵-

۹ـ واسطه هندسی دو عدد صحیح مثبت $4\sqrt{3}$ و واسطه توافقی آنها $(\frac{48}{7})$ است واسطه عددی آنها کدام است؟

۱) $\frac{13}{2}$
۲) 7
۳) $\frac{15}{2}$
۴) 9

۱۰ـ تابع حقیقی به معادله $f(x)=\begin{cases} 3 & x\leq 2 \\ 4x-5 & x\geq 2 \end{cases}$ را با کدام یک از ضابطه‌های زیر می‌توان نشان داد؟

۱) $f(x)=-2x+1+2|x-2|$
۲) $f(x)=2x-1+2|x-2|$
۳) $f(x)=2x-1-2|x-2|$
۴) $f(x)=2x+1+2|x-2|$

۱۱ـ اگر $x\geq 1$ و $f(x)=x^2-2x$، زاویه بین منحنی تابع f و منحنی تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $\text{Arctg}\frac{12}{35}$
۲) 45°
۳) 60°
۴) $\text{Arctg}\frac{15}{8}$

۱۲ـ اگر دامنه تعریف رابطه $y^2-2xy+4x-m=0$، مجموعه R باشد. حدود m، کدام است؟

۱) $m<4$
۲) $m\leq 4$
۳) $m>4$
۴) $m\geq 4$

۱۳ـ اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه همواره داریم:

۱) f در تمام نقاط این فاصله حدّ دارد.
۲) f در تمام نقاط این فاصله مشتق‌پذیر است.
۳) f در دو نقطه از این فاصله حدّ ندارد.
۴) f حداکثر در دو نقطه از این فاصله حدّ ندارد.

۱۴ـ تابع حقیقی به معادله $f(x)=||x|-2|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) یک
۲) دو
۳) سه
۴) صفر

۱۵ـ اگر مقدار مینیمم تابع به معادله $y=\frac{x^2+mx+16}{(x+1)^2}$ صفر باشد، طول آن کدام است؟

۱) صفر
۲) ± 4
۳) $\pm\frac{1}{4}$
۴) ± 8

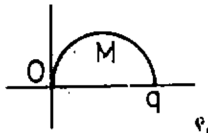
۱۶ـ مینیمم فاصله منحنی به معادله $y=x^2-2x$ از خط $y=2x-9$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
۲) $\sqrt{5}$
۳) $2\sqrt{5}$
۴) $5\sqrt{5}$

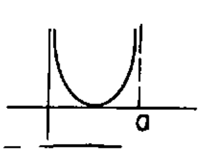
۱۷ـ اگر منحنی تابع به معادله $y=3x+\sqrt{ax^2-18x-1}$ مجانب افقی داشته باشد معادله مجانب مایل آن کدام است؟

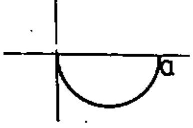
۱) $y=6x$
۲) $y=6x-3$
۳) $y=6x+3$
۴) $y=-6x$

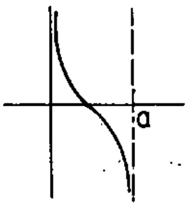
۱۸ـ اگر نمودار تابع f به صورت

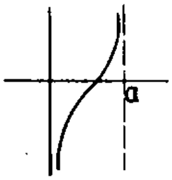


باشد، آنگاه نمودار تابع f' کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۹ـ اگر منحنی تابع به معادله $y=\frac{x^{2}+mx+1}{-\frac{m}{2}x^{2}-8x+5}$ و $m>0$

محور تقارن داشته باشد، معادله محور تقارن آن کدام است؟

۱) $y=2$ ۲) $y=-2$

۳) $x=2$ ۴) $x=-2$

۲۰ـ اگر $0<x+a<2$ و $y=\text{Arctg}\frac{x+a}{1-ax}$، آنگاه (dy) کدام است؟ (x متغیر مستقل و a عدد ثابت است.)

۱) $\frac{dx}{1-x^{2}}$ ۲) $\frac{dx}{1+x^{2}}$

۳) $\frac{2dx}{1+x^{2}}$ ۴) $\frac{dx}{1+a^{2}}$

۲۱ـ اگر $f'(2x-1)=4x-1$ و منحنی f از نقطه $A\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ بگذرد، آنگاه $f(4)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶

۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۲۲ـ معادله یک منحنی که قائمهای نقاط مختلفه‌اش از نقطه $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ بگذرد کدام است؟ $(k<0)$

۱) $(x-1)^{2}+(y-2)^{2}=k$

۲) $x^{2}+y^{2}=k^{2}$

۳) $(x+1)^{2}+(y+2)^{2}=k^{2}$

۴) $(x-1)^{2}+(y-2)^{2}=k^{2}$

۲۳ـ هرگاه α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم $x^{3}+px+q=0$ باشند حاصل

$\frac{1}{\gamma+\alpha-2\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma-2\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta-2\gamma}$ کدام است؟

۱) $\frac{p}{q}$ ۲) $\frac{p}{3q}$

۳) $-\frac{p}{3q}$ ۴) $-\frac{p}{q}$

۲۴ـ برای آنکه اعداد ۲- و ۱ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم $ax^{2}+bx+c=0$ باشند لازم است:

۱) $2a+c=0$ ۲) $2a-c=0$

۳) $2c-a=0$ ۴) $2c+a=0$

۲۵ـ در معادلهٔ درجه دوّم $4x^{2}-41x+4=0$ حاصل $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}+\sqrt{x'x''}$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{2}$ ۲) $\frac{11}{2}$

۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۲۶ـ هرگاه α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم $x^{3}+px+q=0$ باشند حاصل $\frac{\alpha^{2}}{\beta\gamma}+\frac{\beta^{2}}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^{2}}{\alpha\beta}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۳

۳) ۲- ۴) ۲

۲۷ـ a کدام باشد تا معادلات درجه سوّم $x^{3}-5x^{2}+6x-2a=0$ و $x^{3}-5x^{2}+5x-a=0$ دارای یک ریشهٔ مشترک باشند؟

۱) $a=2$ ۲) $a=3$

۳) $a=4$ ۴) $a=5$

۲۸ـ مجموع ضرایب x و x^{2} و x^{3} و ... و x^{35} در بسط عبارت $(2x-1)^{15}(3x^{2}-x-1)^{10}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱

۳) ۲- ۴) ۱-

۲۹ـ ضریب x در مجموع

$(x+1)+(x+1)^{2}+...+(x+1)^{9}+(x+1)^{10}$

کدام است؟

۱) ۱۷۵ ۲) ۱۶۵

۳) ۱۵۵ ۴) ۱۴۵

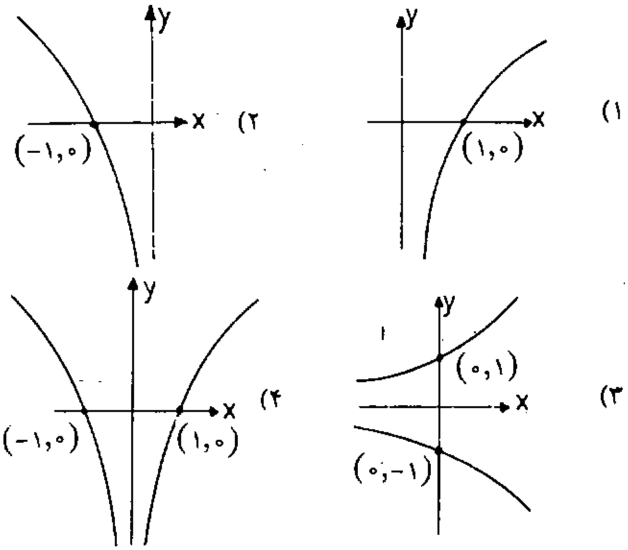
۳۰- جملهٔ گویا در بسط $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{2})^{11}$ کدام است؟

۱) ۹۹۰ ۲) ۱۹۸۰
۳) ۲۹۷۰ ۴) ۳۹۶۰

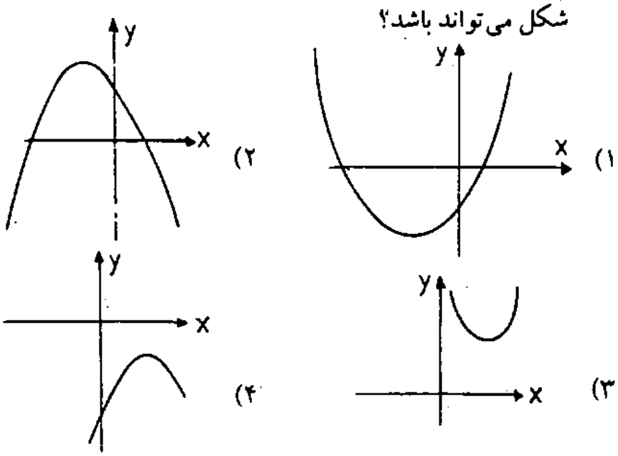
۳۱- مجموع n جملهٔ اول یک تصاعد هندسی $2^{n+1}-2$ می‌باشد جمله نهم این تصاعد کدام است؟

۱) ۲۰۴۸ ۲) ۱۰۲۴
۳) ۵۱۲ ۴) ۲۵۶

۳۲- نمودار $y=\log|x|$ کدام یک از اشکال زیر است؟



۳۳- با شرط $a<0$ و $b^2<ac$ نمودار $y=ax^2+2bx+c$ کدام شکل می‌تواند باشد؟



۳۴- هرگاه تابع $y=ax^3+(a+b)x^2-2x+b-2$ فرد باشد حاصل $b-2a$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۴
۳) ۶ ۴) ۴

۳۵- برد تابع $f(x)=\frac{\sqrt{3}x^2+2x-\sqrt{3}}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $y\geq 2$ ۲) $2\geq y\geq -2$
۳) $0\geq y\geq -2$ ۴) $2\geq y\geq -1$

۳۶- $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-[x]}{x}$ برابر است با: ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) ۴ ۲) ۳
۳) ۲ ۴) حد ندارد

۳۷- منحنی تابع $y=x^4+2x^2+ax+b$ به‌ازاء همهٔ مقادیر a و b:

۱) دو نقطهٔ ماکسیمم و یک نقطهٔ می‌نیمم دارد.
۲) دو نقطهٔ می‌نیمم و یک نقطهٔ ماکسیمم دارد.
۳) یک نقطه می‌نیمم دارد.
۴) یک نقطه ماکسیمم دارد.

۳۸- هرگاه $f(x)=\frac{1}{3}tg^3x$ باشد $\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+2h)-f(\frac{\pi}{4}-h)}{h}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۳۹- تابع $f(x)=2x-\sin(x-2)$ مفروض است. حاصل $f(2)+f^{-1}(4)$ کدام است؟ f^{-1} تابع وارون f می‌باشد.

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۴۰- هرگاه $x=1$ طول نقطهٔ بازگشت منحنی $y=\sqrt[3]{(x^2-2ax+a^2)x}$ باشد a کدام است؟

۱) $a=0$　۲) $a=-1$

۳) $a=1$　۴) $a=2$

۴۱- تابع وارون $y=2x+1-\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ خط مجانب مایلی به کدام یک از معادلات زیر دارد؟

۱) $y=2x+1$　۲) $x=2y+1$

۳) $y=2x$　۴) $x=2y$

۴۲- منحنی تابع پارامتری $y=\frac{2t-\sqrt{1+t^2}}{2t+\sqrt{1+t^2}}$ و $x=\frac{t^3}{t^2-1}$ چند مجانب افقی دارد؟

۱) ۴　۲) ۳

۳) ۲　۴) ۱

۴۳- توابع زیر از $R \to R$ تعریف شده‌اند کدام تابع پوشا می‌باشد؟

۱) $y=\frac{2x^3-3}{x^3+1}$　۲) $y=\sqrt[3]{x^3+3x+1}$

۳) $y=tg^2x$　۴) $y=x^4-4x$

۴۴- شعاع قاعده یک عرقچین کروی را به‌اندازه $\frac{1}{10\pi}$ تغییر می‌دهیم. تغییر تقریبی حجم عرقچین کدام است؟ (h ارتفاع عرقچین است.)

۱) $\frac{1}{5}rh$　۲) $\frac{1}{10}rh$

۳) $\frac{1}{15}rh$　۴) $\frac{1}{20}rh$

۴۵- توابع $f=\{(1,2)و(2,5)و(0,3)\}$ و $g=\{(2,4)و(3,1)\}$ مفروضند. وارون تابع gof کدام است؟

۱) $\{(2,3)و(1,4)\}$　۲) $\{(1,0)و(4,1)\}$

۳) $\{(5,1)و(0,2)\}$　۴) $\{(1,3)و(4,2)\}$

۴۶- $\sqrt[6]{65}$ تا سه رقم اعشار کدام است؟

۱) ۲/۰۰۸　۲) ۲/۰۰۷

۳) ۲/۰۰۶　۴) ۲/۰۰۵

۴۷- حاصل $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$　۲) $\frac{\pi}{12}$

۳) $\frac{\pi}{4}$　۴) $\frac{\pi}{2}$

۴۸- حاصل $\int^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)[\sin x+\cos x]\,dx$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) ۲　۲) ۱

۳) $\frac{\pi}{2}$　۴) π

۴۹- سطح محصور بین منحنی $y=\frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}$ و محور xها و خطوط $x=\frac{1}{2}$ و $x=\frac{5}{2}$ کدام است؟

۱) ۴　۲) ۳

۳) ۲　۴) ۱

۵۰- حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی $y=\frac{1}{\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})}$ ومحور xها و خطوط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{6}$ حول محور xها کدام است؟

۱) $\pi(\sqrt{3}-1)$　۲) $\pi(\sqrt{3}+1)$

۳) $2\pi(\sqrt{3}-1)$　۴) $2\pi(\sqrt{3}+1)$

۵۱- کوچکترین دورهٔ تناوب تابع
$y=\cot g 4\pi x-\operatorname{tg} 2\pi x+12x-[12x]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۵۲- خطی که نقاط تلاقی دو منحنی $y=\frac{2x+1}{x-1}$ و $y=\frac{3x-2}{x+1}$ را به‌هم وصل می‌کند زاویه حادهٔ α با محور xها می‌سازد، α کدام است؟

۱) $\alpha=\operatorname{Arctg}2$ ۲) $\alpha=\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}$

۳) $\alpha=\operatorname{Arctg}3$ ۴) $\alpha=\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}$

۵۳- هرگاه $x+y=4$ و $x,y>0$ باشند مینیمم $S=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶

۳) ۴ ۴) ۲

۵۴- کمترین مقدار عبارت $x^2-3x+\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -3

۳) -2 ۴) ۰

۵۵- هرگاه $\lim_{n\to\infty}(\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha+\dots+\sin\alpha\cos^n\alpha)=\cot g 10$ باشد، α کدام است؟

۱) $\alpha=10^\circ$ ۲) $\alpha=20^\circ$

۳) $\alpha=40^\circ$ ۴) $\alpha=80^\circ$

۵۶- با فرض $\log 2=0/301$ عدد 125×2^{60} دارای چند رقم می‌باشد؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۲

۳) ۲۱ ۴) ۲۰

تستهای مثلثات

(سالهای دوّم و سوّم ریاضی)

● مهدی قمصری و احمد قندهاری

۱ـ اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ و $y=\sin x+\cos x$ ، آنگاه حدود y کدام است؟

۱) $-۱<y<۱$ ۲) $-۱\le y<\sqrt{۲}$
۳) $-\sqrt{۲}\le y<-۱$ ۴) $-\sqrt{۲}<y<\sqrt{۲}$

۲ـ اگر
$$\lg A = ۲\lg ۲ + \lg \sin ۱۰^\circ + \lg \cos ۲۰^\circ + \lg \sin ۵۰^\circ$$
آنگاه $\lg\frac{A}{۲}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲
۳) -۳ ۴) -۴

۳ـ اگر $\sin\frac{x}{۲} - \cos\frac{x}{۲}$، ماکریمم باشد، عبارت $(\operatorname{tg}\frac{x}{۲} + \operatorname{cotg}\frac{x}{۲})$ برابر است با:

۱) -۱ ۲) -۲
۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴ـ حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{۵} \cdot \cos\frac{۳\pi}{۵}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۵ـ معادله $\cos^۲ x=\frac{۱}{۲(۲-\sqrt{۲})}$ در فاصله $[۰ , \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) یک ۲) دو
۳) سه ۴) صفر

۶ـ به ازای چه مقادیر a معادله
$$\sin^۲ x - (۲a + ۲) \sin x + ۴a = ۰$$
وقتی $\frac{\pi}{۶} < x < \frac{۵\pi}{۶}$ باشد دارای جواب است؟

۱) $|a| < \frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴} \le a \le \frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴} < a \le \frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴} < a < \frac{۱}{۲}$

۷ـ اگر $\operatorname{tg}۳a=\operatorname{tg}۲a+\operatorname{tg}a$ آنگاه حاصل $\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}۲a.\operatorname{tg}۳a$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۱

۸ـ اگر $E(-\sin x)=۱$ آنگاه $E(\operatorname{tg}\frac{x}{۲})$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) -۱
۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۹- اگر در مثلث ABC ، $\hat{B}=n\hat{A}$ و $n \in N$ ، آنگاه حدود cosA برابر است با:

۱) $(\cos\frac{\pi}{n+1}, 1)$ ۲) $(-1, 1)$

۳) $(\cos\frac{\pi}{n}, 1)$ ۴) $(0, 1)$

۱۰- در مثلث ABC ، B>C و $\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$ ، آنگاه کدام نتیجه کامل‌تر است؟

۱) $A < \frac{\pi}{6}$ ۲) $A > \frac{\pi}{6}$

۳) $A < \frac{\pi}{3}$ ۴) $A > \frac{\pi}{3}$

۱۱- اگر $\sin x+\sin y=2$ آنگاه حاصل کسر $\frac{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin x \sin y}{\sin^6 x+\sin^6 y}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۲- در مثلث ABC، $\hat{A}=30^\circ$ و $BC=2$، ماکزیمم مساحت مثلث کدام است؟

۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $2(2+\sqrt{3})$

۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۱۳- در مثلث ABC ، زوایا تصاعد عددی می‌سازند، حاصل $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C$ برابر است با:

۱) ۱   ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) صفر

۱۴- اگر $\text{Arc}\sin x > \text{Arc}\cos x$ ، آنگاه حدود x کدام است؟

۱) $-1 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-1 \le x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $-1 < x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۵- اگر $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\gamma$ ریشه‌های معادله $ax^3+bx^2+cx+b=0$ باشد آنگاه داریم:

۱) $\alpha+\beta+\gamma = (2k-1)\frac{\pi}{2}$

۲) $\alpha+\beta+\gamma = k\pi$

۳) $\alpha+\beta+\gamma = (k\pi+\frac{\pi}{4})$

۴) $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = 1$

۱۶- در مثلث ABC ، داریم $P(P-a) = \frac{3}{4}bc$ زاویه $\hat{A}$ برابر است با: (P نصف محیط مثلث است).

۱) 60° ۲) 120°

۳) 45° ۴) 30°

۱۷- نمودار $\text{Arc}\,tgx + \text{Arc}\,tgy = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) دایره   ۲) نقطه

۳) هذلولی   ۴) دو خط راست

۱۸- با فرض $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin 2x < 0$ داریم:

۱) $\cos 5x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\cos 5x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\cos 5x = \frac{1}{2}$ ۴) $\cos 5x = -\frac{1}{2}$

۱۹ - با فرض $tg\frac{x}{2} = t$ و $t \in R$ کدام یک از روابط زیر به ازای جمیع مقادیر t صحیح است؟

۱) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ۲) $tgx = \frac{2t}{1-t^2}$

۳) $cotgx = \frac{1-t^2}{2t}$ ۴) ۱ و ۲ و ۳ با هم

۲۰ - صورت کلی جوابهای معادله $tg3x = tgx$ کدام است؟

۱) $x = \frac{k\pi}{2}$ ۲) $x = 2k\pi$

۳) $x = (2k-1)\pi$ ۴) $x = k\pi$

۲۱ - حاصل

$$S = \cos 2^\circ + \cos 4^\circ + ... + \cos 176^\circ + \cos 178^\circ$$

برابر است با:

۱) $S = 1$ ۲) $S = \frac{1}{2}$

۳) $S = -\frac{1}{2}$ ۴) $S = 0$

۲۲ - یکی از جوابهای معادله $8x^3 - 6x = \sqrt{3}$ برابر است با:

۱) $x = \sin 20^\circ$ ۲) $x = \sin 40^\circ$

۳) $x = \sin 60^\circ$ ۴) $x = \sin 80^\circ$

۲۳ - با فرض $tg\alpha$ و $cotg\alpha$ - ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم $x^2 + \frac{2}{m}x + m = 0$ حاصل $tg6\alpha$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1

۳) $\sqrt{3}$ ۴) $-\sqrt{3}$

۲۴ - معادله مثلثاتی $(\sqrt{6}+2)tgx + (\sqrt{6}-2)cotgx = 4$ با کدام یک از معادلات زیر جوابهایش یکی است؟

۱) $\sin 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

۲) $\sin 2x - \cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

۳) $\sin 2x + \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) $\sin 2x - \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۵ - هرگاه tgB و tgC ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم $x^2 - (2m+2)x + 3 = 0$ و A و B و C زوایای یک مثلث باشند tgA کدام است؟

۱) $tgA = m - 1$ ۲) $tgA = m + 1$

۳) $tgA = 2m + 1$ ۴) $tgA = 2m - 1$

۲۶ - هرگاه در مثلثی $A = 45^\circ$ باشد کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

۱) $tg3B\,tg3C = 1$

۲) $tg3B\,tg3C = -1$

۳) $tg3B + tg3C + tg3B\,tg3C = 1$

۴) $tg3B + tg3C = 0$

۲۷ - حاصل $\frac{tg\frac{\pi}{24}(1-tg^2\frac{\pi}{24})}{(1+tg^2\frac{\pi}{24})^2}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۲۸ - معادله $Arc\cos\frac{x}{2} + Arc\,cotg2x = 0$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۲۹ - معادله $Arc\,tgx + Arc\,tg2x + Arc\,tg3x = \pi$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۳۰- حاصل

$$\sin\left[۲\text{Arcsin}\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۳\text{Arctg}(-۱)+\text{Arccos}(-\frac{۱}{۲})+\text{Arccotg}(-۱)\right]$$

کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۱- هرگاه در مثلثی $\frac{b^۳+c^۳+a^۳}{b+c+a}=a^۲$ باشد زاویه A کدام است؟

۱) $A=۱۲۰^\circ$ ۲) $A=۱۳۵^\circ$
۳) $A=۶۰^\circ$ ۴) $A=۴۵^\circ$

۳۲- هرگاه در مثلثی

$$(a^۲+b^۲)\sin(A-B)=(a^۲-b^۲)\sin C$$

باشد آنگاه:

۱) مثلث فقط متساوی الساقین است.
۲) مثلث فقط قائم‌الزاویه است.
۳) مثلث قائم الزاویه یا متساوی الساقین است.
۴) مثلث غیر مشخص است.

۳۳- هرگاه $۳\sin x+۴\cos x=۵$ باشد $\text{tg}۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۲۴}{۷}$
۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۲}{۷}$

۳۴- در صورتی‌که

$$\text{Arc}\sin x+\text{Arc tg}y+\text{Arc tg}z=\pi$$

باشد ماکسیمم $\text{Arc}\sin x\,.\,\text{Arc tg}y\,.\,\text{Arc tg}z$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^۳}{۸}$ ۲) $\frac{\pi^۳}{۲۷}$
۳) $\frac{\pi^۳}{۹}$ ۴) $\frac{\pi^۳}{۴}$

۳۵- در مثلثی $a+b=۴c$ می‌باشد حاصل $\text{tg}\frac{A}{۲}\text{tg}\frac{B}{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۳۶- هرگاه در مثلثی $bc=۲(b^۲+c^۲-a^۲)$ باشد آنگاه زاویه A:

۱) $۰^\circ<A<۳۰^\circ$ ۲) $۳۰^\circ<A<۴۵^\circ$
۳) $۴۵^\circ<A<۶۰^\circ$ ۴) $۶۰^\circ<A<۹۰^\circ$

۳۷- در مثلث ABC داریم $B>۳۰^\circ$ و $S=\frac{۱}{۴}bc$ (S مساحت مثلث است) در این‌صورت:

۱) $A=۳۰^\circ$ ۲) $A=۴۵^\circ$
۳) $A=۶۰^\circ$ ۴) $A=۷۵^\circ$

۳۸- در مثلث ABC داریم $\sin^۳A=\sin^۳B+\sin^۳C$ در این صورت:

۱) A حتماً حاده‌است.
۲) A یقیناً منفرجه است.
۳) A قائمه است.
۴) A یکی از زوایا منفرجه است.

۳۹- در متوازی الاضلاعی طول اقطار 4l و l می‌باشد و زاویه بین آنها 30° است. مساحت این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $S = l^2$
۲) $S = \frac{1}{2}l^2$
۳) $S = 2l^2$
۴) $S = \frac{3}{2}l^2$

۴۰- برای آنکه معادله

$$\operatorname{tg}\alpha \sin 2x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}\cos 2x = 2\operatorname{tg}\alpha$$

دارای جواب باشد باید پارامتر α در کدام نامساوی صدق کند؟

۱) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$
۲) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$
۳) $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$
۴) هر چه α باشد جواب دارد

۴۱- با فرض $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ و $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ حاصل $\sin(x - 45^\circ) + \cos(x - 15^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) ۰
۴) $\sqrt{3}$

۴۲- دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی

$$\begin{cases} x+y=\frac{3\pi}{2} \\ \sin x + a\sin y = a+1 \end{cases}$$

وقتی دارای جواب می‌باشد که:

۱) $a > 0$
۲) $a \leq 0$
۳) $1 \leq a \leq 2$
۴) a هرچه باشد

۴۳- حاصل $\cos 87^\circ + \cos 33^\circ + \cos 27^\circ$ برابر است با:

۱) $\sin 63^\circ$
۲) $\cos 63^\circ$
۳) $2\sin 63^\circ$
۴) $2\cos 63^\circ$

۴۴- معادله $\sin^2 x - 2m \sin 2x + m\cos^2 x = 0$ مفروض است. m چقدر باشد تا داشته باشیم $x' + x'' = \frac{\pi}{2}$ (x' و x'' دو جواب معادله هستند.)

۱) -1
۲) ۱
۳) -2
۴) ۲

توجه:

با پوزش، در تستهای ریاضیات جدید که در صفحهٔ بعد مطالعه خواهید کرد، صورت و گزینه‌های چند تست به‌شرح زیر اصلاح می‌شود:

۱- تست ۱۱ گزینه ۲، $\sim p$ را به $\sim q$ تبدیل کنید.
۲- تست ۳۳ صورت تست به شکل $f: Z \cup \{0\} \longrightarrow Z$ اصلاح شود.
۳- تست ۶۶ گزینهٔ ۱ به‌صورت $(6)_4 \times 3! \times 3! \times 2!$ اصلاح شود.
۴- تست ۸۹ گزینهٔ ۲ به‌صورت $A + I$ اصلاح شود.

تستهای ریاضیات جدید

(سالهای اوّل، دوّم، سوّم و چهارم)

● حمیدرضا امیری

۱ - مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $x < ۱ \Rightarrow x > ۳$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$　　۲) $\varnothing$

۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > ۱\}$　　۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۱\}$

۲ - عکس نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ کدام است؟

۱) $(r \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$　　۲) $(\sim r \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$

۳) $\sim(q \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p$　　۴) $(q \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p$

۳ - اگر p گزاره‌ای درست باشد ارزش گزارهٔ

$$r \Rightarrow [(q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$$

۱) همواره نادرست است　　۲) همواره درست است

۳) بستگی به ارزش p دارد　　۴) بستگی به ارزش r دارد

۴ - کدام گزاره نادرست است؟

۱) $\forall x \in Z \,،\, \exists y \in Z \,،\, x < y$

۲) $\nexists\, x \in N \,،\, \forall y \in N \,،\, x + y = y$

۳) $\forall x \in N \; \nexists\, y \in N \,،\, x + y \neq ۲$

۴) $\exists x \in Z \,،\, \forall y \in Z \,،\, x < y$

۵ - $(\exists x \in A \,,\, p(x)) \wedge (\exists x \in A \,,\, q(x))$ چه شرطی برای $\exists x \in A \,(p(x) \wedge q(x))$ می‌باشد؟

۱) لازم و کافی　　۲) نه لازم و نه کافی

۳) لازم و نه کافی　　۴) کافی و نه لازم

۶ - گزارهٔ $[s \wedge \sim(\sim s \Rightarrow \sim r)] \Leftrightarrow r$ هم‌ارز با کدام گزاره است؟

۱) r　　۲) s

۳) $\sim s$　　۴) $\sim r$

۷ - گزاره $[(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee s)] \Rightarrow [(p \wedge s) \Rightarrow p]$ یک گزارهٔ :

۱) همیشه درست است.

۲) همیشه نادرست است.

۳) همواره درست است اگر p نادرست باشد.

۴) نادرست است اگر p درست باشد.

۸ - نقیض گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [q \Rightarrow (q \wedge r)]$ کدام است؟

۱) $q \vee \sim r$　　۲) $\sim q \vee r$

۳) $\sim q \wedge r$　　۴) $q \wedge \sim r$

۹ - عکس نقیض گزارهٔ $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$

۲) $(\sim p \vee q)$

۳) $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)]$

۴) $\sim p \wedge q \wedge r$

۱۰- اگر گزاره‌های $p \Leftrightarrow q$ و $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ گزاره‌هایی درست باشند آنگاه گزارهٔ $(p \Rightarrow s) \Rightarrow (s \Rightarrow q)$

۱) هم‌ارز است با $\sim p$ ۲) هم‌ارز است با $\sim s$

۳) یک استلزام منطقی است ۴) هم‌ارز است با q

۱۱- در بحث زیر کدام گزاره را قرار دهیم تا بحث معتبر باشد؟

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim s) & \wedge \\ s \wedge q & \wedge \\ \hline \therefore \ ? & \end{array}$$

۱) p ۲) $\sim p$

۳) $s \Rightarrow p$ ۴) $p \Rightarrow s$

۱۲- $p \Rightarrow q$ چه نوع شرطی برای $q \Rightarrow q$ است؟

۱) لازم ۲) کافی

۳) نه لازم و نه کافی ۴) لازم و کافی

۱۳- اگر $A' \subseteq B$ کدام گزاره درست است؟

۱) $A \subseteq B'$ ۲) $A' \subseteq B'$

۳) $B' \subseteq A'$ ۴) $B' \subseteq A$

۱۴- هرگاه $A \cup B = A$ و $A \cap B = A$ کدام درست است؟

۱) $A \subseteq B'$ ۲) $B \subseteq A'$

۳) $A = B$ ۴) $A \neq B$

۱۵- هرگاه $A \subseteq B'$ کدام درست است؟

۱) $A - B = \varnothing$ ۲) $B' - A' = \varnothing$

۳) $A' - B = \varnothing$ ۴) $B - A' = \varnothing$

۱۶- مجموعهٔ $(B - C) \cap [(C - A)' \cap (A' \cap B')']$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) C ۲) $C - B$

۳) $C' - B'$ ۴) B'

۱۷- اگر $(A - B) \subseteq (A \cap B)$ کدام درست است؟

۱) $B - A = \varnothing$ ۲) $A - B = \varnothing$

۳) $A - B = B$ ۴) $A = B$

۱۸- هرگاه $A \cap B = \varnothing$ کدام نادرست است؟

۱) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$

۲) $A \cap (A' \cup B) = \varnothing$

۳) $A - B = A$

۴) $A - B = B$

۱۹- مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $\varnothing \subseteq (x \cap x')$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ عضو ۲) ۲ عضو

۳) مجموعه‌ای نامتناهی است ۴) عضوی ندارد

۲۰- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ای ۵ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن مجموعه است، این مجموعه چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۷ ۴) ۹

۲۱- هرگاه $B - A = B'$ در این صورت $(A - B') \cup (A - B)$ کدام است؟

۱) A ۲) B

۳) $\varnothing$ ۴) B'

۲۲- متمم مجموعهٔ $(A - B) \cup (A - B')$ کدام است؟

۱) B' ۲) A'

۳) $\varnothing$ ۴) A

۲۳- اگر $A = \{a, \{a\}, \{a,b\}\}$ و $p(A)$ مجموعهٔ زیرمجموعه‌های A باشد (مجموعهٔ توانی A) در این صورت

مجموعهٔ $(p(A) - A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۵ ۴) ۶

۲۴- در صورتی که $A \times (A - B^2) = A \times (B^2 - A)$ آنگاه:

۱) $A = A \times B$ ۲) $A^2 = A \times B^2$

۳) $A^2 = A \times B$ ۴) $A^2 \times B = A$

۲۵- اگر $A \times B = B \times A$ کدام تساوی همواره درست است؟

۱) $A = B$

۲) $A \cup B = B$

۳) $(A = B) \vee n(A \times B) = 0$

۴) $A = \varnothing \vee B = \varnothing$

۲۶- اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی، مجموعهٔ $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ کدام است؟

۱) صفحهٔ محورهای مختصات بدون محور y ها

۲) صفحهٔ محورهای مختصات بدون محور x ها

۳) صفحهٔ محورهای مختصات بدون دو محور

۴) صفحهٔ محورهای مختصات بدون مبدأ

۲۷- اگر $A \cap B = \varnothing$ در این صورت $(B \times A) - (B \times B')$ کدام است؟

۱) A ۲) M (مرجع)

۳) $A \times B$ ۴) $\varnothing$

۲۸- چند رابطه روی یک مجموعهٔ ۴ عضوی می‌توان نوشت که هم تقارنی و هم پاد تقارنی باشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶

۳) ۳۲ ۴) ۱۵

۲۹- هرگاه رابطهٔ R تقارنی باشد در این صورت $[(R^{-1})]' - [R']$ رابطه‌ای:

۱) پاد تقارن است ۲) تعدی است

۳) تقارنی است ۴) هم‌ارزی است

۳۰- رابطهٔ هم‌ارزیِ f در $\mathbb{R}^2$ به صورت $(x,y)\ f(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$ تعریف شده است. نمودار کلاس هم‌ارزی $[(0,1)]$ کدام است؟

۱) محورهای مختصات ۲) هذلولی

۳) دو خط موازی ۴) یک پاره‌خط

۳۱- اگر $f: N^2 \longrightarrow N$ ، $f(m,n) = 2^n - m$ در این صورت $f(f(2,1), f(1,2))$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۸-

۳) تعریف نمی‌شود ۴) ۳

۳۲- تابع $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x, y) = xy$ تعریف شده است. این تابع:

۱) یک‌به‌یک است و پوشا نیست

۲) پوشا است و یک‌به‌یک نیست

۳) نه‌یک‌به یک و نه پوشا است

۴) یک‌به‌یک و پوشا است

۳۳- تابع $f: N \longrightarrow Z$ ، $f(x) = 2x - |x + 1|$ در دامنهٔ طبیعی خود:

۱) فقط یک‌به‌یک است

۲) فقط پوشا است

۳) نه یک‌به‌یک و نه پوشا است

۴) یک‌به‌یک و پوشا است

۳۴- کدام دستگاه گروه است؟

۱) $(Z , \times)$ ۲) $(N , \times)$

۳) $(\mathbb{R} , \times)$ ۴) $(\{1,-1\} , \times)$

۳۵- کدام رابطهٔ زیر تابع است؟

۱) $\{(x, y) \in Z^2 | x^2 - y^2 = 1\}$

۲) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 1\}$

۳) $\{(x, y) \in N^2 | x^2 - y^2 = 1\}$

۴) $\{(x, y) \in N \times Z | x^2 - y^2 = 1\}$

۳۶- عمل * بر مجموعهٔ Z چنین تعریف می‌شود $x * y = x - y$ این عمل:

۱) بسته نیست ۲) شرکت‌پذیر است

۳) عضو خنثی دارد ۴) جابجایی دارد

۳۷- کدام مجموعه نسبت به عمل جمع معمولی بسته است؟

۱) $\{-1, 1\}$ ۲) $\{0, 1\}$

۳) $\{-1, 0, 1\}$ ۴) $\{0\}$

۳۸- عمل * در Z به‌صورت $x*y = \min\{x, y\} + x$ تعریف شده است. حاصل $[5*(3*2)]$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷

۳) ۲ ۴) ۵

۳۹- در Q^+ عمل * به‌شکل $x*y = \frac{4xy}{5}$ تعریف شده است، عضو خنثی عدد

۱) ۵ است ۲) ۴ است

۳) $\frac{4}{5}$ است ۴) $\frac{5}{4}$ است

۴۰- کدام گزینه نادرست است؟

۱) در هر گروه داریم $(a*b)' = b'*a'$.

۲) هر گروه حداقل ۲ زیرگروه دارد.

۳) در هر گروه اگر وارون هر عضو خودش باشد آن گروه آبلی است.

۴) هر گروه n عضوی 2^n زیرگروه دارد.

۴۱- در گروه $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ داریم $x*y = x + y - xy$ در این گروه جواب معادلهٔ $x*2' = 5$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۳- ۴) ۲-

۴۲- در گروه $(Z_6, \oplus)$ عضو متقابل ۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۶ ۴) ۳

۴۳- حوزهٔ درست بودن حلقهٔ $(Z_m, \oplus, \otimes)$ شرط لازم و کافی است برای:

۱) وارون پذیر بودن همهٔ اعضای غیر صفر

۲) دارا بودن مقسوم علیه صفر

۳) برقرار بودن قاعدهٔ حذف

۴) موارد ۱ و ۳

۴۴- هرگاه I ایده‌آل حلقهٔ $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) و $\sqrt{3} \in I$ در این صورت:

۱) $I = Q$ ۲) $I = \mathbb{R} - Q$

۳) $I = \mathbb{R}$ ۴) $I = \mathbb{R} - Z$

۴۵- تعداد وارون پذیرهای حلقهٔ $(Z_7, \oplus, \otimes)$ کدام است؟

۱) ندارد ۲) ۷

۳) ۶ ۴) ۵

۴۶- تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقهٔ $(Z_8, \oplus, \otimes)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ندارد

۴۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱) هر میدان یک حوزهٔ درست است

۲) هر ایده‌آل یک زیر حلقه است

۳) هر میدان فقط ۲ ایده‌آل دارد

۴) میدان ایده‌آل ندارد

۴۸- هرگاه I ایده‌آل حلقهٔ Z باشد و $۴ \in I$ در این صورت:

۱) $I = ۳Z$ ۲) $I = \{۲^n | n \in N\}$

۳) $I = ۲Z$ ۴) $I = ۶Z$

۴۹- کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموعهٔ IR روی IR یک فضای برداری است.

۲) مجموعهٔ IR روی Q یک فضای برداری است.

۳) مجموعهٔ Q روی IR یک فضای برداری است.

۴) مجموعهٔ Q روی Q یک فضای برداری است.

۵۰- در فضای برداری V مجموعهٔ $\{U, V, \bar{O}\}$ یک مجموعهٔ:

۱) مستقل خطی است ۲) وابسته خطی است

۳) زیر فضای V است ۴) موارد ۱ و ۳

۵۱- کدام مجموعه یک زیرفضای $IR^۲$ است؟

۱) $\{(x,y) | \; ۲x + y = ۱\}$

۲) $\{(x,y) | \; x = ۴y\}$

۳) $\{(x,y) | \; \frac{x+۲}{y} = ۱\}$

۴) موارد ۲ و ۳

۵۲- هرگاه بردارهای $(۲,x)$ و $(y,۴)$ در $IR^۲$ مستقل خطی باشند آنگاه:

۱) $xy = ۸$ ۲) $۸x = y$

۳) $xy \neq ۸$ ۴) $۲y \neq ۴x$

۵۳- عبارت بولی $ab' + a'b$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

۱) $(a + b)(a' + b')$ ۲) $(a + b)(ab)'$

۳) $(ab)'(a'b')'$ ۴) هر ۳ مورد قبل

۵۴- متمم عبارت بولی $bc' + b'c$ کدام است؟

۱) $bc + b'c'$

۲) $(b + c)(b' + c)$

۳) $(b' + c) + (b + c')$

۴) $(b'c).(bc')$

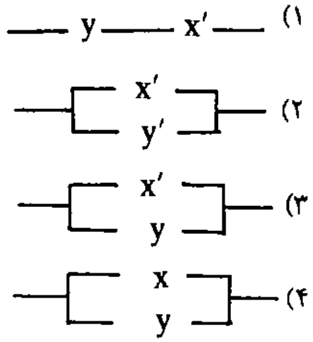
۵۵- ساده شدهٔ عبارت بولی $(a + b).[(bc) + (a'\ b')']$ کدام است؟

۱) $a'b'$ ۲) $a' + b'$

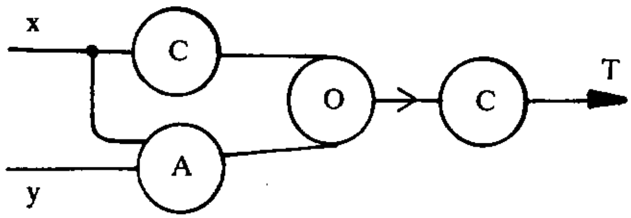
۳) $(a + b)$ ۴) ab

۵۶- با توجه به جدول، شکل مدار حاصل از آن کدام است؟

x	y	T
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۱
۰	۰	۱



۵۷- عبارت بولی مدار منطقی زیر کدام است؟



۱) $y' + x$ ۲) $x' + y$

۳) $x'y'$ ۴) $y'x$

۵۸- به چند طریق می‌توان ۵ کلید را در یک دسته کلید دایره‌شکل قرار داد؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲
۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

۵۹- به چند طریق می‌توان ۴ مداد و ۶ خودکار را در کنار هم چید به قسمی که همواره مدادها پهلوی هم باشند؟

۱) !۴ × !۶ ۲) !۶ × !۷
۳) !۷ × !۴ ۴) !۱۰

۶۰- به چند طریق می‌توان ۴ مداد و ۴ خودنویس را به‌طور متناوب کنارهم چید؟

۱) !۴ × !۴ ۲) ۴ × !۲
۳) ۲ × !۴ ۴) ۲ × !۴ × !۴

۶۱- به چند طریق ۴ مرد و ۴ زن می‌توانند به‌صورت یک درمیان دور یک میز گرد بنشینند؟

۱) !۴ × !۴ ۲) !۳ × !۳
۳) !۴ × !۳ ۴) ۲ × !۴

۶۲- با ارقام ۲، ۸، ۸، ۶، ۶، ۶ و ۲ چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۳۵ ۲) !۷
۳) ۸۴۰ ۴) هیچ‌کدام از ۳ مورد قبل

۶۳- به چند طریق می‌توان از یک اسباب‌بازی فروشی که ۵ نوع اسباب‌بازی دارد ۸ اسباب‌بازی خرید به قسمی که از هر نوع حداقل یکی خریداری شده باشد؟

۱) ۴۲ ۲) ۲۰
۳) ۲۱ ۴) ۴۴

۶۴- به چند طریق می‌توان ۴۰ سیب را بین ۳ نفر تقسیم کرد؟ (می‌توان به بعضیها سیب نداد.)

۱) ۶۸۱ ۲) ۳۴۰
۳) ۸۶۱ ۴) هیچ‌کدام از ۳ مورد قبل

۶۵- به چند طریق می‌توان از بین ۶ نفر گروههای ۲ تیمی ساخت که در هر تیم ۳ نفر باشند؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰
۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۶۶- ۸ نفر که دو نفر آنها با هم برادر هستند به چند طریق می‌توانند روی یک نیمکت قرار بگیرند هرگاه بخواهیم دقیقاً ۳ نفر بین این دو برادر باشند؟

۱) $(۶)_۳ \times ۳! \times ۲!$ ۲) $\binom{۶}{۳} \times ۳! \times ۲!$
۳) $\binom{۶}{۳} \times ۳! \times ۳! \times ۲!$ ۴) $\binom{۶}{۳} \times ۳! \times ۳!$

۶۷- هرگاه $A = \{۱،۲،۳\}$ و $B = \{۶،۷،۸،۹\}$ چند عدد ۵ رقمی شامل ۲ رقم از A و ۳ رقم از B می‌توان ساخت؟

۱) $\binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۳} \times ۲! \times ۳!$

۲) $\binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۳} \times ۵!$

۳) $۵!$

۴) $(۳)_۲ \times (۴)_۳ \times ۵!$

۶۸- سکه‌ای را ۸ بار پرتاب می‌کنیم مطلوب است احتمال آن‌که دقیقاً ۴ بار «پشت» بیاید.

۱) $\frac{۷۰}{۲^{۱۶}}$ ۲) $\frac{۱}{۲^{۴}}$
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳۵}{۲^{۷}}$

۶۹- در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سفید موجود است. ۲ مهره از این کیسه به تصادف خارج می‌کنیم احتمال آن‌که این دو مهره همرنگ نباشند:

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۱۲}{۲۱}$

۳) $\frac{۹}{۱۱}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۷۰- دو تاس با هم ریخته می‌شوند اگر بدانیم هر دو عددی اول را نشان می‌دهند، احتمال این‌که مجموعشان کمتر از ۸ باشد عبارت است از:

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$

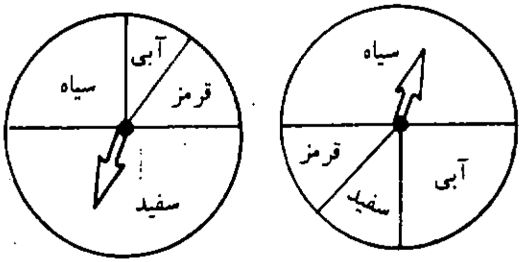
۳) $\frac{۳}{۳۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳۶}$

۷۱- سکه‌ای را ۴ بار پرتاب می‌کنیم در صورتی که احتمال «رو» آمدن $\frac{۲}{۳}$ باشد، احتمال این‌که ۳ بار «پشت» و ۱ بار «رو» بیاید برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۶}$

۳) $\frac{۲^۳}{۸۱}$ ۴) $\frac{۲۰}{۸۱}$

۷۲- با توجه به شکلهای پایین، احتمال این‌که هر دو عقربه در قسمتهای همرنگ توقف کنند برابر است با:



۱) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۲) $\frac{۳۲}{۸۱}$

۳) $\frac{۱۵}{۶۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲۷}$

۷۳- هرگاه $p(A) = \frac{۱}{۴}$ و $p(B) = K$ و A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند حدود k عبارت است از:

۱) $k \geq \frac{۱}{۴}$ ۲) $k \leq ۴$

۳) $k \geq ۴$ ۴) $k + ۱ < ۶$

۷۴- در معدل‌گیری یک کلاس ۵۰ نفری به‌اشتباه نمره ۹ را ۱۹ در نظر گرفتیم و معدل ۱۶ به‌دست آمد، میانگین واقعی کدام است؟

۱) ۱۶/۷ ۲) ۱۵/۷

۳) ۱۶/۸ ۴) ۱۵/۸

۷۵- در نمونه $x_1, x_2, \dots, x_{15}$ اگر $\sum x_i = ۶۰$ و $\sum x_i^2 = ۲۹۶$ مقدار S_x کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

۷۶- اگر در یک مسألهٔ آماری همهٔ داده‌ها با عدد ۵ جمع شوند نسبت انحراف معیار اول به انحراف معیار ثانویه چه قدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) ۵ ۴) صفر

۷۷- اگر انحراف معیار داده‌های x_1، x_2، ...، x_n برابر با ۶ باشد انحراف معیار $۳x_1+۲$، $۳x_2+۲$، ...، $۳x_n+۲$ برابر است با:

۱) ۲۰ ۲) ۱۸

۳) ۸ ۴) ۶

۷۸- میانگین ۶ داده آماری ۱۲ و میانگین ۸ داده دیگر ۱۸ می‌باشد میانگین این ۱۴ داده کدام است؟ (تا دو رقم اعشار)

۱) ۱۴/۵۲ ۲) ۱۵/۴۲

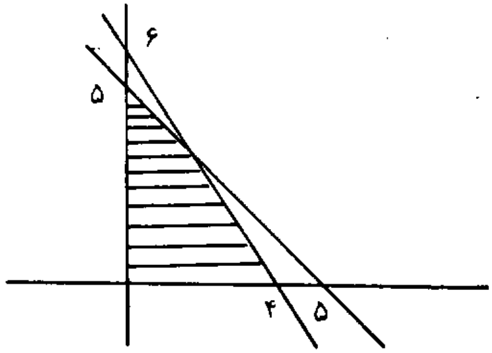
۳) ۱۷/۴۱ ۴) ۱۳/۱۴

۷۹- کدام نقطه در دستگاه نامعادلات $\begin{cases} x+y \leq 5 \\ y \geq 3 \end{cases}$ صدق می‌کند؟

۱) (۲ ، ۴) ۲) (۲ ، ۲)

۳) (۳ ، ۲) ۴) (۲ ، ۳)

۸۰- بیشینهٔ عبارت $3x + 2y$ که در شرایط شکل زیر صدق می‌کند کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۷

۳) ۱۴ ۴) ۱۲

۸۱- جواب معادلهٔ $3x \overset{5}{\equiv} 1$ کدام است؟

۱) $x = 5k - 2$ ۲) $x = 5k + 3$

۳) $x = 5k + 2$ ۴) $x = 5k - 3$

۸۲- باقیمانده تقسیم $13^{2n+1} + 2^{3n+1}$ بر ۷ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۱

۸۳- هرگاه $(b, d) = 1$ و $(a - 2b, 3a - b) = d$ ، d کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۲ ۴) ۴

۸۴- در صورتی که n مربع کامل باشد، کدام هم‌نهشتی حتماً نادرست است؟

۱) $n^2 \overset{10}{\equiv} 0$ ۲) $n^2 \overset{10}{\equiv} 4$

۳) $n^2 \overset{10}{\equiv} 6$ ۴) $n^2 \overset{10}{\equiv} 1$

۸۵- یک عدد دو رقمی ۳ برابر مجموع ارقام خود می‌باشد، حاصل‌ضرب ارقام این عدد کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸

۳) ۲۱ ۴) ۱۴

۸۶- باقیماندهٔ تقسیم $1! + 2! + \dots + 600!$ بر ۱۲۰ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳

۳) ۳۵ ۴) ۳۴

۸۷- رقم یکان 1372^{1373} کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۸

۸۸- هرگاه $a|b$ و $a, b \in Z$ آنگاه حاصل $(b$ و $[a$ و $(a$ و $b)])$ کدام است؟

۱) $|a|$ ۲) $(a$ و $b)$

۳) $|b|$ ۴) ab

۸۹- اگر $A^2 - A + I = \bar{O}$ وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $A - I$ ۲) $A - I$

۳) $I - A$ ۴) $-A$

۹۰- اگر $|A| = 3$ و A ماتریسی 4×4 باشد مقدار $\det(3A^2)$ کدام است؟

۱) 3^5 ۲) 3^4

۳) 3^7 ۴) 3^6

۹۱ - اگر A ماتریس مربع ۲×۲ و $|A| > 0$ و داشته باشیم $\big||A|A\big| = |۲A|$ مقدار $|A|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳
۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۹۲ - هرگاه $|A| = 7$ و A ماتریسی ۳×۳ باشد در این صورت مقدار $|N'A|$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۴۴
۳) ۳۴۳ ۴) ۴۳۴

۹۳ - اگر ماتریس A ماتریسی پاد متقارن و قطری باشد در این صورت ماتریس A:

۱) وارون پذیر است ۲) اسکالر است
۳) نامنفرد است ۴) متقارن نیست

۹۴ - هرگاه A ماتریسی متعامد باشد در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $A = (A')^{-1}$ ۲) $A = A'$
۳) $A^{-1} = A$ ۴) $A = (A')^{2}$

۹۵ - ضریب زاویهٔ خط $\begin{vmatrix} x & y & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹۶ - هرگاه A ماتریس انتقال نسبت به خط $y = \sqrt{3}\,x$ باشد در این صورت لوزی ABCD را به چه شکلی تبدیل می‌کند؟

۱) مربع
۲) پاره خط
۳) یک لوزی قابل انطباق بر لوزی قبل
۴) مستطیل

۹۷ - اگر دو مقدار ویژهٔ ماتریس A به‌ترتیب ۲ و ۴ باشند، مقدار $|A + 3I|$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۳۵
۳) ۷ ۴) ۸

۹۸ - اگر ماتریس A متقارن و متعامد باشد ماتریس A^2 کدام است؟

۱) I ۲) $\bar{0}$
۳) A ۴) A'

۹۹ - هرگاه A ماتریسی پاد متقارن و ۳×۳ باشد تساوی $k = |A|^2 - |A| + 3$

۱) برای $k = 1$ برقرار است
۲) برای $k = 0$ برقرار است
۳) برای $k = 3$ برقرار است
۴) به ازای هر $k \in R$ برقرار نیست

تستهای هندسه

(سالهای اوّل، دوّم، سوّم و چهارم ریاضی ـ تجربی)

● محمدهاشم رستمی

۱ ـ اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور ۶۵ درجه و تفاضل این دو زاویه ۳۰ درجه است. اندازهٔ زاویهٔ کوچکتر چند درجه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰
۳) ۴۰ ۴) ۵۰

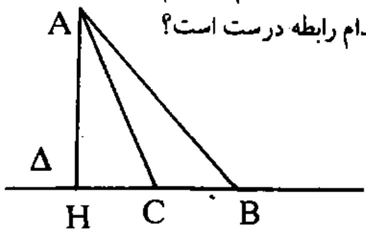
۲ ـ مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی که یک زاویهٔ منفرجه دارد، کجا واقع است؟

۱) داخل مثلث
۲) خارج مثلث
۳) روی ضلع مقابل به زاویهٔ منفرجه
۴) روی رأس زاویهٔ منفرجه

۳ ـ در مثلث ABC، $a=8$، $b=4$، $c=7$ است. کدام یک از روابط زیر بین زوایای مثلث برقرار است؟

۱) $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$ ۲) $\hat{A} < \hat{C} < \hat{B}$
۳) $\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$ ۴) $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$

۴ ـ از نقطهٔ A عمود AH و مایلهای AC و AB را در یک طرف AH نسبت به خط Δ چنان رسم می‌کنیم که $HC=CB$ باشد. در این صورت، کدام رابطه درست است؟



۱) $H\hat{A}C = C\hat{A}B$ ۲) $H\hat{A}C < C\hat{A}B$
۳) $2H\hat{A}C = C\hat{A}B$ ۴) $H\hat{A}C > C\hat{A}B$

۵ ـ مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب ۳ برابر مجموع زوایای خارجی یک ۷ ضلعی محدب است. تعداد اقطار این n ضلعی کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۰
۳) ۸ ۴) ۷

۶ ـ از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی یک ذوزنقه متساوی الساقین چه شکلی ایجاد می‌شود؟

۱) مستطیل
۲) مربع
۳) فقط چهارضلعی محاطی
۴) چهارضلعی محاطی و محیطی

۷ ـ اگر یک قطر چهارضلعی قطر دیگر را نصف کند، آن قطر چهارضلعی را به دو مثلث چنان تقسیم می‌کند که مساحت یکی از این دو مثلث برابر است با:

۱) ۲ برابر مساحت دیگری
۲) نصف مساحت دیگری
۳) مساحت دیگری
۴) ربع مساحت دیگری

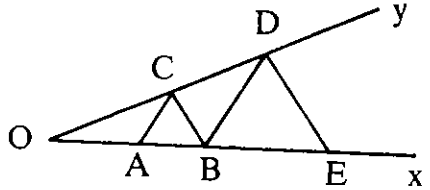
۸- اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع AB و CD از دایره‌ای °۵۰ است و اندازهٔ دو کمان از چهار کمان ایجاد شده به وسیلهٔ این دو وتر در دایره، °۷۰ و °۱۱۰ می‌باشد. تفاضل اندازه‌های دو کمان دیگر چند درجه است؟

۱) °۱۲۰ ۲) °۱۳۰
۳) °۱۴۰ ۴) °۵۰

۹- از نقطهٔ M محل تلاقی قطرهای ذوزنقه‌ای خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌کنیم تا ساقهای این ذوزنقه را در نقاط E و F قطع کند. نسبت $\frac{EF}{MF}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۱۰- نقاط A و E روی ضلع ox از زاویهٔ xoy چنان واقع‌اند که OA=۲ و OE=۸ است. در صورتی که نقاط C و D روی ضلع oy و $BD \parallel AC$ و $BC \parallel DE$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط OB چقدر است؟



۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

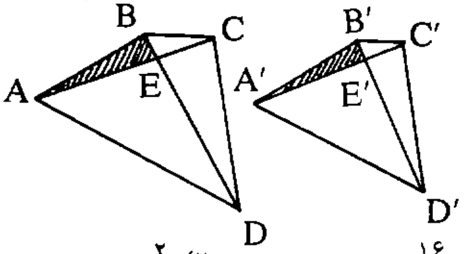
۱۱- نقاط A و B در صفحهٔ P مفروض‌اند. چند دسته خط در این صفحه وجود دارد، که نسبت فاصله‌های نقاط A و B از هر یک از خطوط این دسته خطها برابر k باشد؟($k\neq 0$ و $k>0$)

۱) ۰ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) بیشمار

۱۲- محیط مثلثی ۲۱ سانتی‌متر و اندازهٔ پاره‌خطهایی که نیمساز زاویهٔ درونی A روی ضلع BC ایجاد می‌کند ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر است. اندازهٔ ضلع مجاور به قطعهٔ کوچکتر ایجاد شده روی ضلع BC کدام است؟

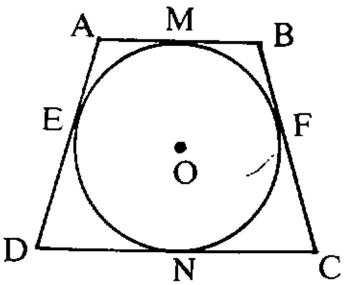
۱) ۴ cm ۲) ۶ cm
۳) ۸ cm ۴) ۱۰ cm

۱۳- نسبت مساحت دو مثلث متناظر ABE و A´B´E´ از دو چهارضلعی متشابه ABCD و A´B´C´D´ برابر $\frac{4}{9}$ است. نسبت اندازهٔ مساحت این دو چهارضلعی کدام است؟



۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۱۴- ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر مماس است در صورتی که نقطهٔ E نقطهٔ تماس ساق AD با دایره و AE=۴cm باشد، اندازه قاعده CD چند سانتی‌متر است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۰/۵
۳) ۱۲ ۴) ۱۲/۵

۱۵ - ارتفاع وارد بر وتر در مثلثی قائم‌الزاویه، آن مثلث را به دو مثلث هم ارز بخش می‌کند در صورتی که ارتفاع وارد بر وتر این مثلث ۲ سانتی‌متر باشد، مساحت این مثلث قائم‌الزاویه چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۱۶ - اندازهٔ مساحت مثلث متساوی الاضلاع محیط بر دایره‌ای $۳۶\sqrt{۳}$ سانتی‌مترمربع است. اندازهٔ مساحت مربع محاط در این دایره چند سانتی‌مترمربع است؟

۱) ۲۴ ۲) $۲۴\sqrt{۳}$

۳) $۲۴\sqrt{۲}$ ۴) ۱۲

۱۷ - چند صفحه وجود دارد که شامل خط مفروض d باشد و دو نقطه مفروض A و B از آن به یک فاصله باشند در صورتی که $AB \nparallel d$ و $AB \cap d = \varnothing$ ؟

۱) ۰ ۲) ۱

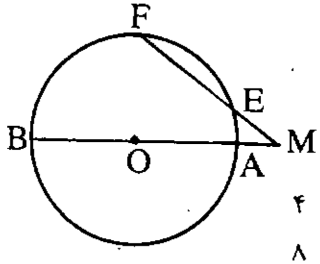
۳) ۲ ۴) بیشمار

۱۸ - دو خط متنافر d و ´d مفروض‌اند. چند صفحه بر این دو خط می‌گذرد که با هم موازی باشند؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) بیشمار

۱۹ - دایرهٔ $C(O,۶)$ مفروض است. نقطه M در امتداد قطر AB به فاصلهٔ ۸ سانتی‌متر از مرکز دایره واقع است. قاطع MEF را نسبت به دایره چنان رسم می‌کنیم که اندازهٔ وتر EF مساوی ۳ سانتی‌متر باشد. در این صورت اندازهٔ پاره خط ME چند سانتی‌متر است؟



۱) ۲ ۲) ۴

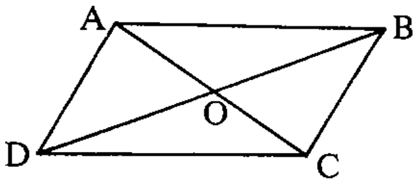
۳) ۶ ۴) ۸

۲۰ - در مثلث ABC ، $b=۱۰$ و $c=۲۴$ و $\hat{A}=۹۰^\circ$ است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲

۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۲۱ - نقطهٔ O محل تلاقی اقطار AC و BD از متوازی الاضلاع ABCD است. در صورتی که $OA=\sqrt{۵}$ و $OD=۵$ و $AD=۲\sqrt{۶}$ باشد اندازهٔ ضلع AB کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۲۲ - اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۴ و ۵ و ۶ می‌باشند، اندازه کوچکترین میانهٔ مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۴۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۶}$

۳) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۴۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}\sqrt{۴۶}$

۲۳ - در مثلث ABC ، $a=۱۰$ و $b=c=۱۳$ است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع a چقدر است؟

۱) ۶/۵ ۲) ۷/۵

۳) ۸/۵ ۴) ۹/۵

۲۴ - در هر مثلث، $\frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_a}$ همواره برابر است با:

۱) $\frac{۱}{r_a}$ ۲) $\frac{۱}{r_b}$

۳) $\frac{۱}{r_c}$ ۴) $\frac{۱}{r}$

۲۵ - تصویر قائم خطی بر یک صفحه منحصر به یک نقطه است. اندازهٔ زاویهٔ این خط و صفحه چند درجه است؟

۱) ۰ ‏ ۲) 45°
۳) 90° ‏ ۴) 180°

۲۶ - نتیجهٔ ترکیب $R_{o_1}^{45^\circ} \circ R_{o_1}^{135^\circ}$ کدام تبدیل است؟

۱) انتقال ‏ ۲) $H_{o_1}^{2}$
۳) $H_{o_1}^{+1}$ ‏ ۴) $H_{o_1}^{-1}$

۲۷ - پاره‌خط $A'B'$ تبدیل یافته پاره‌خط AB به طول ۸ سانتی‌متر در دوران به مرکز O و زاویهٔ دوران 60° است و پاره‌خط $A''B''$ تبدیل یافتهٔ پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ می‌باشد. اندازهٔ پاره‌خط $A''B''$ چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴ ‏ ۲) ۲
۳) ۸ ‏ ۴) ۶

۲۸ - اگر S_A تقارن مرکزی و H_B^K تجانس باشد، نتیجه ترکیب $S_A \circ \left(H_B^K \circ H_B^{-\frac{1}{K}}\right)$ کدام است؟

۱) $T_{2\overrightarrow{BA}}$ ‏ ۲) $T_{2\overrightarrow{AB}}$
۳) تقارن نسبت به AB ‏ ۴) دوران به مرکز وسط AB

کنکور سراسری ۱۳۷۰

۲۹ - چند کنج منظم به رأس S می‌توان داشت که هر زاویه‌اش ۵۵ درجه باشد؟

۱) ۳ ‏ ۲) ۴
۳) ۵ ‏ ۴) ۶

۳۰ - سطح یک کره 36π سانتی‌مترمربع است. حجم قاچ 90° از این کره چند سانتی‌مترمکعب است؟

۱) 72π ‏ ۲) 36π
۳) 18π ‏ ۴) 9π

۳۱ - اگر $A(5, -\frac{\pi}{12})$ و $B(12, \frac{5\pi}{12})$ باشد، شعاع قطبی نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۱۳ ‏ ۲) ۱۲
۳) ۶ ‏ ۴) ۶/۵

۳۲ - اگر $15x+8y+3z=20$ باشد کمترین مقدار $9x^2+4y^2+z^2$ چقدر است؟

۱) ۸ ‏ ۲) ۶
۳) ۳ ‏ ۴) ۴

۳۳ - اگر $\left|\vec{U}\right|=\sqrt{2}\ ,\ \vec{U}.\vec{V}=-1\ ,\ \left|\vec{U}\wedge\vec{V}\right|=3$ باشد، $\left|\vec{V}\right|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ‏ ۲) $\sqrt{5}$
۳) $\sqrt{6}$ ‏ ۴) $\sqrt{7}$

۳۴ - اگر $\vec{a}(1,0,-1)$ و $\vec{b}(0,2,1)$ باشند، اندازهٔ جبری تصویر بردار یکه راستای $\vec{a}\wedge\vec{b}$ روی محور yها کدام است؟

۱) $+\frac{2}{3}$ ‏ ۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $\frac{2}{5}$ ‏ ۴) $-\frac{2}{3}$

۳۵ - وضع نقطهٔ $A(1,0,2)$ نسبت به دو صفحهٔ $P:x-2y+z-1=0$ و $P':2x+z-1=0$ چگونه است؟

۱) نقطهٔ A درون فرجهٔ حادهٔ بین دو صفحه قرار دارد.
۲) نقطهٔ A درون فرجهٔ منفرجه بین دو صفحه واقع است.
۳) نقطهٔ A روی یکی از صفحات P یا P' واقع است.
۴) نقطهٔ A روی فصل مشترک دو صفحه است.

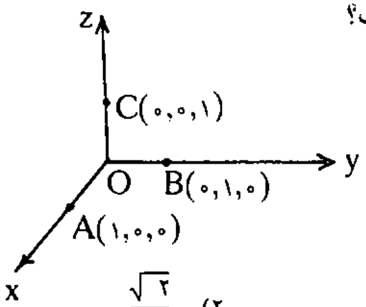
سؤالهای ۳۶ تا ۴۷ تستهای کنکور سراسری گروه ریاضی فنی، مرحلهٔ اول سال ۱۳۷۲ می‌باشند.

۳۶- اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر صفر فرض شوند $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$ برابر کدام است؟

۱) $(\vec{a}.\vec{c})\wedge\vec{b}$ ۲) $\vec{a}.(\vec{c}\wedge\vec{b})$

۳) $(\vec{a}.\vec{b})\wedge\vec{c}$ ۴) $(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}$

۳۷- در شکل مقابل OA و OB و OC سه یال یک مکعب هستند. فاصلهٔ مرکز مکعب از صفحهٔ گذرنده از نقاط A و B و C کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۳۸- معادلهٔ خط عمود بر دو محور oz و oy به کدام صورت است؟

۱) $\begin{cases} z=a \\ x+y=b \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$

۳) $\begin{cases} z=a \\ y=b \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x=a \\ x+y=b \end{cases}$

۳۹- فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی به معادلات $x-y-2z=6$ و $2x-2y-4z=24$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$

۳) ۳ ۴) ۶

۴۰- فاصلهٔ نقاط A و B از سدأ O به ترتیب ۴ و ۴- می‌باشد. اگر A و B مزدوج توافقی هم نسبت به C و D باشند $\overline{OC}.\overline{OD}$ چقدر است؟

۱) ۰ ۲) ۸-

۳) ۸ ۴) ۱۶

۴۱- بر کدام سه دایره که مراکز آنها بر یک استقامت نباشند نمی‌توان دایره‌ای عمود کرد؟

۱) دو به دو متقاطع
۲) دو به دو متخارج
۳) دو به دو متداخل
۴) دو دایره متقاطع سومی مماس خارج بر آن دو

۴۲- دسته دوایر $a(x^2+y^2-2x)+b(x^2+y^2-2y)=0$ مفروض است. شعاع دایره‌ای از این دسته که از نقطهٔ $(2,-2)$ می‌گذرد کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

۴۳- معادلهٔ مزدوج دسته دوایر $x^2+y^2-2by-1=0$ کدامند؟

۱) $x^2+y^2+2ay-1=0$ ۲) $x^2+y^2+2ax-1=0$

۳) $x^2+y^2-2ax+1=0$ ۴) $x^2+y^2-2ay+1=0$

۴۴- در کدام حالت، مقطع صفحهٔ P با سطح مخروطی دواری که مولد آن خط D و محور آن خط Δ و رأس آن نقطهٔ S است،

یک سهمی است:

۱) P موازی D　　۲) P موازی Δ

۳) P مار بر S و شامل D　　۴) P مار بر S و شامل Δ

۴۵- نقطهٔ M در خارج بیضی به معادلهٔ $۳x^۲+۲y^۲-۶y=\frac{۱۵}{۲}$ نیست. بیشترین مقدار مجموع فواصل M از دو کانون کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$　　۲) ۴

۳) $۲\sqrt{۶}$　　۴) ۶

۴۶- در هذلولی به معادلهٔ $۴x^۲-y^۲+۲y=۹$ فاصلهٔ هر کانون از خط مجانب کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$　　۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۳　　۴) ۴

۴۷- تمام دایره‌های به مرکز $M(x,y)$ واقع بر سهمی $۳y=x^۲-۲x-۲$ گذرنده بر کانون آن بر کدام خط ثابت همواره مماس‌اند؟

۱) $x=\frac{۵}{۴}$　　۲) $x=\frac{۳}{۴}$

۳) $y=\frac{-۱}{۴}$　　۴) $y=\frac{-۷}{۴}$

۴۸- معادلهٔ دایرهٔ اصلی بیضی به معادله‌های پارامتری $\begin{cases}x=۲\cos\theta\\y=۱+\sin\theta\end{cases}$ کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۲x+۱=۰$　　۲) $x^۲+y^۲+۲y-۳=۰$

۳) $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$　　۴) $x^۲+y^۲-۲y+۳=۰$

۴۹- معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ $A(-۱,۲,۰)$ می‌گذرد و بر خط $D: ۲x-۱=۳y+۵=-z+۷$ عمود است کدام است؟

۱) $۳x+۲y+۶z+۱=۰$　　۲) $۳x+۲y-۶z-۱=۰$

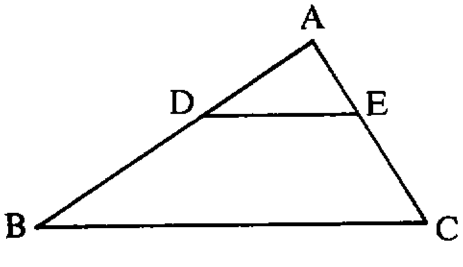
۳) $۳x-۲y-۶z+۱=۰$　　۴) $۳x-۲y+۶z-۱=۰$

۵۰- نقطهٔ تلاقی خط $D:x-۱=\frac{y+۱}{-۲}=\frac{z}{۶}$ و صفحهٔ $P: ۳x-۲y-z-۶=۰$ کدام است؟

۱) $(۱,-۱,۰)$　　۲) $(۱,-۱,-۱)$

۳) $(۲,-۳,۶)$　　۴) $(۱,-۳,۳)$

۵۱- در مثلث ABC، $DE \parallel BC$ و $۳DE=BC$ است. در صورتی که $DB=۱۲$ باشد، اندازهٔ AD چقدر است؟



۱) ۶　　۲) ۸

۳) ۱۰　　۴) ۱۲

۵۲- اندازه‌های اضلاع مثلثی ۶ و ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است. اگر این مثلث با مثلثی به محیط ۷۲ سانتی‌متر متشابه باشد، مساحت مثلث اخیر چقدر است؟

۱) ۲۴　　۲) ۴۸

۳) ۱۰۸　　۴) ۲۱۶

۵۳- ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ سانتی‌متر و یک قطعهٔ وتر ۴/۵ سانتی‌متر است. اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر چقدر است؟

۱) ۶/۲۵　　۲) ۷/۲۵

۳) ۸/۲۵　　۴) ۹/۲۵

۵۴-اگر در مثلثی رابطهٔ $a^۲+bc=b^۲+c^۲$ بین اضلاع مثلث برقرار باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\hat{A}=۹۰°$ ۲) $\hat{A}=۱۲۰°$

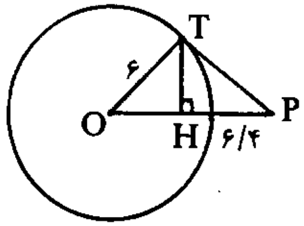
۳) $\hat{B}=۱۲۰°$ ۴) $\hat{A}=۶۰°$

۵۵-اندازهٔ اضلاع مثلثی ۱۴ و ۴۸ و ۵۰ سانتی‌متر است. بزرگترین زاویهٔ این مثلث چند درجه است؟

۱) °۹۰ ۲) °۱۲۰

۳) °۶۰ ۴) °۷۵

۵۶-اندازهٔ تصویر مماس PT روی قطر گذرنده از نقطهٔ P در دایره‌ای به شعاع ۶، برابر ۶/۴ است. اندازهٔ مماس PT چقدر است؟



۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۵۷-بین مساحت مثلثهای به قاعدهٔ ثابت ۶ و محاط در دایره‌ای به شعاع ۵، بیشترین مساحت کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۵

۳) ۲۷ ۴) ۲۸

۵۸-در مثلث ABC، $\cos\hat{A}=\frac{۱۲}{۱۳}$ و $\cos\hat{C}=\frac{۵}{۱۳}$ است. اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵

۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۵۹-اندازهٔ کوچکترین وتر مرسوم از نقطهٔ M در دایرهٔ C(O,5cm) برابر ۸ سانتی‌متر است. فاصلهٔ نقطهٔ M تا مرکز دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۶۰-خط $\Delta: ۲x-y-۴=۰$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث OAB کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$

۶۱-اگر

$$|\vec{V}_۱|=۶ \quad \text{و} \quad |\vec{V}_۲|=۴ \quad \text{و} \quad (\vec{V}_۱ , \vec{V}_۲)=۶۰°$$

باشد اندازهٔ $(-۲\vec{V}_۱).(۳\vec{V}_۲)$ چقدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸

۳) ۷۲- ۴) ۷۲

۶۲-دو دایرهٔ متساوی به مراکز O و ´O متخارج‌اند. از نقطهٔ M وسط خط المرکزین این دو دایره، خطی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به مرکز O را در نقاط A و B و دایرهٔ به مرکز ´O را در نقاط ´A و ´B قطع کند. نسبت اندازهٔ وترهای AB و ´A´B کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۴

۶۳-کدام یک از شکلهای هندسی زیر، هم محور تقارن، و هم مرکز تقارن دارد؟

۱) مثلث متساوی الاضلاع ۲) متوازی الاضلاع

۳) ذوزنقه متساوی الساقین ۴) مستطیل

۶۴ـ بیست وجهی منتظم ۱۲ رأس دارد. تعداد یالهای آن کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰
۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۶۵ـ شعاع قاعدهٔ مخروطی را دو برابر و ارتفاع آن را نصف می‌کنیم. نسبت حجم مخروط حاصل به حجم مخروط اولیه کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶۶ـ اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ یک قاچ کروی $\frac{\pi}{۳}$ است. در صورتی که شعاع کره ۳ سانتی‌متر باشد ۶ برابر اندازهٔ حجم این قاچ کروی چند سانتی‌مترمکعب است؟

۱) ۳۶π ۲) ۱۸π
۳) ۹π ۴) ۳π

۶۷ـ نسبت سطح کره‌ای به شعاع R به سطح مکعب محیط بر آن کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

۶۸ـ اندازهٔ ارتفاع یک چهاروجهی منتظم برابر ۲ می‌باشد. طول یال این چهاروجهی چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۶۹ـ در مثلث ABC،
$\hat{A}=۶۰^\circ$ و $\hat{B}=۱۰۵^\circ$ و $AB=۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$ است.
طول نیمساز داخلی زاویه A چقدر است؟

۱) ۶ ۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری گروه علوم تجربی مرحلهٔ اول ۱۳۷۰

۷۰ـ در مثلثی $\hat{C}=۶۰^\circ$ و $\hat{A}=۲\hat{B}$ ، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}\ \sin ۴۰^\circ$ ۲) $۲\sin ۴۰^\circ$
۳) $۲\cos ۴۰^\circ$ ۴) $\sqrt{۳}\ \cos ۴۰^\circ$

کنکور سراسری گروه علوم تجربی مرحله اول ۱۳۷۲

تستهای جبر و مثلثات تجربی

(سالهای دوّم، سوّم و چهارم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

۱ - معادلهٔ $3m^3x=m^2+27x$ به ازای چه مقداری از m جواب ندارد؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{3}$

۳) $\sqrt[3]{3}$ ۴) $\sqrt[3]{9}$

۲ - اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-x-1=0$ باشند، مقدار عبارت $\frac{1}{x_2^3}+\frac{1}{x_1^3}$ معادل با کدام گزینه است؟

۱) ۱- ۲) ۲-

۳) ۳- ۴) ۴-

۳ - تعداد ریشه های حقیقی معادلهٔ

$$\frac{(x^4-x^2)(x^3+1)(x^2-3x+2)}{(x^3+2x^2)(x^2-1)^2}=0$$

برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۳

۳) ۵ ۴) ۷

۴ - به ازای چه مقادیری از m معادلات $x^3+mx^2+x=0$ و $x^3+x^2+mx=0$ ریشه مشترک غیر صفر دارند.

۱) ۱ یا ۲ ۲) ۱ یا ۲-

۳) ۱ یا ۱- ۴) ۱ یا ۲ یا ۲-

۵ - معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌هایش برابر توان سوم هریک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-3x+1=0$ باشد کدام است؟

۱) $x^2-x-18=0$ ۲) $x^2-18x+1=0$

۳) $x^2+x+18=0$ ۴) $x^2+18x-1=0$

۶ - به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ:
$m^2x+2(m+x)+1=3mx$ ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۱) ۱- یا ۲ ۲) ۱ یا ۲-

۳) ۱- یا ۲- ۴) ۱ یا ۲

۷ - معادلهٔ:

$$(x^{69}-x)^{70}+(x^{71}-x)^{72}+(x^3+3x^2+2x)^{72}=0$$

چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۸ - اگر یک ریشهٔ معادله‌ای با ضرایب گویا برابر $\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ باشد، ریشهٔ دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{-1}{1+\sqrt{2}}$ ۲) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

۳) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

۹- به ازای چه مقادیری از m معادله درجهٔ دوم:
$(m+۱)x^۲-۲(m-۱)x+m=۰$ ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) $m \geq \frac{-۱}{۳}$ ۲) $m \geq \frac{۱}{۳}$

۳) $m \leq \frac{-۱}{۳}$ ۴) $m \leq \frac{۱}{۳}$

۱۰- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲-mx+۳=۰$ باشند و داشته باشیم $|x_۲-x_۱| = \frac{۵}{۲}$ مقدار m برابر کدام گزینه است؟

۱) ±۳ ۲) ±۵

۳) ±۷ ۴) ±۹

۱۱- به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $x^۲-۶mx+۱=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۱) $m < \frac{۱}{۳}$ ۲) $m > \frac{-۱}{۳}$

۳) $\frac{-۱}{۳} < m < \frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{-۱}{۹} < m < \frac{۱}{۹}$

۱۲- اندازهٔ مجذور قطر مستطیلی برابر ۱۰۰ است، در صورتی که اندازهٔ محیط این مستطیل برابر ۲۸ باشد، قدر مطلق تفاضل طول و عرض مستطیل کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۱۳- اگر مجموع و حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی برابر باشد، مجموع مربعات آن سه عدد برابر کدام گزینه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۴- اگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-m^۲x+۱=۰$ باشند، مقدار m کدام است؟ $(۰<\alpha<\frac{\pi}{۲})$

۱) ±۱ ۲) $\pm\sqrt[۴]{۲}$

۳) $\pm\sqrt[۴]{۳}$ ۴) $\pm\sqrt[۴]{۴}$

۱۵- اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-\sqrt{۲}x-\sqrt{۵}=۰$ باشند، مقدار عبارت $\log^۴ a \log^۴ b \log^۲ ab$ معادل کدام گزینه است؟

۱) ۲۵ ۲) $۲۵\sqrt{۲}$

۳) ۵۰ ۴) $۵۰\sqrt{۲}$

۱۶- مجموعه جوابهای نامعادلهٔ $(۸x^{۱۶}-۸)(۱۶-۱۶x^۸)\geq۰$ کدام است؟

۱) $\{-۱ \text{ و } ۱\}$ ۲) $\{x|\ -۱\leq x\leq۱\}$

۳) $\{x|\ x\geq۱\}$ ۴) $\{x|\ x\leq-۱\}$

۱۷- مجموعه جوابهای مشترک دو نامعادلهٔ:
$-۹x^۲-۱۲x<۳$ و $۴x^۲-۱۲x>۰$ با شرط $-۱<x<۳$ کدام است؟

۱) $\{x|\ \frac{-۱}{۳}<x<۰\}$ ۲) $\{x|\ -۱<x<۰\}$

۳) $\{x|\ ۰<x<۳\}$ ۴) $\{x|\ -۱<x<\frac{-۱}{۳}\}$

۱۸- اگر داشته باشیم: $\log_۴(۱-x^۲) \geq \frac{-۱}{۲}$ حدود $|x|$ کدام است؟

۱) $|x| \leq \frac{۱}{۲}$ ۲) $|x| \leq ۱$

۳) $|x| \leq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $|x| \leq \frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۱۹- به ازای چه مقادیری از x عبارت: $\sqrt{\log\sqrt{x^{۲}-۳}}$ تعریف شده‌است؟

۱) $x>\sqrt{۳}$ ۲) $x<-\sqrt{۳}$
۳) $x>\sqrt{۳}$ یا $x<-\sqrt{۳}$
۴) $x\geq ۲$ یا $x\leq -۲$

۲۰- به ازای چه مقادیری از x عبارت: $\sqrt[۸]{\sqrt[۵]{\sqrt[۲]{x^{۵}-۳۲}}}$ تعریف شده است؟

۱) $x\geq ۲\sqrt{۲}$ ۲) $x\geq\sqrt{۲}$
۳) $x\geq ۲$ ۴) $x\in\mathbb{R}$

۲۱- جملهٔ عمومی یک رشته $\frac{۲^{n+۳}}{۴^{n+۱}-۱۲}$ است، کدام جمله از این رشته مساوی $\frac{۱۶}{۶۱}$ است؟

۱) دوم ۲) سوم
۳) چهارم ۴) پنجم

۲۲- در یک تصاعد عددی جمله پنجم ۲۳ و جمله هشتم ۳۸ است. جملهٔ سوم آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۸
۳) ۱۳ ۴) ۱۸

۲۳- در یک تصاعد عددی مجموع جملات دهم و هفدهم برابر ۳n+۵m است. در صورتی که این تصاعد شامل جملاتی به شکل ۲n+۳m و n+۲m باشد و جملات دهم وهفدهم آن به ترتیب برابر ۱۰ و ۱۷ باشند مقدار m+n کدام است؟

۱) ۳ یا ۳- ۲) ۵ یا ۵-
۳) ۷ یا ۷- ۴) ۹ یا ۹-

۲۴- مجموع جملات یک تصاعد حسابی برابر: $S_n=۳\log_n\left(\frac{۱}{n^{۳}}\right)^{n}+۶n^{۲}$ است. جملهٔ اول تصاعد کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۹-
۳) ۶ ۴) ۱۲

۲۵- جملهٔ عمومی یک تصاعد هندسی $\frac{۱}{۳^{n-۲}}$ است، حد مجموع جملات این تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۶- در یک تصاعد هندسی جملهٔ چهارم ۲۴ و جملهٔ هفتم ۱۹۲ است. جملهٔ دوم آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶
۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۲۷- حاصل‌ضرب دو عدد فرد متوالی طبیعی ۴۸۳ است، عدد فرد متوالی بعدی کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۱
۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۲۸- اگر $\log ۲=۰/۳۰۱$ باشد، $\log\sqrt[۵]{۵}$ کدام است؟

۱) ۰/۱۳۳ ۲) ۰/۲۳۳
۳) ۰/۱۳۹۸ ۴) ۰/۱۳۲۳

۲۹- اگر $\log ۳=k$ باشد، $\log\sqrt[۲k]{۹۰۰}$ کدام است؟

۱) $۱+\frac{۱}{k}$ ۲) $\frac{k-۱}{k}$
۳) $\frac{k-۱}{۲k}$ ۴) $\frac{k+۱}{۲k}$

۳۰- اگر $3\log x^2 = 2\log 3$ باشد، مقدار $|x|$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{3}$

۳) $\sqrt[3]{4}$ ۴) $\sqrt[3]{9}$

۳۱- اگر $\log 3 = 0/477$ باشد، 9^9 چند رقمی است؟

۱) ۷ رقمی ۲) ۸ رقمی

۳) ۹ رقمی ۴) ۱۰ رقمی

۳۲- حاصل $\log_2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{19}{32}$ ۲) $\frac{7}{8}$

۳) $\frac{15}{16}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۳- جواب معادلهٔ $4^{3+6+9+\dots+3x} = 64$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳۴- جواب معادلهٔ $2^{\log x} + x^{\log 2} = 2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳۵- عبارت $\sqrt[6]{\log\sqrt[3]{(x^2-9)^2}}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

۱) $x \geq -3$ ۲) $x \leq 3$

۳) $x = \pm 3$ ۴) $-3 \leq x \leq 3$

۳۶- چه زاویه‌ای است برحسب رادیان که اگر به اندازه‌اش برحسب درجه عدد ۱۰ افزوده شود اندازهٔ آن برحسب گراد به دست می‌آید؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۳۷- در ساعت ۶ و ۴۰ دقیقه عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه شمار چه زاویه‌ای با یکدیگر می‌سازند؟

۱) 20° ۲) 30°

۳) 40° ۴) 50°

۳۸- از تساوی زیر و شرط $0 < x < \frac{\pi}{4}$ عبارت $\sin 2x$ برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$5\left(\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}\right)^5 + 3\left(\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\right)^5 = \frac{1}{4}$$

۱) ۴ ۲) ۱

۳) $2 + 2\cos 2x$ ۴) $1 + \cos 2x$

۳۹- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه عبارت

$$\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}} + \sqrt{\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}}\right)\sqrt{1+\cos x}$$

معادل کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۴۰- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه عبارت

$$\left(\frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\sqrt{1-\sin^2 x}$$

معادل کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۲

۴۱- جواب معادلهٔ $tg\,4nx\ cotg\,3x = 1$ به ازای چه مقداری از n نامعین است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$

۳) ۳ ۴) ۴

۴۲- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه عبارت

$$\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)\sin x$$

معادل کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۲

۴۳- مجموعه جواب معادلهٔ $\sin^{72}x + \sqrt{\sin x} = 0$ کدام است؟

۱) $\{x \mid x = \frac{k\pi}{2}\}$ ۲) $\{x \mid x = k\pi\}$

۳) $\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ ۴) $\varnothing$

۴۴- از معادلهٔ $3\cos nx + 2 = 0$ مقدار $\sin nx$ کدام است؟ $(\pi < x < \frac{3\pi}{2})$

۱) $\frac{-5}{3}$ ۲) $-\sqrt{5}$

۳) -3 ۴) $\frac{-\sqrt{5}}{3}$

۴۵- اگر

$$tg\,x = \frac{(b^2+1)(5a^2+5)}{a^2+b},\quad cotg\,x = \frac{a^3+ab}{10b^2+10}$$

باشد، مقدار a برابر است با:

۱) ۱ ۲) $b+1$

۳) b^2+1 ۴) b

۴۶- جواب معادلهٔ $12\,Arc\sin\sqrt[5]{x} = 2\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$

۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{32}$

۴۷- عبارت:

$$\frac{5cotg\,225^\circ + \cos 240^\circ + 2\sin 330^\circ + 4tg\,135^\circ}{10tg\,225^\circ + \cos 450^\circ - cotg\,135^\circ + 20\sin 210^\circ}$$

معادل با کدام گزینه است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) $\frac{-1}{2}$

۴۸- عبارت:

$$\frac{\log tg\,1^\circ \times \log tg\,2^\circ \times \cdots \times \log tg\,89^\circ}{tg\,1^\circ + tg\,2^\circ + \cdots + tg\,88^\circ + tg\,89^\circ}$$

معادل با کدام گزینه است؟

۱) $Arc\,tg(2\sin 30^\circ)$

۲) $\log 2 + \sin 30^\circ$

۳) $\log 2 + \log\cos 60^\circ$

۴) ۱

۴۹- اگر $\sin x + \cos x = m$ باشد، آنگاه عبارت $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ به ازای چه مقادیری از m نامعین است؟

۱) ± 1 ۲) $\pm\frac{1}{2}$

۳) $\pm\frac{1}{3}$ ۴) $\pm\frac{1}{4}$

۵۰- اگر $\sin(x-2y)+\cos(2x+y)=2$ آنگاه مقدار $x+y$ کدام است؟ $(0<x\,, y<2\pi\,, x>0)$

۱) $\frac{-\pi}{5}$ ۲) $\frac{-\pi}{4}$

۳) $\frac{-\pi}{10}$ ۴) $\frac{-\pi}{20}$

۵۱- مجموعه جواب معادله
$1+\sin^4x+\cos^4x = \sin^2x-2\sin^2x\cos^2x+\cos^2x$
کدام است؟

۱) $\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}\}$

۲) $\{x \mid x=k\pi\}$

۳) $\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$

۴) $\varnothing$

۵۲- سه نقطهٔ متمایز A و B و C روی محور $x'ox$ مفروض‌اند.
حاصل عبارت $\frac{\overline{AB}-\overline{CB}+\overline{AC}}{\overline{BC}-\overline{BA}}$ کدام است؟ $(x_A \neq x_C)$.

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) -2

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

۵۳- نقاط A و B و C روی یک محور مفروض‌اند. اگر $x_A=2m+1$ و $x_B=6m-2$ و $x_C=4$ باشند، به ازای کدام مقدار m نقطه B وسط پاره‌خط AC است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{9}{5}$

۳) $\frac{9}{10}$ ۴) $\frac{5}{9}$

۵۴- نقطهٔ $A\begin{vmatrix}4m-1\\2m-1\end{vmatrix}$ مفروض است. به ازای چه مقداری از m نقطه A روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم واقع است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

۵۵- اگر چهار نقطهٔ
$A\begin{vmatrix}a-2\\a-1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}3a+1\\2a-3\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}b-1\\b\end{vmatrix}$ و $D\begin{vmatrix}2a+1\\b-1\end{vmatrix}$
رئوس متوازی الاضلاع ABCD باشند مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) 20 ۲) -14

۳) 14 ۴) -20

۵۶- اگر $A\begin{vmatrix}m-1\\2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}3\\m-n\end{vmatrix}$ رئوس مثلث ABC و نقطهٔ $G\begin{vmatrix}-2\\1\end{vmatrix}$ مرکز ثقل این مثلث باشند مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -12

۳) -18 ۴) -22

۵۷- اگر $A\begin{vmatrix}2m-1\\2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}2\\2m\end{vmatrix}$ باشند به ازای کدام مقدار m طول پاره‌خط $AB=5$ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ یا -1 ۲) -1 یا -3

۳) $\frac{1}{2}$ یا 1 ۴) $\frac{-1}{2}$ یا 3

۵۸- نقاط $A(-2,7)$ و $B(1,3)$ دو سر قطر مربعی هستند. مساحت مربع کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{25}{2}$

۳) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{25\sqrt{2}}{2}$

۵۹- اگر $f(x)=\begin{cases} 2\cos x-1 & x>\frac{\pi}{4} \\ 2\sin x+1 & x\leq\frac{\pi}{4} \end{cases}$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{3})\,f(\frac{\pi}{4})\,f(\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}-2$ ۲) $2\sqrt{2}+2$

۳) 2 ۴) $2\sqrt{2}$

۶۰- اگر $f(x)=2^x$ و $f(x+2)-f(x+1)=32$ مقدار x کدام است؟

۱) 3 ۲) 4

۳) 5 ۴) 6

۶۱- اگر داشته باشیم $f(x)+mf(-x)=3x$، به ازای چه مقادیری از m تابع $f(x)$ نامعین است؟

۱) ±1 ۲) ±2

۳) ±3 ۴) ±4

۶۲- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}$ کدام است؟

۱) $]-1,+\infty[$ ۲) $]-1,0[$

۳) $[1,+\infty[$ ۴) $[1,0[$

۶۳- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{|x|-x}}+\frac{x+1}{\sqrt{2x-|2x|}}$ کدام است؟

۱) $\{x \mid x \nless 0\}$ ۲) $\{x \mid x>-1\}$

۳) $\{x \mid x=-1\}$ ۴) $\varnothing$

۶۴- دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log\frac{x^2+1}{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $\{x \mid x<1\}$ ۲) $\{x \mid x<-1$ یا $x>1\}$

۳) $\{x \mid -1<x<1\}$ ۴) $\{x \mid x<-1\}$

۶۵- اگر $f(x)=x\sqrt[4]{x}$ و $g(x)=1-x^2$ باشد، دامنهٔ تعریف $gof(x)$ کدام است؟

۱) $]-\infty,0[$ ۲) $]0,+\infty[$

۳) $[-1,1]$ ۴) $\mathbb{R}$

۶۶- اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+1}{4x+b}$ خط $y-2x+1=0$ را روی محورهای مختصات قطع کند مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -1

۳) -2 ۴) -3

۶۷- اگر دو خط به معادلات $mx-y=1$ و $2y-x=3$ زاویهٔ 45° را بسازند مقدار m کدام است؟

۱) 3 ۲) -3

۳) 1 ۴) -1

۶۸- اگر دو خط به معادلات $nx-y+1=0$ و $mx-y=1$ در نقطه‌ای به طول ۱- بر هم عمود باشند، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -1

۳) -2 ۴) 1

۶۹ - اگر حد عبارت $\frac{x^{۲}-x^{۳}}{ax^{۳}+۱}$ وقتی $x\to\pm\infty$ برابر $a^{۲}$ باشد مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱
۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷۰ - اگر حد عبارت $\frac{x^{n}+x^{۵}+۷۲}{mx^{۱۵}-x^{۲}+۷۳}$ وقتی $x\to\pm\infty$ برابر $\frac{-۱}{۳}$ باشد مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۳
۳) -۵ ۴) -۱۵

۷۱ - حد عبارت $\frac{\sin x\ tg۲x\ \sin۳x}{۶x^{۳}}$ وقتی $x\to ۰$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\pm\infty$

۷۲ - اگر تابع دو ضابطه‌ای
$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+۱ & x\geq -۱ \\ ax^{۳}+b & x<-۱ \end{cases}$$
در نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-۱\\۲\end{vmatrix}$ پیوسته باشد مقدار عبارت $\frac{f'(-۲)f(۰)}{f''(-۳)}$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۷۳ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}+a}$ مفروض است، در صورتی که $f'(-۱)=۱$ باشد مقادیر a کدام است؟

۱) ۲- یا ۲ ۲) ۱- یا ۲-
۳) ۰ یا ۲ ۴) ۲- یا ۱

۷۴ - اگر $y=u^{۳}-u^{۲}$ و $u=\sin x+\cos۲x$ مقدار مشتق y بر حسب x در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۲}-۴$ ۲) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۴}-۲$
۳) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۴}-۴$ ۴) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۲}-۲$

۷۵ - فاصلهٔ مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ از خط به معادلهٔ $y=x+h$ برابر $\sqrt{۶}$ است، مقادیر h کدام است؟

۱) $\pm۲\sqrt{۳}$ ۲) $\pm\sqrt{۳}$
۳) $\pm\sqrt{۲}$ ۴) $\pm۳\sqrt{۲}$

۷۶ - x و y دو عدد حقیقی و در رابطهٔ $۲x^{۲}+\frac{y^{۲}}{۲}=۳$ صدق می‌کنند، در صورتی که عبارت xy ماکزیمم باشد مقدار $\frac{x^{۳}}{y^{۳}}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{۱}{۸}$
۳) ۱ ۴) -۱

۷۷ - ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=tg^{۲}(\sin۲x)$ در نقطه‌ای به طول $x_{۰}=\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱
۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷۸ - معادلهٔ:
$$\sqrt{۶}\left(\sin(n+۱)x\cos nx-\sin nx\cos(n+۱)x\right)=\sqrt{۳}$$
در فاصلهٔ $[\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ چند جواب دارد؟

۱) n ۲) $n+۱$
۳) ۲ ۴) ۱

۷۹- عبارت $\cot g 80^\circ \, tg 50^\circ \, \cot g 20^\circ$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 1

۸۰- عبارت $\cos 48^\circ + \sin 18^\circ - \cos 12^\circ$ معادل کدام گزینه است؟

۱) 0 ۲) $-2\cos 12^\circ$ ۳) -2 ۴) $-2\sin 12^\circ$

۸۱- حاصل عبارت:

$$\sin\left(3\mathrm{Arctg}(1) - 2\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right) - \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{Arccotg}(-1)\right)$$

معادل کدام گزینه است؟

۱) 0 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) 1

۸۲- مقدار عبارت $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$ به ازای $x=\frac{2\pi}{9}$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) 1 ۴) -1

۸۳- مجموع جوابهای معادلهٔ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = 0$$

که در فاصلهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ واقع‌اند، کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{15}$ ۲) $\frac{\pi}{15}$ ۳) $\frac{3\pi}{5}$ ۴) $\frac{2\pi}{5}$

۸۴- یک جواب عمومی معادلهٔ:

$\cos\frac{x}{6}\cos\frac{x}{12}\cos\frac{x}{24}\sin\frac{x}{24} = \frac{1}{16}$ کدام است؟

۱) $x=3k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۲) $x=6k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $x=3k\pi+\frac{\pi}{3}$

۸۵- اگر $\cot g x = 2+\sqrt{3}$ و $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، اندازهٔ $tg 4x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2-\sqrt{3}$ ۴) 1

۸۶- ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x) = -16x^3+4x^2$ در نقطهٔ عطفش کدام است؟

۱) -12 ۲) -36 ۳) -54 ۴) -68

۸۷- معادلهٔ مکان هندسی مرکز تقارن منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ: $f(x) = \frac{6mx-1}{2x-3m}$ به ازای مقادیر مختلف m کدام است؟

۱) $y=3x$ ۲) $y=\frac{2}{3}x$ ۳) $y=2x$ ۴) $y=\frac{3}{2}x$

۸۸ـ تابع با ضابطهٔ: $f(x)=۲x^۳-۳ax^۲+۲x$ به ازای چه مقادیری از a همواره صعودی است؟

۱) $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}<a<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\frac{-۲\sqrt{۳}}{۳}<a<\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{-\sqrt{۲}}{۳}<a<\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۴) $\frac{-۲}{۳}<a<\frac{۲}{۳}$

۸۹ـ اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره به معادلات: $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۹$ و $(x+۲)^۲+(y-۲)^۲=۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۹۰ـ معادلهٔ دایرهٔ C که مرکز آن روی نیمساز ربع اول و سوم قرار داشته باشد و از مبدأ مختصات نیز بگذرد، کدام است؟

۱) $(x+\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=۴\alpha^۲$

۲) $(x-\alpha)^۲+(y+\alpha)^۲=۲\alpha^۲$

۳) $(x+\alpha)^۲+(y+\alpha)^۲=۴\alpha^۲$

۴) $(x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=۲\alpha^۲$

۹۱ـ معادلهٔ بیضی که مرکزش نقطهٔ $I\begin{vmatrix}-۲\\-۱\end{vmatrix}$ و بر محورهای مختصات مماس می‌باشد کدام است؟

۱) $\frac{(x+۲)^۲}{۱}+\frac{(y+۱)^۲}{۴}=۱$

۲) $\frac{(x-۲)^۲}{۴}+\frac{(y-۱)^۲}{۱}=۱$

۳) $\frac{(x+۲)^۲}{۴}+\frac{(y+۱)^۲}{۱}=۱$

۴) $\frac{(x+۱)^۲}{۴}+\frac{(y+۲)^۲}{۱}=۱$

۹۲ـ معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم، بر سهمی به معادلهٔ $(y+۲)^۲=-۴(x-۱)$ می‌توان رسم نمود کدام است؟

۱) $y-۲=۰$ ۲) $x-۲=۰$

۳) $۲x-۱=۰$ ۴) $۲y-۱=۰$

۹۳ـ نقاط $F(۲-\sqrt{۶},-۲)$ و $F'(۲+\sqrt{۶},-۲)$ کانونهای یک هذلولی متساوی‌القطرین می‌باشند. معادلهٔ این هذلولی کدام است؟

۱) $x^۲-y^۲-۳x-۳y=۴$ ۲) $x^۲-y^۲-۴x-۴y=۳$

۳) $x^۲-y^۲-۲x-۲y=۳$ ۴) $x^۲-y^۲-۲x-۲y=۴$

۹۴ـ اگر منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ بر محور طولها مماس باشد و داشته باشیم: $f''(x)=۱۲x$ مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴

۳) -۶ ۴) -۸

۹۵ـ اندازهٔ سطح محصور بین دو سهمی به معادلات: $x^۲=۲px$ و $y^۲=۲px$ برابر ۳ است، مقدار $|p|$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹۶ـ مقدار $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{tg^n x}{\cos^۲ x}dx$ برابر $\frac{۱}{۵}$ است، n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۹۷- به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ

$m(\cos x+\sin x)=۲+۳\cos x-m$ دارای جواب است؟

۱) ± ۲
۲) ± ۱
۳) تمام مقادیر
۴) هیچ مقدار

۹۸- اگر در مثلثی رابطهٔ $b=۲a\cos\hat{C}$ برقرار باشد، مثلث کدام است؟ $(a\neq ۰)$

۱) قائم‌الزاویه
۲) متساوی‌الاضلاع
۳) متساوی‌الساقین
۴) غیر مشخص

۹۹- مجموع جوابهای معادلهٔ $\operatorname{tg} ۴x+\operatorname{cotg} ۴x=۲\sqrt{۲}$ در فاصلهٔ $[\frac{\pi}{۳۲}, \frac{۳\pi}{۳۲}]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۱۶}$
۲) $\frac{\pi}{۸}$
۳) $\frac{۵\pi}{۱۶}$
۴) $\frac{۵\pi}{۳۲}$

۱۰۰- دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ

$$y=\cos^{۳}\frac{۲\pi}{۳}x+\operatorname{tg}^{۵}\frac{\pi}{۶}x+\sin^{۴}\frac{\pi}{۲}x$$

برابر است با:

۱) ۶
۲) ۶π
۳) ۱۲
۴) ۱۲π

پاسخ تشریحی تستهای جبر و آنالیز

● مهدی قمصری و احمد قندهاری

۱ - گزینه (۲)

$$\frac{1}{\sqrt[7]{(3-2\sqrt{2})^2}} \times \frac{\sqrt[7]{(3+2\sqrt{2})^2}}{\sqrt[7]{(3+2\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt[7]{(3+2\sqrt{2})^2}}{\sqrt[7]{(9-8)^2}} = \sqrt[7]{17+12\sqrt{2}}$$

۲ - گزینه (۴)

$$(x'+x'')(x'-x'')^2 = 4 \Rightarrow -\frac{b}{a}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)^2 = 4$$

$$-\frac{b}{a}\left(\frac{\Delta}{a^2}\right) = 4 \Rightarrow -2a(16a^2) = 4$$

$$\Rightarrow a^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۳ - گزینه (۴)

$$\begin{cases} 5x+3y+7z = 1.7 \\ 4x+2y+6z = 0.6 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = 1.1$$

۴ - گزینه (۳)

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + 1 + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + 1 + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha+\beta}{\beta} = 4$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = 4$$

$$-\frac{b}{a}\left(-\frac{c}{d}\right) = 4 \Rightarrow 6\left(\frac{4}{m-1}\right) = 4 \Rightarrow m = 7$$

۵ - گزینه (۳)

$$p+q = n+2 \Rightarrow 3+5 = n+2 \Rightarrow n = 6$$

$\frac{n}{2}+1 = 4$ جمله چهارم بزرگترین ضریب را دارد

جمله چهارم $= C_6^3 a^3 b^3 = C_6^3 (2x)^3 (2y)^3 \Rightarrow$

ضریب جمله چهارم $= 8 \times 8 \times C_6^3 = 64 \times \frac{6!}{3! \times 3!} = 1280$

۶ - گزینه (۴)

$$|x-1| = y \Rightarrow y^2-y-2 < 0 \Rightarrow (y+1)(y-2) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < y < 2 \Rightarrow -1 < |x-1| < 2 \Rightarrow |x-1| < 2$$

$$\Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

۷ - گزینه (۳)

$$f(x) = x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

$$f[g(x)] = f(x^3-3x) = (x^3-3x-1)(x^3-3x-2) = 0$$

$x^3-3x-1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(-27)+27 = -81 \Rightarrow$ سه ریشه حقیقی متمایز

$x^3-3x-2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(-27)+27(4) = 0 \Rightarrow$ دو ریشه حقیقی متمایز

۸- گزینه (۴)

$$f(-11) = a(-11)^7+b(-11)^5+c(-11)^3-7$$
$$f(11) = a(11)^7+b(11)^5+c(11)^3-7$$
$$\Rightarrow f(11)+f(-11) = -14 \Rightarrow f(11)+11 = -14$$
$$\Rightarrow f(11) = -25$$

۹- گزینه (۲)

اگر a و b دو عدد باشند، $\sqrt{ab}$ واسطهٔ هندسی و $\frac{2ab}{a+b}$ واسطه توافقی است.

$$\sqrt{ab}=4\sqrt{3} \Rightarrow ab=48$$
$$\frac{2ab}{a+b}=\frac{48}{7} \Rightarrow \frac{2\times 48}{a+b}=\frac{48}{7} \Rightarrow \frac{a+b}{2}=7$$

۱۰- گزینه (۲)

دو نقطه از تابع را پیدا می‌کنیم و در جوابها صدق می‌دهیم.

$A\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.\ ,\quad B\left|\begin{matrix}3\\7\end{matrix}\right. \Rightarrow$ در گزینه (۲) صدق می‌کند.

۱۱- گزینه (۴)

$$\begin{cases}y=x^2-2x\\ y=x\end{cases} \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0 & \text{غ‌ق‌ق}\\ x=3\end{cases}$$

$$y'=2x-2 \Rightarrow m=6-2=4 \Rightarrow m'=\frac{1}{4}$$

مماس بر منحنی f   مماس بر منحنی f^{-1}

$$tg\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{4-\frac{1}{4}}{1+1}\right|=\frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$\alpha=Arctg\frac{15}{8}$$

۱۲- گزینه (۴)

$$y=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4x+m}}{1}$$

$$x^2-4x+m\geq 0 \Rightarrow \Delta'\leq 0 \Rightarrow 4-m\leq 0 \Rightarrow m\geq 4$$

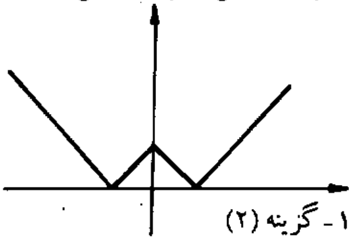
۱۳- گزینه (۴)

بنا به تعریف پیوستگی یک تابع در فاصله $[a,b]$ تابع در $x=a$ پیوستگی راست و در $x=b$ پیوستگی چپ باید داشته باشد ممکن است تابع در $x=a$ حدّ چپ و در $x=b$ حدّ راست نداشته باشد مانند تابع به معادله $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ که در فاصله $[-2,2]$ پیوسته است ولی در $x=2$ و $x=-2$ حدّ ندارد.

۱۴- گزینه (۳)

به تعداد کل جوابهای داخل قدر مطلق

$$|x|=0 \Rightarrow x=0$$
$$|x|-2=0 \Rightarrow x=\pm 2$$



به نمودار تابع توجه کنید.

۱۵- گزینه (۲)

اگر $y=b$ عرض اکسترمم یک تابع باشد، منحنی تابع بر خط $y=b$ مماس است.

$$y=0\Rightarrow x^2+mx+16=0\Rightarrow\Delta=m^2-64=0\Rightarrow m=\pm 8$$

طول نقطه می‌نیمم $= -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} = -\frac{\pm 8}{2} = \pm 4$

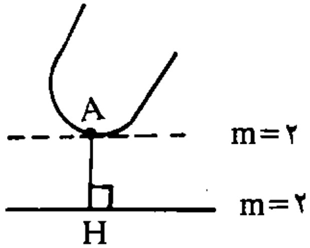
۱۶- گزینه (۲)

$$y'=2x-2=2 \Rightarrow x_A=2 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$$

$$2x-y-9=0$$

$$AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4-0-9|}{\sqrt{4+1}}=$$

$$\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



۱۷ - گزینه (۲)

اگر منحنی مجانب افقی داشته باشد $ax^{۲}$ پس از خروج از رادیکال باید $(-۳x)$ شود تا با $۳x$ حذف شود و منحنی مجانب افقی پیدا کند بنابراین منحنی وقتی مجانب افقی دارد که:

$$\begin{cases} a=۹ \\ x \to -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y=۳x+\sqrt{۹x^{۲}-۱۸x-۱}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow y=۳x+۳\left(x-\frac{۱۸}{۱۸}\right) \Rightarrow y=۶x-۳$$

۱۸ - گزینه (۳)

زوایای خطوط مماس بر منحنی از O به M همواره حاده‌اند و کوچکتر می‌شوند بنابراین منحنی f' در فاصله منحنی O تا M نزولی است. همچنین خطوط مماس بر منحنی از M تا a منفرجه‌اند و همواره بزرگتر می‌شوند و تانژانت این زوایا کوچکتر می‌شوند بنابراین منحنی f' از M به a باز هم نزولی است.

۱۹ - گزینه (۳)

این تابع وقتی محور تقارن دارد که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ پس:

$$\frac{۱}{-\frac{m}{۲}} = \frac{m}{-۸} \neq \frac{۱}{۵} \Rightarrow m^{۲}=۱۶ \Rightarrow m=+۴$$

معادله محور تقارن $x=-\frac{b}{۲a} = -\frac{m}{۲} = -\frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow x=۲$

۲۰ - گزینه (۲)

داریم:

$$\text{Arctg}\,x+\text{Arctg}\,a=\text{Arctg}\,\frac{x+a}{۱-ax} \qquad ۰<x+a<۲$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\text{Arctg}\frac{x+a}{۱-ax}\right) = d\,(\text{Arctg}\,x) = \frac{dx}{۱+x^{۲}}$$

۲۱ - گزینه (۲)

$$f'(۲x-۱)=۴x-۱$$

$$۲x-۱=a \Rightarrow x=\frac{a+۱}{۲} \Rightarrow f'(a)=۲a+۱$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x+۱ \Rightarrow f(x)=x^{۲}+x+c$$

$$-۲=۱+۱+c \Rightarrow c=-۴ \Rightarrow f(x)=x^{۲}+x-۴$$

$$\Rightarrow f(۴)=۱۶$$

۲۲ - گزینه (۴)

فقط در منحنی دایره، قائمهای نقاط مختلفه منحنی از مرکز دایره می‌گذرد. بنابراین منحنی این تست دایره است و $A\begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ مرکز دایره با توجه به $(k<۰)$ جواب (۴) درست است.

۲۳ - گزینه (۳)

$$\alpha+\beta-۲\gamma=y \Rightarrow \overbrace{\alpha+\beta+\gamma}^{۰}-۳\gamma=y \Rightarrow y=-۳\gamma$$

$$\gamma=-\frac{y}{۳} \Rightarrow \left(-\frac{y}{۳}\right)^{۳}+p\left(-\frac{y}{۳}\right)+q=۰$$

$$\Rightarrow \quad y^{۳}-۹py-۲۷q=۰$$

$$\frac{۱}{y_{۱}}+\frac{۱}{y_{۲}}+\frac{۱}{y_{۳}}=\frac{-c}{d}=\frac{۹p}{-۲۷q}=\frac{-p}{۳q}$$

۲۴ - گزینه (۱)

اعداد ۲- و ۱ را در معادله صدق داده و b را بین آنها حذف می‌کنیم.

۲۵ - گزینه (۳)

$$\left(\sqrt{x'}+\sqrt{x''}\right)^{۲}=x'+x''+۲\sqrt{x'x''}$$

$$=\frac{۴۱}{۴}+۲=\frac{۴۹}{۴} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x'}+\sqrt{x''}+\sqrt{x'x''}=\frac{۷}{۲}+۱=\frac{۹}{۲}$$

۲۶ - گزینه (۲)

اگر $\alpha+\beta+\gamma=۰ \Rightarrow \alpha^{۳}+\beta^{۳}+\gamma^{۳}=۳\alpha\beta\gamma$

$$\frac{\alpha^{۲}}{\beta\gamma}+\frac{\beta^{۲}}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^{۲}}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^{۳}+\beta^{۳}+\gamma^{۳}}{\alpha\beta\gamma}=۳$$

۲۷ - گزینه (۳)

از کم کردن دو معادله نتیجه می‌شود $x=a$ که چون در یکی از معادلات ببریم حاصل می‌شود $a=۰,۱,۴$ که تنها $a=۴$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۸ - گزینه (۱)

در هر کثیرالجمله $f(x)$ مجموع ضرایب متغیر با درجات مختلف می‌شود $f(۱)-f(۰)$ مثلاً در عبارت $ax^۳+bx^۲+cx+d$ مجموع ضرایب x و $x^۲$ و $x^۳$ می‌شود:

$f(۱)-f(۰)=a+b+c+d-(d)=a+b+c$

لذا داریم: $f(۱)-f(۰)=۱-(-۱)=۲$

۲۹ - گزینه (۲)

$$(x+۱)+(x+۱)^۲+\cdots+(x+۱)^{۱۰}$$
$$=\frac{a(q^n-۱)}{q-۱}$$
$$=\frac{(x+۱)\left[(x+۱)^{۱۰}-۱\right]}{x}$$
$$=\frac{(x+۱)^{۱۱}-(x+۱)}{x}$$

کافی است در کثیرالجملهٔ صورت ضریب $x^۳$ را که در $(x+۱)^{۱۱}$ وجود دارد یا ضریب جمله چهارم $(۱+x)^{۱۱}$ را پیدا کنیم.

$$\text{جمله چهارم}=T_۴=C_{۱۱}^{۳}x^۳=\frac{۱۱!}{۸!\times۳!}x^۳=۱۶۵\,x^۳$$

۳۰ - گزینه (۳)

$$T_k=C_{(k-۱)}^{۱۱}\left(۳^{\frac{۱۲-k}{۴}}\times۲^{\frac{k-۱}{۳}}\right)$$

برای گویا بودن این جمله باید $۱۲-k=۴n$ و $k-۱=۳m$ و $(m,n\in N)$ تنها $k=۴$ در نتیجه

$$T_۴=C_۳^{۱۱}\times۳^۲\times۲=۱۶۵\times۱۸=۲۹۷۰$$

۳۱ - گزینه (۲)

$$a_۹=S_۹-S_۸=(۲^{۱۰}-۲)-(۲^۹-۲)=۲^۹=۱۰۲۴$$

۳۲ - گزینه (۴)

زیرا $y=\log|x|$ یک تابع زوج است و محور yها محور تقارن است و تنها در گزینه (۴) صدق می‌کند.

۳۳ - گزینه (۴)

زیرا $b^۲<ac$ پس، منحنی محور xها را قطع نمی‌کند و $a<۰$ دارای ماکسیمم است.

۳۴ - گزینه (۳)

$$a+b=۰\ ,\ b-۲=۰\ \Rightarrow\ b=۲\ ,\ a=-۲\ ,\ b-۲a=۶$$

۳۵ - گزینه (۲)

$$f(x)=\frac{۲x}{۱+x^۲}-\sqrt{۳}\,\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\quad,\quad x=tg\frac{\alpha}{۲}$$
$$f(\alpha)=\sin\alpha-\sqrt{۳}\cos\alpha$$
$$R_f=\left[-\sqrt{a^۲+b^۲},\sqrt{a^۲+b^۲}\right]=[-۲,۲]$$

برد تابع $y=a\sin x+b\cos x$ عبارتست از

$$R_y=\left[-\sqrt{a^۲+b^۲},\sqrt{a^۲+b^۲}\right]$$

۳۶ - گزینه (۲)

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{۴x-[x]}{x}=۴-\frac{[x]}{x}\right]=۴-۱=۳$$

۳۷ - گزینه (۳)

$$y=x^۴+۲x^۲+ax+b$$
$$y'=۴x^۳+۴x+a\ ,\quad y''=۱۲x^۲+۴>۰$$

چون تقعر منحنی همواره به طرف yهای مثبت می‌باشد لذا منحنی تابع فقط دارای یک نقطهٔ می‌نیمم است.

۳۸- گزینهٔ (۳)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}=3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x)=tg^2x(1+tg^2x) \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\Rightarrow \quad 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=6$$

۳۹- گزینهٔ (۳)

در این تابع دو نقطه $A'\left|\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right.$ و $A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ متناظراند.

$$f(x)=2x-\sin(x-2)$$

$$f(2)=4 \qquad f^{-1}(4)=2 \quad \Rightarrow \quad 4+2=6$$

۴۰- گزینهٔ (۳)

$$y=\sqrt[3]{(x-a)^2x}$$

چون $x=a$ طول نقطهٔ بازگشت منحنی است لذا $a=1$.

۴۱- گزینهٔ (۴)

$$\lim_{x\to\infty}\left[(2x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}=2x+1-1=2x\right]=\infty$$

در نتیجه $y=2x$ مجانب منحنی $y=f(x)$ و $x=2y$ مجانب منحنی تابع وارون آن می‌باشد.

۴۲- گزینه (۱)

$$x\to\infty \quad \Rightarrow \quad t\to\infty\ ,\ t\to 1\ ,\ t\to -1$$

که چون در $y=\dfrac{2t-\sqrt{1+t^2}}{2t+\sqrt{1+t^2}}$ ببریم برای y چهار جواب پیدا می‌شود. در حالت $t\to\infty$ دو حالت در نظر بگیرید $t\to+\infty$ و $t\to-\infty$.

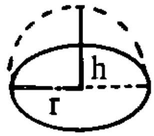
۴۳- گزینه (۲)

زیرا در تابع (۱) داریم $R_f=R-\{2\}$ و ۳ و ۴ هم که بدیهی است برد آنها R نمی‌باشد.

۴۴- گزینه (۲)

$$\text{حجم عرقچین}=V=\frac{\pi h}{6}(3r^2+h^2)$$

$$dV=\pi hrdr=\pi hr\times\frac{1}{10\pi}=\frac{1}{10}rh$$



۴۵- گزینه (۲)

$$gof=\{(1,4),(0,1)\}$$

۴۶- گزینه (۴)

$$\sqrt[n]{a^n+b}\simeq a+\frac{b}{na^{n-1}}$$

$$\sqrt[6]{65}=\sqrt[6]{2^6+1}=2+\frac{1}{6\times 2^5}\simeq 2/005$$

۴۷- گزینه (۲)

$$\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^6}=\left[\frac{1}{3}\mathrm{Arctg}\,x^3\right]_0^1=\frac{\pi}{12}$$

۴۸- گزینه (۱)

می‌دانیم اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ باشد در نتیجه

$$1<(\sin x\cos x)\le\sqrt{2} \quad , [\sin x\cos x]=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,dx=[-\cos x+\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1-(-1)=2$$

۴۹- گزینه (۴)

می‌دانیم :

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

که f(x) پیوسته است.

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x^2 dx}{x^2+(3-x)^2} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{(3-x)^2 dx}{(3-x)^2+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} dx = 2 \quad , \quad I=1$$

۵۰- گزینهٔ (۳)

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} y^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\pi\left[2\,tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\pi(\sqrt{3}-1)$$

۵۱- گزینهٔ (۲)

$$y=\underbrace{\cot g\,4\pi x - tg\,4\pi x}_{T_1=\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{8\pi}=\frac{1}{8}} + \underbrace{12x-[12x]}_{T_2=\frac{1}{a}=\frac{1}{12}}$$

$$\Rightarrow \quad T_1=\frac{3}{24} \quad , \quad T_2=\frac{2}{24} \quad , \quad T_y=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

۵۲- گزینهٔ (۲)

$$\begin{cases} xy-y=2x+1 \\ xy+y=3x-2 \end{cases}$$

از حذف جمله xy بین دو معادله فوق معادلهٔ وتر مشترک حاصل می‌شود:

$$2y = x-3$$

$$m = \frac{1}{2}\,, \quad \alpha = Arctg\frac{1}{2}$$

۵۳- گزینهٔ (۳)

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$$

$$=\frac{64-12xy}{xy}=\frac{64}{xy}-12$$

برای می‌نیمم بودن S باید xy ماکسیمم باشد لذا

$$\text{Max } S = \frac{4}{4}-12 = 4$$

۵۴- گزینه (۳)

زیرا $D_f=[-1,1]$ و $\sqrt{1-x^2}$ در ازای $x=1$ کمترین مقدار و عبارت x^2-3x نیز در $x=1$ کمترین مقدار می‌شود (مشتق این عبارت یعنی $2x-3$ در فاصله $[-1,1]$ منفی است و به ازای بیشترین مقدار x کمترین مقدار برای عبارت پیدا می‌شود.)

۵۵- گزینهٔ (۲)

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha+\cdots+\sin\alpha\cos^n\alpha)=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\cot g\frac{\alpha}{2}=\cot g\,10^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=20^\circ$$

۵٦- گزینه (۳)

$$x=125\times2^{60}=10^3\times2^{57}$$

$$\log x=3\log^{10}+57\log^{2}=3+57\times0/301=20/157$$

x عددی ۲۱ رقمی است.

پاسخ تشریحی تستهای مثلثات رشته ریاضی

● مهدی قمصری و احمد قندهاری

۱- گزینه (۳)

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\,\sin(x+\frac{\pi}{4}),\ \pi+\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}\Rightarrow -1\le\sin(x+\frac{\pi}{4})<-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2}\le\sqrt{2}\,\sin(x+\frac{\pi}{4})<-1\ \Rightarrow -\sqrt{2}\le y<-1$$

۲- گزینه (۱)

$$\log A=\log 4+\log\sin 10^\circ+\log\sin 70^\circ+\log\sin 50^\circ$$

$$\log A=\log 4\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ \qquad \cos 20^\circ=\sin 70^\circ$$

$$\log A=\log\sin 30^\circ$$

$$\sin 3a=4\sin a\ \sin(60^\circ-a)\sin(60^\circ+a)$$

$$a=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \log_2 A=\ \log_2\frac{1}{2}=-1$$

۳- گزینه (۱)

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\ \sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}=2$$

$$1-\sin x=2\quad\Rightarrow\ \sin x=-1$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{cotg}\frac{x}{2}=\frac{2}{\sin x}=\frac{2}{-1}=-2$$

۴- گزینه (۲)

$$\cos\frac{3\pi}{5}=-\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=$$

$$\frac{-4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-2\sin\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$\frac{-\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=-\frac{1}{4}\qquad \sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}$$

۵- گزینه (۲)

$$\cos^2 x=\frac{1}{2(2-\sqrt{2})}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{2(4-2)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+2}{2}\ \Rightarrow\ \cos x=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

هریک از معادلات

$$\cos x=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\ ,\quad \cos x=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

در فاصله $[0\ ,\ \pi]$ یک جواب دارند.

۶- گزینه (۳)

$$\sin x=\frac{(a+1)\ \pm\sqrt{(a+1)^2-4a}}{1}$$

$$=(a+1)\ \pm\sqrt{(a-1)^2}$$

$$\sin x=(a1)\ \pm(a-1)\ \Rightarrow\begin{cases}\sin x=2 & \text{غ ق ق}\\ \sin x=2a\end{cases}$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin x \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < 2a \le 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < a \le \frac{1}{2}$$

۷- گزینه (۱)

$$tg3a - tg2a - tga = 0$$

$$\Rightarrow tg3a + tg(-2a) + tg(-a) = 0$$

چون مجموع سه زاویه صفر است، مجموع تانژانتها مساوی حاصل ضرب تانژانتها است.

$$\Rightarrow tg3a.tg(-2a).tg(-a) = 0$$

$$\Rightarrow tg3a.tg2a.tga = 0$$

۸- گزینه (۲)

$$E(-\sin x)=1 \Rightarrow -\sin x=1 \Rightarrow \sin x=-1$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = tg\frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\Rightarrow E(tg\frac{x}{2})=-1$$

۹- گزینه (۱)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A+nA+C=\pi$$

$$\Rightarrow C=\pi-(n+1)A$$

$$0<C \Rightarrow 0<\pi-(n+1)A \Rightarrow (n+1)A<\pi$$

$$\Rightarrow 0<A<\frac{\pi}{n+1}$$

$$\Rightarrow \cos 0 > \cos A > \cos\frac{\pi}{n+1}$$

$$\Rightarrow 1>\cos A>\cos\frac{\pi}{n+1}$$

۱۰- گزینه (۳)

$$C<B \Rightarrow 0<B-C \Rightarrow 0<B-C<B+C$$

$$\Rightarrow 0<\frac{B-C}{2} < \frac{B+C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 0 > \cos\frac{B-C}{2} > \cos\frac{B+C}{2}$$

اگر $B>C$ همواره داریم:

$$\Rightarrow 1>\cos\frac{B-C}{2} >\sin\frac{A}{2}$$

$$1>2\sin\frac{A}{2} >\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{A}{2} <1 \Rightarrow \sin\frac{A}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} <30^\circ \Rightarrow A<60^\circ$$

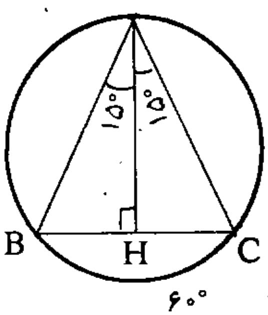
۱۱- گزینه (۳)

$$\sin x+\sin y=2 \Rightarrow \begin{cases}\sin x=1\\ \sin y=1\end{cases}$$

$$\text{کسر}=\frac{1+1+1}{2}=\frac{3}{2}$$

۱۲- گزینه (۱)

مساحت مثلث وقتی ماکزیمم است که ارتفاع ماکزیمم باشد و آن در صورتی است که متساوی‌الساقین باشد



$$\hat{B}=75^\circ$$

$$tg\,75^\circ=\frac{AH}{BH}=\frac{AH}{1}$$

$$\Rightarrow AH=2+\sqrt{3}$$

$$S_{ABC}=\frac{BC\times AH}{2}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}$$

۱۳- گزینه (۴)

$$\div A, B, C \Rightarrow 2B=A+C$$

$$\Rightarrow A+B+C=\pi$$

$$2B+B=\pi \Rightarrow B=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 3B=\pi \Rightarrow \sin 3B=0$$

$$A+C=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3A+3C=2\pi$$

$$\Rightarrow 3A=2\pi-3C$$

$$\Rightarrow \sin 3A = \sin(3\pi - 3C)$$
$$\Rightarrow \sin 3A = -\sin 3C \Rightarrow \sin 3A + \sin 3C = 0$$
$$\Rightarrow \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$$

۱۴- گزینه (۲)

$$\text{Arc}\cos x > \text{Arc}\sin x$$
$$\frac{\pi}{2} - \text{Arc}\sin x > \text{Arc}\sin x$$
$$\frac{\pi}{2} > 2\text{Arc}\sin x \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \text{Arc}\sin x < \frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow -1 \le x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۵- گزینه (۲)

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = -\frac{b}{a}$$
$$tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma = -\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma$$
$$\Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma) = k\pi$$

۱۶- گزینه (۱)

در مثلثات سال سوم داریم:
$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$$
$$\Rightarrow \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

۱۷- گزینه (۳)

$$\text{Arctg}x + \text{Arctg}y = \frac{\pi}{4}$$
$$\text{Arctg}\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = tg\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = 1 \Rightarrow x+y = 1-xy \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x}$$

۱۸- گزینه (۴)

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \cos x < 0$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 120^\circ$$
$$\cos 5x = \cos 600^\circ = \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

۱۹- گزینه(۱)

زیرا $tgx = \frac{2t}{1-t^2}$ به‌ازای $t = \pm 1$ و $\text{cotg}x = \frac{1-t^2}{2t}$
به‌ازای $t = 0$ تعریف شده نیستند.

۲۰- گزینه (۴)

زیرا $tg3x = tgx \Rightarrow 3x = k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$
لیکن به‌ازای مقادیر فرد k مقدار x جوابهای مخرج معادلات است پس باید $k = 2n$ باشد.

۲۱- گزینه (۴)

زیرا جمله‌های متساوی‌البعد از طرفین قرینه هستند بعنوان مثال
$$\cos 178^\circ = \cos(180^\circ - 2^\circ) = -\cos 2^\circ$$

۲۲- گزینه (۴)

زیرا
$$8x^3 - 6x = \sqrt{3} \Rightarrow 4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$$

۲۳- گزینه (۱)

زیرا حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله
$$-tg\alpha \cdot \text{cotg}\alpha = -1 \Rightarrow m = -1$$
$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

و مثلاً
$$tg\alpha = 1 + \sqrt{2} = tg\frac{3\pi}{8}$$
$$tg6\alpha = tg\frac{9\pi}{4} = tg(2\pi + \frac{\pi}{4}) = 1$$

و هر جواب که $tg\alpha$ یا $-cotg\alpha$ فرض شود باز هم نتیجه یکی است.

۲۴- گزینه (۱)

$$(\sqrt{6}+2)\,tgx+(\sqrt{6}-2)\,cotgx=4$$

آن را به معادله کلاسیک نوع اول تبدیل می‌کنیم.

۲۵- گزینه (۲)

$$tgA+tgB+tgC = tgA\ tgB\ tgC$$
$$tgA+(2m+2) = 3tgA \Rightarrow tgA = m+1$$

۲۶- گزینه (۳)

$$B+C=135^\circ \Rightarrow 3B+3C=405^\circ$$
$$tg(3B+3C)=1 \Rightarrow tg3B+tg3C+tg3B\,tg3C=1$$

۲۷- گزینه (۱)

$$\frac{tg\frac{\pi}{24}}{1+tg^2\frac{\pi}{24}}\times\frac{1-tg^2\frac{\pi}{24}}{1+tg^2\frac{\pi}{24}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$$
$$=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}$$

۲۸- گزینه (۱)

$$0\le Arc\cos\frac{x}{2}\le\pi\ ,\ \ 0<Arc\,cotg2x<\pi$$

لذا جمع آنها ممکن نیست صفر شود.

۲۹- گزینه (۲)

هرگاه از طرفین معادله تانژانت بگیریم نتیجه خواهد شد:

$x+2x+3x=6x^3 \Rightarrow x=$ ۰ و ۱ و ۱-

که تنها $x=1$ در معادله صدق می‌کند.

۳۰- گزینه (۳)

$$\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}+3\times\frac{\pi}{4}+\pi-\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۱- گزینه (۳)

$$b^3+c^3+a^3=a^2(b+c+a) \Rightarrow$$
$$(b+c)(b^2+c^2-bc)=a^2(b+c)$$
$$b^2+c^2-bc=b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow$$
$$\cos A=\frac{1}{2} \Rightarrow A=60^\circ$$

۳۲- گزینه (۳)

$$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$$
$$a^2\left[\sin(A+B)-\sin(A-B)\right]=$$
$$b^2\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$
$$4R^2\sin^2A\times2\cos A\sin B=$$
$$4R^2\sin^2B\times2\sin A\cos B \Rightarrow$$

$\sin2A=\sin2B$ یا $2A=2B \Rightarrow A=B$ یا

$$2A+2B=180^\circ \Rightarrow C=90^\circ$$

۳۳- گزینه (۲)

$$3\sin x+4\cos x=5 \Rightarrow$$
$$9\sin^2x+16\cos^2x+24\sin x\cos x=25$$
$$9tg^2x+16+24tgx=25(1+tg^2x)$$
$$\Rightarrow 16tg^2x-24tgx+9=0$$
$$tgx=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$$
$$tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{24}{7}$$

۳۴- گزینه (۲)

$$Arc\sin x+Arc\,tgy+Arc\,tgz=\pi$$

با توجه به اینکه

$$-\frac{\pi}{2}<Arc\,tgy<\frac{\pi}{2}\ ,\ \ -\frac{\pi}{2}\le Arc\sin x\le\frac{\pi}{2}$$

هیچیک از جمله‌های سمت چپ منفی نمی‌توانند باشند زیرا اگر به طرف راست رود جمع دو جمله دیگر غیر قابل قبول

است لذا جمع سه عامل مثبت مقداری ثابت است و حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکسیمم است که همه مساوی باشند:

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi \Rightarrow$$

$$\text{Arc sin}x \,.\, \text{Arc tg}y \,.\, \text{Arc tg}z=\frac{\pi^3}{27}$$

۳۵- گزینه (۳)

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=\frac{P-C}{P}=\frac{\frac{5}{2}C-C}{\frac{5}{2}C}=\frac{3}{5}$$

۳۶- گزینه (۴)

$$bc=2(b^2+c^2-a^2)$$

$$bc=2(a^2+2bc\cos A-a^2) \Rightarrow \cos A=\frac{1}{4}$$

$$0<\frac{1}{4}<\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 90^\circ<\cos A<\cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$90^\circ>A>60^\circ$$

۳۷- گزینه (۱)

$$S=\frac{1}{4}bc \Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{4}bc \quad \sin A=\frac{1}{2} \quad A=30^\circ$$

۳۸- گزینه (۱)

در مثلث قائم الزاویه

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^3=ab^2+ac^2 \Rightarrow$$

$$a^3>b^3+c^3 \Rightarrow \sin^3A>\sin^3B+\sin^3C$$

در مثلث منفرج‌الزّاویه

$$a^2=b^2+c^2+kbc \Rightarrow k>0$$

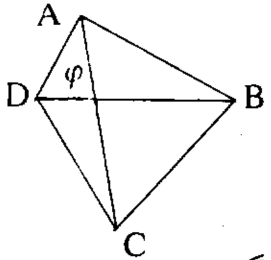
$$a^3>b^3+c^3 \Rightarrow \sin^3A>\sin^3B+\sin^3C$$

و یقیناً $a^3=ab^2+ac^2+kabc$

۳۹- گزینه (۱)

مساحت هر چهار ضلعی محدب ABCD از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$S=\frac{1}{2}AC.DB.\sin\varphi$$



$$S=\frac{1}{2}(4l)(l).\sin 30^\circ$$

$$S=l^2$$

۴۰- گزینه (۳)

$$a^2+b^2\geq c^2 \Rightarrow tg^2\alpha+1+2tg^2\alpha\geq 4tg^2\alpha \Rightarrow$$

$$-1\leq tg\alpha\leq 1 \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{4}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{4}$$

۴۱- گزینه (۲)

$$\sin x\cos x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$2x=150^\circ \Rightarrow x=75^\circ$$

$$\sin(x-45^\circ)+\cos(x-15^\circ)=\sin 30^\circ+\cos 60^\circ=1$$

۴۲- گزینه (۲)

$$\begin{cases} x+y=\frac{3\pi}{2} \\ \sin x+a\sin y=a+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sin x+a\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=a+1$$

$$\sin x-a\cos x=a+1$$

$$1+a^2\geq(a+1)^2 \Rightarrow a\leq 0$$

۴۳- گزینه (۳)

$$\cos 27^\circ+\cos 33^\circ+\cos 87^\circ=$$

$$\cos 27^\circ+2\cos 60^\circ\cos 27^\circ=2\cos 27^\circ=2\sin 63^\circ$$

۴۴- گزینه (۲)

$$\sin^2x-2m\sin 2x+m\cos^2x=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-\frac{4m\sin x\cos x}{\cos^2x}+\frac{m\cos^2x}{\cos^2x}=0$$

$$tg^2x-4m\,tgx+m=0 \qquad x'=\frac{\pi}{2}-x'' \Rightarrow$$

$$tgx'=\frac{1}{tgx''} \Rightarrow tgx'\cdot tgx''=1 \Rightarrow$$

$$\frac{c}{a}=1 \quad \boxed{m=1}$$

پاسخ تشریحی تستهای ریاضیات جدید

● حمیدرضا امیری

۱ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا: به‌ازای هر $x\geq 1$ مقدم گزارهٔ شرطی نادرست و در نتیجه گزارهٔ شرطی ارزش درست خواهد داشت.

۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv\sim(q\Rightarrow r)\Rightarrow\sim p\equiv(q\wedge\sim r)\Rightarrow\sim p$$

۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

می‌دانیم اگر تالی گزارهٔ شرطی درست باشد ارزش آن گزاره شرطی همواره درست است پس $(q\Rightarrow p)\equiv T$ و مجدداً $(q\Rightarrow\sim p)\Rightarrow(q\Rightarrow p)\equiv T$ و سپس $r\Rightarrow[(q\Rightarrow\sim p)\Rightarrow(q\Rightarrow p)]$ همواره درست است.

۴ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

مجموعهٔ اعداد صحیح نسبی یعنی Z از پایین کراندار نیست در صورتی که مفهوم گزارهٔ سوری در گزینهٔ (۴) از پایین کراندار بودن Z است.

۵ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

همواره می‌توان از $\exists x\in A\ [p(x)\wedge q(x)]$ و گزارهٔ دیگر را نتیجه گرفت و عکس این مطلب برقرار نیست مثلاً گزارهٔ زیر درست است:

$$(\exists x\in Z, x>0)\wedge(\exists x\in Z, x<0)$$

اما گزارهٔ $\exists x\in Z, (x>0\wedge x<0)$ نادرست است.

۶ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$r\Leftrightarrow[s\wedge\sim(\sim s\Rightarrow\sim r)]\equiv r\Leftrightarrow\underbrace{[s\wedge(\sim s\wedge r)]}_{F}$$

$$\equiv r\Leftrightarrow F\equiv(r\Rightarrow F)\wedge\underbrace{[F\Rightarrow r]}_{T}\equiv(r\Rightarrow F)\wedge T$$

$$\equiv(r\Rightarrow F)\equiv\sim r\vee F\equiv\sim r$$

۷ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

تالی گزاره یعنی $[(p\wedge s)\Rightarrow p]$ یک استلزام منطقی و همیشه درست است $([(p\wedge s)\Rightarrow p]\equiv[(\sim p\vee\sim s)\vee p]\equiv T)$

بنابراین کل گزارهٔ شرطی همواره درست است.

۸ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sim[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(q\Rightarrow(q\wedge r))]$$

$$\equiv\sim[(\sim p\vee q)\Rightarrow(\sim q\vee(q\wedge r))]$$

$$\equiv[(\sim p\vee q)\wedge\sim(\sim q\vee r)]$$

$$\equiv[(\sim p\vee q)\wedge(q\wedge\sim r)]$$

$$\equiv\underbrace{[(\sim p\vee q)\wedge q]}_{\text{جذب}}\wedge\sim r\equiv(q\wedge\sim r)$$

۹ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$$

بنابراین گزاره شرطی حاصل از ترکیب این دو گزاره همواره درست است و لذا عکس نقیض آن باید هم‌ارز با آن و همواره درست باشد که گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ همواره درست نمی‌باشند.

۱۰- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:
با توجه به فرض $p\equiv q$ از طرفی چون $[(p\Rightarrow r)\Rightarrow q]\equiv T$ گزاره‌های p و q نمی‌توانند هر دو نادرست باشند، پس باید هر دو درست باشند:

$$q\equiv T \Rightarrow (s\Rightarrow q)\equiv T \Rightarrow [(p\Rightarrow s)\Rightarrow(s\Rightarrow q)]\equiv T$$

۱۱- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

روش اول:

۱) $p\Rightarrow(q\Rightarrow\sim s)$

۲) $s\wedge q$

۳) $(p\wedge q)\Rightarrow\sim s$ از (۱) و عطف مقدمات

۴) $s\Rightarrow(\sim p\vee\sim q)$ از (۳) و عکس نقیض

۵) s از (۲) و حذف عاطف

۶) $(\sim p\vee\sim q)\equiv q\Rightarrow\sim p$ از (۴) و (۵) و انتزاع

۷) q از (۳) و حذف عاطف

۸) $\sim p$ از (۶) و (۷) و انتزاع

۹) $\sim p\vee s\equiv p\Rightarrow s$ از (۸) و ادخال فاصل

روش دوّم:
چون $s\wedge q\equiv T$ پس $q\equiv T$ و $s\equiv T$ یا $\sim s\equiv F$ بنابراین $(q\Rightarrow\sim s)\equiv F$ پس باید $p\equiv F$ یا $\sim p\equiv T$ پس $(\sim p\vee s)\equiv T$.

۱۲- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:
گزارهٔ $(q\Rightarrow q)$ همواره درست است لذا ترکیب شرطی $(p\Rightarrow q)\Rightarrow(q\Rightarrow q)$ همواره درست است.

۱۳- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$A'\subseteq B \Rightarrow B'\subseteq(A')' \Rightarrow B'\subseteq A$$

۱۴- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}A\cup B = A\Rightarrow B\subseteq A\\ A\cap B = A\Rightarrow A\subseteq B\end{array}\right\}\Rightarrow A = B$$

۱۵- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$A\subseteq B' \Rightarrow A\cap B=\varnothing \Rightarrow$$
$$B\cap A=\varnothing \Rightarrow B - A' = \varnothing$$

۱۶- گزینهٔ (۳) صحیح است. زیرا:

$$(B-C)\cap\left[(C-A)'\cap(A'\cap B')'\right]$$
$$=(B-C)\cap\left[(C'\cup A)\cap(A\cup B)\right]$$
$$=(B-C)\cap\left[A\cup(B\cap C')\right]$$
$$=\underbrace{(B-C)\cap\left[A\cup(B-C)\right]}_{\text{جذب}}=(B-C)=C'-B'$$

۱۷- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:
دو مجموعهٔ $(A-B)$ و $(A\cap B)$ جدا از هم هستند و رابطهٔ $(A-B)\subseteq(A\cap B)$ ممکن نیست مگر اینکه $A-B=\varnothing$

۱۸- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$$(A\cap B) = \varnothing \Rightarrow \begin{cases}(A - B) = A\\ (B - A) = B\end{cases}$$
$$\Rightarrow (A-B)\cap(B-A) = (A\cap B)$$

و طبق فرض $(A\cap B) =\varnothing$

۱۹- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:
X هر مجموعه‌ای باشد همواره $X\cap X'=\varnothing$ و گزارهٔ $\varnothing\subseteq\varnothing$ همواره درست است.

۲۰- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:
اگر فرض کنیم $n(A)=K$ دراین صورت:

$$\text{زیر مجموعه‌های ۳ عضوی } A = \binom{K}{3}$$

$$=\frac{K!}{3!(K-3)!}=\frac{K\times(K-1)(K-2)}{6}$$

$\binom{K}{۲}$ = زیر مجموعه‌های ۲ عضوی A

$$= \frac{K!}{۲!(K-۲)!} = \frac{K\times(K-۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{K(K-۱)}{۲} + ۵ = \frac{K(K-۱)(K-۲)}{۶}$$

$$\Rightarrow K=۶$$

۲۱ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$B-A=B \Rightarrow A\cap B=\varnothing$ (A و B جدا از همند)

$\Rightarrow (A-B')\cup(A-B) = \underbrace{(A\cap B)}_{\varnothing}\cup(A-B)$

$= (A-B)$

و چون A و B جدا از هم هستند پس $A-B=A$

۲۲ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$[(A-B)\cup(A-B')]' = [(A\cap B')'\cap(A\cap B)']$

$= (A'\cup B)\cap(A'\cup B') = A'\cup(B\cap B')$

$= A'\cup\varnothing=A'$

۲۳ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$\{a\}\in A$ و نیز $\{a\}\in P(A)$ بنابراین فقط $\{a\}$ از $P(A)$ برداشته می‌شود بنابراین تعداد اعضای $P(A)$ برابر است با:

$$۲^۳ - ۱ = ۷$$

۲۴ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا اگر:

$$A\times(A-B^۲)=A\times(B^۲-A)$$

داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A\times(A-B^۲)=A^۲-A\times B^۲ \\ A\times(B^۲-A)=A\times B^۲-A^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A^۲-A\times B^۲=A\times B^۲-A^۲ \Rightarrow A^۲=A\times B^۲$$

۲۵ - گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

در ۳ حالت تساوی برقرار است:

$A = B$ یا $B = \varnothing$ یا $A = \varnothing$

که دو حالت اول ($A = \varnothing$ یا $B = \varnothing$) نتیجه می‌دهد:

$n(A\times B)=۰$

۲۶ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

مجموعهٔ $R\times(R-\{۰\})$ مجموعهٔ شامل همهٔ زوج مرتبهایی است که مؤلفهٔ دوّم آنها صفر نمی‌تواند باشد یعنی مجموعه نقاط روی محور x ها را شامل نمی‌شود.

۲۷ - گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$(B\times A) - (B\times B') = B\times(A-B')$

$= B\times(A\cap B) = B\times\varnothing = \varnothing$

۲۸ - گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

زوج مرتبهای موجود در چنین رابطه‌ای باید دارای مؤلفه‌های برابر باشند بنابراین اگر فرض کنیم $A=\{a,b,c,d\}$، هر زیر مجموعه از مجموعهٔ $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$، جواب مسأله است که عبارتند از $۱۶ = ۲^۴$.

۲۹ - گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

تقارنی $R\Leftrightarrow R=R^{-۱}$

$\Rightarrow [R'-(R^{-۱})]'=(R'-R)'$

$= (R'\cap R')'=R\cup R=R$

۳۰ - گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$[(۰,۱)] = \{(x,y) \mid (x,y)\ f(۰,۱)\}$

$=\{(x,y) \mid xy=۰\} = \{(x,y) \mid x=۰ \vee y=۰\}$

مجموعهٔ اخیر مشخص کنندهٔ محورهای مختصات است که روی این محورها همواره $x=۰$ یا $y=۰$ است.

۳۱ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$f(۲,۱)=۲^{۱}-۲=۰\ ,\ f(۱,۲)=۲^{۲}-۱=۳$

$\Rightarrow\ f(f(۲,۱)\ ,\ f(۱,۲))\ =\ f(۰,۳)$

که چون $(۰,۳)\notin N^{۲}$ پس $f(۰,۳)$ تعریف نمی‌شود.

۳۲ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$f(۱,۲)=۲$
$f(۲,۱)=۲$ یک‌به‌یک نیست

پوشا است زیرا $\rightarrow \forall y\in R\ ;\ f(۱,y)\ =\ y$

۳۳ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$f(x)\ =\ ۲x\ -|\ x\ +\ ۱\ \overset{x\in N}{\Rightarrow}\ f(x)\ =\ ۲x\ -\ x\ -\ ۱$

$\Rightarrow f(x)=x-۱$ تابعی یک‌به‌یک و پوشا است

۳۴ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

مجموعهٔ $\{۱,-۱\}$ همراه با عمل ضرب همهٔ خواص گروه را دارا می‌باشد (در Z همهٔ اعضا متقابل ضربی ندارند در N نیز به جز عدد ۱ اعضا متقابل ضربی ندارند در IR عدد صفر متقابل ضربی ندارد).

۳۵ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$$\{\ (x,y)\ \in N^{۲}\mid x^{۲}-y^{۲}=۱\}$$

$$=\left\{(x,y)\ \in N^{۲}\mid y=+\sqrt{x^{۲}-۱}\right\}$$

بنابراین برای هر x فقط یک y وجود دارد (با توجه به اینکه $y\in N$)، لذا تابع است.

۳۶ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

عمل تفریق را می‌توان به‌صورت $x-y=x+(-y)$ تعریف کرد که شرکت پذیر است.

۳۷ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

در مجموعهٔ $\{۰\}$ داریم: $۰+۰=۰\in\{۰\}$

۳۸ـ گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$[(۲*۳)*۵]=[(\min\ \{۲,۳\}+۲)*۵]$

$=۴*۵=\min\ \{۴,۵\}+۴=۴+۴=۸$

۳۹ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$x*e=x \Rightarrow \frac{۴x.e}{۵}\ =x \Rightarrow ۴x.e=۵x \Rightarrow e=\frac{۵}{۴}$

۴۰ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

در حالت کلّی یک گروه n عضوی نمی‌تواند ۲^{n} زیرگروه داشته باشد.

۴۱ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

ابتدا عضو خنثی را می‌یابیم:

$x*e=x \Rightarrow x+e-x.e=x \Rightarrow$

$e(۱-x)=۰ \overset{x\neq ۱}{\Rightarrow}\ \ e=۰$

حال ضابطهٔ عضو متقابل را پیدا می‌کنیم:

$x*x'\ =\ ۰ \Rightarrow x+x'-xx'\ =\ ۰ \Rightarrow$

$x'(۱-x)\ =\ -x \Rightarrow\ \ \boxed{x'=\frac{x}{x-۱}} \Rightarrow$

$۲'=\frac{۲}{۲-۱}=۲$

$x*۲'\ =\ ۵ \Rightarrow x*۲\ =\ ۵\ \Rightarrow\ x+۲-۲x=\ ۵$

$\Rightarrow -x=۳\ \ \Rightarrow\ \ \boxed{x=-۳}$

۴۲ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$۳\oplus ۳=۰$

و صفر عضو خنثی در $Z_{۶}$ است (نسبت به عمل $\oplus$)

۴۳- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:
طبق قضیه حوزهٔ درست بودن حلقهٔ Z_m شرط لازم و کافی است برای برقرار بودن قاعدهٔ حذف از طرفی اگر در Z_m «عضوی مقسوم‌علیه صفر باشد وارون پذیر نیست و بر عکس» و چون حوزه درست است پس فاقد مقسوم‌علیه صفر است لذا همهٔ اعضای مخالف صفر آن وارون پذیرند.

۴۴- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:
IR میدان است و تنها ایده‌آلهای هر میدان مانند IR عبارتند از IR و $\{۰\}$ و چون $\sqrt{۳}\in I$ پس $I\neq\{۰\}$، لذا $I=IR$.

۴۵- گزینهٔ (۶) صحیح است زیرا:
در Z_m اگر a نسبت به m اول باشد وارون پذیر است از طرفی اگر عدد n را به صورت $n=P_1^{\alpha_1}\ P_2^{\alpha_2}\ldots P_k^{\alpha_k}$ تجزیه کنیم تعداد اعداد کوچکتر از n که نسبت به n اولند از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})\ldots(1-\frac{1}{p_k})$$

$$\Rightarrow \varphi(7)=7(1-\frac{1}{7})=7\times\frac{6}{7}=6$$

به‌طور کلی اگر p عددی اول باشد همواره $\varphi(p)=p-1$ است.

۴۶- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:
در Z_m شرط لازم و کافی برای آنکه a مقسوم‌علیه صفر باشد آن است که وارون پذیر نباشد پس:

$8=2^3$

$$\text{تعداد وارون‌پذیرها}=\varphi(8)=8\times(1-\frac{1}{2})=8\times\frac{1}{2}=4$$

و چون صفر نیز نمی‌تواند مقسوم‌علیه صفر باشد پس در کلّ صفر به اضافهٔ ۴ عضو وارون پذیر، مقسوم‌علیه صفر نیستند لذا

$$\text{تعداد مقسوم علیه‌های صفر}=8-(4+1)=3$$

$$(Z_m \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر}=m-\varphi(m)-1)$$

۴۷- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:
هر میدان، ایده‌آل خودش می‌باشد.

۴۸- گزینهٔ (۳) درست است زیرا:
می‌دانیم ایده‌آلهای حلقهٔ Z فقط به شکل mZ هستند و چون $4\in I$ پس $I=2Z$ (۴ جزء مضارب ۶ و مضارب ۳ نیست).

۴۹- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:
Q روی IR نسبت به ضرب اسکالر بسته نیست

$$\sqrt{2}\in IR\ ,\quad 2\in Q\ ,\quad 2\sqrt{2}\notin Q$$

۵۰- گزینهٔ (۲) درست است زیرا:
هر مجموعه که شامل بردار صفر (بردار صفر وابسته خطی است) باشد وابستهٔ خطی است.

۵۱- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:
در حالت کلّی هر خط که از مبدأ مختصات عبور کند یک زیر فضای IR^2 است.

۵۲- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:
شرط لازم و کافی برای آنکه بردارهای (c,d) و (a,b) مستقل خطی باشند آن است که $ad-bc\neq0$ یا $ad\neq bc$ پس در این مسأله باید $xy\neq8$

۵۳- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$ab'+a'b=(a+b)\left(a'+b'\right)$$

$$=(a+b)\cdot(ab)'=\left(a'\cdot b'\right)'\cdot(ab)'$$

۵۴- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:
طبق تست شمارهٔ قبل داریم:

$$bc'+b'c=\left(b'c'\right)'\cdot(bc)'$$

$$\Rightarrow \left(bc'+b'c\right)' = \left[\left(b'c'\right)' \cdot (bc)'\right]'$$

$$= (b'c'+bc)$$

۵۵ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

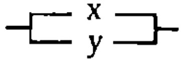
$$(a+b)\cdot\left[(bc)+\left(a'b'\right)'\right]$$

$$= \underbrace{(a+b)[(bc)+(a+b)]}_{\text{جذب}} = (a+b)$$

۵۶ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$T=xy+x'y+xy'=(x+x')y+x\,y'$$

$$=y+xy'=(y+x).(y+y')=(y+x)$$



۵۷ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

با توجه به مدار منطقی $\rightarrow T=(xy+x')'=(x'+y')\cdot x$

$$=\underbrace{(x'\cdot x)}_{\cdot}+(y'x)=y'x$$

۵۸ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

در حالت کّلی n شیئی به $(n-1)!$ طریق مختلف می‌توانند روی محیط یک دایره قرار بگیرند و چون در دستهٔ کلید هر حالت، ۲ حالت می‌تواند باشد (پشت و روی دسته کلید) پس در کل n کلید رابه $\frac{(n-1)!}{2}$ راه مختلف می‌توان در یک دستهٔ کلید جای داد $\left(\frac{(5-1)!}{2}=12\right)$.

۵۹ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

۴ مداد را ۱ شیئی فرض کرده که با ۶ خودکار روی هم ۷ شیئی شده و !۷ جایگشت دارند و خود ۴ مداد در کنار هم !۴ جابجایی دارند پس در کل $4!\times 7!$.

۶۰ـ گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

چون تعداد مدادها و خودکارها برابر است لذا می‌توان با خودکار شروع شود یا با مداد.

!۴	,	!۴
م خ م خ م خ م خ		خ م خ م خ م خ م
!۴	,	!۴

$$(4!\times 4!)\times 2$$

۶۱ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

اگر یک زن و یک مرد ابتدا روی دو صندلی قرار بگیرند ۳ جفت زن و مرد دیگر به !۳ طریق مختلف می‌توانند ۶ صندلی دیگر را پر کنند (به‌صورت یک در میان) و سپس ۴ مرد یا ۴ زن به !۴ طریق می‌توانند با هم جابجایی داشته باشند (مردها با خودشان فقط می‌توانند جابجا شوند).

درکل $\longrightarrow 3!\times 4!$

۶۲ـ گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

اگر ارقام اصلاً تکراری نباشند (۷ رقم بدون تکرار) اعداد ۴ رقمی که با این ۷ رقم می‌توان ساخت عبارت است از $(7)_4$ که باید تکرارهای این ارقام به‌صورت فاکتوریل و به شکل تقسیم از کل خارج شود.

$$\text{تعداد اعداد ۴ رقمی} = \frac{(7)_4}{2!\times 3!\times 2!}=35$$

۶۳ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

در حالت کّلی تعداد حالاتی راکه می‌توان r شیئی را در n جای خالی قرار داد برابر است با $\binom{n+r-1}{r-1}$ (به‌صورت کاملاً آزاد). در این تست چون می‌خواهیم از هر اسباب‌بازی حداقل ۱ نمونه خریداری کرده باشیم پس اول ۵ اسباب‌بازی (از هر نوع یک عدد) می‌خریم، پس ۳ اسباب‌بازی دیگر باید بخریم یا به عبارتی می‌خواهیم ۵ شیئی را در ۳ جای خالی قرار دهیم:

$$\binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$$

۶۴- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:
با توجه به مسأله قبل داریم:

$$\text{تعداد حالات تقسیم ۴۰ سیب بین ۳ نفر} = \binom{40+3-1}{3-1} = \binom{42}{2} = 861$$

۶۵- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

ابتدا حساب می‌کنیم به چند طریق می‌توان ۲ تیم ۳ نفره از بین ۶ نفر انتخاب کرد که برابر است با $\binom{6}{3} \times \binom{3}{3}$ و سپس چون هر گروه ۲ تیم دارد و جابجایی تیمها در هر گروه حالت جدید نمی‌سازد تعداد کل را بر !۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{3} \times \frac{1}{2!} = \binom{6}{3} \times \frac{1}{2!} = 10$$

۶۶- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

ابتدا ۳ نفر را از بین ۶ نفر که برادر نیستند انتخاب می‌کنیم که تعداد آن $\binom{6}{3}$ می‌باشد. حال دو برادر !۲ و ۳ نفر بین آنها !۳ و ۳ نفر دیگر نیز !۳ جابجایی دارند.

$$\text{تعداد حالات در کل} = \binom{6}{3} \times 3! \times 3! \times 2!$$

۶۷- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:
ابتدا دو رقم از A و سپس ۳ رقم از B انتخاب می‌کنیم و سپس آنها را به !۵ طریق می‌توان کنار هم چید. پس داریم:

$$\binom{3}{2} \times \binom{4}{3} \times 5!$$

۶۸- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:
اگر فضای نمونه آزمایشی که فقط ۲ نتیجه دارد، مجموعهٔ (t,s) باشد و این آزمایش را n بار تکرار کنیم، احتمال اینکه دقیقاً k بار t بیاید برابر است با $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ که در این فرمول $p=p(t)$ و $q=p(s)$

$$\text{احتمال آمدن دقیقاً ۴ بار پشت} = \binom{8}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{8-4}$$

$$= 70 \times \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2^4} = \frac{70}{2^8} = \frac{35}{2^7}$$

۶۹- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:
احتمال اینکه دو مهره همرنگ باشند را حساب کرده و سپس متمم آن را به دست می‌آوریم که جواب تست خواهد بود.

$$\text{احتمال اینکه همرنگ باشند} = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{9}{21}$$

$$\text{احتمال اینکه همرنگ نباشند} = 1 - \frac{9}{21} = \frac{12}{21}$$

۷۰- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

این احتمال شرطی است و پیشامد B رخ داده است یعنی

$$B = \{ \underline{(2,2)}, \underline{(2,3)}, \underline{(2,5)}, \underline{(3,2)}, \underline{(3,3)}, (3,5), \underline{(5,2)}, (5,3), (5,5) \}$$

که در بین این زوج مرتبها، ۶ زوج وجود دارد که مجموع کوچکتر از ۸ دارد پس:

$$\text{احتمال} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۷۱- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$p\,(\text{رو، پشت، پشت، پشت})$$

$$= p\,(\text{پشت}) \times p\,(\text{پشت}) \times p\,(\text{پشت}) \times p\,(\text{رو})$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$$

۷۲- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

= احتمال اینکه هر دو در قسمت همرنگ باشند

+ احتمال هر دو آبی + احتمال هر دو سیاه

احتمال هر دو قرمز + احتمال هر دو سفید

$$= (\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}) + (\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}) + (\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}) + (\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}) = \frac{15}{64}$$

۷۳- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

چون A و B مستقل از هم هستند پس داریم:

$$p(A\cap B) = p(A)\times p(B) \text{ و } 0 \le p(A\cap B) \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{4}\times k \le 1 \Rightarrow 0 \le k \le 4$$

۷۴- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$\frac{\sum x_i}{50} = 16 \Rightarrow \sum x_i = 800$$

$$19 - 10 \Rightarrow \text{میانگین واقعی} = \frac{800-10}{50} = 15/8$$

۷۵- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$S_x^2 = \frac{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{15\times 296 - 3600}{15\times 14} = 4 \Rightarrow S_x = \sqrt{4} = 2$$

۷۶- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

اگر داده‌های یک مسأله آماری همگی با عدد t جمع شوند انحراف معیار جدید نسبت به قبل تغییری نمی‌کند لذا نسبت آنها به هم ۱ است.

۷۷- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

به‌طور کلی اگر داده‌های آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ را به $\underbrace{(kx_1+t)}_{y_1}, \underbrace{(kx_2+t)}_{y_2}, \dots, \underbrace{(kx_n+t)}_{y_n}$ تبدیل کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\bar{y} = k\bar{x} + t,\ S_y = kS_x$$

$$\overset{k=3}{\Rightarrow} S_y = 3\times S_x = 3\times 6 = 18$$

۷۸- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_6}{6} = 12 \Rightarrow x_1+\dots+x_6 = 72$$

$$\frac{x'_1+\dots+x'_8}{8} = 18 \Rightarrow x'_1+\dots+x'_8 = 144$$

$$\Rightarrow x_1+\dots+x_6+x'_1+\dots+x'_8 = 216$$

$$\Rightarrow \text{میانگین ۱۴ داده} = \frac{216}{14} = 15/42$$

۷۹- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$2+3 \le 5$ و $3 \ge 3$

۸۰- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

معادلهٔ دو خط مزبور با توجه به محل برخورد آنها با محورها عبارت است از $3x + 2y = 12$ و $x + y = 5$ که اگر آنها را در یک دستگاه قرار دهیم محل برخوردشان که مقدار بیشینه به‌ازای آن حاصل می‌شود مشخص می‌گردد که این نقطه $A \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$ می‌باشد لذا

$$2y+3x = 2\times 3 + 3\times 2 = 12$$

۸۱- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$\cancel{3x} \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 1+5 \Rightarrow 3x \overset{5}{\equiv} 6 \overset{(5,3)=1}{\Rightarrow} x \overset{5}{\equiv} 2$$

$$\Rightarrow 5 \mid x-2 \Rightarrow x-2 = 5k \Rightarrow x = 5k+2$$

۸۲- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$۲^۳ \overset{۷}{\equiv} ۱ \quad , \quad ۱۳ \overset{۷}{\equiv} -۱ \quad \Rightarrow$$

$$۲^{۳n+۱} + ۱۳^{۲n+۱} = ۲^{۳n} \times ۲ + ۱۳^{۲n} \times ۱۳ \overset{۷}{\equiv}$$

$$۱ \times ۲ + ۱ \times ۱۳ = ۱۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

پس باقیماندهٔ تقسیم ۱ است.

۸۳- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

$$\begin{matrix} d \mid a-۲b \\ d \mid ۳a-b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d \mid -۳a+۶b \\ d \mid ۳a-b \end{matrix}$$

$$\Rightarrow d \mid ۵b \xrightarrow[\text{لم اقلیدس}]{(d,b)=۱} d \mid ۵ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } d=۵$$

۸۴- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

اگر عددی مربع کامل باشد رقم یکان آن می‌تواند یکی از ارقام ۰، ۱، ۴، ۵، ۶، ۹ باشد با توجه به توان دوّم این ارقام اگر n مربع کامل باشد رقم یکان $n^۲$ می‌تواند ۰ ، ۱، ۶ و ۵ باشد پس $n^۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$ همواره نادرست است.

۸۵- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$\overline{ab} = ۳(a+b) \Rightarrow ۱۰a+b = ۳a+۳b \Rightarrow ۷a = ۲b$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۲}{۷} \Rightarrow a=۲ , b=۷ \Rightarrow ab=۱۴$$

(۲ و ۷ نسبت به هم اولند و چون $۱ \leq a,b \leq ۹$ پس $((a,b)=۱$

۸۶- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

می‌دانیم $۵! = ۱۲۰$ و $۵! \overset{۱۲۰}{\equiv} ۰$ و نیز می‌دانیم به ازای هر $n \geq ۵$ ، $۵! \mid n!$ بنابراین:

$$۱!+۲!+۳!+۴!+۵!+\cdots+۶۰۰! \overset{۱۲۰}{\equiv} ۱+۲+۶+۲۴+۰+\cdots+۰$$

$$\Rightarrow \quad ۱!+۲!+\cdots+۶۰۰! \overset{۱۲۰}{\equiv} ۳۳$$

۸۷- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

برای مشخص کردن رقم یکان هر عدد به‌توان n کافی است n را بر ۴ تقسیم کرده و رقم یکان آن عدد مزبور رابه‌توان باقیماندهٔ تقسیم بر ۴ برسانیم و رقم یکان عدد حاصل همان رقم یکان عدد اول می‌باشد.

$$۱۳۷۳ = ۳۴۳ \times ۴ + ۱ \Rightarrow \text{رقم یکان} = ۲^۱ = ۲$$

۸۸- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$(a,b) \mid a \Rightarrow [a,(a,b)] = |a|$$

از طرفی: $b \mid a \Rightarrow b \mid |a| \Rightarrow (|a|,b) = |b|$

$$([a,(a,b)],b) = (|a|,b) = |b|)$$

۸۹- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

$$A^۲-A+I = ٥ \Rightarrow A^{-۱}A^۲ - A^{-۱}A + A^{-۱}I = A^{-۱}٥$$

$$\Rightarrow A-I+A^{-۱} = ٥ \Rightarrow A^{-۱} = I-A$$

۹۰- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$|۳A^۲| = ۳^۴ \times |A|^۲ = ۳^۴ \times ۳^۲ = ۳^۶$$

۹۱- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$|۲A| = ||A|A| \Rightarrow ۲^۲|A| = |A|^۲|A|$$

$$\Rightarrow ۴|A| = |A|^۳ \Rightarrow |A|(۴-|A|^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow |A| = ۰ \quad \text{یا} \quad |A| = \pm ۲$$

و چون $|A| > ۰$ (طبق فرض) پس باید $|A| = ۲$.

۹۲- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

می‌دانیم: $AN' = N'A = |A| \, I$

$$|N'A| = ||A| \, I| = |A|^۳ |I|$$

$$= ۷^۳ \times ۱ = ۳۴۳$$

۹۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:
می‌دانیم اگر ماتریسی پاد متقارن باشد باید درایه‌های روی قطر اصلی آن همگی صفر باشند از طرفی چون قطری نیز هست پس درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن نیز صفر است لذا ماتریس A ماتریس صفر است که ماتریس صفر ماتریسی اسکالر است. (درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند و قطری نیز هست.)

۹۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$$A \text{ متعامد } \Rightarrow A' = A^{-1} \Rightarrow (A')' = (A^{-1})'$$
$$\Rightarrow A = (A')^{-1}$$

۹۵ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:
از بسط دترمینان برحسب ستون اول داریم:
$$x(۱-۰) - ۰ + ۲(-y-۲) = ۰ \Rightarrow x - ۲y + ۴ = ۰$$
$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + ۲ \Rightarrow m = \frac{۱}{۲}$$

۹۶ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:
به‌طور کلّی ماتریس انتقال نسبت به خط $y = x\,tg\frac{\theta}{۲}$ ماتریس متعامدی می‌باشد و می‌دانیم تبدیلات متعامد طول و زاویه را ثابت نگه می‌دارند پس شکل حاصل یک لوزی و قابل انطباق بر لوزی اول است.

۹۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:
به‌طور کلّی اگر k یک مقدار ویژهٔ ماتریس A باشد در این صورت مقدار ویژهٔ ماتریس A+nI برابر است با (k+n).
بنابراین دو مقدار ویژهٔ ماتریس A + ۳ I با توجه به مقادیر ویژهٔ ماتریس A یعنی ۲ و ۴ عبارتند از (۳+۲) و (۳+۴) یعنی ۵ و ۷ و می‌دانیم (با توجه به معادلهٔ سرشتنمایی) حاصلضرب مقادیر ویژهٔ هر ماتریس همان دترمینان آن ماتریس است پس

$$|A + ۳I| = ۷ \times ۵ = ۳۵$$

۹۸ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

$$A \text{ متعامداست} \Rightarrow A A' = I \overset{A \text{ متقارن}}{\Rightarrow} A A = I \Rightarrow A^۲ = I$$

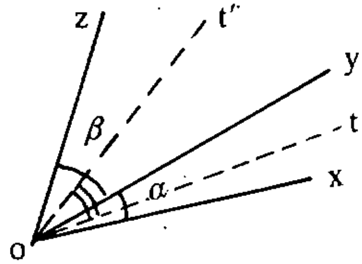
۹۹ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:
می‌دانیم دترمینان هر ماتریس پاد متقارن از مرتبهٔ فرد صفر است پس:

$$K = |A|^۲ - |A| + ۳ \Rightarrow K = ۰ - ۰ + ۳ \Rightarrow K = ۳$$

پاسخ تشریحی تستهای هندسه

● محمدهاشم رستمی

۱ـ گزینهٔ (۴) درست است: زیرا اگر دو زاویهٔ α و β مجاور یکدیگر باشند، اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای این دو زاویه مساوی $\frac{\alpha+\beta}{۲}$ است.



پس داریم: $\frac{\alpha+\beta}{۲}=۶۵° \Rightarrow \alpha+\beta=۱۳۰°$

از آنجا:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۱۳۰°\\ \alpha-\beta=۳۰°\end{cases} \Rightarrow \alpha=۸۰°,\quad \beta=۵۰°$$

۲ـ مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث محل تلاقی عمود منصفهای اضلاع آن مثلث است. و نقطهٔ برخورد عمود منصفهای اضلاع مثلثی که یک زاویه منفرجه دارد، در خارج آن مثلث واقع است. پس گزینهٔ (۲) درست است.

۳ـ گزینهٔ (۳) درست است.

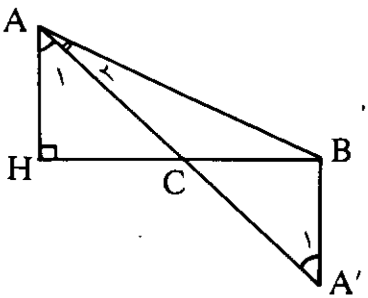
زیرا: $b=۴<c=۷<a=۸$ پس: $\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$

۴ـ گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا اگر میانهٔ AC از مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد دهیم و از A' به B وصل کنیم داریم $\hat{A'}_۱=\hat{A}_۱$ و $A'B=AH$ امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم: $AB>AH$.

از آنجا $AB>A'B$ پس:

$$\hat{A'}_۱>\hat{A}_۲ \text{ و یا } \hat{A}_۱>\hat{A}_۲ \text{ یا } H\hat{A}C>C\hat{A}B$$



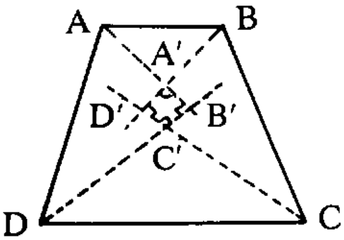
۵ـ گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب ۲n-۴ قائمه و مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب مساوی ۴ قائمه است. پس: $۲n-۴=۳\times۴ \Rightarrow n=۸$

$$\Rightarrow \frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{۸(۸-۳)}{۲}=۲۰$$

۶ـ گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا اگر $A'B'C'D'$ چهارضلعی حاصل از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی یک ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد داریم: $\hat{B'}=\hat{D'}=۹۰° \Rightarrow \hat{B'}+\hat{D'}=۱۸۰°$

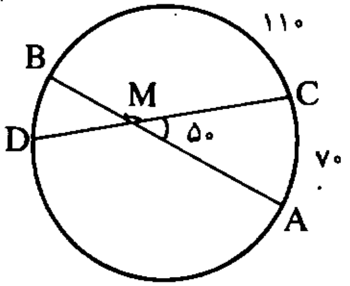


پس چهارضلعی $A'B'C'D'$ محاطی است اما مستطیل نیست زیرا از دو زاویه $\hat{A'}$ و $\hat{C'}$ یکی حاده و دیگری منفرجه است. از طرفی $A'B' = A'D'$ و $C'B' = C'D'$ می‌باشد، پس $A'B' + C'D' = A'D' + B'C'$. در نتیجه چهارضلعی $A'B'C'D'$ محیطی می‌باشد. پس این چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی است.

۷ - گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا اگر یک قطر چهارضلعی قطر دیگر را نصف کند، آن قطر، چهارضلعی را به دو مثلث هم ارز (دو مثلث که مساحتشان برابر است) بخش می‌کند.

۸ - گزینهٔ (۱) جواب است.



زیرا اگر M نقطهٔ تقاطع دو وتر AB و CD فرض شود. اولاً دو کمان ۷۰° و ۱۱۰° دو کمان مقابل ایجاد شده در این دایره نیستند، زیرا $۵۰^\circ \neq ۹۰^\circ = \frac{۷۰+۱۱۰}{۲}$ و $۹۰^\circ \neq ۱۳۰^\circ$. پس این دو کمان، دو کمان مجاور می‌باشند مثلاً $\widehat{AC} = ۷۰^\circ$ و $\widehat{BC} = ۱۱۰^\circ$ ثانیاً کمان ۱۱۰° جزء دو کمان مقابل به زاویه ۵۰° نیست زیرا $۱۱۰ > ۲\times۵۰$ در نتیجه اندازهٔ دو کمان دیگر برابر است با:

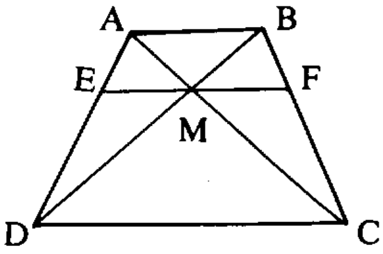
$$۵۰ = \frac{۷۰ + \widehat{DB}}{۲} \Rightarrow \widehat{DB} = ۳۰^\circ$$

$$۱۳۰ = \frac{۱۱۰ + \widehat{AD}}{۲} \Rightarrow \widehat{AD} = ۱۵۰^\circ$$

و تفاضل این دو کمان برابر است با: $۱۵۰ - ۳۰ = ۱۲۰^\circ$

۹ - گزینهٔ (۳) جواب است.

زیرا اگر از M نقطهٔ تلاقی قطرهای ذوزنقه‌ای، خطی موازی قاعده‌های آن ذوزنقه رسم کنیم تاساقهای ذوزنقه را در نقاط E و F قطع کند، همواره داریم $ME = MF$ پس: $EF = ۲MF$ و یا $\frac{EF}{MF} = ۲$.



۱۰ - گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا:

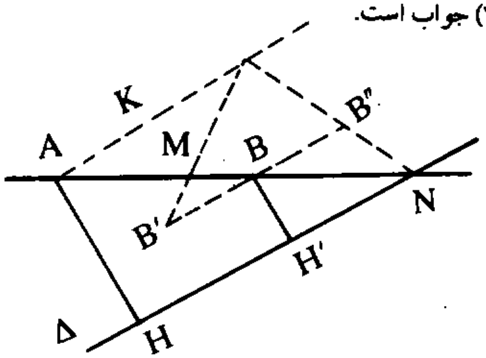
$$AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad (۱)$$

$$BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OD}{OC} \quad (۲)$$

$$(۱)\times(۲) \Rightarrow OB^۲ = OA.OE$$

$$\Rightarrow OB^۲ = ۲\times۸ = ۱۶ \Rightarrow OB = ۴$$

۱۱ - گزینهٔ (۳) جواب است.



زیرا می‌دانیم که روی خط AB همواره دو نقطه وجود دارد که پاره‌خط AB را به نسبت عدد معین k ($k \neq ۰$ و $k > ۰$) تقسیم می‌کند، که اگر این دو نقطه را M و N بنامیم، داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$$

حال اگر Δ یکی از خطهایی باشد که از یکی از نقاط M یا N بگذرد، نسبت فاصله‌های نقاط A و B از این خط برابر K می‌باشد زیرا داریم:

$$\triangle NAH \sim \triangle NBH' \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{NA}{NB} = k$$

بنابراین دو دسته خطی که از نقاط M و N می‌گذرند جواب مسئله‌اند.

۱۲ - گزینهٔ (۲) جواب است زیرا:

$$a = ۳+۴ = ۷ \ , \ ۲p = a+b+c = ۲۱$$

$$\Rightarrow \ b+c = ۲۱-۷ = ۱۴$$

$$DB = \frac{a.c}{b+c} \Rightarrow ۳ = \frac{۷\times c}{۱۴} \Rightarrow c = ۶ \Rightarrow AB = ۶$$

۱۳ - گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا هرگاه دو چند ضلعی متشابه باشند، نسبت اجزاء خطی متناظر در این دو چند ضلعی، برابر نسبت تشابه است. و نسبت مساحتهای هر دو جزء متناظر از این دو چند ضلعی، برابر مجذور نسبت تشابه می‌باشد. پس:

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{A'B'E'}}{S_{ABE}} = \frac{۴}{۹}$$

۱۴ - گزینهٔ (۴) جواب است.

زیرا اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی با قاعده‌های AB و CD بر دایره‌ای به شعاع R محیط باشد همواره $AB.CD = ۴R^۲$ است و در این مسئله $AB = ۲AE = ۲\times۴ = ۸cm$ است پس:

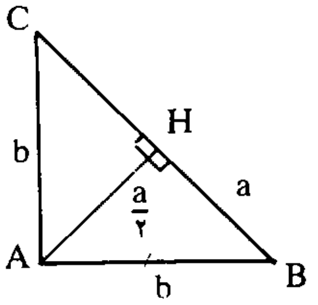
$$۸\times CD = ۴(۵)^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow CD = ۱۲/۵cm$$

۱۵ - گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا اگر ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای آن مثلث را به دو مثلث هم ارز بخش نماید، آن مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، زیرا $HB = HC$ و $AH \perp BC$ است پس داریم:

$$AH = ۲ \Rightarrow AB = AC = ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲})^۲ = ۴$$



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین به ساق b و وتر a داریم:

اندازهٔ وتر: $BC = a = b\sqrt{۲}$

اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر: $AH = \frac{a}{۲} = \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$

اندازهٔ مساحت مثلث: $S_{ABC} = \frac{۱}{۴}a^۲ = \frac{۱}{۲}b^۲$

اندازه محیط:

$$۲P = a + ۲b = a(۱+\sqrt{۲}) = b(۲+\sqrt{۲})$$

۱۶ - گزینه (۱) جواب است.

زیرا اگر شعاع دایرهٔ محاطی مثلث متساوی الاضلاع را R فرض کنیم، اندازهٔ ضلع مثلث متساوی الاضلاع محیطی $C'_۳ = a = ۲R\sqrt{۳}$ و از آنجا داریم:

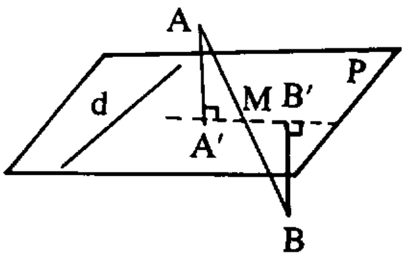
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow ۳۶\sqrt{۳} = \frac{۱۲R^۲\times\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۱۲ \Rightarrow R = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow C_۴ = R\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow S_{\text{مربع محاطی}} = ۲۴$$

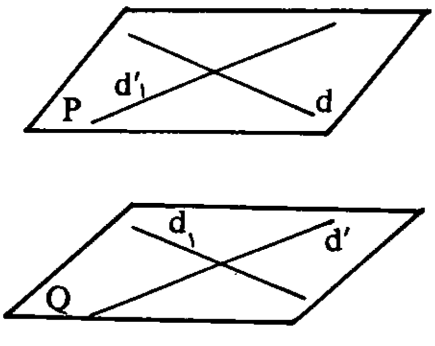
۱۷ - گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا اگر AB موازی d باشد، مسئله بیشمار جواب دارد. زیرا هر صفحه‌ای که در این حالت، بر خط d بگذرد دو نقطهٔ A و B از آن صفحه به یک فاصله خواهند بود. ولی اگر خط AB موازی d نباشد فقط دو صفحه وجود دارد که بر خط d می‌گذرند و نقاط A و B از آنها به یک فاصله‌اند. یکی صفحه‌ای که بر خط d و نقطه M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد، و دیگری صفحه‌ای که بر خط d می‌گذرد و با خط AB موازی است.



۱۸ - گزینهٔ (۳) جواب است.

زیرا اگر دو خط متنافر باشند بر هر یک از این دو خط تنها یک صفحه می‌گذرد که با خط دیگر موازی باشد.



۱۹ - گزینهٔ (۲) درست است.

زیرا اگر فرض کنیم: $ME=x$، از آنجا خواهیم داشت، $MF=x+۳$، و بنا به روابط طولی در دایره یا قوّت نقطه نسبت به دایره می‌توان نوشت:

$$\overline{ME}.\overline{MF}=OM^۲-OA^۲=d^۲-R^۲$$

$$\Rightarrow \quad x(x+۳)=۶۴-۳۶$$

$$\Rightarrow \quad x^۲+۳x-۲۸=۰ \quad \Rightarrow \quad x=۴,$$

$$x=-۷ \quad \Rightarrow \quad ME=۴cm$$

۲۰ - گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا مثلث ABC قائم‌الزاویه در رأس A است و دو ضلع آن ۱۰ و ۲۴ دو عدد از دسته عدد فیثاغورسی ۱۰ و ۲۴ و ۲۶ متناسب با دسته عدد فیثاغورسی ۵ و ۱۲ و ۱۳ می‌باشند. پس اندازهٔ وتر مثلث برابر ۲۶ است و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویه نیز نصف وتر است. پس:

$$R=\frac{۲۶}{۲}=۱۳$$

۲۱ - گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا در متوازی‌الاضلاع به اضلاع a و b و اقطار d و d′ همواره داریم:

$$۲(a^۲+b^۲)=d^۲+d'^۲$$

پس در این مسئله:

$$d=AC=۲OA=۲\sqrt{۵},\ d'=۲OD=۲\times۵=۱۰,$$

$$AD=b=۲\sqrt{۶} \quad \Rightarrow ۲(a^۲+۲۴)=۲۰+۱۰۰$$

$$\Rightarrow \quad a^۲=۳۶ \quad \Rightarrow \quad a=۶$$

۲۲ - گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا کوچکترین میانهٔ هر مثلث، میانهٔ نظیر بزرگترین ضلع آن مثلث می‌باشد. پس: اگر بزرگترین ضلع مثلث را $a=۶$ اختیار کنیم، داریم:

$$m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}$$

$$\Rightarrow \quad m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(۲۵+۱۶)-۳۶}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۶}$$

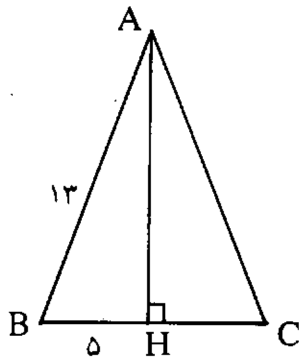
۲۳ - گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا اگر AH ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC باشد در مثلث

قائم‌الزاویهٔ ABH ، AB=۱۳ و BH=۵ پس AH=۱۲
(یک دسته عدد فیثاغورسی).

در نتیجه: $S=۶۰$ مثلث و $۲p=۳۶ \Rightarrow p=۱۸$

$\Rightarrow p-a=۱۸-۱۰=۸ \Rightarrow r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{۶۰}{۸}=۷/۵$



۲۴ - گزینهٔ (۴) جواب است.

۲۵ - گزینهٔ (۳) جواب است.

زیرا وقتی تصویر قائم یک خط بر یک صفحه ، منحصر به یک نقطه باشد، آن خط بر آن صفحه عمود است.

۲۶ - گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا نتیجهٔ ترکیب دو دوران نسبت به یک مرکز دورانی است نسبت به همان مرکز که زاویهٔ دورانش مساوی مجموع زاویه‌های آن دو دوران باشد. امّا در این مسئله $۱۸۰°=۱۳۵°+۴۵°$ است. پس نتیجه ترکیب این دو دوران، تقارن مرکزی و یا تجانس به مرکز $O_۱$ و با نسبت تجانس ۱- یعنی $H_{O_۱}^{-۱}$ است.

۲۷ - گزینهٔ (۱) جواب است.

زیرا دوران یافتهٔ هر پاره‌خط با خود آن پاره‌خط هم اندازه است.یعنی طول پاره‌خط A'B' برابر ۸ سانتی‌متر است. امّا در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ داریم:

$A''B''=|K|.A'B' \Rightarrow A''B''=\frac{۱}{۲}\times ۸=۴cm$

۲۸ - گزینهٔ (۱) جواب است زیرا:

$$H_B^K O H_B^{-\frac{۱}{K}}=H_B^{-۱}=S_B \Rightarrow S_A O S_B=T_{۲\overrightarrow{BA}}$$

نکته: نتیجهٔ ترکیب دو تجانس نسبت به مرکز B و با نسبتهای k و $-\frac{۱}{k}$ ، تجانسی نسبت به همان مرکز B و نسبت تجانس $k(-\frac{۱}{k})=-۱$ است.که تقارن مرکزی نسبت به مرکز تقارن B است. از طرفی نتیجهٔ ترکیب دو تقارن مرکزی به مراکز A و B انتقالی است که بردار انتقالش مساوی $۲\overrightarrow{BA}$ است.

۲۹ - گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا مجموع زوایای رأس هر کنج کوچکتر از ۳۶۰ است و حداقل تعداد وجوه یک کنج ۳ می‌باشد. از آنجا:

$\frac{۳۶۰}{۵۵}=۶\frac{۶}{۱۱} \Rightarrow ۳\leq n<۷$

یا $۳\leq n\leq ۶ \Rightarrow n=۳, n=۴, n=۵, n=۶$

پس چهار کنج منتظم می‌توان داشت که هر زاویه‌اش $۵۵°$ باشد.

۳۰ - گزینهٔ (۴) جواب است.

زیرا: سطح کره$=S=۴\pi R^۲=۳۶\pi \Rightarrow R=۳$

حجم قاچ ۹۰°$=\frac{۱}{۴}\times$حجم کره$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۱}{۳}\pi R^۳=$

$\frac{۱}{۳}\pi\times ۲۷=۹\pi$

۳۱ - گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا مثلث OAB در رأس O قائم‌الزاویه است. $\left(\frac{۵\pi}{۱۲}-(-\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\pi}{۲}\right)$ و دو ضلع این مثلث قائم‌الزاویه ۵ و ۱۲ می‌باشند پس وتر این مثلث AB=۱۳ و از آنجا OM میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است یعنی OM=۶/۵.

۳۲- گزینهٔ (۱) درست است زیرا:

$$15x+8y+3z=20 \Rightarrow 5\times 3x+4\times 2y+3\times z=20$$

حال اگر $\vec{U}(5,4,3)$ و $\vec{V}(3x,2y,z)$ اختیار شود بنا به نامساوی کوشی شوارتز $|\vec{U}|.|\vec{V}| \ge |\vec{U}.\vec{V}|$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{25+16+9}\times\sqrt{9x^2+4y^2+z^2}$$
$$\ge 15x+8y+3z=20$$
$$\Rightarrow 5\sqrt{2}\times\sqrt{9x^2+4y^2+z^2}\ge 20 \Rightarrow$$
$$50(9x^2+4y^2+z^2)\ge 400 \Rightarrow 9x^2+4y^2+z^2\ge 8$$

۳۳- گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا بنا به اتحاد لاگرانژ داریم:

$$|\vec{U}\wedge\vec{V}|^2+|\vec{U}.\vec{V}|^2=|\vec{U}|^2\times|\vec{V}|^2 \Rightarrow$$
$$9+1=2\times|\vec{V}|^2 \Rightarrow |\vec{V}|=\sqrt{5}$$

۳۴- گزینهٔ (۳) جواب است زیرا:

$$\vec{a}(1,0,-1)\ ,\ \vec{b}(0,2,1) \Rightarrow \vec{a}\wedge\vec{b}(2,-1,2)$$
$$\Rightarrow \beta=\frac{-1}{\sqrt{4+1+4}}=-\frac{1}{3}$$

۳۵- گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا برای اینکه مشخص سازیم که نقطهٔ A درون فرجهٔ حاده یا درون فرجهٔ منفرجهٔ حاصل از تقاطع دو صفحهٔ $P:ax+by+cz+d=0$ و $P':a'x+b'y+c'z+d'=0$ قرار دارد، باید عبارت $\delta=P(A).P'(A)(aa'+bb'+cc')$ را تعیین علامت کنیم. در صورتی که $\delta<0$ باشد نقطهٔ A درون فرجهٔ حاده حاصل از تقاطع صفحات p و p' واقع است. و اگر $\delta>0$ باشد نقطهٔ A درون فرجهٔ منفرجه حاصل از تقاطع این دو صفحه است. و در صورتی که $P(A)=0$ باشد نقطهٔ A روی صفحهٔ P واقع است. و اگر $P'(A)=0$ باشد نقطهٔ A روی صفحهٔ P' قرار دارد و اگر $P(A)=P'(A)=0$ باشد نقطهٔ A روی فصل مشترک دو صفحه واقع است. پس در این مسئله داریم:

$$P:x-2y+z-1=0 \quad P':2x+z-1=0 \quad A(1,0,2)$$
$$\delta=P(A)P'(A)(aa'+bb'+cc')$$
$$=(1-0+2-1)(2+2-1)(2+0+1)$$
$$\Rightarrow \delta=18>0 \Rightarrow$$

نقطهٔ A درون فرجه منفرجهٔ حاصل از تقاطع دو صفحه قرار دارد.

۳۶- گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا: $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$ حاصل‌ضرب مختلط $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ است که یک عدد جبری است. بین گزینه‌های داده شده گزینه‌های (۲) و (۴) حاصل ضرب مختلط سه بردار می‌باشند و دو گزینهٔ دیگر تعریف نشده‌اند.

امّا در گزینهٔ (۲) جای دو عامل متوالی $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عوض شده است پس علامت عدد جبری حاصل از این گزینه با علامت عدد جبری حاصل از عبارت مفروض یکی نیست. پس گزینهٔ (۴) جواب است.

نکته: با توجه به خاصیت حاصل‌ضرب مختلط سه بردار مشخص است که: $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}$

پس گزینهٔ (۴) جواب است.

۳۷- مختصات مرکز مکعب حاصل $O_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ است و معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از نقاط A و B و C به صورت $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$ یا $x+y+z-1=0$ است. زیرا طول از مبدأ و عرض از مبدأ و ارتفاع از مبدأ صفحه ABC همگی برابر ۱ می‌باشند.

از آنجا:

$$O_1H=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$

$$\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

پس گزینهٔ (۱) درست است.

۳۸- خطی که بر دو محور oz و oy عمود باشد بر صفحهٔ yoz عمود است یعنی با محور xها موازی است پس معادلهٔ آن به صورت $\begin{cases} z=a \\ y=b \end{cases}$ است. بنابراین گزینهٔ (۳) جواب است.

۳۹- گزینهٔ (۲) جواب است.

زیرا با توجه به اینکه صفحات داده شده متوازی‌اند داریم:

$$\begin{cases} P: x-y-2z-6=0 \\ P': x-y-2z-12=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$HH'=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-6+12|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

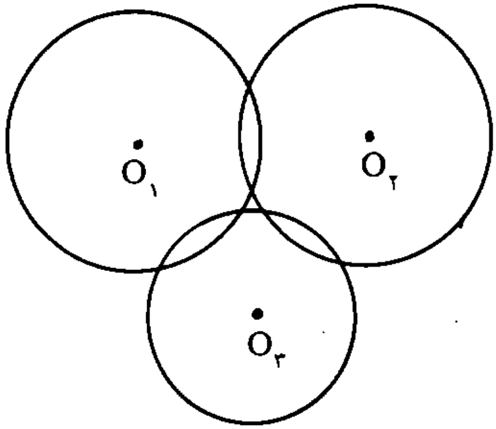
۴۰- گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی می‌توان نوشت:

$$\overline{OC}\cdot\overline{OD}=\overline{OA}^2=\overline{OB}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{OC}\cdot\overline{OD}=(4)^2=(-4)^2=16$$

۴۱- در این تست، در گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) مرکز اصلی سه دایره خارج سه دایره واقع است. بنابراین همواره دایره‌ای وجود دارد که بر آن سه دایره عمود باشد پس این سه گزینه جواب نیستند. ولی در گزینهٔ (۱): اگر نقطهٔ تقاطع وتر مشترکهای سه دایره، درون سه دایره قرار گیرد، دایره‌ای وجود ندارد که بر آن سه دایره عمود باشد. یعنی این گزینه جواب خواهد بود. ولی در صورتی که نقطهٔ تقاطع وتر مشترکهای سه دایره خارج سه دایره قرار داشته باشد، دایره‌ای وجود دارد که بر این سه دایره عمود باشد. بنابراین در این حالت این گزینه نیز جواب نیست. به عنوان مثال مرکز اصلی سه دایرهٔ $C_1: (x-6)^2+y^2=37$ و $C_2: (x+6)^2+y^2=37$ و $C_3: x^2+(y+5)^2=4$ که دو به دو متقاطع هستند نقطه $\omega(\frac{-11}{5}, 0)$ است که خارج هر سه دایره قرار دارد و قوت آن نسبت به هر یک از سه دایره برابر $\frac{96}{25} > 0$ است و معادلهٔ دایرهٔ عمود بر سه دایره به صورت $x^2+y^2+\frac{22}{5}y+1=0$ می‌باشد.



۴۲- گزینهٔ (۲) درست است.

زیرا از قراردادن مختصات نقطهٔ $(2,-2)$ در معادلهٔ دسته دایرهٔ داده شده داریم:

$$a(4+4-40)+b(4+4+4)=0 \Rightarrow a=-3b$$

$$\Rightarrow -3b(x^2+y^2-2x)+b(x^2+y^2-2y)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-3x+y=0$$

$$\Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{9+1}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۴۳- گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا در حالت کلی مزدوج دسته دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2-2by+p=0$ دسته دایرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2-2ax-p=0$ است.

۴۴- گزینهٔ (۱) جواب است.

بنا به تعریف. (فصل مشترک یک صفحه با سطح مخروطی در

صورتی سهمی است که آن صفحه با یکی از مولدهای سطح مخروطی موازی باشد).

۴۵- گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا وقتی نقطهٔ M خارج بیضی نباشد یا روی بیضی است و یا داخل بیضی قرار دارد. در صورتی که نقطهٔ M روی بیضی قرار داشته باشد مجموع فاصله‌اش از دو کانون بیضی برابر ۲a، عدد ثابت بیضی است و هنگامی که نقطه داخل بیضی باشد مجموع فاصله‌اش از دو کانون از ۲a کمتر می‌باشد. بنابراین کافی است از معادلهٔ بیضی داده شده ۲a را محاسبه کنیم.

$$۳x^۲+۲(y^۲-۳y)=\frac{۱۵}{۲} \Rightarrow ۳x^۲+۲(y-\frac{۳}{۲})^۲=۱۲$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+\frac{(y-\frac{۳}{۲})^۲}{۶}=۱ \Rightarrow a^۲=۶ \Rightarrow a=\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow ۲a=۲\sqrt{۶}$$

۴۶- گزینهٔ (۲) درست است.

زیرا همواره فاصلهٔ هر کانون هذلولی از هر یک از خطوط مجانبش برابر b می‌باشد. در این مسئله داریم:

$$۴x^۲-y^۲+۲y=۹ \Rightarrow ۴x^۲-(y-۱)^۲=۸$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{۲}-\frac{(y-۱)^۲}{۸}=۱ \Rightarrow b^۲=۸$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۴۷- گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا بنا به تعریف، خط هادی سهمی جواب مسئله است و خط هادی سهمی به معادله داده شده، $y=-\frac{۷}{۴}$ است زیرا داریم:

$$۲y=x^۲-۲x-۲ \Rightarrow s(۱,-۱),\ p=\frac{۳}{۲},\ y=\beta-\frac{p}{۲}$$

$$\Rightarrow y=-۱-\frac{۳}{۴}=\frac{-۷}{۴} \Rightarrow y=\frac{-۷}{۴}$$ معادلهٔ خط هادی

۴۸- گزینهٔ (۳) جواب است.

زیرا دایرهٔ اصلی بیضی دایره‌ای است که مرکزش مرکز بیضی و شعاعش برابر a است.

در این مسئله:

$O_۱(۰,۱)$ مرکز بیضی، $a=۲ \Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۴$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$$

۴۹- گزینهٔ (۲) درست است. زیرا:

راه اول:

$$A(-۱,۲,۰),\ D:۲(x-\frac{۱}{۲})=۳(y+\frac{۵}{۳})=-(z-۷)$$

$$\Rightarrow \frac{x-\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{y+\frac{۵}{۳}}{۲}=\frac{z-۷}{-۶} \Rightarrow (a=۳,b=۲,c=-۶)$$

$$\Rightarrow a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰$$

$$\Rightarrow ۳(x+۱)+۲(y-۲)-۶(z-۰)=۰$$

$$\Rightarrow ۳x+۲y-۶z-۱=۰$$

راه دوم: مختصات نقطهٔ A فقط در معادلهٔ صفحهٔ داده شده در گزینهٔ (۲) صدق می‌کند پس این گزینه جواب است.

۵۰- گزینهٔ (۳) درست است. زیرا:

راه اول: مختصات نقاط تقاطع خط و صفحه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x-۱=\frac{y+۱}{-۲}=\frac{z}{۶}=t \\ \quad \Rightarrow x=t+۱,\ y=-۲t-۱,\ z=۶t \\ ۳x-۲y-z-۶=۰ \\ \quad \Rightarrow ۳(t+۱)-۲(-۲t-۱)-۶t-۶=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow t=۱ \Rightarrow M(۲,-۳,۶)$$

راه دوم: فقط مختصات نقطهٔ داده شده در گزینهٔ (۳)، هم در معادلهٔ صفحه، و هم در معادلهٔ خط داده شده، صدق می‌کند. پس این گزینه جواب است.

۵۱- گزینهٔ (۱) جواب است زیرا:

$$۳DE=BC \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow$$

$$\frac{AD}{AB-AD}=\frac{۱}{۳-۱}\Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AD=۶$$

۵۲- گزینهٔ (۴) درست است. زیرا:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{۲p}{۲p'}\Rightarrow$$

$$\frac{۶}{a'}=\frac{۸}{b'}=\frac{۱۰}{c'}=\frac{۲۴}{۷۲}=\frac{۱}{۳}$$

مثلث داده شده به اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ قائم‌الزاویه است که مساحت آن $S=۲۴cm^۲$ است که چون نسبت تشابه دو مثلث برابر ۳ می‌باشد پس مساحت مثلث مطلوب $۹\times۲۴=۲۱۶$ سانتی‌متر مربع است.

۵۳- گزینهٔ (۱) درست است.

زیرا اگر AH ارتفاع وارد بر وتر BC از مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ باشد داریم:

$$AH^۲=HB.HC \Rightarrow ۳۶=۴/۵\times HC \Rightarrow HC=۸cm$$

$$\Rightarrow BC=a=۴/۵+۸=۱۲/۵cm \Rightarrow$$

$$m_a=\frac{۱۲/۵}{۲}=۶/۲۵$$

۵۴- گزینهٔ (۴) درست است زیرا:

$$a^۲+bc=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲-bc \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$$

۵۵- گزینهٔ (۱) جواب است. زیرا ۱۴ و ۴۸ و ۵۰ یک دسته عدد فیثاغورسی متناسب با دسته عدد فیثاغورسی ۷ و ۲۴ و ۲۵ است. پس این مثلث قائم‌الزاویه است و در نتیجه بزرگترین زاویهٔ آن ۹۰° است.

۵۶- گزینهٔ (۴) درست است.

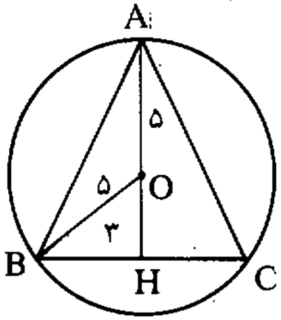
زیرا مثلث OPT قائم‌الزاویه در رأس T است. پس:

$$OT^۲=OH(OH+HP)\Rightarrow ۳۶=x(x+۶/۴)$$

$$\Rightarrow x^۲+۶/۴x-۳۶=۰ \Rightarrow x_۱,x_۲=-۳/۲\pm۶/۸ \Rightarrow x=-۱۰$$

$$x=۳/۶=OH \Rightarrow OF=۳/۶+۶/۴=۱۰ \Rightarrow PT=۸cm$$

۵۷- گزینهٔ (۳) درست است.



زیرا بین مثلثهای مورد نظر مثلثی بیشترین مساحت را دارد که ارتفاعش بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. و این در صورتی است که مثلث متساوی‌الساقین باشد و رأس A در طرف دیگر مرکز نسبت به قاعدهٔ ثابت BC قرار گیرد. در این صورت داریم:

$$BC=۶\Rightarrow BH=۳, OB=R=۵\Rightarrow OH=۴\Rightarrow AH=$$

$$OH+OA\Rightarrow AH=۴+۵=۹\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\times AH$$

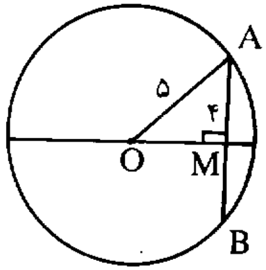
$$=\frac{۱}{۲}\times۶\times۹\Rightarrow S_{ABC}=۲۷$$

۵۸- گزینهٔ (۴) درست است زیرا:

$$\cos\hat{A}=\frac{۱۲}{۱۳}\Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{۵}{۱۳}=\cos\hat{C}\Rightarrow$$

$$\hat{A}+\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۹۰^\circ$$

۵۹ـ گزینهٔ (۱) درست است.



زیرا کوچکترین وتر مرسوم از یک نقطه در یک دایره وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود باشد. پس:

$$OA=۵\ ,\ AM=\frac{AB}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴ \Rightarrow OM=۳$$

۶۰ـ گزینهٔ (۱) درست است. زیرا:

$$\Delta: ۲x-y-۴=۰ \Rightarrow A(۰,-۴), B(۲,۰), O(۰,۰)$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{۲}{۳},\frac{-۴}{۳}\right) \Rightarrow OG=\sqrt{\frac{۴}{۹}+\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$$

۶۱ـ گزینهٔ (۳) درست است. زیرا:

$$\left(-۲\vec{V}_۱\right)\cdot\left(۳\vec{V}_۲\right)=-۶\left(\vec{V}_۱\cdot\vec{V}_۲\right)$$

$$=-۶\left|\vec{V}_۱\right|\left|\vec{V}_۲\right|\cos\left(\vec{V}_۱,\vec{V}_۲\right)$$

$$=-۶(۶)\times(۴)\times\cos ۶۰=-۷۲$$

۶۲ـ گزینهٔ (۱) درست است.

زیرا برای شکل حاصل از دو دایرهٔ متساوی، نقطهٔ وسط خط المرکزین مرکز تقارن است. لذا وترهای AB و A'B' متساوی‌اند، پس نسبت اندازه‌های آنها ۱ است.

۶۳ـ گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا مستطیل یک مرکز تقارن و دو محور تقارن دارد.

۶۴ـ گزینهٔ (۲) درست است.

زیرا طبق دستور اولر $F+S=A+۲$ داریم:

تعداد یالها: $F=۲۰, S=۱۲ \Rightarrow ۲۰+۱۲=A+۲ \Rightarrow A=۳۰$

۶۵ـ گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا اگر فقط شعاع قاعده مخروطی را دو برابر کنیم، حجم آن ۴ برابر می‌شود و اگر فقط ارتفاع آن را نصف کنیم، حجم آن نصف می‌شود. پس در این مسئله حجم مخروط حاصل $۲=\frac{۱}{۲}\times ۴$ برابر حجم مخروط اولیه است.

۶۶ـ گزینهٔ (۱) درست است.

زیرا شش برابر حجم این قاچ کروی برابر حجم کره است. چون $۶\times ۶۰^\circ=۳۶۰^\circ$. در نتیجه:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳=۳۶\pi$$

۶۷ـ گزینهٔ (۳) درست است.

زیرا ضلع مکعب محیط بر کره‌ای به شعاع R ، مساوی $a=۲R$ است. پس:

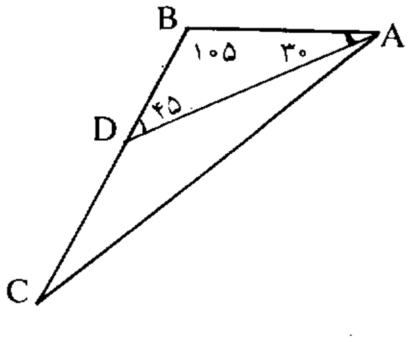
$$\frac{S_{کره}}{S_{مکعب}}=\frac{۴\pi R^۲}{۶(۲R)^۲}=\frac{۴\pi R^۲}{۲۴R^۲}=\frac{\pi}{۶}$$

۶۸ـ گزینهٔ (۴) درست است.

زیرا در چهار وجهی منتظم به ضلع a اندازهٔ ارتفاع چهار وجهی $h=\frac{a\sqrt{۶}}{۳}$ است. پس:

$$۲=\frac{a\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow a=\frac{۶}{\sqrt{۶}}=\sqrt{۶}$$

۶۹ـ گزینهٔ (۳) درست است.



زیرا اگر AD نیمساز داخلی زاویه A از مثلث ABC باشد، در مثلث ABD داریم:

$$\hat{B}=۱۰۵^\circ, B\hat{A}D=۳۰^\circ \Rightarrow B\hat{D}A=۴۵^\circ,$$
$$AB=۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$$

طبق رابطهٔ سینوسها می‌توان نوشت:

$$\frac{AD}{\sin ۱۰۵}=\frac{AB}{\sin ۴۵}$$
$$\Rightarrow \frac{AD}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$
$$\Rightarrow AD=\frac{۸}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}$$

۷۰ـ گزینهٔ (۳) درست است زیرا:

$$\hat{C}=۶۰^\circ, \hat{A}=۲\hat{B} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=۱۸۰-۶۰=۱۲۰$$
$$\Rightarrow ۲\hat{B}+\hat{B}=۱۲۰ \Rightarrow \hat{B}=۴۰^\circ, \hat{A}=۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}=\frac{\sin ۸۰}{\sin ۴۰}=\frac{۲\sin ۴۰ \cos ۴۰}{\sin ۴۰}$$
$$=۲\cos ۴۰^\circ$$

پاسخ تشریحی تستهای جبر و مثلثات تجربی

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

۱- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$3m^2x - 27x = m^2 \Rightarrow x = \frac{m^2}{3m^2 - 27} \ ,$$

$$3m^2 - 27 = 0 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \sqrt[2]{9}$$

۲- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$x_1 + x_2 = 1 \quad , \quad x_1x_2 = -1$$

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3x_2^3} = \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3}$$

$$= \frac{1 - 3(-1)}{(-1)^3} = \frac{4}{-1} = -4$$

۳- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

کسری مساوی صفر است که صورتش صفر باشد و ریشه‌های صورت یک معادله کسری نباید مخرج را صفر کنند.

$$\begin{cases} (x^4 - x^2)(x^3 + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ (x^3 + 2x^2)(x^2 - 1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{vmatrix}$$

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{vmatrix}$$

پس از جایگزینی ریشه‌ها در مخرج کسر، فقط ریشهٔ $x = 2$ مورد قبول قرار می‌گیرد.

۴- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

برای آنکه دو معادلهٔ

$ax^2 + bx + c = 0$ و $a'x^2 + b'x + c' = 0$

ریشه مشترک داشته باشند باید داشته باشیم:

$$(ab' - a'b)(bc' - b'c) = (ac' - a'c)^2$$

پس خواهیم داشت:

$x(x^2 + x + m) = 0$ و $x(x^2 + mx + 1) = 0$

و در نتیجه برای به‌دست آوردن شرط ریشهٔ مشترک غیر صفر می‌توان نوشت: $(x \neq 0)$

$x^2 + x + m = 0$ و $x^2 + mx + 1 = 0 \Rightarrow$

$$(1 - m)(m^2 - 1) = (m - 1)^2$$

$$(m - 1)^2 + (m - 1)(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$(m - 1)^2(1 + m + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$(m - 1)^2(m + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m = 1 \\ \text{یا} \\ m = -2 \end{vmatrix}$$

۵- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

اگر ریشه‌های معادلهٔ مطلوب را به y_1 و y_2 نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^3 \\ y_2 = x_2^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \\ y_1y_2 = x_1^3x_2^3 = (x_1x_2)^3 \end{cases}$$

و از معادلهٔ $x^2 - 3x + 1 = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\left| \begin{array}{l} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1+y_2=3^3-3\times 1\times 3=27-9=18 \Rightarrow S=18 \\ y_1y_2=1^3=1 \Rightarrow P=1 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 1 = 0$$

(معادلهٔ مطلوب)

۶- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

$$m^2x+2(m+x)+1=3mx$$

$$\Rightarrow (m^2+2-3m)x=-2m-1$$

$$x=\frac{-(2m+1)}{m^2-3m+2} \Rightarrow m^2-3m+2=0$$

$$\xrightarrow{(\text{نامعین است}\ x)} (m-1)(m-2)=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m=1 \\ \text{یا} \\ m=2 \end{array} \right.$$

۷- گزینهٔ (۲) صحیح است زیرا:

طرف چپ معادله فوق همواره مثبت است و تنها وقتی صفر می‌شود که هریک از عبارتهای با توان زوج برابر صفر شوند.

یعنی:

$$\begin{cases} x^{69}-x=0 \Rightarrow x(x^{68}-1)=0 \\ \quad\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{یا} \\ x^{68}-1=0 \Rightarrow x^{68}=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{array} \right. \\ x^{71}-x=0 \Rightarrow x(x^{70}-1)=0 \\ \quad\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{یا} \\ x^{70}-1=0 \Rightarrow x^{70}=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{array} \right. \\ x^3+3x^2+2x=0 \Rightarrow x(x^2+3x+2)=0 \\ \quad\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \text{یا} \\ x^2+3x+2=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=-1 \\ \text{یا} \\ x=-2 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases}$$

چون $x=0$ و $x=-1$ در هر سه معادله صدق می‌کند بنابراین معادله تنها دو ریشه حقیقی دارد.

۸- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

ابتدا ریشهٔ معادله راگویا می‌کنیم یعنی:

$$\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\times\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{9-8}}$$

سپس رادیکال مرکب را ساده می‌کنیم:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2+2\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}$$

بنابراین چون معادله با ضرایب گویا است پس باید مجموع ریشه‌ها مقداری گویا باشد، و این وقتی ممکن است که ریشهٔ دیگر مزدوج ظاهر شود یعنی $x_2=1-\sqrt{2}$ و یا $x_2=\frac{-1}{1+\sqrt{2}}$

۹- گزینهٔ (۴) صحیح است زیرا:

معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ وقتی ریشهٔ حقیقی دارد که: $\Delta=b^2-4ac \geq 0$ یا $\Delta'=b'^2-ac \geq 0$ $(b' = \frac{b}{2})$. پس برای معادلهٔ

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m = 0$$

داریم:

$$\Delta' = (m - 1)^2 - m(m + 1) \geq 0$$

$$(m - 1)^2 - m(m + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 - m^2 - m \geq 0 \Rightarrow -3m \geq -1$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{3}$$

۱۰- گزینهٔ (۳) صحیح است زیرا:

همواره قدر مطلق ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ چنین است:

$$|x_2-x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \qquad (\Delta=b^2-4ac)$$

پس برای معادله $2x^2 - mx + 3 = 0$ خواهیم داشت:

$$|x_2-x_1| = \frac{\sqrt{m^2-24}}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow m^2-24=25$$
$$\Rightarrow m^2=49$$
$$\Rightarrow m=\pm 7$$

۱۱- گزینه (۳) صحیح است زیرا:

معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ وقتی ریشهٔ حقیقی ندارد که:

$$\Delta=b^2-4ac<0 \text{ یا } \Delta'=b'^2-ac<0 \quad (b'=\frac{b}{2})$$

پس برای معادلهٔ $x^2 + 6mx + 1 = 0$ خواهیم داشت:

$$\Delta'=(3m)^2-1<0 \Rightarrow (3m)^2<1$$
$$\Rightarrow -1<3m<1 \Rightarrow \frac{-1}{3}<m<\frac{1}{3}$$

۱۲- گزینهٔ (۱) صحیح است زیرا:

اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب به x و y نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ 2(x+y)=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=100 \\ x+y=14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14^2-2xy=100 \\ x+y=14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=14 \\ xy=\frac{196-100}{2}=\frac{96}{2}=48 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=14 \\ xy=48 \end{cases} \Rightarrow z^2-14z+48=0$$

$$\Rightarrow (z-6)(z-8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x=8 & \text{طول} \\ y=6 & \text{عرض} \end{vmatrix} \Rightarrow |x-y| = |8-6| = 2$$

۱۳- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

اگر اعداد متوالی را به $x - 1$ و x و $x + 1$ نمایش دهیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$(x-1)x(x+1) = (x-1) + x + (x+1) \Rightarrow$$
$$x(x^2-1) = 3x$$
$$x(x^2-1) - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2-1-3) = 0 \Rightarrow$$
$$x(x^2-4) = 0$$
$$x = 0 \text{ یا } x^2-4=0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

چون سه عدد طبیعی هستند پس تنها جواب $x = 2$ قابل قبول است و سه عدد عبارتند از: ۱ و ۲ و ۳ و در نتیجه مجموع مربعات آنان چنین است:

$$3^2+2^2+1^2 = 9+4+1 = 14$$

۱۴- گزینه (۳) صحیح است، زیرا:

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - m^2x + 1 = 0$ برابرند با:

$$\begin{cases} x'+x''=m^2 \\ x'x''=1 \end{cases}$$

از طرفی ریشه‌های معادله چنین می‌باشند:

$$x''=\cos\alpha \quad \text{و} \quad x'=\sin\alpha$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sin\alpha+\cos\alpha=m^2 \\ \sin\alpha\cos\alpha=1 \end{cases} \quad (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=m^4 \\ \sin\alpha\cos\alpha=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+2\times1=m^4 \\ \sin\alpha\cos\alpha=1 \end{cases} \Rightarrow m^4=3 \quad \Rightarrow m=\pm\sqrt[4]{3}$$

۱۵- گزینه (۳) صحیح است، زیرا:

از روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ $x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{5}=0$ داریم:

$$\begin{cases} x'+x''=\sqrt{2} \\ x'x''=-\sqrt{5} \end{cases} ,\quad x'=\log a \quad ,\quad x''=\log b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log a+\log b=\sqrt{2} \\ \log a\log b=-\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log ab=\sqrt{2} \\ \log a\log b=-\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\log^4 a\log^4 b\log^2 ab=(\log a\log b)^4\log^2 ab$$
$$=(-\sqrt{5})^4(\sqrt{2})^2=50$$

۱۶- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$(8x^{16}-8)(16-16x^8)=8\times16(x^{16}-1)(1-x^8)$$
$$=128(x^8-1)(x^8+1)(1-x^8)\geq 0$$
$$-128(x^8+1)(x^8-1)^2\geq 0\Rightarrow 128(x^8+1)(x^8-1)^2\leq 0$$

نامعادله فقط در حالت $x^2-1=0$ برقرار است، پس داریم:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

۱۷- گزینه (۱) صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases} -9x^2-12x<3 \\ \quad\Rightarrow 9x^2+12x+3>0 \Rightarrow 3x^2+4x+1>0 \\ 4x^2-12x>0 \\ \quad\Rightarrow x^2-3x>0 \Rightarrow x(x-1)>0 \\ -1<x<3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1)>0 \\ x(x-3)>0 \\ -1<x<3 \end{cases}$$

$$3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{3}$$
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$
$$x=0 \ ,\ x-3=0 \Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$ تا -1	-1 تا $\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$ تا 0	0 تا 3	3 تا $+\infty$
$(x+1)(3x+1)$	+	−	+	+	+
$x(x-3)$	+	+	+	−	+
			جواب		

$$\frac{-1}{3}<x<0$$

۱۸- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

از رابطهٔ $\log_b^a=\frac{\log a}{\log b}$ نتیجه می‌شود:

$$\log_4(1-x^2)=\frac{\log(1-x^2)}{\log 4}$$
$$\Rightarrow \frac{\log(1-x^2)}{2\log 2}\geq\frac{-1}{2} \Rightarrow \log(1-x^2)\geq-\log 2$$
$$\Rightarrow \log(1-x^2)\geq\log\frac{1}{2}$$
$$1-x^2\geq\frac{1}{2} \Rightarrow x^2\leq\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

یا

$$|x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۹- گزینه (۴)صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases} x^2-3>0 \\ \log\sqrt{x^2-3}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2>3 \\ \sqrt{x^2-3}\geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>\sqrt{3} \text{ یا } x<-\sqrt{3} \\ x^2-3\geq 1 \Rightarrow x^2\geq 4 \Rightarrow x\geq 2 \text{ یا } x\leq -2 \end{cases}$$

۲۰- گزینه (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[8]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^5-32}}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[8]{x^5-32}}} \Rightarrow$$

$$x^5-32\geq 0 \Rightarrow x^5\geq 32 \Rightarrow x\geq 2$$

۲۱ـ گزینه (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{۲^{n+۳}}{۴^{n+۱}-۱۲}=\frac{۱۶}{۶۱} \Rightarrow ۶۱\times ۲^{n+۳}=۱۶(۴^{n+۱}-۱۲)$$

$$\Rightarrow ۸\times ۶۱\times ۲^{n}=۱۶\times ۴\times ۲^{۲n}-۱۶\times ۱۲$$

$$۶۴\times ۲^{۲n}-۴۸۸\times ۲^{n}-۱۹۲=۰ \Rightarrow$$

$$۲^{n}=\frac{۲۴۴\pm\sqrt{۲۴۴^{۲}+۶۴\times ۱۹۲}}{۶۴}$$ (فقط ریشهٔ مثبت قابل قبول است)

$$\Rightarrow ۲^{n}=\frac{۲۴۴+\sqrt{۷۱۸۲۴}}{۶۴}=\frac{۲۴۴+۲۶۸}{۶۴}=\frac{۵۱۲}{۶۴}=۸$$

$$\Rightarrow ۲^{n}=۸ \Rightarrow ۲^{n}=۲^{۳} \Rightarrow n=۳$$

۲۲ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$a_n=a_۱+(n-۱)\,d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=۵: & a_۵=a_۱+۴d=۲۳ \\ n=۸: & a_۸=a_۱+۷d=۳۸ \end{cases} \Rightarrow$$

$$۷d-۴d=۳۸-۲۳$$
$$۳d=۱۵$$
$$d=۵$$

$$a_۱=۲۳-۴d=۲۳-۴\times ۵=۲۳-۲۰=۳ \quad ,$$

$$a_۳=۳+(۳-۱)\times ۵=۱۳$$

۲۳ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$a_{۱۰}+a_{۱۷}=۳n+۵m$$
$$a_k+a_s=۲n+۳m+n+۲m$$
$$=۳n+۵m \quad (a_s=n+۲m\ ,\ a_k=۲n+۳m)$$

پس داریم: $a_k+a_s=a_{۱۰}+a_{۱۷}$ و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_k=a_{۱۰} \\ a_s=a_{۱۷} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲n+۳m=۱۷ \\ n+۲m=۱۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{matrix} n=۴ \\ m=۳ \end{matrix} \right. \Rightarrow m+n=۷$$

یا

$$\begin{cases} a_k=a_{۱۷} \\ a_s=a_{۱۰} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲n+۳m=۱۰ \\ n+۲m=۱۷ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{matrix} n=۲۴ \\ m=-۳۱ \end{matrix} \right. \Rightarrow m+n=-۷$$

۲۴ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$S_n=۳\log_n\left[\frac{۱}{n^{۲}}\right]^{n}+۶n^{۲}=۳n\log_n n^{-۳}+۶n^{۲}=$$

$$-۹n+۶n^{۲}=\frac{n}{۲}\left[۲a_۱+(n-۱)d\right]$$

$$S_n=\left(a_۱-\frac{d}{۲}\right)n+\frac{d}{۲}n^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{از قیاس}} \begin{cases} \frac{d}{۲}=۶ \Rightarrow d=۱۲ \\ a_۱-\frac{d}{۲}=-۹ \Rightarrow a_۱=-۹+۶=-۳ \end{cases}$$

۲۵ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$a_n=\frac{۱}{۳^{n-۲}}$$

$$a_۱=\frac{۱}{۳^{۱-۲}}=۳ \quad , \quad a_۲=\frac{۱}{۳^{۲-۲}}=\frac{۱}{۱}=۱ \Rightarrow$$

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۱}{۳} \quad , \quad S=\frac{a_۱}{۱-r}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۹}{۲}$$

۲۶ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$a_n=a_۱r^{n-۱} \Rightarrow \left| \begin{matrix} n=۴ & :a_۴=a_۱r^{۳}=۲۴ \\ n=۷ & :a_۷=a_۱r^{۶}=۱۹۲ \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{a_7}{a_4}=\frac{r^6}{r^3}=\frac{۱۹۲}{۲۴}$$

$$r^3=۸ \Rightarrow r=۲ \quad , \quad a_1r^3=۲۴$$

$$\Rightarrow a_1=\frac{۲۴}{r^3}=\frac{۲۴}{۸}=۳$$

$a_2=۳\times۲=۶$ (جملهٔ دوم)

۲۷- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$(۲k-۱)(۲k+۱)=۴۸۳ \Rightarrow ۴k^2-۱=۴۸۳$$

$$\Rightarrow k^2=۱۲۱ \Rightarrow$$

$$k=۱۱,\ ۲k-۱=۲(۱۱)-۱=۲۱ \Rightarrow ۲۱, ۲۳, ۲۵$$

۲۸- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\log\sqrt[۵]{۵}=\frac{۱}{۵}\log۵=\frac{۱}{۵}\log\frac{۱۰}{۲}=$$

$$\frac{۱}{۵}(\log۱۰-\log۲)=\frac{۱}{۵}(۱-۰/۳۰۱)=\frac{۰/۶۹۹}{۵}$$

$$\frac{۰/۶۹۹\times۲}{۵\times۲}=\frac{۱/۳۹۸}{۱۰}=۰/۱۳۹۸$$

۲۹- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا: $(\log۳=k)$

$$\log\sqrt[۲k]{۹۰۰}=\frac{۱}{۲k}\log۹۰۰=\frac{۱}{۲k}(\log۹+\log۱۰۰)$$

$$=\frac{۱}{۲k}(۲\log۳+۲)=\frac{k+۱}{k}=۱+\frac{۱}{k}$$

۳۰- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$۳\log x^2=۲\log۳ \Rightarrow \log x^6=\log۹$$

$$\Rightarrow x^6=۹ \Rightarrow x^3=\pm۳ \Rightarrow x=\pm\sqrt[۳]{۳} \Rightarrow |x|=\sqrt[۳]{۳}$$

۳۱- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\log۹^۹=۹\log^۹=۱۸\log۳=۱۸(۰/۴۷)=۸/۵۸۶$$

(تعداد ارقام عدد = مفسر + ۱) $۹(۱)=۱+۸=$ تعداد ارقام عدد $۹^۹$

۳۲- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\log_۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}}=\log_۲\sqrt{\sqrt{۸\sqrt{\sqrt{۸}}}}=$$

$$\log_۲\sqrt[۴]{۸\sqrt[۴]{۸}}=\log_۲\sqrt[۲]{\sqrt[۴]{۸^۵}}=\log_۲\sqrt[۱۶]{۲^{۱۵}}=$$

$$\log_۲ ۲^{\frac{۱۵}{۱۶}}=\frac{۱۵}{۱۶}\log_۲ ۲=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۳۳- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$۴^{۳+۶+۹+...+۳x}=۶۴ \Rightarrow ۴^{۳(۱+۲+...+x)}=۴^۳$$

$$۳(۱+۲+...+x)=۳ \Rightarrow ۱+۲+۳+...+x=۱$$

$$\frac{x(x+۱)}{۲}=۱ \Rightarrow x^2+x-۲=۰ \Rightarrow$$

$$(x-۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۱$$

۳۴- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$a^{\log x}=x^{\log a} \Rightarrow ۲^{\log x}=x^{\log ۲} ,$$

$$۲^{\log x}+۲^{\log x}=۲$$

$$۲\times۲^{\log x}=۲ \Rightarrow ۲^{\log x}=۱ \Rightarrow$$

$$\log x=۰ \Rightarrow x=۱$$

۳۵- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۶]{\log\sqrt[۲]{(x^2-۹)^2}}=\sqrt[۳]{\left|\log\sqrt{|x^2-۹|}\right|}$$

$$\Rightarrow x^2-۹=۰ \Rightarrow x=\pm۳$$

۳۶- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:
اگر زاویهٔ مطلوب را برحسب درجه به D نمایش دهیم داریم:

$$G = ۱۰ + D$$

$$\frac{G}{۱۰} = \frac{D}{۹} \Rightarrow \frac{D}{۹} = \frac{۱۰ + D}{۱۰} \Rightarrow$$

$$۱۰D = ۹۰ + ۹D \Rightarrow D = ۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}$$

۳۷- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:
زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت شمار و دقیقه شمار چنین است:

$$\alpha = |۵/۵M - ۳۰h|$$

(بافرض h ساعت و M دقیقه) در نتیجه داریم:

$$\alpha = |۵/۵ \times ۴۰ - ۳۰ \times ۶|$$

$$\alpha = |۲۲۰ - ۱۸۰| = ۴۰ \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

۳۸- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا: $(۰ < x < \frac{\pi}{۴})$

$$\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x} = \frac{\sin ۲x}{۱-\cos ۲x} \Rightarrow$$

$$۵\left(\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x}\right)^۵ + ۳\left(\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x}\right)^۵ = \frac{۱}{۴}$$

$$۸\left(\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x}\right)^۵ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow$$

$$\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = ۲ + ۲\cos ۲x$$

-۳۹
گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا: $(۰ < x < \frac{\pi}{۲})$

$$\left(\sqrt{\frac{۱-\cos x}{\sin^۲ x}} + \sqrt{\frac{۱+\cos x}{(۱+\cos x)^۲}}\right)\sqrt{۱+\cos x} =$$

$$\left(\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱-\cos^۲ x}} + \sqrt{\frac{۱}{۱+\cos x}}\right)\sqrt{۱+\cos x} =$$

$$\left(\sqrt{\frac{۱}{۱+\cos x}} + \sqrt{\frac{۱}{۱+\cos x}}\right)\sqrt{۱+\cos x} =$$

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{۱+\cos x}} + \frac{۱}{\sqrt{۱+\cos x}}\right)\sqrt{۱+\cos x} = ۲$$

۴۰- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا: $(۰ < x < \frac{\pi}{۲})$

$$\left(\frac{۱+\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{۱+\sin x}\right)\sqrt{۱-\sin^۲ x} =$$

$$\left(\frac{(۱+\sin x)^۲ + \cos^۲ x}{\cos x(۱+\sin x)}\right)|\cos x|$$

با توجه به شرط $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$= \left(\frac{۱+\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x}{\cos x(۱+\sin x)}\right)\cos x$$

$$= \frac{۲+۲\sin x}{۱+\sin x} = ۲$$

۴۱- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\mathrm{tg}\,۴nx\,\mathrm{cotg}\,۳x = ۱ \Rightarrow \frac{\mathrm{tg}\,۴nx}{\mathrm{tg}\,۳x} = ۱ \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\,۴nx = \mathrm{tg}\,۳x$$

$$۴nx = K\pi + ۳x \Rightarrow (۴n-۳)x = K\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{K\pi}{۴n-۳} \xrightarrow{\text{x نا معین}} ۴n-۳ = ۰ \Rightarrow n = \frac{۳}{۴}$$

۴۲- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا: $(۰ < x < \frac{\pi}{۲})$

$$\left(\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}} + \sqrt{\frac{۱+\cos x}{۱-\cos x}}\right)\sin x$$

$$= \left(\sqrt{\frac{(1-\cos x)^{2}}{1-\cos^{2} x}} + \sqrt{\frac{(1+\cos x)^{2}}{1-\cos^{2} x}}\right)\sin x$$

$$= \left(\frac{|1-\cos x|}{|\sin x|} + \frac{|1+\cos x|}{|\sin x|}\right)\sin x$$

با توجه به شرط $0 < x < \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$= \left(\frac{1-\cos x + 1+\cos x}{\sin x}\right)\sin x = 2$$

۴۳ - گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

طرف اول همواره مثبت است و تنها وقتی صفر می‌شود که هر یک از عبارات برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} \sin^{72} x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = K\pi \\ \sqrt{\sin x} = 0 \end{cases}$$

و در نتیجه مجموعهٔ جواب معادله چنین است:

$\{x \mid x = K\pi\}$

۴۴ - گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا: $(\pi < x < \frac{3\pi}{2})$

$$3\cos nx + 2 = 0 \Rightarrow \cos nx = \frac{-2}{3}$$

با توجه به شرط $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ داریم:

$$\sin nx = \pm\sqrt{1-\cos^{2} nx}$$

$$\sin nx = -\sqrt{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^{2}} = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

۴۵ - گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{cotg}x = 1 \quad , \quad \operatorname{tg}x = \frac{(b^{2}+1)(5a^{2}+5)}{a^{2}+b} \quad ,$$

$$\operatorname{cotg}x = \frac{a^{3}+ab}{10b^{2}+10}$$

$$\frac{(b^{2}+1)(5a^{2}+5)}{a^{2}+b} \cdot \frac{a^{3}+ab}{10b^{2}+10} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{5(b^{2}+1)(a^{2}+1)}{a^{2}+b} \cdot \frac{a(a^{2}+b)}{10(b^{2}+1)} = 1$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$a(a^{2}+1) = 2 \Rightarrow a^{3}+a-2 = 0 \Rightarrow$$

$$(a-1)(a^{2}+a+2) = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \text{یا} \\ a^{2}+a+2 = 0 \quad \text{ریشهٔ حقیقی ندارد.} \end{array} \right.$$

۴۶ - گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$12\operatorname{Arcsin}\sqrt[5]{x} = 2\pi \Rightarrow \operatorname{Arcsin}\sqrt[5]{x} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt[5]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{32}$$

۴۷ - گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\frac{5\operatorname{cotg}225^\circ + \cos 240^\circ + 2\sin 330^\circ + 4\operatorname{tg}135^\circ}{10\operatorname{tg}225^\circ + \cos 450^\circ - \operatorname{cotg}135^\circ + 20\sin 210^\circ}$$

$$= \frac{5\operatorname{cotg}45^\circ - \cos 60^\circ - 2\sin 30^\circ - 4\operatorname{tg}45^\circ}{10\operatorname{tg}45^\circ + \cos 90^\circ + \operatorname{cotg}45^\circ - 20\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{5-\frac{1}{2}-1-4}{10+0+1-10} = \frac{-1}{2}$$

۴۸ - گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\log \operatorname{tg}45^\circ = \log 1 = 0$$

پس صورت کسر صفر است:

$$\log \operatorname{tg} 1^\circ \times \log \operatorname{tg} 2^\circ \times \cdots \times \log \operatorname{tg} 45^\circ \times \cdots \times \log \operatorname{tg} 89^\circ = 0$$

مخرج کسر مخالف صفر است و داریم:

$$\log 2 + \log \cos 60^\circ = \log 2\cos 60^\circ = \log 1 = 0$$

۴۹- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sin x + \cos x = m \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = m^2$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = m^2$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2} \qquad (2)$$

از تقسیم رابطهٔ (۱) بر (۲) داریم:

$$\frac{m}{\frac{m^2-1}{2}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{2m}{m^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{2m}{m^2 - 1} \Rightarrow m^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

۵۰- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا: $(0 < x , y < 2\pi)$

طرف دوم برابر ۲ است. پس طرف اول نیز باید برابر ۲ باشد و این با توجه به حدود سینوس و کسینوس وقتی ممکن است که داشته باشیم: $\sin(x - 2y) = 1 ,\ \cos(2x + y) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = \frac{\pi}{2} \\ 2\,(2x + y = 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = \frac{\pi}{2} \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} ,\ y = \frac{-\pi}{5}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{5} = \frac{-\pi}{10}$$

۵۱- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$1 + \sin^4 x + \cos^4 x =$$

$$\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x =$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$1 + 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow$$

$1 = 0$ غیرممکن

معادله جواب ندارد. زیرا معادل یک تساوی غیر ممکن است.

۵۲- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

طبق قضیه شال داریم: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

$$\frac{\overline{AB} - \overline{CB} + \overline{AC}}{\overline{BC} - \overline{BA}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{\overline{BC} + \overline{AB}} =$$

$$\frac{\overline{AC} + \overline{AC}}{\overline{AB} + \overline{BC}} = \frac{2\overline{AC}}{\overline{AC}} = 2$$

(با توجه به فرض: $x_A \neq x_C$)

۵۳- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2}$$

$$x_A + x_C = 2x_B \Rightarrow 2m + 1 + 4 = 2(6m - 2)$$

$$\Rightarrow 2m + 5 = 12m - 4$$

$$10m = 9 \Rightarrow m = \frac{9}{10}$$

۵۴- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم چنین است: $y = -x$

پس مختصات نقطهٔ A باید در معادلهٔ اخیر صدق کند:

$$2m - 1 = -(4m - 1)$$

$$2m - 1 = -4m + 1 \Rightarrow 6m = 2 \Rightarrow$$

$$m = \frac{2}{6} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

۵۵- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

برای متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-۲+b-۱=۳a+۱+۲a+۱ \\ a-۱+b=۲a-۳+b-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴a-b=-۵ \\ a=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=۱۷ \\ a=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b=۳-۱۷=-۱۴$$

۵۶- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

مختصات مرکز ثقل مثلث (G) چنین است:

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{۳}$$

$$y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{۳},\ x_G=-۲,\ y_G=۱$$

$$-۲=\frac{m-۱+۲+۳}{۳} \Rightarrow m+۴=-۶ \Rightarrow m=-۱۰$$

$$۱=\frac{m-n-۱+۲}{۳} \Rightarrow m-n+۱=۳ \Rightarrow$$

$$m-n=۲$$

$$-۱۰-n=۲ \Rightarrow n=-۱۲\ ,\ m+n=-۲۲$$

۵۷- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

$$=\sqrt{(۲m-۱-۲)^۲+(۲-۲m)^۲}=۵$$

$$(۲m-۳)^۲+(۲-۲m)^۲=۲۵ \Rightarrow$$

$$۴m^۲-۱۲m+۹+۴m^۲-۸m+۴=۲۵ \Rightarrow$$

$$۸m^۲-۲۰m-۱۲=۰ \Rightarrow ۲m^۲-۵m-۳=۰$$

$$\Rightarrow m=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵+۲۴}}{۴}$$

$$m=\frac{۵\pm۷}{۴} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m=۳ \\ \text{یا} \\ m=\frac{-۱}{۲} \end{array} \right.$$

۵۸- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

اگر a یک ضلع مربع و R، قطر مربع باشد داریم:

$$۲a^۲=R^۲$$

$$R^۲=(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲=$$

$$(۱+۲)^۲+(۳-۷)^۲=۹+۱۶=۲۵$$

$$۲a^۲=۲۵ \Rightarrow a^۲=\frac{۲۵}{۲} \Rightarrow S=a^۲=\frac{۲۵}{۲}$$ مساحت مربع

۵۹- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$f\left(\frac{\pi}{۳}\right)=۲\sin\frac{\pi}{۳}+۱=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱=\sqrt{۳}+۱$$

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right)=۲\sin\frac{\pi}{۴}+۱=۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱=\sqrt{۲}+۱$$

$$f\left(\frac{\pi}{۶}\right)=۲\cos\frac{\pi}{۶}-۱=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱=\sqrt{۳}-۱$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{۳}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{۴}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{۶}\right)=۲\sqrt{۲}+۲$$

۶۰- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$f(x)=۲^x \Rightarrow f(x+۲)=۲^{x+۲},$$

$$f(x+۱)=۲^{x+۱}$$

$$\Rightarrow f(x+۲)-f(x+۱)=$$

$$۲^{x+۲}-۲^{x+۱}=۲^۲\times۲^x-۲\times۲^x=$$

$$۴\times۲^x-۲\times۲^x=۲\times۲^x=۲^{x+۱}=۳۲=۲^۵$$

$$\Rightarrow x+۱=۵ \Rightarrow x=۴$$

۶۱- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

با تبدیل x به -x داریم:

$$\begin{cases} f(x)+mf(-x)=۳x \\ f(-x)+mf(x)=-۳x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)+mf(-x)=3x \\ mf(x)+f(-x)=-3x \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{m}=\frac{m}{1}$$

$$\Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1$$

به ازای $m=\pm 1$ دستگاه جواب ندارد و در نتیجه $f(x)$ نامعین است.

۶۲- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$D_f=\{x|x^2-1\ge 0\}\cap\{x|x+1>0\}=$$
$$\{x|x\ge 1 \text{ یا } x\le -1\}\cap\{x|x>-1\}$$
$$D_f=\{x|x\ge 1\}=[1,+\infty[$$

۶۳- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{0}+\dfrac{x+1}{0} & x\ge 0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{-2x}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{4x}} & x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} \text{نامعین} & x\ge 0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{-2x}}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} & x<0 \end{cases}$$

به ازای $x<0$ نیز عبارت $\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$ غیر حقیقی است و $f(x)$ نامعین است. پس دامنهٔ تابع $\varnothing$ است.

۶۴- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\frac{x^2+1}{1-x^2}>0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1$$
$$\Rightarrow x=\pm 1,\ x^2+1>0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$		$+$		$-$	

$$\Rightarrow D_f=\{x \mid -1<x<1\}$$

دامنهٔ تعریف: $D_f=]-1,1[$

۶۵- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$gof(x)=g(f(x))=1-(x\sqrt[4]{x})^2$$
$$=1-x^2\sqrt[4]{x^2}=1-x^2\sqrt{|x|}$$

$|x|$ همواره مثبت است پس دامنهٔ gof مجموعهٔ اعداد حقیقی (IR) است.

۶۶- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

محل تلاقی خط $y-2x+1=0$ با محورهای مختصات چنین است:

$$A\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. ,\quad B\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\0\end{matrix}\right.$$

از طرفی نقاط A و B نیز متعلق به تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+1}{4x+b}$ نیز می‌باشند، بنابراین داریم:

$$f(0)=\frac{1}{b}=-1 \Rightarrow b=-1 ,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a\left(\frac{1}{2}\right)+1}{4\left(\frac{1}{2}\right)+b}=0$$

$$\frac{a}{2}+1=0 \Rightarrow a=-2 ,\quad a+b=-1-2=-3$$

۶۷- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$D: mx-y=1 \Rightarrow m_D=m$$
$$D': 2y-x=3 \Rightarrow m_{D'}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow tg\,45^\circ=\left|\frac{m_D-m_{D'}}{1+m_D m_{D'}}\right|=\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\times m}=1$$

$$m-\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}m \Rightarrow \frac{1}{2}m=\frac{3}{2} \Rightarrow m=3$$

۶۸- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

مختصات نقطه‌ای به طول ۱- در هر دو خط صدق می‌کند. و

همچنین حاصل ضرب ضریب زاویه‌های دو خط برابر ۱- است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}-n-y+1=0\\ -m-y=1\\ mn=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m-n=-2\\ mn=-1\end{cases} \Rightarrow$$

$$n(n-2)=-1 \Rightarrow n^2-2n+1=0 \Rightarrow n=1$$

$$n=1 \ : \ m(1)=-1 \Rightarrow m=-1 \ ,$$

$$m+n=-1+1=0 \Rightarrow m+n=0$$

۶۹- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x^3}{ax^3+1}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^3\left(a+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{-1}{a}=a^2$$

$$\Rightarrow a^3=-1 \Rightarrow a=-1$$

۷۰- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n+x^5+72}{mx^{15}-x^2+73}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(1+\frac{x^5}{x^n}+\frac{72}{x^n}\right)}{x^{15}\left(m-\frac{1}{x^{13}}+\frac{73}{x^{15}}\right)}=\frac{-1}{3}$$

حد عبارت اخیر برابر $\frac{-1}{3}$ شده است، بنابراین درجهٔ صورت و مخرج باید مساوی باشند. پس داریم:

$n=15$ و $\frac{1}{m}=\frac{-1}{3} \Rightarrow m=-3$ و $\frac{n}{m}=\frac{15}{-3}=-5$

۷۱- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \operatorname{tg} 2x \sin 3x}{6x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \operatorname{tg} 2x \sin 3x}{x\times 2x\times 3x}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$=1\times 1\times 1=1$$

۷۲- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

شرایط پیوستگی در نقطهٔ A چنین است:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=2$$

$$\begin{cases}a+1=2\\ a(-1)^3+b=2\end{cases} \Rightarrow \left|\begin{matrix}a=1\\ -a+b=2\end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix}a=1\\ b=3\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq -1\\ x^3+3 & x<-1\end{cases}$$

$$f(0)=1 , \quad x<-1: \quad f'(x)=3x^2 ,$$

$$f''(x)=6x$$

$$f'(-2)=12 \quad , \quad f''(-3)=-18 \Rightarrow$$

$$\frac{f'(-2)f(0)}{f''(-3)}=\frac{12\times 1}{-18}=\frac{-2}{3}$$

۷۳- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+a}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3+a)^2}}=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+a)^2}}$$

$$f'(-1)=1$$

$$f'(-1)=\frac{1}{\sqrt[3]{(-1+a)^2}}=1 \Rightarrow$$

$$\sqrt[۲]{(a-۱)^۲}=۱ \Rightarrow (a-۱)^۲=۱ \Rightarrow$$

$$a-۱=\pm۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ \\ a=۲ \end{cases}$$ یا

۷۴- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$y'_x=y'_u\times u'_x \quad , \quad u=\sin x+\cos ۲x$$

$$y'_x=(۳u^۲-۲u)(\cos x-۲\sin ۲x) \,,$$

$$x=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow u=\sin\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$y'_x=\left(۳\times\frac{۱}{۲}-۲\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۲\right)$$

$$=\left(\frac{۳}{۲}-\sqrt{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۲\right)=\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۴}-۴$$

۷۵- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ مبدأمختصات است، پس داریم: $I(۰\,,\,۰)$

$$d=\frac{|h|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۶} \Rightarrow |h|=\sqrt{۱۲} \Rightarrow h=\pm۲\sqrt{۳}$$

۷۶- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$۲x^۲+\frac{y^۲}{۲}=۳ \Rightarrow x^۲+\frac{y^۲}{۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \left(x-\frac{y}{۲}\right)^۲+xy=\frac{۳}{۲}$$

$$xy=\frac{۳}{۲}-\left(x-\frac{y}{۲}\right)^۲$$

xy وقتی ماکزیمم خواهد بود که عبارت نامنفی، $\left(x-\frac{y}{۲}\right)^۲$ مینیمم باشد و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$x-\frac{y}{۲}=۰ \Rightarrow x=\frac{y}{۲} \Rightarrow \frac{x^۳}{y^۳}=\frac{۱}{۸}$$

۷۷- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

ضریب زاویهٔ خط مماس در نقطهٔ مورد نظر برابر مشتق تابع به‌ازای طول تماس می‌باشد، بنابراین داریم:

$$f(x)=tg^۲(\sin ۲x) \Rightarrow$$

$$f'(x)=۲(۲\cos ۲x)\,tg(\sin ۲x)\left(۱+tg^۲(\sin ۲x)\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۰ \quad , \quad m=f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۰ \Rightarrow m=۰$$

ضریب زاویهٔ خط مماس

۷۸- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۶}\,(\sin (n+۱)x \cos nx - \sin nx \cos (n+۱)x)=\sqrt{۳}$$

$$\sin((n+۱)x-nx)=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}} \Rightarrow$$

$$\sin x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin ۴۵^\circ$$

در فاصلهٔ $\left[\frac{-\pi}{۲}\,,\,\frac{\pi}{۲}\right]$ جواب معادله چنین است: $x=۴۵^\circ$

۷۹- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$cotg\,۸۰^\circ tg\,۵۰^\circ cotg\,۲۰^\circ=tg\,۱۰^\circ tg\,۵۰^\circ tg\,۷۰^\circ$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی:

$$tg\,x\,tg(۶۰^\circ-x)tg(۶۰^\circ+x)=tg\,۳x$$

داریم:

$$x=۱۰ \Rightarrow tg\,۱۰^\circ tg\,۵۰^\circ tg\,۷۰^\circ=tg\,۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۸۰- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\cos ۴۸^\circ+\sin ۱۸^\circ-\cos ۱۲^\circ=\sin ۴۲^\circ+\sin ۱۸^\circ-\cos ۱۲^\circ$$

$$=۲\cos ۱۲^\circ \sin ۳۰^\circ-\cos ۱۲^\circ=۲\left(\frac{۱}{۲}\right)\cos ۱۲^\circ-\cos ۱۲^\circ$$

$$=\cos ۱۲^\circ-\cos ۱۲^\circ=۰$$

۸۱- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sin\left[۳\left(\frac{\pi}{۴}\right)-۲\left(\frac{-\pi}{۶}\right)-\frac{\pi}{۳}+\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)\right]=$$

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)=-۱$$

۸۲- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$$
$$=1+\cos x+\cos 3x+\cos 2x+\cos 4x$$
$$=1+2\cos 2x\cos x+2\cos 3x\cos x$$
$$=1+2\cos x(\cos 2x+\cos 3x)$$
$$=1+2\cos x\left(2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\right)$$
$$=1+4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$$
$$=1+\frac{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=1+\frac{\sin 2x\cos\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$x=\frac{2\pi}{9}\ :\quad 1+\frac{\sin 2x\cos\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=1+\frac{\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}$$
$$=1+\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=1+\frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{-\pi}{9}\right)}{\sin\frac{\pi}{9}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۸۳- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}=\pm\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\quad\Rightarrow$$
$$\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}=2x-\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{2\pi}{15}$$
$$\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}=-2x+\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad x_2=0\quad,\quad x_1+x_2=\frac{2\pi}{15}$$

۸۴- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$2\cos\frac{x}{24}\sin\frac{x}{24}\cos\frac{x}{12}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow\quad \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{12}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{8}$$
$$2\sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{12}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{4}$$
$$2\sin\frac{x}{6}\cos\frac{x}{6}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\sin\frac{x}{3}=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow\quad\frac{x}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad x=6k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۸۵- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا: $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

$$\text{cotg}x=2+\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\text{tg}x}=2+\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow\quad\text{tg}x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$
$$\text{tg}x=\text{tg}\frac{13\pi}{12}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{13\pi}{12}\quad\Rightarrow$$
$$\text{tg}4x=\text{tg}\frac{13\pi}{3}=\text{tg}\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\text{tg}4x=\text{tg}\frac{\pi}{3}\quad\Rightarrow\quad\text{tg}4x=\sqrt{3}$$

۸٦- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$f(x)=-16x^3+4x^2$$
$$f'(x)=-48x^2+8x\ ,\ f''(x)=-96x+8\Rightarrow$$
$$f''(x)=0$$
$$-96x+8=0\ \Rightarrow x=\frac{-8}{-96}=\frac{1}{12}\Rightarrow x=\frac{1}{12}$$

طول نقطه عطف

$$m=f'\left(\frac{1}{12}\right)=-16\left(\frac{1}{12}\right)^3+4\left(\frac{1}{12}\right)^2$$
$$=-\frac{16}{64\times27}+\frac{4}{16\times9}=-\frac{1}{4\times27}+\frac{1}{4\times9}$$
$$m=\frac{2}{4\times27}=\frac{1}{54}$$

ضریب زاویهٔ خط مماس

$$\Rightarrow mm'=-1\Rightarrow m'=\frac{-1}{\frac{1}{54}}=-54$$

ضریب زاویهٔ خط قائم در نقطهٔ عطف منحنی

۸۷- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$f(x)=\frac{۶mx-۱}{۲x-۳m} \Rightarrow I\left|\begin{array}{l} x=\frac{۳m}{۲} \\ y=۳m \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} m=\frac{۲x}{۳} \\ y=۳m \end{array}\right. \Rightarrow y=۳(\frac{۲x}{۳})=۲x \Rightarrow y=۲x$$

۸۸- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$f(x)=۲x^۳-۳ax^۲+۲x$$
$$f'(x)=۶x^۲-۶ax+۲ \Rightarrow$$
$$f'(x)>۰ \quad , \quad ۶x^۲-۶ax+۲>۰$$
$$۳x^۲-۳ax+۱>۰ \Rightarrow$$
$$\left|\begin{array}{l} \Delta=۹a^۲-۱۲<۰ \\ ۳>۰ \end{array}\right. \Rightarrow ۹a^۲-۱۲<۰$$
$$۹a^۲<۱۲ \Rightarrow ۳a^۲<۴ \Rightarrow$$
$$a^۲<\frac{۴}{۳} \Rightarrow -\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}<a<\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۸۹- گزینهٔ(۳) صحیح است، زیرا:

$$(x+۲)^۲+(y-۲)^۲=۱$$
$$\Rightarrow O_۱\left|\begin{array}{l} -۲ \\ ۲ \end{array}\right. , \quad R=۱$$
$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۹ \Rightarrow O_۲\left|\begin{array}{l} ۱ \\ -۲ \end{array}\right. , \quad R'=۳$$

فاصله خط المرکزین دو دایره: $d=O_۱O_۲=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۲۵-(۳+۱)^۲}$$
$$=\sqrt{۲۵-۱۶}=\sqrt{۹}=۳$$

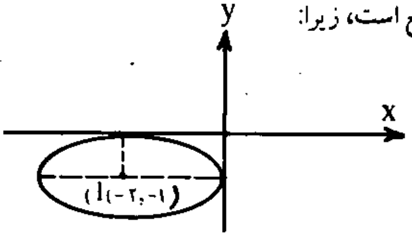
۹۰- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$C: (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

مرکز دایرهٔ C روی خط $y = x$ قرار دارد و مختصات آن چنین است: $O_۱\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \alpha\end{array}\right.$ همچنین از مبدأ مختصات $O\left|\begin{array}{l}۰\\ ۰\end{array}\right.$ نیز می‌گذرد، پس داریم: $\alpha^۲+\alpha^۲=R^۲$

$$\Rightarrow R^۲=۲\alpha^۲ \quad ,C:(x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=۲\alpha^۲$$

۹۱- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:



محور کانونی بیضی فوق موازی محور طولهااست. و در نتیجه $a=۲$ و $b=۱$ است. پس داریم:

$$\frac{(x+۲)^۲}{۴}+\frac{(y+۱)^۲}{۱}=۱$$

۹۲- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود برهم، بر سهمی می‌توان رسم نمود خط هادی سهمی است، پس داریم:

$$(y+۲)^۲=-۴(x-۱)\ ,\ S(\alpha=۱\ ,\beta=-۲)$$
$$۲p=-۴ \Rightarrow p=-۲\ ,$$
$$x=\alpha-\frac{p}{۲}=۱+\frac{۲}{۲}=۲ \Rightarrow x-۲=۰$$

۹۳- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

مرکز هذلولی $C(۲,-۲), c=\sqrt{۶}, a^۲+b^۲=c^۲\ , a=b$

$$\Rightarrow ۲a^۲=c^۲ \ ، \ ۲a^۲=۶ \Rightarrow a^۲=۳ \Rightarrow a=b=\sqrt{۳}$$
$$\frac{(x-۲)^۲}{۳}-\frac{(y+۲)^۲}{۳}=۱ \Rightarrow (x-۲)^۲-(y+۲)^۲=۳$$
$$x^۲+۴-۴x-y^۲-۴-۴y=۳ \Rightarrow x^۲-y^۲-۴x-۴y=۳$$

۹۴- گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$f''(x)=۱۲x \Rightarrow f'(x)=۶x^۲+c \text{ و } f'(-۱)=۰ \Rightarrow c=-۶$$

$f'(x)=6x^2-6 \Rightarrow f(x)=2x^3-6x+c_1 \ , \ f(-1)=0$

$f(-1)=2(-1)^3-6(-1)+c_1=0 \Rightarrow c_1=-4$

$\Rightarrow f(x)=2x^3-6x-4 \Rightarrow f(1)=2-6-4=-8$

۹۵- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

مختصات نقاط تلاقی:

$$\begin{cases} y^2=2px \\ x^2=2py \end{cases} \Rightarrow O(0,0) \quad , \quad A(2p,2p)$$

$$y_1=\frac{x^2}{2p} \quad , \quad y_2=\sqrt{2px}$$

$$S_0^{2p}=\int_0^{2p}(y_2-y_1)dx=$$

$$\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\frac{4}{3}p^2=3$$

$$p^2=\frac{9}{4} \Rightarrow p=\pm\frac{3}{2} \overset{\text{مقدار } p}{\Rightarrow} |p|=\frac{3}{2}$$

۹۶- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{tg^n x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^n x(1+tg^2 x)dx=$$

$$\left[\frac{tg^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{tg^{n+1}\frac{\pi}{4}}{n+1}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}=\frac{1}{5} \Rightarrow n+1=5 \Rightarrow n=4$$

۹۷- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$m(\cos x+\sin x)=2+3\cos x-m$

معادلهٔ کلاسیک نوع اول: $a\sin x+b\cos x=c$

$(m-3)\cos x+m\sin x=2-m$

شرط جواب: $a^2+b^2\geq c^2$ $\quad m^2+(m-3)^2\geq(2-m)^2$

$\Rightarrow 2m^2-6m+9\geq 4+m^2-4m \Rightarrow m^2-2m+5\geq 0$

$\Rightarrow (m-1)^2+4>0$

۹۸- گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$b=2a\cos\hat{C} \quad (a\neq 0) \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$b=2a\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \Rightarrow b^2=a^2+b^2-c^2$$

$$a^2-c^2=0 \Rightarrow a^2=c^2 \Rightarrow a=c$$

پس مثلث متساوی‌الساقین در رأس B است.

۹۹- گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$tg\,4x+cotg\,4x=2\sqrt{2}$$

$$\frac{2}{2\sin 4x\cos 4x}=\frac{2}{\sin 8x}=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin 8x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$8x_1=2K\pi+\frac{\pi}{4} \quad , \quad 8x_2=2K\pi+\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$x_1=\frac{K\pi}{4}+\frac{\pi}{32}, x_2=\frac{K\pi}{4}+\frac{3\pi}{32}, x\in\left[\frac{\pi}{32},\frac{3\pi}{32}\right]$$

$$K=0 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{\pi}{32}+\frac{3\pi}{32}=\frac{4\pi}{32}=\frac{\pi}{8}$$

۱۰۰- گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

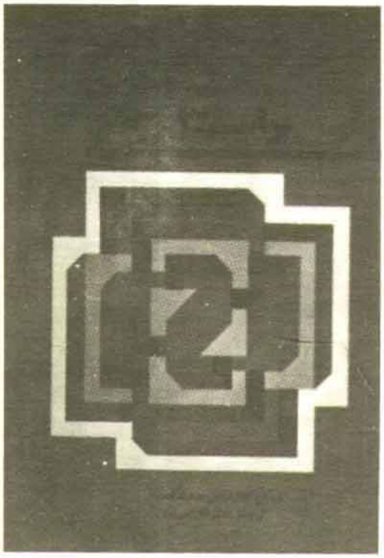
$$y=\cos^3\frac{2\pi}{3}x+tg^5\frac{\pi}{6}x+\sin^4\frac{\pi}{2}x$$

$$T_1=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3 \quad , \quad T_2=\frac{\pi}{\frac{\pi}{6}}=6 \quad , \quad T_3=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$$

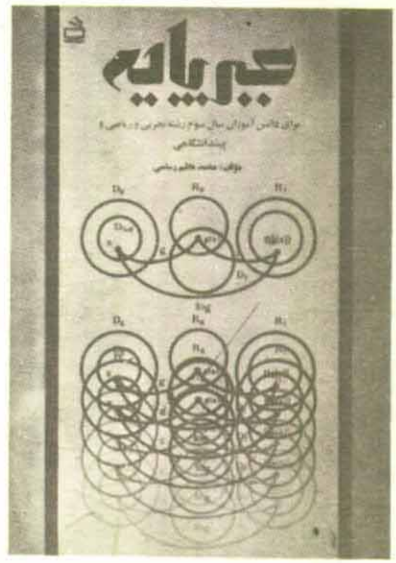
کوچکترین مضرب مشترک بین T_1 و T_2 و T_3 دورهٔ تناوب تابع است: $T=6$

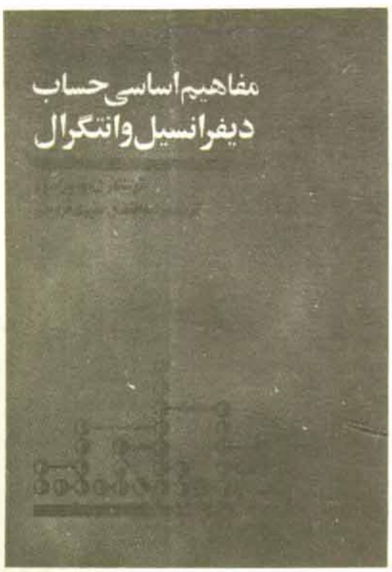
اسامی تعدادی از کتابهای ریاضی منتشرشده

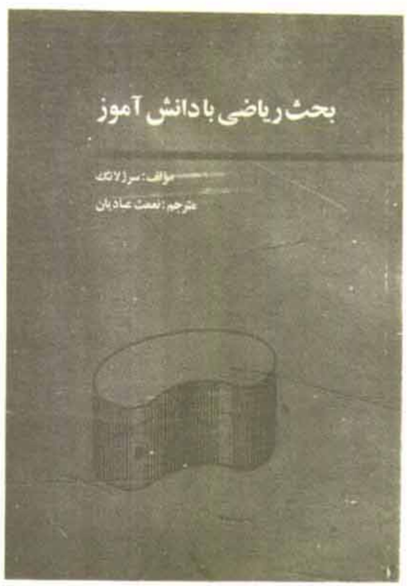
توسط انتشارات مدرسه













توصیه‌ها و تذکرات مهم:

عموماً در کنکورها به روش تستی و ۴ گزینه‌ای، ۳ نوع تست مطرح می‌شود که لازم است دانش‌آموزان این ۳ نوع تست را شناسایی و تشخیص دهند تا از نظر زمان‌بندی، بهتر و راحت‌تر بتوانند به سؤالات جواب دهند. در این زمینه لازم است به نکات زیر توجه شود، ابتدا به شناسایی این ۳ نوع تست می‌پردازیم:

نوع اول: تستهایی که بسیار ساده بوده و زمانی در حدود ۱۰ الی ۱۵ ثانیه وقت برای جوابگویی نیاز دارند، در این نوع تستها معمولاً دانش‌آموز با خواندن صورت تست بلافاصله جواب را در ذهن آماده کرده و بین گزینه‌ها به دنبال آن می‌گردد.

مثال: نقیض گزارهٔ $(p \Rightarrow q)$ کدام است؟

۱) $\sim p \Rightarrow q$ ۲) $\sim p \Rightarrow \sim q$ ۳) $\sim p \vee q$ ۴) $p \wedge \sim q$

نوع دوم: تستهایی که می‌توان آنها را تستهای نرمال نامید و این نوع تستها تقریباً در مدت زمان تعیین شده برای هر تست قابل جوابگویی هستند (۴۵ ثانیه الی ۱ دقیقه) و داوطلب پس از مطالعهٔ صورت تست با استفاده از چند فرمول و رابطه به جواب دست پیدا خواهد کرد.

نوع سوم: تستهای سخت و مشکل که این نوع تستها دو دسته‌اند:

دسته اول: تستهایی که از نظر حل مشکلی ندارند ولی راه‌حل طولانی دارند و وقت زیادی (۲ الی ۳ دقیقه) از داوطلب، طلب می‌کنند و دستهٔ دوم: تستهایی که نکته‌دار هستند و حل آنها نیاز به ابتکار و گاهی مطالعه مطالب خارج از کتب دبیرستانی دارد.

توصیه‌های لازم:

۱ـ داوطلبان ابتدا سؤالات نوع اول و دوم را سریعاً جواب داده و وقتی به سؤالاتی از نوع سوم برخورد می‌کنند، اگر از دسته اول (وقت‌گیر) باشد باید علامتی در کنار آن گذاشته و آن تست را رها کنند و اگر از دستهٔ دوم باشد (نکته‌دار) و نکته آن را پیدا کند که تست به نوع اول یا دوم برمی‌گردد و در غیر این‌صورت آن تست را هم باید با علامتی در کنار آن رها کند. با این حساب این داوطلب به‌طور حتم وقت اضافی خواهد داشت و می‌تواند این وقت اضافی را روی تستهای وقت‌گیر ازنوع سوم صرف کرده و به حل آنها بپردازد.

۲ـ داوطلبان سعی کنند به هنگام حل سؤالات ۴ گزینه‌ای، در منزل یا خارج از محیط امتحان و کنکور حتماً با زمان‌بندی و از روی وقت مبادرت به زدن تست کنند.

۳ـ هرگاه مفهوم اصلی و عمق یک مطلب درسی را خوب یاد گرفتید مطمئن باشید هر نوع تست در آن زمینه را می‌توانید جوابگو باشید.

مؤیّد و پیروز باشید: سردبیر

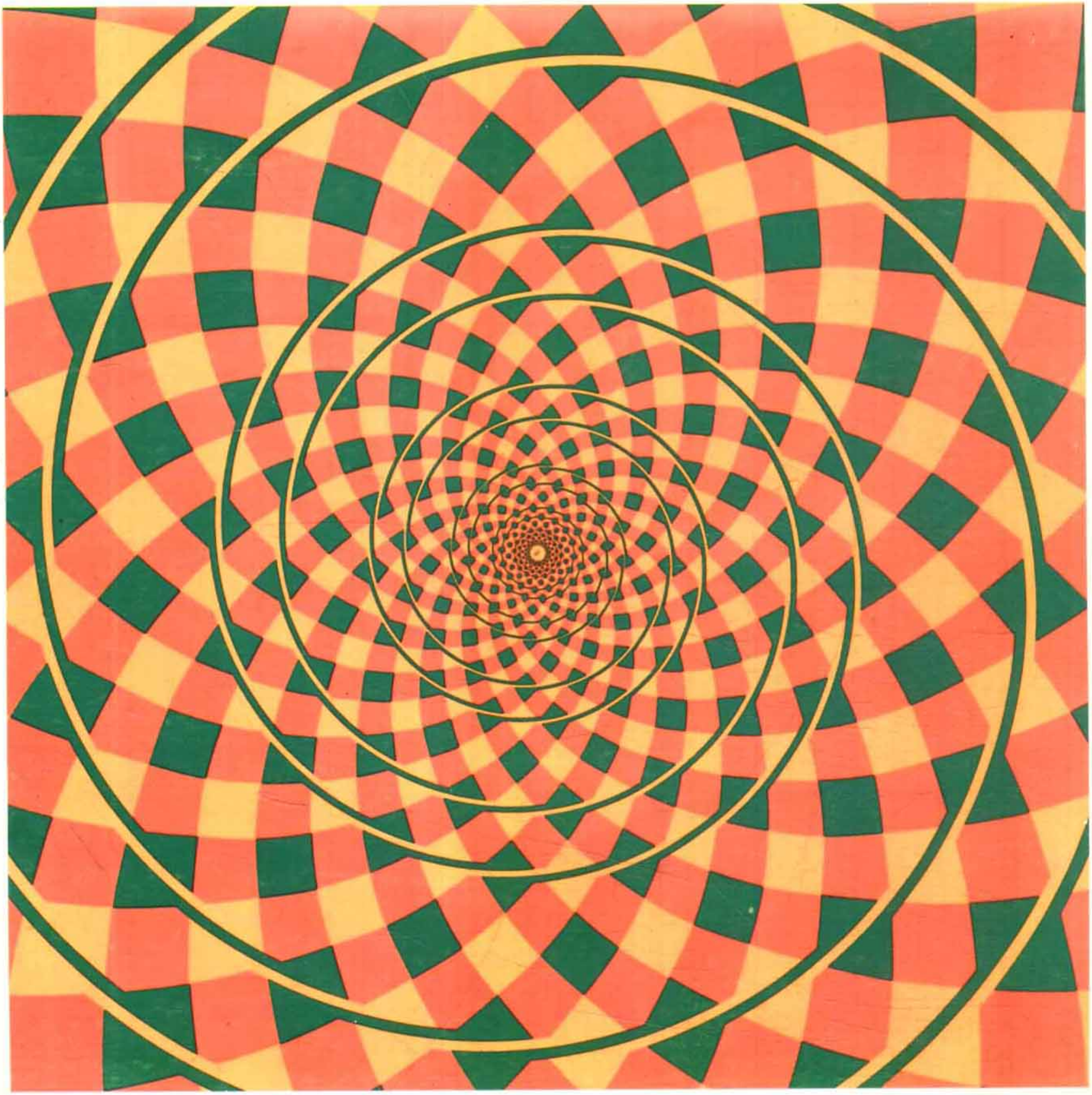
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۰

سال سوم، بهار ۱۳۷۳، شماره سوم، بها ۱۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:

آقایان: • حمیدرضا امیری • محمدهاشم رستمی
• احمد قندهاری • سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
• غلامرضا یاسی‌پور

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و محمد عابدی و مهدی قمصری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا: مهرزاد طاهری
• رسام: فرخ نیکزاد • حروفچینی: یگانه

سال سوم، بهار ۱۳۷۳ ، شمارهٔ سوم

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

مطالب این شماره

• حرف اول ۱

• شما هم می‌توانید دردرس ریاضی خود موفق باشید(۹)/ پرویز شهریاری ۲

• خطوط مجانب/ احمد قندهاری ۸

• آموزش ترجمه متون ریاضی/ حمیدرضا امیری ۲۰

• تاریخچه مجله‌های ریاضی در ایران (۹)/ ۲۵

• ریاضیات گسسته/ غلامرضا یاسی‌پور ۳۰

• آیا تابعی جبری وجود دارد که متناوب باشد؟/ دکتر احمد شرف‌الدین ۳۸

• مفهوم‌های اصلی و اصل موضوعها در هندسه فضایی (۴)/ پرویز شهریاری ۴۰

• فیثاغورس و هوش‌آزمایی فرزندان/ حسن نصیرنیا ۴۶

• مثلث ارتفاعیه/ ساسان اسماعیلی شاهرودی ۴۸

• توابع گزاره‌ای و سورها/ غلامرضا یاسی‌پور ۵۲

• گزارشی از بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور/ ۵۵

• استفاده از کامپیوتر در حل معادلات غیرخطی/ حسین ابراهیم‌زاده قُلزم ۵۸

• طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۸)/ ۶۶

• کانون یاب بیضی/ مریم رُفعتی و الهه تاجیک ۶۸

• مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان / غلامرضا یاسی‌پور ۷۰

• مکان هندسی / محمدهاشم رستمی ۷۲

• جواب نامه‌ها/ ۷۵

• نقدوبررسی تستهای ریاضیات جدید کنکور۷۳/ بهروز نوذری ۷۸

• مسائل مسابقه‌ای / ۸۰

• مسائل برای حل / ۸۱

• حل مسائل مسابقه‌ای برهان / ۸۶

• حل مسائل برهان (۹)/ ۸۷

□ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، کوچه بهرام‌چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، ۵۲ ـ ۸۸۴۳۹۵۰، فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹

حرف ۱ اول

کشتی نشستگان

گروهی مسافر سوار کشتی شدند و هرکدام در جایگاه خود نشستند. پس از مدتی صدای کوبیده شدن چیزی به بدنهٔ کشتی، توجه مسافران را به خود جلب کرد. آنها دیدند مردی با تیشه‌ای کوچک در حال سوراخ کردن کشتی است. با تعجّب به او گفتند: «چه می‌کنی ای مرد؟» مرد با خونسردی سرش را بلند کرد و گفت: «اینجا جای من است و هر کاری که دلم بخواهد با آن می‌کنم.»

اگر دست مرد را بگیرند و مانع کار او شوند، هم خود را از هلاکت نجات می‌دهند و هم او را، ولی اگر او را رها کنند و بگویند: خُب راست می‌گوید جای خودش است و هرکس اختیار کار خود را دارد، هم او را و هم خود را به هلاکت می‌رسانند.

این داستان حکیمانه که از پیامبر عزیز اسلام حضرت محمد(ص) نقل شده است، به خوبی اهمیت امربه معروف و نهی از منکر در یک جامعه را نشان می‌دهد. زیرا سرنوشت جامعه و مردم مانند آن کشتی و مسافرانش، به نوعی با یکدیگر گره خورده است.

این مطلب آن‌قدر مهم است که شخصیت والا و بی‌همتایی همچون امام حسین علیه‌السلام، اساس حرکت و قیام خونبار خود را امربه‌معروف و نهی از منکر اعلام می‌کنند و جان خود و فرزندان و یاران باوفایشان را قربانی می‌کنند تا معروف شناخته شده، پایدار بماند و منکر نیز برمَلا و ریشه‌کن شود.

ما که هر سال و هرگاه مراسم عزای سیدالشهداء علیه‌السلام و دیگر معصومین(ع) را با جدیت و شور و شوق برپا می‌کنیم و اشک عشق و ارادت را از دیده جاری می‌سازیم، درواقع به این مطلب مهم اعتراف می‌کنیم که ما ناآشنا به رسالت عظیم امربه معروف و نهی از منکر نیستیم زیرا درحالی که جگر گوشهٔ پیامبر(ص) و عزیز دل علی(ع) و زهرا (س) و آقای جوانان اهل بهشت، برای امربه معروف و نهی از منکر از خون خود و عزیزانش می‌گذرند، ما که حداقل از دوستداران آن عزیزان هستیم، باید در این راه با جدیت گام برداریم؛ هر کجا زشتی و پلیدی دیدیم یا شنیدیم با تمام توان و به هرشکل که صلاح است، در مقابل آن بایستیم تا از بین برود و همواره از خودمان و نزدیکترین افراد به خودمان گرفته تا دورترین آدمها را دعوت به عقاید و اعمال خیر کنیم و اهل خیر و نیکیها را با جان و مال و زبان تشویق و حمایت کنیم.

اگر چنین باشیم، از مسافران کشتی حسین(ع) خواهیم بود که در دریای طوفانی و متلاطم آشوبها، با آرامش و اطمینان و به سرعت سرنشینانش را به ساحل نجات می‌رساند.

کشتی نشستگانیم ای باد شرطه برخیز — باشد که باز بینیم دیدار آشنا را

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۰)

پرویز شهریاری

نمونه کار در منزل و حل تمرینها

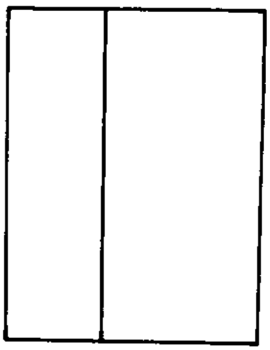
هدف توصیهٔ خاصی، برای نمونهٔ دفتر تمرینهای ریاضی شما نیست. هرکسی می‌تواند به سلیقهٔ خود، روشی را برای کار در منزل انتخاب کند. شکل دفتر یا شیوهٔ نوشتن شما، هیچ تأثیری در پیشرفت کار و رشد خلاقیت ذهنی شما ندارد. با وجود این، توصیه می‌کنم دفتر حل تمرینها را طوری تنظیم کنید که پاسخگوی این شرطها باشد:

۱) همهٔ تلاش ذهنی شما در آن منعکس شود؛ یعنی با مراجعهٔ دوباره به آن، بسادگی متوجه شوید چگونه اندیشیده‌اید؟ چرا نتوانسته‌اید به نتیجه برسید؟ چرا و در کجا اشتباه کرده‌اید؟ کوتاه سخن، بتوانید راه حل یا راه حلهای درست را با راه حل خودتان مقایسه کنید. این یکی از راههایی است که موجب رشد ذهن شما می‌شود و، به‌تدریج، درجهت درست می‌افتد. بنابراین، ضمن حل تمرینها، چیزی را حذف نکنید و از بین نبرید. اگر ضمن حل، به اشتباه خود پی بردید، دور عملهای نادرست (و نه روی آنها) را خط بکشید و راه حل تازه‌ای را که به ذهنتان رسیده است، به‌دنبال نوشته‌های قبلی خود بیاورید.

۲) در هر مسأله، جایی برای یادداشت نکته‌ها یا راه حلهای تازه‌ای که سر کلاس مطرح می‌شود و یا، ضمن مشورت با دوستتان، به آنها پی می‌برید، باز بگذارید.

۳) پیش از حل تمرینها، کوتاه شدهٔ درس را بنویسید (در همان دفتر تمرینها). دربارهٔ درس و مفهومهای آن بیندیشید. آیا نکته‌ای وجود دارد که نفهمیده‌اید؟ آیا دربارهٔ چیزی تردید دارید؟ تنها وقتی حل تمرینها را آغاز کنید که، دربارهٔ درس، هیچ اشکالی نداشته باشید. برای رفع اشکال درسی خود می‌توانید به کتاب (چه کتاب درسی یا کتابهای دیگر) مراجعه کنید، ولی چیزی را نفهمیده نقل نکنید. بویژه دربارهٔ مفهومها و استدلالها، تند رد نشوید. برای هر مفهوم یا هر نتیجه‌گیری، مثال یا مثالهایی پیدا کنید.

نمونهٔ دفتر کار را می‌توان به این ترتیب تنظیم کرد (دوباره تأکید می‌کنم، این، تنها یک توصیه است و شما می‌توانید راه دیگری را برای دفتر تمرینهای خود انتخاب کنید). هر صفحهٔ دفتر خود را به دو بخش نابرابر تقسیم کنید (به‌صورتی که در شکل می‌بینید)، به‌نحوی که بخش سمت راست دو برابر بخش سمت چپ باشد. کوتاه شدهٔ درس



و حل تمرینها را در بخش سمت راست بنویسید (مثلاً بامداد یا خودکار آبی) و بخش سمت چپ را خالی بگذارید. اگر مسأله‌ای را اشتباه حل کرده‌اید، اگر نتوانسته‌اید آن را حل کنید یا اگر بعدها، راه حل تازه و جالبی برای مسأله پیدا کردید، آن‌وقت، آن را با رنگ

دیگری (و مثلاً خودکار قرمز) در بخش سمت چپ یادداشت کنید. اگر دفتر تمرینهای ریاضی خود را به این صورت تنظیم کنید، دست‌کم دو فایدهٔ عمده دارد:

اوّل این که، هر وقت به آن مراجعه کنید، ضعف و قوت گذشتهٔ خود را به روشنی می‌بینید؛ درضمن، در می‌یابید تا چه اندازه پیش رفته‌اید و ذهن ریاضی شما تا چه حد شکوفاتر شده است. اگر هم، زمانی بخواهید ـ مثلاً برای امتحان ـ تمرینها را مرور کنید، دفتر شما مشخص می‌کند، در چه زمینه‌هایی و دربارهٔ چه مسأله‌هایی اشکال داشته‌اید و، درنتیجه، وقت خود را برای حل دوبارهٔ تمرینهایی که، به‌موقع خود، براحتی حل کرده‌اید، تلف نمی‌کنید.

دوم، اگر دبیر ریاضی شما، گاه‌به‌گاه دفترهای کار دانش‌آموزان را ورق بزند، می‌تواند به نقطه‌های ضعف کلاس (دز مجموع) پی ببرد و برای برطرف کردن آنها چاره‌ای بیندیشد.

بهتر است، با آوردن چند مثال، روش حل تمرینها و شیوهٔ یادداشت آنها در دفتر، روشن شود.

در این‌جا، سه مسأله، در سطحهای مختلف، مطرح شده است، چه بسا که خود مسأله‌ها هم، برای شما، جالب و آموزنده باشد، ولی نیّت اصلی از آوردن آنها در این‌جا، آشنا کردن شما با روش حل مسأله و نحوهٔ تلاش، برای دست یافتن به راه‌حل است. ذهن آدمی بسیار پیچیده است و، بسته به میزان تجربه‌ای که در کار حل مسأله‌های ریاضی دارد، می‌تواند در جهتهای گوناگون حرکت کند. بنابراین چه بسا، وقتی شما به یکی از این مسأله‌ها برخورد کنید، به‌دنبال روشها و راه حلهای دیگری بروید. این مهم نیست. مهم این است که گمان نکنید، وقتی با یک مسألهٔ تازه روبرو می‌شوید، باید بتوانید بلافاصله آن را حل کنید. هیچ کس چنین قدرتی ندارد و نمی‌تواند ادعا کند، از عهدهٔ حل فوری هر مسألهٔ تازه‌ای برمی‌آید. البته، هرچه تجربهٔ بیشتری داشته باشید، زودتر می‌توانید خودتان را از «بن‌بست» نجات دهید.

تنها باید از میدان در نروید و برای حل مسأله، راههای تازه و تازه‌تری را مورد آزمایش قرار دهید. بارها این مطلب را تکرار کرده‌ام: اگر تنها روی یک مسأله، ساعتها کار کنید، روشهای مختلف حل را مورد آزمایش قرار دهید و از سمتهای گوناگون به آن حمله کنید، ولو این که نتوانسته باشید آن را به نتیجهٔ کامل برسانید، برای شما بسیار مفیدتر از زمانی است که راه‌حل دهها مسأله را از روی تختهٔ سیاه وارد دفتر خود کنید یا با مراجعه به کتابهای حل مسأله، راه حلها را به‌خاطر بسپارید.

خیلی از جمله‌هایی را که، ضمن حل مسأله، در این‌جا می‌بینید، برای نوشتن لازم نیست، بیشتر آنها، چیزهایی است که از ذهن شما می‌گذرد، گرچه نوشتن آنها هم، زیانی به شما نمی‌رساند.

هرجا، ضمن حل مسأله، سه نقطه پشت سرهم می‌بینید (...)، به‌معنای این است که فکر می‌کنید.

اینک مسأله‌ها:

مسألهٔ ۱. باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$$A = ۱^{۱۹} + ۲^{۱۹} + ۳^{۱۹} + \dots + ۴۰^{۱۹}$$

را بر ۴۲ پیدا کنید.

حل. اوّل ببینیم، چه بخشی از این عددبر ۴۲ بخش‌پذیر است؟ $a^n + b^n$ (برای عدد طبیعی n) تنها وقتی بر $a + b$ بخش‌پذیر است که n، عددی‌فردباشد. ۱۹ عددی‌فرد است، بنابراین هریک از عددهای $۲^{۱۹}+۴۰^{۱۹}; ۳^{۱۹}+۳۹^{۱۹}; ۴^{۱۹}+۳۸^{۱۹}; \dots; ۲۰^{۱۹}+۲۲^{۱۹}$ بر ۴۲ بخش‌پذیر است. از عدد A، چه می‌ماند؟

$$۱ + ۲۱^{۱۹}$$

بنابراین، کافی است باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم $۲۱^{۱۹}$ را بر ۴۲ پیدا کنیم. اگر این باقی‌مانده برابر r باشد، آن‌وقت باقی مانده حاصل از تقسیم A بر ۴۲، برابر $r + ۱$ می‌شود.

برای پیدا کردن باقی ماندهٔ حاصل ضربی مثل abc برعددی طبیعی مثل m، باید باقی ماندهٔ تقسیم هریک از عاملهای ضرب بر m را پیدا کرد و، سپس، این باقی مانده‌ها را در هم ضرب کرد؛ و اگر این

حاصل‌ضرب از m بزرگتر باشد، دوباره باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم آن بر m را به‌دست آورد، داریم:

$$۲۱^{۱۹} = ۲۱ (۲۱^{۳})^{۶} = ۲۱ \times ۹۲۶۱^{۶}$$

باقی ماندهٔ تقسیم ۹۲۶۱ بر ۴۲ برابر است با ۲۱. پس باید باقی ماندهٔ تقسیم عدد

$$۲۱ \times ۲۱^{۶} = ۲۱ (۲۱^{۳})^{۲} = ۲۱ \times ۹۲۶۱^{۲}$$

و یا باقی ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد

$$۲۱ \times ۲۱^{۲} = ۲۱^{۳} = ۹۲۶۱$$

را بر ۴۲ به‌دست آورد که برابر ۲۱ می‌شود. یعنی از تقسیم A بر ۴۲، باقی مانده‌ای برابر ۲۲ به‌دست می‌آید.

ولی دقت کنم. آیا لازم بود ۲۱ را به‌توان ۳ برسانم؟ $۲۱^{۲}$ برابر ۴۴۱ است و در تقسیم ۴۴۱ بر ۴۲ به‌همان باقی‌ماندهٔ ۲۱ می‌رسیم؛ یعنی از تقسیم هر توانی از ۲۱ بر ۴۲، باقی مانده‌ای برابر ۲۱ به‌دست می‌آید.

چه‌قدر جالب بود؟ ضمن تقسیم توانی از یک عدد بر ۲ برابر آن عدد، خود عدد به‌عنوان باقی‌مانده به‌دست آمد. آیا همیشه این‌طور است؟ آیا مثلاً از تقسیم $۲^{۷}$ بر ۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ به‌دست می‌آید؟ $۲^{۷}$ برابر است با ۱۲۸ و ۱۲۸ بر ۴ بخش‌پذیر است. پس قانون، کلی‌نیست. ببینم، شاید باید پایه عدد فرد باشد! مثلاً $۸۱ = ۳^{۴}$ و در تقسیم ۸۱ بر ۶، باقی‌مانده برابر ۳ می‌شود ... ولی اگر این قانون، کلی باشد، باید بتوانیم آن را درحالت کلی ثابت کنیم. عدد فرد را $۲n + ۱$ می‌گیریم. داریم:

$$(۲n + ۱)^{۲} = ۴n^{۲} + ۴n + ۱ = n (۴n + ۲) + ۲n + ۱$$

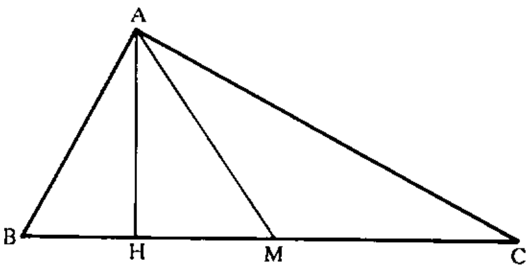
درست شد. از تقسیم $(۲n + ۱)^{۲}$ بر $۴n + ۲$ (یعنی دو برابر $۲n + ۱$)، باقی‌مانده برابر $۱ + ۲n$ شد. یک قانون کلی پیدا کردم:

هر توانی از یک عدد فرد را، بر دو برابر آن عدد فرد تقسیم کنیم، باقی مانده‌ای برابر همان عدد فرد به‌دست می‌آید.

و سر کلاس درس، دانش‌آموزی این‌طور استدلال می‌کند:
اگر مقسوم و مقسوم‌علیه (بخشی و بخشیاب) را بر عددی تقسیم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند، ولی باقی مانده، بر همان عدد تقسیم می‌شود. در تقسیم $۲۱^{۱۹}$ بر ۴۲، هر دو عدد را بر ۲۱ تقسیم می‌کنیم؛ باقی‌مانده تقسیم عدد فرد $۲۱^{۱۸}$ بر ۲ برابر است با ۱. پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲۱^{۱۹}$ بر ۴۲ برابر است با ۲۱×۱ یعنی ۲۱. همین استدلال را می‌توان در حالت کلی، برای تقسیم $(۲n + ۱)^{k}$ بر $۲(۲n + ۱)$ به‌کاربرد.

خیلی جالب بود. این استدلال، هم ساده‌تر است و هم قانع‌کننده‌تر ... خوب، عیبی ندارد. من هم، به هر حال، به‌نتیجهٔ درست رسیده بودم.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید، اگر از رأس A در مثلث غیر مشخص ABC، میانهٔ AM، نیمساز AD و ارتفاع AH را رسم کنیم، نیمساز AD همیشه بین ارتفاع AH و میانهٔ AM قرار می‌گیرد.

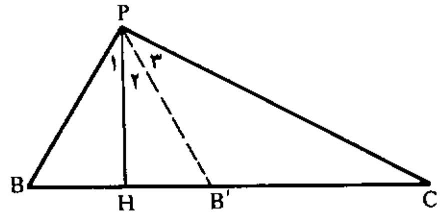


حل. در مثلث ABC، فرض می‌کنیم طول ضلع AB از طول ضلع AC کوچکتر باشد. در این‌صورت روشن است که نقطهٔ H به B نزدیکتراست تابه C (چون $|AB| < |AC|$ پس $|BH| < |HC|$). نقطهٔ M، پای میانه، درست در وسط ضلع BC قرار دارد. به این ترتیب، باید ثابت کنیم، نقطهٔ D، پای نیمساز، بین H و M قرار دارد. ولی چه‌طور؟

ظاهراً در این‌جا، بن‌بست است ... باید راه دیگری بیندیشیم [اگر از این قضیه اطلاع داشته باشیم که نیمساز داخلی هر زاویهٔ مثلث، ضلع روبرو را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند، می‌توانیم در این جا هم، خودمان را از بن‌بست خارج کنیم. ولی فرض را بر این می‌گیریم که از این قضیّه اطلاعی نداریم].

از طریق ضلع BC به‌نتیجه‌ای نرسیدیم. به سراغ زاویهٔ A برویم. نیمساز AD، زاویهٔ A را نصف می‌کند، یعنی زاویهٔ بین نیمساز AD به ضلع AB، با زاویهٔ بین همین نیمساز با ضلع AC برابر است. ببینیم ارتفاع AH چه وضعی دارد. طول HC از طول HB بیشتر است، پس اگر HB' را برابر HB جدا کنیم، نقطهٔ B' بین H و C قرار می‌گیرد. مثلث ABB' متساوی‌الساقین است و بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$؛ ولی زاویهٔ A_2 جزئی از زاویهٔ HAC است، یعنی:

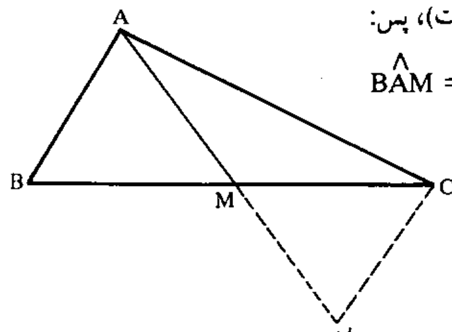
$$H\hat{A}B < H\hat{A}C$$



بله، درست است، با مقایسهٔ زاویه‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و AHC هم، می‌توانستیم به همین نتیجه برسیم. به این ترتیب، ارتفاع AH نسبت به نیمساز AD در سمت ضلع کوچکتر AB قرار دارد.

با میانه چه کنم؟ از مقایسهٔ زاویه‌های دو مثلث ABM و AMC به‌جایی نمی‌رسیم ... آهان، یادم آمد. دبیر هندسه توصیه کرده بود، بسیاری از مسأله‌های مربوط به میانه با ادامه دادن میانه به‌اندازهٔ خودش، حل می‌شوند. دو مثلث ABM و $MA'C$ با هم برابرند (واضح است)، پس:

$$B\hat{A}M = M\hat{A'}C$$



ولی در مثلث $AA'C$، طول ضلع AC از طول ضلع $A'C$ بیشتر است ($A'C$ طولی برابر طول AB دارد)، پس:

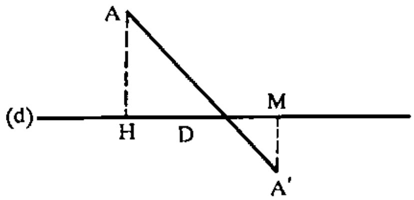
$$A\hat{A'}C > M\hat{A}C$$

که اگر به‌جای $A\hat{A'}C$، برابرش $B\hat{A}M$ را قرار دهیم:

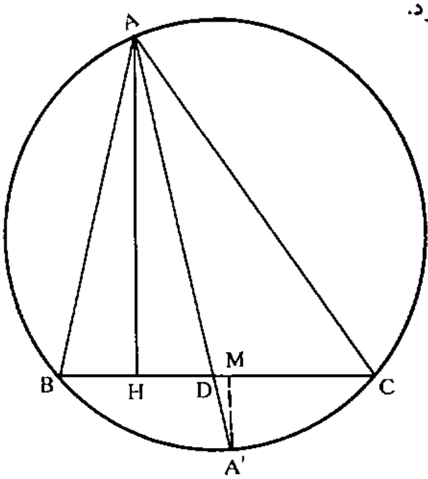
$$B\hat{A}M > M\hat{A}C$$

تمام شد. میانهٔ AM با ضلع بزرگتر، زاویهٔ کوچکتری می‌سازد، یعنی میانه AM نسبت به نیمساز AD، به ضلع بزرگتر نزدیکتر است. نیمساز AD، بین ارتفاع AH و میانهٔ AM واقع است.

و در کلاس درس، دانش‌آموزی، مسأله را این‌طور حل کرد.



اوّل توضیح داد: اگر پاره خط راست AA'، خط راست d را در نقطهٔ D قطع کرده باشد و از نقطه‌های A و A'، عمودهای AH و $A'M$ را بر (d) رسم کنیم، روشن است که D بین دو نقطهٔ H و M واقع می‌شود.



بعد برای حل مسأله، دایرهٔ محیطی مثلث را رسم کرد و نیمساز AD را ادامه داد تا دایره محیطی را در A' قطع کند. A' وسط کمان BC است بنابراین اگر از A' بر BC عمود کنیم، نقطهٔ M (پای عمود) در وسط ضلع BC قرار می‌گیرد، یعنی AM میانه مثلث است. طبق آن چه در ابتدا گفته شد، D بین M و H، یعنی نیمساز AD بین

ارتفاع AH و میانهٔ AM قرار دارد.

چه‌راه‌حل‌ساده و زیبایی؟ همه‌چیز باهم و در یک شکل ثابت شد.

مسألهٔ ۳. می‌دانیم سه جمله‌ای درجه دوم

$$f(x) = ax^{2} + bx + c$$

دست‌کم یک ریشهٔ درست دارد. a و b و c عددهایی حقیقی و k عددی طبیعی است. چند عدد طبیعی n می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی که f(n) بر k بخش‌پذیر باشد؟

حل. دبیر جبر توضیح داد، این مسأله ساده نیست و هرکسی نمی‌تواند آن را حل کند. کاش این حرف را نمی‌زد. اگر از دشوار بودن مسأله اطلاع نداشتم، با اطمینان بیشتری آغاز می‌کردم ... دست و دلم می‌لرزد. آیا می‌توانم مسأله را حل کنم؟ ... ولی نباید اعتماد به نفس را از دست بدهم. دشوار باشد. مگر کارهای دشوار را چه کسی باید انجام دهد؟ من هم یکی از آنها. شروع کنم ... ولی از کجا؟ ...

f(x) یک ریشهٔ درست دارد. آن را α می‌نامیم، یعنی $f(\alpha) = 0$.

پس α یکی از عددهای n است: صفر بر هر عددی بخش‌پذیر است ... نه، نشد! درصورت مسأله گفته شده، α عددی درست است، نه عددی طبیعی. ممکن است α عددی منفی باشد؛ تنها وقتی $n = \alpha$ یکی از جوابهای مسأله است که α، عددی درست و مثبت باشد، یعنی یک عدد طبیعی ...

فرض کنیم، m عددی طبیعی باشد که، به ازای آن، f(m) بر k بخش‌پذیر است:

$$f(m) = am^{2} + bm + c$$
$$f(\alpha) = a\alpha^{2} + b\alpha + c$$

α هر عددی باشد، $f(\alpha)$ بر k بخش‌پذیر است. پس باید:

$$f(m) - f(\alpha) = a(m^{2} - \alpha^{2}) + b(m - \alpha)$$

بر k بخش‌پذیر باشد. چون $m - \alpha$ در حالت کلی بر k بخش‌پذیر نیست، پس:

$$a(m + \alpha) + b$$

بر k بخش‌پذیر است ... خوب، بعد چی؟ ... نمی‌شود ادامه داد ...

بهتر است در حالتهای خاص امتحان کنم، شاید راهی برای حل مسأله در حالت کلی پیدا شود. اگر داشته باشیم:

$$f(x) = \sqrt{3}\,(x^{2} - 3x + 2)$$

وقتی n عددی طبیعی باشد، f(n) تنها به ازای $n = 1$ و $n = 2$ بر هر عدد طبیعی بخش‌پذیر است. برای هر عدد طبیعی دیگری، غیر از ۱ و ۲، مقدار داخل پرانتز عددی طبیعی و، درنتیجه، f(n) عددی گنگ می‌شود و بخش‌پذیری عدد گنگ بر عدد طبیعی، بی‌معنی است. این‌جا، مسأله دو جواب دارد: $n = 1$ و $n = 2$. ولی مثلاً برای:

$$f(x) = \sqrt{3}\,(x + 1)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

به ظاهر، مسأله جواب ندارد و برای

$$f(x) = \sqrt{5}\,(x^{2} - 4)$$

تنها $n = 2$ جواب مسأله است.

خوب است، ضریبهای a و b و c را گویا (یا درست) بگیرم. k را هم، عددی مشخص فرض کنم. ببینیم، مسألهٔ زیر را چگونه باید حل کرد:

عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که، برای سه جمله‌ای درجه دوم

$$f(x) = 2x^{2} - x - 1$$

عدد f(n) بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

عدد طبیعی x، در تقسیم بر ۵، به یکی از این باقی مانده‌ها می‌رسد:

$$0, 1, 2, 3, 4$$

ببینیم در هر یک از این‌حالتها، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $f(x)$ بر ۵ چه‌قدر است. جدولی تشکیل می‌دهیم. در ستون سمت چپ، عبارتی را می‌گذاریم (نسبت به x) و، در برابر آن، باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم این عبارت را بر ۵ قرار می‌دهیم.

x:	۰	۱	۲	۳	۴
$x^۲$:	۰	۱	۴	۴	۱
$۲x^۲$:	۰	۲	۳	۳	۲
$-x$:	۰	-۱	-۲	-۳	-۴
$f(x)$:	-۱	۰	۰	-۱	-۳

$f(x)$ در دو حالت بر ۵ بخش‌پذیر است: وقتی که باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم x بر ۵، برابر ۱ یا ۲ باشد، یعنی در این مسأله، n می‌تواند به یکی از این دوصورت باشد:

$n = ۵p + ۱$ یا $n = ۵p + ۲$

که در آنها، p عددی است درست و غیرمنفی. آزمایش کنم، نکند اشتباه کرده باشم.

$$n = ۵p + ۱ \Rightarrow f(n) = ۲(۵p + ۱)^۲ - (۵p + ۱) - ۱$$
$$= ۵۰p^۲ + ۲۰p + ۲ - ۵p - ۱ - ۱ = ۵(۱۰p^۲ + ۳p);$$
$$n = ۵p + ۲ \Rightarrow f(n) = ۲(۵p + ۲)^۲ - (۵p + ۲) - ۱$$
$$= ۵۰p^۲ + ۴۰p + ۸ - ۵p - ۲ - ۱ = ۵(۱۰p^۲ + ۷p + ۱)$$

بنابراین، در این مسأله، بی‌نهایت جواب برای n به‌دست می‌آید. پس مسأله می‌تواند جواب نداشته باشد، یک یا دو جواب داشته باشد و یا تعداد جوابها بی‌نهایت باشد.

ولی در حالت کلی، چه وضعی پیش می‌آید؟ ...

و دبیر جبر، مسأله را این‌طور حل می‌کند:

m را ریشهٔ درست $f(x)$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، به‌ازای دو عدد درست و مختلف p و q، غیر از m، $f(p)$ و $f(q)$ بر k بخش‌پذیر باشند. یعنی عددهای درست

$$am^۲ + bm + c = ۰\ ,\ ap^۲ + bp + c \in z\ ,\ aq^۲ + bq + c \in z$$

بر k بخش‌پذیرند. در این‌صورت خواهیم داشت:

$a(p^۲ - m^۲) + b(p - m) \in z$ و $a(q^۲ - m^۲) + b(q - m) \in z$

در نتیجه، $a(p + m) + b$ و $a(q + m) + b$ عددهایی گویا هستند و از آن‌جا باید داشته باشیم:

$$a(p - q) \in Q\ ,\ a \in Q\ ,\ b \in Q\ ,\ c = -am^۲ - bm \in Q$$

فرض می‌کنیم:
$$a = \frac{r}{s}\ ,\quad b = \frac{t}{u}\ ,\quad c = \frac{v}{w}$$
$$g(x) = suwf(x) = ruwx^۲ + tswx + suv$$

ضریبهای چندجمله‌ای $g(x)$، عددهایی درستند و به ازای هر $l \in z$ عدد

$$g(m + klsuw) = g(m + klsuw) - g(m)$$

بر عدد $klsuw$ بخش‌پذیر است. یعنی به ازای $n = m + klsuw$ $(l \in z)$، $g(n)$ بر $ksuw$ و، در این‌صورت، $f(n)$ بر kl، یعنی بر k بخش‌پذیر است.

بنابراین، اگر دو عدد $n \neq m$ وجود داشته باشد که، به‌ازای هریک از آنها، $f(n)$ بر k بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت تعداد این عددها بی‌نهایت است.

...

گمان می‌کنم نباید نگران باشم. باوجودی که مسأله دشوار بوده و راه حل ویژه‌ای، تا جاهایی پیش رفته بودم ولی باید سر فرصت، دربارهٔ این راه حل فکر کنم. هنوز بعضی نکته‌های مبهم برایم باقی مانده است. باوجود این معلوم شد، وقتی مسأله دارای بی‌نهایت جواب می‌تواند باشد که، ضریبهای a و b و c، عددهایی گویا باشند. در مثالی که، درحالت خاص، حل کرده بودم، ضریبها را عددهایی درست گرفته بودم، یعنی در مثال من

$$s = u = w = ۱$$

یعنی در آن مثال $n = m + klsuw$ به‌صورت $n = m + ۵l$ در می‌آید و چون m، یعنی ریشه‌های درست معادله، برابر ۱ و ۲ بود، جوابها به‌صورت $n = ۵l + ۱$ و $n = ۵l + ۲$ $(l \in Z)$ درآمد

... ولی همان‌طور که گفتم، باید دربارهٔ این راه حل و استدلالهای آن بیشتر فکر کنم. مسألهٔ جالبی بود.

تا بعد

خطوط مجانب

● احمد قندهاری

۱ـ شاخهٔ بی‌نهایت منحنی: می‌گوییم منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ دارای شاخه بی‌نهایت است هرگاه، نقطه یا نقاطی روی منحنی وجودداشته باشد که لااقل یکی از مختصات آن به سمت بی‌نهایت میل کند.

مثال (۱): منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{۲x - ۱}{x - ۵}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} \text{حد } \frac{۲x - ۱}{x - ۵} = ۲ \\ x \to \pm \infty \end{cases}$$

مثال (۲): منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{x^۲ - ۴x}{x - ۱}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} x \to ۱ \\ y \to \pm \infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to \pm \infty \end{cases}$$

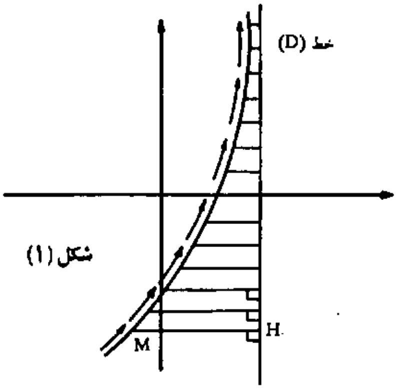
مثال (۳): منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{۴x + ۱}{x - ۴}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} x \to ۴ \\ y \to \pm \infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to \pm \infty \\ y \to ۴ \end{cases}$$

مثال (۴): منحنی‌نمایش‌تابع به‌معادلهٔ $y = \sqrt{۴ - x^۲}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت نیست. زیرا: $D_f = [-۲ , ۲]$

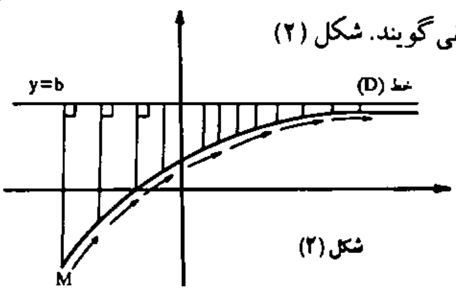
۲ ـ تعریف خط مجانب: هرگاه منحنی (C) نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت باشد، خط (D) را مجانب آن شاخه منحنیٔ گوییم. در صورتی که فاصله نقطهٔ متغیر M روی آن شاخه تا آن خط، وقتی نقطه M روی آن شاخه بی‌نهایت دور شود به سمت صفر میل کند.

تذکر: اگر خط مجانب موازی محور عرضها باشد؛ در اصطلاح آن را مجانب قائم گویند. شکل (۱)



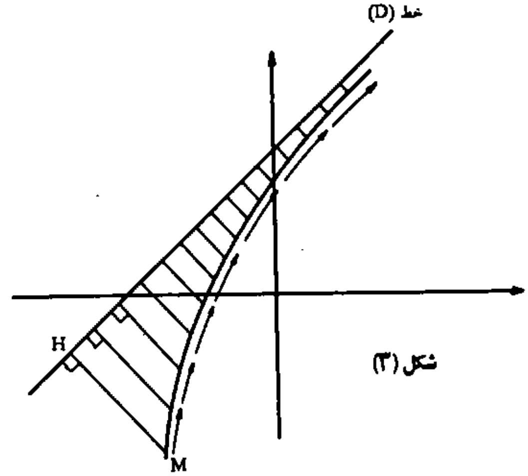
شکل (۱)

اگر خط مجانب موازی محور طولها باشد، در اصطلاح آن را مجانب افقی گویند. شکل (۲)



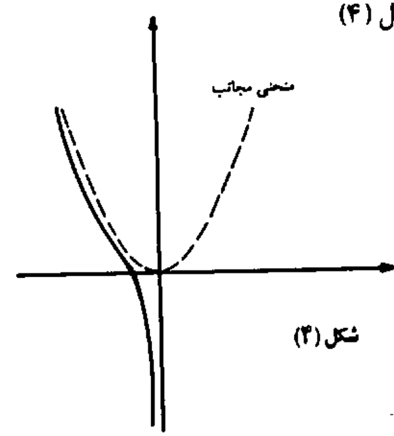
شکل (۲)

اگر خط مجانب محورهای مختصات را قطع کند، دراصطلاح آن را مجانب مایل گویند. شکل (۳)



شکل (۳)

ممکن است مجانب منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$، خودش یک منحنی باشد که در آن صورت در اصطلاح آن‌را منحنی مجانب گویند. شکل (۴)



شکل (۴)

۳ـ خط مجانب قائم

قضیه I: اگر درتابع به معادلهٔ $y = f(x)$، حدّ چپ یا حدّ راست یا حدّ تابع وقتی که x به سمت a میل می‌کند، برابر $(+\infty)$ یا $(-\infty)$ شود. در این صورت خطِ D به معادلهٔ $\boxed{x = a}$ را مجانب قائم منحنی تابع به‌معادله $y = f(x)$ گویند. (اثبات درکتاب جبر و آنالیز سال چهارم مبحث مجانبها هست.)

مثال ۱: منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{۴}{\sqrt{x - ۲}}$ دارای مجانب‌قائمی‌به‌معادلهٔ $\boxed{x = ۲}$ است‌زیرا: $x \to ۲^{+} \Rightarrow y \to +\infty$

مثال ۲: منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{۵x + ۴}{\sqrt{-x}}$ دارای مجانب‌قائمی‌به‌معادلهٔ $\boxed{x = ۰}$ است زیرا: $x \to ۰^{-} \Rightarrow y \to +\infty$

مثال ۳: منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{-x^{۲} - ۱}{(x - ۱)^{۲}}$ دارای مجانب قائمی به معادلهٔ $\boxed{x = ۱}$ است زیرا: $x \to ۱ \Rightarrow y \to -\infty$

نکته: اگر $x = a$ مجانب قائم منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد، آنگاه $x = a$ عضو دامنهٔ تعریف تابع نیست ولی لااقل یکی از دو مقدار $a + \varepsilon$ یا $a - \varepsilon$ باید عضو دامنه تعریف تابع باشد.

سؤال: آیا تابع به‌معادلهٔ $y = \dfrac{|x - ۲|}{x - ۲}$ خط مجانب قائم دارد؟

جواب: خیر، زیرا:

اگر $x \to ۲^{+} \Rightarrow y \to ۱$

اگر $x \to ۲^{-} \Rightarrow y \to -۱$

مثال (۴): آیا منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{\sqrt{x^{۲} - ۱}}{x}$ خط مجانب قائم دارد؟

جواب: خیر، زیرا: دامنهٔ تابع برابر است با:

$(-\infty , -۱] \cup [۱ , +\infty)$

و جواب مخرج $\boxed{x = ۰}$ است و هیچ‌یک از دو مقدار ۰^{+} یا ۰^{-} عضو دامنهٔ تابع نیست.

مسأله (۱): m را چنان بیابید تا منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{x^{۲} + ۱}{x^{۲} + mx + ۴}$ فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: باید معادلهٔ $x^{۲} + mx + ۴ = ۰$ فقط یک ریشه حقیقی

داشته باشد. پس لازم است $\Delta = 0$.

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \pm 4}$$

یعنی هریک از توابع به معادلات $y_1 = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4x + 4}$ و $y_2 = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 4}$ فقط یک مجانب قائم دارد.

مسأله (۲): m راچنان بیابید تا منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x - 1}{x^2 + mx - 4}$ فقط یک مجانب قائم داشته‌باشد.

حل: راه‌حل مسأله (۱) درحل این مسأله مقدور نیست زیرا دلتای معادلهٔ $x^2 + mx - 4 = 0$ همواره مثبت است $(\Delta = m^2 + 16 > 0)$.

برای حل این مسأله باید جواب معادله صورت $x - 1 = 0$ را در مخرج قرار بدهیم.

$$x = 1 \Rightarrow x^2 + mx - 4 = 0 \Rightarrow 1 + m - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

وضع جدید تابع به‌صورت: $y = \frac{x - 1}{x^2 + 3x - 4}$ است.

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

اگر $x \to 1 \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\frac{x - 1}{(x - 1)(x + 4)} =$ حد $\frac{1}{x + 4} = \frac{1}{5}$

اگر $x \to -4 \Rightarrow y \Rightarrow \pm\infty$

پس منحنی این تابع فقط یک مجانب قائم به‌معادلهٔ $\boxed{x = -4}$ دارد.

مسأله (۳): در تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^2 + x + 1}{mx^2 + (m + n)x + mn}$، m و n را چنان بیابید تا خطوط $x = 10$ و $x = 100$ معادلات مجانبهای قائم منحنی تابع باشد.

حل: ریشه‌های معادله $mx^2 + (m + n)x + mn = 0$ اعداد (۱۰) و (۱۰۰) است پس:

$$x' . x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow 1000 = \frac{mn}{m} \Rightarrow \boxed{n = 1000}$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \Rightarrow 110 = -\frac{m + n}{m} \Rightarrow 110 = -\frac{m + 1000}{m}$$

$$\Rightarrow 111m = -1000 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1000}{111}}$$

مسأله (۴): معادلات مجانبهای قائم منحنی مکان هندسی نقطهٔ M $\left| \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{t} \\ y = \frac{t}{t^2 - 2} \end{array} \right.$ را وقتی t تغییر می‌کند بیابید.

$$y \to \infty \Rightarrow \frac{t}{t^2 - 2} \to \infty \Rightarrow t^2 - 2 \Rightarrow 0 \Rightarrow$$

$t \to \sqrt{2} \Rightarrow$ حد $x = 1$

$t \to -\sqrt{2} \Rightarrow$ حد $x = -1$

بنابراین خطوط $x = 1$ و $x = -1$ معادلات مجانبهای قائم است.

مسأله (۵): معادلات مجانبهای قائم منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$ را در فاصله $[0 , 2\pi]$ بیابید.

حل:

$$y = \frac{2 \sin x \cos x}{4 \cos^3 x - 3 \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x (4 \cos^2 x - 3)}$$

$$y \to \infty \Rightarrow 4 \cos^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الف) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}}$$

ب) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$

$$x = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

پس خطوط $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{11\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ و $x = \frac{7\pi}{6}$ معادلات مجانبهاست.

تذکر مهم: اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، a به سمت صفر میل کند، آنگاه قدر مطلق یک ریشه به سمت ∞ میل می‌کند و ریشه دیگر به سمت $(-\frac{c}{b})$ میل می‌کند. چنانچه، a و b هر دو به سمت صفر میل کند، آنگاه قدر مطلق هر دو ریشه به سمت ∞ میل می‌کند.

اثبات: $x = \frac{1}{y}$: فرض می‌شود $\Rightarrow \frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0$

$$\Rightarrow cy^2 + by + a = 0$$

اگر $a \to 0 \Rightarrow cy^2 + by \to 0 \Rightarrow y(cy + b) \Rightarrow 0$

$$\Rightarrow y \to 0 , y \to -\frac{b}{c}$$

$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} y \to 0 \Rightarrow & \boxed{|x'| \to \infty} \\ y \to -\frac{b}{c} \Rightarrow & \boxed{x'' \to -\frac{c}{b}} \end{cases}$$

اگر $a \to 0 \Rightarrow \begin{cases} |x'| \to \infty \\ x'' \to -\frac{c}{b} \end{cases}$

اگر $a , b \to 0 \Rightarrow \begin{cases} |x'| \to \infty \\ |x''| \to \infty \end{cases}$

مسأله (٦): معادلات مجانبهای قائم منحنی به معادله $x^2y^2 - 4yx - 4x^2 + 5x - y^2 = 0$ را بیابید.

حل: $(x^2 - 1)y^2 - 4yx + (5x - 4x^2) = 0$

$$y \to \infty \Rightarrow a \to 0 \Rightarrow x^2 - 1 \to 0 \Rightarrow x \to \pm 1$$

پس خطوط $x = 1$ و $x = -1$ معادلات مجانبهای قائم منحنی فوق است.

قضیهٔ II: اگر در یک تابع، $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ یا $x \to \pm\infty$، آنگاه حدّ تابع برابر عدد (b) شود، خطّ $y = b$ را مجانب افقی منحنی گویند. (اثبات درکتاب سال چهارم مبحث مجانبهاهست).

مثال: معادلات مجانبهای افقی هریک از توابع به‌معادلات زیر را بیابید:

الف) $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \text{حد}\, y = \text{حدّ} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\boxed{y = \frac{1}{2}}$ معادلهٔ مجانب افقی

ب) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 4x}$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \text{حد}\, y = \text{حد} \frac{x}{x^2} = \text{حدّ} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} \to 0 \Rightarrow$$

$\boxed{y = 0}$ معادلهٔ مجانب افقی

نتیجه: یک تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که یا صورت و مخرج همدرجه باشند یا درجه مخرج بیشتر باشد.

هم ارزی رادیکالها

$$\sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \ldots} \sim \pm \sqrt[p]{a}\left(x + \frac{b}{ap}\right) \quad (\text{زوج } p)$$

$$x \to \pm \infty$$

اگر p فرد باشد سمت راست $(\pm)$ لازم نیست.

اثبات: طرفین را به توان p می‌رسانیم:

$$\Rightarrow ax^p + bx^{p-1} + \ldots \sim a\left(x + \frac{b}{ap}\right)^p$$

$$\Rightarrow ax^p + bx^{p-1} + \dots \sim a(x^p + \frac{pb}{ap}x^{p-1} + \dots)$$

$$\Rightarrow ax^p + bx^{p-1} + \dots \sim ax^p + bx^{p-1} + \dots$$

مثال (۱):

$$\sqrt[4]{16x^4+64x^3+1} \sim \pm\sqrt[4]{16}\left(x+\frac{64}{4\times16}\right) = \pm 2(x+1)$$
$$x \to \pm\infty$$

مثال (۲):

$$\sqrt[3]{8x^3-48x^2+5} \sim \sqrt[3]{8}\left(x+\frac{-48}{3\times8}\right) = 2(x-2)$$
$$x \to \pm\infty$$

مثال (۳):

$$\sqrt{4x^2-24x+2} \sim \pm\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{2\times4}\right) = \pm 2(x-3)$$
$$x \to \pm\infty$$

مسألهٔ (۷): معادلات مجانبهای افقی منحنی تابع به معادلهٔ $y = \text{Arc}\cos\frac{x+\sqrt{x^2-2x}}{2x+1}$ را بیابید.

الف) $x \to +\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\text{Arc}\cos\frac{x+(x-1)}{2x+1}$

$= $ حد $\text{Arc}\cos\frac{2x-1}{2x+1} = \text{Arc}\cos 1 = 0$

پس خط $\boxed{y = 0}$ معادلهٔ مجانب افقی است.

ب) $x \to -\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حدّ $\text{Arc}\cos\frac{x-(x-1)}{2x+1}$

$= $ حدّ $\text{Arc}\cos\frac{1}{2x+1} = \text{Arc}\cos = \frac{\pi}{2}$

پس خط $\boxed{y = \frac{\pi}{2}}$ هم معادلهٔ مجانب افقی است.

مسأله (۸): معادلات مجانبهای افقی منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{2x+\sqrt{4x^2-24x+1}}{\sqrt{x^2-2x}+x}$ را بیابید.

حل:

الف) $x \to +\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حدّ $\frac{2x+\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{8}\right)}{+\left(x-\frac{2}{2}\right)+x}$

$= $ حد $\frac{4x-6}{2x-1} = 2$

پس خط $\boxed{y = 2}$ معادله مجانب افقی است.

ب) $x \to -\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\frac{2x-\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{8}\right)}{-\left(x-\frac{2}{2}\right)+x} = \frac{6}{1} = 6$

پس خط $\boxed{y = 6}$ معادله مجانب افقی است.

مسأله (۹): اگر خط $y = 2$ معادلهٔ مجانب افقی منحنی تابع به معادله $y = \frac{(a-2)x^3+(b-a)x^2+cx-1}{4x+1}$ باشد، a، b و c را بیابید.

حل: منحنی این تابع وقتی مجانب افقی دارد که درجه صورت از درجهٔ مخرج بیشتر نباشد پس باید ضرایب x^2 و x^3 مساوی صفر باشد.

$$\Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$b - a = 0 \Rightarrow b = a \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$\Rightarrow$ وضع جدید تابع: $y = \frac{cx-1}{4x+1}$

معادلهٔ مجانب افقی: $x \to \pm\infty \Rightarrow$ حد $y = \frac{c}{4}$

$$\Rightarrow \frac{c}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

مسأله (۱۰): معادلات مجانبهای افقی منحنی مکان نقطهٔ $M\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{t^{۳}}{t^{۲} - ۴} \\ y = \dfrac{۸}{t}\end{array}\right.$ را بیابید.

حل:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{t^{۳}}{t^{۲} - ۴} \to \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} t \to ۲ \Rightarrow \text{حدّ } y = ۴ \\ t \to -۲ \Rightarrow \text{حدّ } y = -۴ \\ t \to \infty \Rightarrow \text{حدّ } y = ۰ \end{cases}$$

پس خطوط $y = ۴$ و $y = -۴$ و $y = ۰$ معادلات مجانبهای افقی است.

توجه: به‌جای آنکه بنویسیم $x \to +\infty$ و $x \Rightarrow -\infty$ می‌توان نوشت: $x \Rightarrow \infty$.

مسأله (۱۱): معادلات مجانبهای افقی منحنی به معادلهٔ $(y^{۲} - ۴)x^{۲} - ۵yx - ۱ = ۰$ را بیابید.

حل: $x \to \infty \Rightarrow a \to ۰ \Rightarrow y^{۲} - ۴ \to ۰ \Rightarrow y \to \pm ۲$

پس خطوط $y = ۲$ و $y = -۲$ معادلات مجانبهای افقی است.

مسأله (۱۲): درتابع به‌معادله $y = ax + b + \sqrt{۴x^{۲} - ۴۸x + ۵}$ وقتی $x \to +\infty$، خط $y = ۲$ معادله مجانب افقی است، a و b را بیابید.

$$x \to +\infty \Rightarrow \text{حد } y = \text{حد}\left[ax + b + \sqrt{۴}\left(x + \frac{-۴۸}{۸}\right)\right]$$

$$= \text{حد}\left[(a + ۲)x + (b - ۱۲)\right] \equiv ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + ۲ = ۰ \\ b - ۱۲ = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = -۲} \\ \boxed{b = ۱۴} \end{cases}$$

۳ـ مجانب مایل

اگر درتابع به معادلهٔ $y = f(x)$ وقتی $x \to \infty$ آنگاه $y \to \infty$ می‌گوییم ممکن است منحنی تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ دارای مجانب مایلی به‌معادلهٔ $y = mx + h$ باشد.

شرط $\begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases}$ برای وجود معادلهٔ مجانب مایل در یک تابع، شرط لازم است و کافی نیست.

قضیّهٔ III: اگر خط (D) به معادلهٔ $Y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد داریم:

$$\begin{cases} \text{حد } (y - Y) = ۰ \\ x \to + \text{یا} - \infty \end{cases}$$

عکس قضیّهٔ III: هرگاه تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ و خطِ (D) به معادله $Y = mx + h$ راداشته‌باشیم‌به‌طوری‌که $\underset{x \to + \text{یا} - \infty}{\text{حدّ}} (y - Y) = ۰$ آنگاه خط (D) مجانب مایل منحنی است.

(اثبات هردو قضیه در کتاب سال چهارم هست.)

روشهای تعیین معادلهٔ مجانب مایل

روش اوّل: (روش حد):

فرض می‌کنیم خط (D) به معادلهٔ $Y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی تابع به‌معادله $y = f(x)$ باشد. در این صورت داریم:

$$mx = Y - h$$

$$\Rightarrow m = \frac{Y}{x} - \frac{h}{x}$$

چون شرط لازم مجانب آن است که $x \to \infty$ و $y \to \infty$ پس:

$$m = \underset{x \to \infty}{\text{حد}}\left(\frac{Y}{x} - \frac{h}{x}\right)$$

وقتی $x \to \infty$ عبارت $\frac{h}{x}$ به سمت صفر میل می‌کند. پس:

$$\boxed{m = \underset{x \to \infty}{\text{حدّ}} \frac{y}{x}} \qquad \text{زیرا:} \qquad \begin{cases} \text{حدّ } (y - Y) = ۰ \\ x \to \infty \end{cases}$$

$$\boxed{m = \lim_{x \Rightarrow \infty} \frac{Y}{x}}$$ یا

نوع ابهام فوق $\frac{\infty}{\infty}$ است که پس از رفع ابهام مقدار m به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب: $Y = mx + h \Rightarrow h = (Y - mx)$

$$\Rightarrow \left\{ h = \lim_{x \to \infty} (Y - mx) \right. \quad \text{یا} \quad \boxed{h = \lim_{x \to \infty} (y - mx)}$$

ابهام این حدّ $(\infty - , \infty +)$ است که پس از رفع ابهام مقدار h به‌دست می‌آید.

مثال: معادله مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

$$h = \lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-5x + 1}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-5x}{x} = -5 \Rightarrow \boxed{h = -5}$$

معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی: $\Rightarrow \boxed{y = x - 5}$

توجه:

۱) اگر $m = 0$ و h حدّ معینی داشته باشد، می‌گوییم خط مجانب مایل به خط مجانب افقی تبدیل شده است.

۲) اگر m یک عدد حقیقی باشد و حدّ (h) بی‌نهایت شود بنا به تعریف می‌گوییم منحنی دارای شاخهٔ سهمی شکل در امتداد خطّ D به ضریب زاویه (m) است.

مثال: در تابع به معادلهٔ $y = 2x + \sqrt{x + 2}$ داریم:

$$x \to +\infty \Rightarrow y \Rightarrow +\infty$$

$$\left\{ m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \sqrt{x + 2}}{x} \right.$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$\left\{ h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} (2x + \sqrt{x + 2} - 2x) \right.$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + 2} = +\infty$$

بنابه شماره (۲)، منحنی دارای شاخه سهمی شکل در راستای خط $y = 2x$ است.

۳) اگر m یک عدد حقیقی باشد و (h) حدّ معینی نداشته باشد، در این صورت می‌گوییم منحنی در راستای $y = mx$ به بی‌نهایت می‌رود ولی دارای شاخهٔ سهمی مانند نیست.

مثال: در تابع به معادلهٔ $y = 2x + \cos x$ داریم:

$$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + \cos x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\to \boxed{m = 2}$$

$$h = \lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} (2x + \cos x - 2x) = \lim_{x \to \infty} \cos x$$

حدّ $(\cos x)$ وقتی $x \to \infty$ عددی است نامشخص درفاصلهٔ [۱ و ۱−] پس h حدّ معینی ندارد.

۴) اگر حدّ (m)، بی‌نهایت شود، منحنی شاخه سهمی مانند در امتداد محور yها دارد.

مثال: در تابع $y = x^۲ + ۱$ داریم:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲+۱}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{x} = \pm\infty$$

مسأله ۱۳: معادله مجانب مایل منحنی مکان نقطهٔ $M \begin{cases} x = \dfrac{t+۲}{t(t-۱)} \\ y = \dfrac{t+۳}{t(t^۲+۱)} \end{cases}$ را بیابید.

حل: اوّل باید (t) ای پیدا کرد تا هم x و هم y را به سمت ∞ میل دهد و آن وقتی است که $t \to ۰$ پس:

$$t \to ۰ \Rightarrow \begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases}$$

فرض می‌کنیم خط $y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی فوق باشد.

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to ۰}\frac{\frac{t+۳}{t(t^۲+۱)}}{\frac{t+۲}{t(t-۱)}} = \lim_{t\to ۰}\frac{t(t-۱)(t+۳)}{t(t+۲)(t^۲+۱)}$$

$$= \lim_{t\to ۰}\frac{(t-۱)(t+۳)}{(t+۲)(t^۲+۱)} = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{۳}{۲}}$$

$$h = \lim_{x\to\infty}(y - mx) = \lim_{t\to ۰}\left(\frac{t+۳}{t(t^۲+۱)} + \frac{۳}{۲}\times\frac{t+۲}{t(t-۱)}\right)$$

$$= \lim_{t\to ۰}\frac{۲(t-۱)(t+۳) - ۳(t+۲)(t^۲+۱)}{۲t(t-۱)(t^۲+۱)}$$

$$= \lim_{t\to ۰}\frac{-۳t^۳ - ۴t^۲ + t}{۲t(t-۱)(t^۲+۱)} = \lim_{t\to ۰}\frac{t(-۳t^۲ - ۴t + ۱)}{۲t(t^۲+۱)(t-۱)}$$

$$= \lim_{t\to ۰}\frac{-۳t^۲ - ۴t + ۱}{۲(t^۲+۱)(t-۱)} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{h = -\frac{۱}{۲}}$$

معادله مجانب: $\Rightarrow \boxed{y = -\frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲}}$

تذکر: اگر در تابع به‌معادلهٔ $y = ax + b + \dfrac{h(x)}{g(x)}$، درجه h(x)، کمتر از درجه g(x) باشد، خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق گوییم.

روش دوّم؛ روش تقسیم: اگر در تابع $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$، درجه f(x) یک واحد از درجه g(x) بیشتر باشد و خارج قسمت f(x) بر g(x) به‌صورت (ax + b) باشد، خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق گوییم. بنابراین در این روش صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می‌کنیم اگر خارج قسمت به فرم (ax + b) باشد، خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع گوییم.

مثال: معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۲ - ۷x - ۱ & x - ۱ \\ \hline -۶ & ۲x - ۵ \end{array} \Rightarrow y = ۲x - ۵ + \frac{-۶}{x-۱}$$

باتوجه به تذکر فوق درنتیجه خط $\boxed{y = ۲x - ۵}$ معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق است.

مسأله ۱۴: در تابع $y = \dfrac{ax^۲ + bx + ۵}{x + ۱}$، a و b را چنان بیابید تا خط $y = ۲x + ۳$ معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد.

حل:

$$\begin{array}{l|l} ax^۲ + bx + ۵ & x + ۱ \\ \hline a - b + ۵ & ax + (b - a) \end{array}$$

معادلهٔ مجانب مایل است. $\Rightarrow y = ax + (b - a)$

معادلهٔ مجانب مایل منحنی $y = ۲x + ۳$

$$\Rightarrow \boxed{a = ۲} \text{ و } b - a = ۳ \Rightarrow \boxed{b = ۵}$$

سؤال: آیا منحنی تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{x\sqrt{x} + ۴}{\sqrt{x} + ۱}$ خط مجانب مایل دارد؟

جواب: خیر، زیرا: اگر صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم کنیم خارج قسمت به‌فرم $(ax + b)$ نمی‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} x\sqrt{x} + ۴ & \sqrt{x} + ۱ \\ \hline ۳ & x - \sqrt{x} + ۱ \end{array}$$

به‌طوری که ملاحظه می‌شود: $y_۱ = x - \sqrt{x} + ۱$ است که معادله مجانب مایل نیست.

پس نمودار $y_۱ = x - \sqrt{x} + ۱$ چیست؟ و نسبت به منحنی چه نام دارد؟

جواب: نمودار تابع $y_۱ = x - \sqrt{x} + ۱$ یک نیم سهمی است و مجانب منحنی تابع (y) است و آن را منحنی مجانب تابع y گویم.

تذکر: اگر در تابع به معادله $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ درجه f بیش از یک واحد از درجه g(x) بیشتر باشد، مجانب مایل منحنی تابع y به منحنی تبدیل می‌شود.

ممکن است درجه f(x) فقط یک واحد از درجه g(x) بیشتر باشد ولی خارج قسمت f(x) بر g(x) به‌فرم $(ax + b)$ نباشد. (مانند سؤال قبل) می‌گوییم مجانب مایل به منحنی تبدیل شده است.

روش سوّم: روش تقاطع

فرض می‌کنیم خط $y_۱ = ax + b$ معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد. معادلهٔ این خط را با معادلهٔ منحنی تقاطع می‌دهیم (y ها حذف). معادلهٔ تقاطع حاصل را برحسب x مرتب می‌نویسیم، چون خط $y_۱$ بر منحنی y در بی‌نهایت مماس است، بنابراین معادلهٔ تقاطع باید ریشه مضاعف (∞) داشته باشد. بنابراین باید دو ضریب متوالی از بزرگترین درجات معادلهٔ تقاطع حاصل را مساوی صفر قراردهیم. از آن‌جا a و b به‌دست می‌آید.

تذکر مهم: اگر از این روش در توابع رادیکالی باعدد فرجه زوج استفاده کنیم، مجانبهای مایلی که بدین روش به‌دست می‌آید وقتی قابل قبول است که حدّاقل یک دسته از بی‌نهایتهای تابع و متغیر (شرط لازم مجانب مایل) در آن صدق کند. (به‌مسألهٔ ۱۵ دقت کنید.)

مسألهٔ: معادلهٔ مجانب مایل منحنی به معادلهٔ $y = \frac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱}$ را به‌طریقهٔ تقاطع بیابید.

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$$

حل: فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادله مجانب مایل باشد.

$$\begin{cases} y = \frac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱} \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow \frac{ax + b}{۱} = \frac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱}$$

$$\Rightarrow (a - ۲)x^۲ + (b - a + ۷)x + (۱ - b) = ۰$$

$$\begin{cases} a - ۲ = ۰ \\ b - a + ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۵ \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = ۲x - ۵}$$

معادلهٔ مجانب مایل:

مسأله ۱۵: معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = x\sqrt{\frac{x - ۲}{x + ۲}}$ را بیابید.

حل: شرط لازم‌مجانب‌مایل: $\begin{cases} x \to -\infty \\ y \to -\infty \end{cases}$ $\begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$

فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادله مجانب مایل باشد.

$$\begin{cases} y = x\sqrt{\dfrac{x-۲}{x+۲}} \\ y = ax+b \end{cases} \Rightarrow ax+b = x\sqrt{\dfrac{x-۲}{x+۲}}$$

$$\Rightarrow a^۲x^۲ + ۲abx + b^۲ = \frac{x^۲(x-۲)}{x+۲}$$

$$\Rightarrow (a^۲-۱)x^۳+(۲a^۲+۲ab+۲)x^۲+(۴ab+b^۲)x+۲b^۲=۰$$

$$\begin{cases} a^۲-۱=۰ \\ ۲a^۲+۲ab+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow a=\pm۱$$

۱- اگر $a=۱ \Rightarrow ۲b+۴=۰ \Rightarrow b=-۲ \Rightarrow \boxed{y=x-۲}$

۲- اگر $a=-۱ \Rightarrow -۲b+۴=۰ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow \boxed{y=-x+۲}$ غ ق ق

زیرا هیچ دسته از بی‌نهایتهای شرط لازم مجانب مایل در آن صدق نمی‌کند. پس فقط $\boxed{y=x-۲}$ معادله‌مجانب‌مایل منحنی تابع فوق است.

روش چهارم: (هم ارزی رادیکالها)

به کمک هم‌ارزی رادیکالها، مجانبهای افقی و مایل بسیاری از توابع به دست می‌آید.

مثال (۱): معادلات مجانبهای منحنی تابع به معادلهٔ $y=۲x-۱+\sqrt{۴x^۲+۸x-۱}$ را بیابید.

$$x\to+\infty \Rightarrow \text{حد}\,y=\text{حد}[۲x-۱+۲(x+\frac{۸}{۸})] \Rightarrow \boxed{y=۴x+۱}$$

معادلهٔ مجانب مایل

$$x\to-\infty \Rightarrow \text{حد}\,y=\text{حد}[۲x-۱-۲(x+\frac{۸}{۸})] \Rightarrow \boxed{y=-۳}$$

معادلهٔ مجانب افقی

مثال (۲): معادلات مجانبهای تابع به معادله $y=۴x+۱-\sqrt{x^۲-۶x+۱}$ را بیابید.

حل: معادله مجانب مایل:

$$x\to+\infty \Rightarrow \text{حد}\,y=\text{حد}[۴x+۱-(x-۳)] \Rightarrow y=۳x+۴$$

معادله مجانب مایل:

$$x\to-\infty \Rightarrow \text{حد}\,y=\text{حد}[۴x+۱+(x-۳)] \Rightarrow y=۵x+۲$$

روش پنجم: روش ترکیبی تقسیم و هم ارزی رادیکالها

به‌کمک این روش هم مجانبهای مایل بعضی از توابع به دست می‌آید.

مثال: معادلات مجانبهای منحنی تابع به معادلهٔ $y=\sqrt{\dfrac{x^۳-۱}{x-۲}}$ را بیابید.

معادلهٔ مجانب قائم: $y\to+\infty \Rightarrow x-۲\Rightarrow ۰ \Rightarrow \boxed{x=۲}$

شرط لازم مجانب مایل: $x\to\pm\infty \Rightarrow y\to+\infty$

$$x^۳-۱ \div (x-۲) = x^۲+۲x+۴,\quad \text{باقیمانده } ۷$$

$$y=\sqrt{\frac{x^۳-۱}{x-۲}}=\sqrt{x^۲+۲x+۴+\frac{۷}{x-۲}}$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow \text{حد}\,y=\text{حد}\pm(x+۱) \Rightarrow \boxed{y=\pm(x+۱)}$$

معادلات مجانبهای منحنی تابع فوق

مسأله ۱۶: تابع $y=۲x-۱+\sqrt{ax^۲-۲۴x+۱}$ مفروض است. اگر منحنی این تابع مجانب افقی داشته‌باشد، معادله مجانب مایل آن را بیابید.

حل: منحنی تابع فوق وقتی مجانب افقی دارد که جمله $ax^۲$، وقتی از رادیکال خارج شود، مساوی $(-۲x)$ شود بنابراین باید $\boxed{a=۴}$ و $x\to-\infty$

وضع جدید تابع
$$\Rightarrow y = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 24x + 1}$$
$$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \lim [2x - 1 + 2(x + \frac{-24}{8})]$$
$$= \lim [2x - 1 + 2x - 6]$$
$$y = 4x - 7$$
معادلهٔ مجانب مایل است.

مسأله ۱۷: در تابع $y = -3x - 1 + \sqrt{ax^2 + bx - 1}$ اگر $x \to +\infty$، خط $y = 2x + 1$ معادلهٔ مجانب مایل است. معادلهٔ مجانب مایل دیگر تابع را بیابید.

$$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \lim [-3x - 1 + \sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = (\sqrt{a} - 3)x + (\frac{b\sqrt{a}}{2a} - 1) \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - 3 = 2 \\ \frac{b\sqrt{a}}{2a} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 25 \\ b = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -3x - 1 + \sqrt{25x^2 + 20x - 1}$$

$$x \to -\infty \Rightarrow \lim y = \lim [-3x - 1 - 5(x + \frac{20}{50})]$$

معادلهٔ مجانب دیگر $\boxed{y = -8x - 3}$

مسأله ۱۸: وضعیت منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$ را باخط مجانب مایل آن درشروع و پایان شکل بررسی کنید.

حل: منظور از حل مسأله آن است که می‌خواهیم بدانیم در شروع شکل منحنی فوق، منحنی بالای خط مجانب است یا بالعکس. همچنین در پایان شکل منحنی فوق، منحنی بالای خط مجانب است یا بالعکس.

معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی تابع فوق به‌صورت $y_1 = x - 4$ است. برای بررسی درشروع شکل رابررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to -\infty} (y - y_1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (y - y_1) = \lim_{x \to -\infty} (\frac{x^2 - 4x + 4}{x} - x + 4) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = 0^-$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم که y_1 بزرگتر از y است یعنی درشروع شکل خط مجانب مایل بالای منحنی است.

برای بررسی در پایان شکل $\lim_{x \to +\infty} (y - y_1)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to +\infty} (y - y_1) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{x^2 - 4x + 4}{x} - x + 4) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0^+$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم که y بزرگتر از y_1 است یعنی در پایان شکل منحنی بالای خط مجانب مایل است.

مسأله ۱۹: در تابع $y = \frac{ax^2 + bx}{\sqrt{x^2 + 1}}$، a و b را چنان بیابید تا وقتی $x \to -\infty$، $y = 2x - 1$ معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد.

حل: $x \to -\infty \Rightarrow \lim y = \lim \frac{ax^2 + bx}{-(x)} \Rightarrow y = -ax - b$

$$\begin{cases} y = -ax - b \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -2} \text{ و } \boxed{b = 1}$$

مسأله ۲۰: در تابع $y = \sqrt{\frac{ax^3 + bx^2 + 5}{x + 2}}$، a و b را چنان بیابید تا وقتی $x \to +\infty$، $y = 2x + 1$ معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد.

حل:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{ax^3 + bx^2 + 5}{x + 2}} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{ax^3 + bx^2 + 5}{x + 2}} = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{ax^{3}+bx^{2}+5}{x+2}=\frac{4x^{2}+4x+1}{1}$$

$$\Rightarrow (a-4)x^{3}+(b-12)x^{2}-9x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=12 \end{cases}$$

۱! ۱!

مسأله ۲۱: معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = x\,\text{Arc}\cos\frac{1}{x}$ را بیابید.

حل: شرط لازم مجانب مایل. $x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x\,\text{Arc}\cos\frac{1}{x}}{x} = \quad \text{Arc}\cos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{m=\frac{\pi}{2}}$$

$$h = \lim_{x\to\infty}(y-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(x\,\text{Arc}\cos\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\text{Arc}\cos\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right) = \infty \times 0$$

$$\Rightarrow h = \lim_{x\to\infty}\frac{\text{Arc}\cos\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

هوپیتال : $\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\frac{1}{x^{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}}{-\frac{1}{x^{2}}} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}{-1} = -1$

معادله خط مجانب مایل منحنی $\Rightarrow \boxed{y=\frac{\pi}{2}x-1}$

مسأله ۲۲: معادلهٔ مجانب مایل منحنی مکان نقطهٔ $M \left| \begin{array}{l} x=t \\ y=t+\text{Arc}\,\text{tg}\,t \end{array}\right.$ را وقتی t تغییر می‌کند بیابید.

شرط لازم مجانب مایل اگر $t \to \infty \Rightarrow \begin{cases} x\to\infty \\ y\to\infty \end{cases}$

حل:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{t+\text{Arc}\,\text{tg}\,t}{t} = 1 \to \boxed{m=1}$$

$$h = \lim_{x\to\infty}(y-mx) = \lim_{t\to\infty}(t+\text{Arc}\,\text{tg}\,t-t)$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\text{Arc}\,\text{tg}\,t) = \pm\frac{\pi}{2}$$

معادلات مجانبهای مایل $\Rightarrow \boxed{y = x \pm \frac{\pi}{2}}$

مسأله ۲۳: معادلهٔ مجانب مایل منحنی به‌معادلهٔ $x^{3}+y^{3}+3xy=0$ را بیابید.

$$\begin{cases} x\to\infty \\ y\to\infty \end{cases}$$

فرض می‌کنیم خط $y = ax+b$ معادلهٔ مجانب مایل باشد.

$$\begin{cases} x^{3}+y^{3}+3xy=0 \\ y=ax+b \end{cases} \Rightarrow x^{3}+(ax+b)^{3}+3x(ax+b)=0$$

$$(a^{3}+1)x^{3}+(3a^{2}b+3a)x^{2}+\dots=0$$

$$\boxed{a=-1} \Rightarrow 3b-3=0 \Rightarrow \boxed{b=1} \Rightarrow \boxed{y=x+1}$$

معادله خط مجانب مایل

تذکر: اگر معادله یک منحنی به‌صورت $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=k\neq 0$ باشد هریک از پرانتزهای معادلهٔ مساوی صفر یک مجانب منحنی است.

آموزش ترجمه متون ریاضی (٦)

● حمید رضامیری

5 Sequences and series

۵. دنباله‌ها و سریها

5.1 Sequences

Consider the following sets of numbers

$$2, 4, 6, 8, 10, \qquad (5.1)$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots. \qquad (5.2)$$

These are examples of *sequences* of numbers. In any sequence the numbers appear in a given order and, further, there is usually a definite law relating each member to other members. Each member is called a *term* of the sequence.

۵.۱ دنباله‌ها

رشته‌های اعداد زیر را درنظر می‌گیریم:

۲ , ۴ , ٦ , ۸ , ۱۰ , ... (۵.۱)

۱ , ۴ , ۹ , ۱٦ , ۲۵ , ... (۵.۲)

اینها مثالهایی هستند از دنباله‌هایی از اعداد. در هر دنباله از اعداد یک ترتیب خاصی وجود دارد و علاوه بر آن، هرعضو معمولاً بایک قاعدهٔ مشخصی به‌اعضای دیگر مربوط است. هرعضو یک جمله از دنباله نامیده می‌شود.

The sequence (5.1) has just five terms and is an example of a *finite* sequence.

The sequence (5.2) may be written

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots, \qquad (5.3)$$

where ... means 'and so on without limit'. This sequence has an infinite number of terms and is called an *infinite* sequence.

دنبالهٔ (۵.۱) دقیقاً دارای پنج جمله می‌باشد و مثالی از یک دنبالهٔ متناهی است.

دنبالهٔ (۵.۲) را می‌توان به‌صورت

۱^۲ , ۲^۲ , ۳^۲ , ۴^۲ , ۵^۲ ,... (۵.۳)

نوشت که سه نقطه به‌معنی نامحدود بودن جملات است. این دنباله دارای تعدادی نامتناهی جمله است و یک دنبالهٔ نامتناهی نامیده می‌شود.

To define a sequence we require:

(i) the first term,
(ii) the number of terms,
(iii) the law (formula) by which the terms can be calculated.

The first term of a sequence is usually denoted by u_1 and the general term by u_r. Thus, sequence (5.1) is defined by $u_1 = 2$ and $u_r = 2r$. Since this is a finite sequence, the only values of r are 1, 2, 3, 4, 5. We define sequence (5.2) by $u_1 = 1$ and $u_r = r^2$. There is now no restriction on r, so that $r = 1, 2, 3, \ldots$.

برای مشخص کردن (یا تعریف) یک دنباله به اطلاعات زیر نیازمندیم:

(۱) جمله اول.
(۲) تعداد جمله‌ها.
(۳) قاعده‌ای (فرمولی) که توسط آن جمله‌ها قابل مقابله باشند.

جملهٔ اول یک دنباله معمولاً با نماد u_1 و جملهٔ عمومی آن با u_n نمایش داده‌می‌شود. بنابراین دنبالهٔ (۵.۱) توسط $u_1 = ۲$ و $u_r = ۲r$ مشخص می‌شود. از طرفی چون این دنباله یک دنبالهٔ متناهی است، تنها مقادیر برای r عبارتنداز ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵. مادنبالهٔ (۵.۲) را توسط $u_1 = ۱$ و $u_r = r^۲$ مشخص می‌کنیم. در این دنباله محدودیتی برای r وجود نداشته، به‌طوری که، $r = ۱ , ۲ , ۳ , \ldots$.

Example 1 The general term u_r of a sequence is of the form $u_r = ar + b$, where a and b are constants. Given that $u_1 = 5$ and $u_3 = 11$, find a and b and show that $u_9 = 29$.

$$(u_1 = 5) \Rightarrow (a + b = 5),$$
$$(u_3 = 11) \Rightarrow (3a + b = 11).$$

Solving these simultaneous equations, we obtain

$$(a = 3, \text{ and } b = 2) \Rightarrow (u_r = 3r + 2).$$

Substituting $r = 9$, we obtain $u_9 = 29$.

مثال ۱: جملهٔ عمومی دنباله‌ای به‌صورت $u_r = ar + b$، می‌باشد که a و b اعداد ثابت هستند. اگر فرض کنیم ۵ = u_1 و ۱۱ = u_3، دراین صورت مقادیر a و b را یافته و نشان دهید که ۲۹ = u_9.

(۵ = a + b) ⇐ (۵ = u_1)

(۱۱ = ۳a + b) ⇐ (۱۱ = u_3)

از حل این دستگاه معادلات، خواهیم داشت:

۲ + ۳r = u_r ⇐ (۲ = b ، ۳ = a)

باقرار دادن ۹ = r، ۲۹ = u_9 به دست می‌آید.

Example 2 Write down the first five terms of the sequence in which the general term is given by $u_r = 2^r$.

$$u_1 = 2^1 = 2,\ u_2 = 2^2 = 4,\ u_3 = 2^3 = 8,\ u_4 = 2^4 = 16,\ u_5 = 2^5 = 32.$$

مثال ۲: اولین پنج جملهٔ دنبالهٔ زیر که باجملهٔ عمومی $u_r = ۲^r$ مشخص شده است را بنویسید.

u_1 = ۲ = ۲^۱ ، u_2 = ۴ = ۲^۲ ، u_3 = ۸ = ۲^۳ ، u_4 = ۱۶ = ۲^۴ ،
u_5 = ۳۲ = ۲^۵

5.2 Series

When the terms of a sequence are added together, we obtain a *series*. For example, sequence (5.1) gives the series

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10, \tag{5.4}$$

which is an example of a *finite series*.

Sequence (5.2) gives the series

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \cdots \tag{5.5}$$

This is an example of an *infinite series*.

From the general finite sequence $u_1, u_2, \ldots, u_n$ we obtain the series

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \tag{5.6}$$

This series may be written in a more concise form, using what is known as the '*sigma notation*'. Instead of sequence (5.6) we write

$$\sum_{r=1}^{n} u_r. \tag{5.7}$$

۵.۲ سریها

وقتی که جملات یک دنباله را بایکدیگر جمع کنیم یک سری حاصل می‌شود. برای مثال دنبالهٔ (۵.۱) سری زیر را به ما می‌دهد.

۱۰ + ۸ + ۶ + ۴ + ۲ (۵.۴)

که این مثالی از یک سریِ متناهی است.

دنبالهٔ (۵.۲) سری زیر را حاصل می‌کند، که این سری مثالی از یک سری نامتناهی است:

... + ۲۵ + ۱۶ + ۹ + ۴ + ۱ (۵.۵)

مادرحالت کلی از دنبالهٔ متناهی u_1 ، u_2 ، ... ، u_n، سری زیر را می‌توانیم داشته‌باشیم:

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ (۵.۶)

با استفاده از نماد *سیگما* امکان این هست که این سريِ را بتوان به‌صورت زیر نوشت. به جای سری (۵.۶) می‌نویسیم:

$\sum_{r=1}^{n} u_r$ (۵.۷)

The symbol Σ is a form of the Greek capital letter sigma, which corresponds to S, the first letter of the word 'sum'. In words, expression (5.7) reads 'sigma, r equals 1 to n, of u_r'. The word 'sigma' may be replaced by 'sum'. The expression indicates that a summation is to be carried out, the terms to be added being the u_r, where r is a counter which takes consecutive integral values from 1 to n. The lower limit of the sum is always written below the Σ and the upper limit above. Expression (5.7) is sometimes even further abbreviated to

$$\sum_{1}^{n} u_r.$$

نماد Σ یکی از حروف بزرگ یونانی است، و متناظر با S می‌باشد که S اولین حرف کلمهٔ sum است (به معنی جمع). عبارت (۵.۷) به‌صورت «سیگما r مساوی با یک تا n از u_r» خوانده می‌شود. کلمهٔ سیگما ممکن است به‌جای جمع بکار گرفته شود. عبارت (۵.۷) نشان می‌دهد که یک عمل جمع انجام پذیرفته است به‌صورتی که، وقتی r به طور متوالی اعداد صحیح ۱ تا n را می‌پذیرد، جملات توسط u_r باهم جمع می‌شوند.

معمولاً حد پایینی جمع را در پایینِ Σ و حد بالایی را در بالای آن قرار می‌دهیم. عبارت (۵.۷) حتی گاهی اوقات برای مختصر نویسی به‌صورت $\sum_{1}^{n} u_r$ نوشته می‌شود.

Example 3 Write out explicitly the series

(a) $\sum_{r=1}^{4} \frac{(-1)^r}{r}$, (b) $\sum_{r=0}^{4} (-1)^{r+1} r(r+1)$, (c) $\sum_{r=2}^{4} r!$.

(a) $\sum_{r=1}^{4} \frac{(-1)^r}{r} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

(b) $\sum_{r=0}^{4} (-1)^{r+1} r(r+1) = 0 + (-1)^2 1 \times 2 + (-1)^3 2 \times 3 + (-1)^4 3 \times 4 + (-1)^5 4 \times 5 = 2 - 6 + 12 - 20$.

(c) $\sum_{r=2}^{4} r! = 2! + 3! + 4! = 2 + 6 + 24$.

[Remember that $r!$ denotes $r(r-1)(r-2)\ldots 2.1$.]

Note that in (b) and (c) we have $\sum_{r=0}$ and $\sum_{r=2}$, respectively.

مثال ۳: سریهای زیر را به شکل صریح (باز شده) بنویسید:

الف) $\sum_{r=1}^{4} \frac{(-1)^r}{r}$

ب) $\sum_{r=0}^{4} (-1)^{r+1} r(r+1)$

ج) $\sum_{r=2}^{4} r!$

الف) $\sum_{r=1}^{4} \frac{(-1)^r}{r} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

ب) $\sum_{r=0}^{4} (-1)^{r+1} r(r+1) = 0 + (-1)^2 \times 1 \times 2 + (-1)^3 \times 2 \times 3 + (-1)^4 \times 3 \times 4 + (-1)^5 \times 4 \times 5 = 2 - 6 + 12 - 20$

ج) $\sum_{r=2}^{4} r! = 2! + 3! + 4! = 2 + 6 + 24$

[یادآوری می‌کنیم که، $r! = r(r-1)(r-2)\ldots 2 \times 1$]

توجه دارید که درقسمت (ب) و (ج) ما به‌ترتیب از $\sum_{r=0}$ و $\sum_{r=2}$ استفاده کردیم.

Example 4 Write the following series in sigma notation:

(a) $1 - a + a^2 - a^3$,

(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$.

(a) We note that the general term is of the form $\pm a^r$, with a positive sign when r is even (we regard $r = 0$ as even) and a negative sign when r is odd. The four terms correspond to $r = 0, 1, 2, 3$. Hence, we have

$$1 - a + a^2 - a^3 = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r a^r.$$

Check that

$$\sum_{r=1}^{4} (-1)^{r-1} a^{r-1}$$

is an equivalent expression.

مثال ۴: سریهای زیر را به‌صورت نماد سیگما نمایش دهید:

الف) $1 - a + a^2 - a^3$

ب) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

الف) ماتوجه داریم که جملهٔ عمومی به شکل $\pm a^r$ است، که وقتی r زوج است علامت آن مثبت (ما صفر را مثبت درنظر می‌گیریم) و زمانی که r فرد است علامت آن منفی می‌باشد. چهار جملهٔ فوق متناظر با $r = 0, 1, 2, 3$ است. بنابراین داریم:

$$1 - a + a^2 - a^3 = \sum_{r=0}^{3} (-1)^r a^r$$

و یااینکه به‌صورت دیگری داریم:

$$1 - a + a^2 - a^3 = \sum_{r=1}^{4} (-1)^{r-1} a^{r-1}$$

(b) We first notice that the series may be written

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4}.$$

ب) ما ابتدا سری را به شکل دیگری که امکان‌پذیر است نشان می‌دهیم یعنی:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4}$$

The second numbers of the pairs are 4, 7, 10, 13, again differing by 3. Proceeding as above, we find these are obtained from $(3r+1)$ by substituting the values $r = 1, 2, 3, 4$.
The general term in the series is $(3r-2)(3r+1)$ and, hence, the series may be written

$$\sum_{r=1}^{4}(3r-2)(3r+1).$$

دومین عددهای زوجهای فوق عبارتنداز ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ که دوباره دارای تفاضلی برابر با ۳ می‌باشند. بااقدامی مشابه فوق برای ما شکل (۱ + ۳r) حاصل می‌شودکه‌باجایگذاری ۴ , ۳ , ۲ , ۱ = r اعداد فوق به‌دست می‌آیند.

جملهٔ عمومی سری (۱ + ۳r) (۲ − ۳r) می‌باشد و بنابراین، سری می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\sum_{r=۱}^{۴}(۳r-۲)(۳r+۱)$$

5.3 Arithmetic progressions (APs)
The sequence 2, 5, 8, 11, ..., 26 is such that each term may be obtained from the previous one by adding a constant, in this case 3. Such a sequence is called an *arithmetic progression*, or AP. In general, if the first term of such a progression is a and a given term differs from the previous one by d, usually called the *common difference*, then the first n terms of the progression are

$$a, (a+d), (a+2d), \ldots, [a+(n-1)d]. \qquad (5.8)$$

The common difference d may be positive or negative.

۵.۳ تصاعدهای عددی (APS)[1]

دنبالهٔ ۲۶ , ... , ۱۱ , ۸ , ۵ , ۲ که هرجملهٔ آن بااضافه کردن مقدار ثابتی (دراین جا عدد ۳) به جملهٔ ماقبلش حاصل می‌شود، را درنظر می‌گیریم. به چنین دنباله‌هایک تصاعد عددی گفته می‌شود، که به اختصار به‌صورت AP نشان می‌دهیم. درحالت کلّی اگر جملهٔ اول یک تصاعد a باشد و اختلاف هرجمله از جملهٔ ماقبلش را d درنظر بگیریم، معمولاً d را قدر نسبت می‌نامند، دراین صورت اولین n جملهٔ تصاعد عبارت است از:

$$a, (a+d), (a+۲d), \ldots, [a+(n-۱)d] \qquad (۵.۸)$$

قدر نسبت می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

1- Arithmetic progressions

The general term is now of the form $\pm\frac{1}{2^r}$ with a positive sign when r is odd and a negative sign when r is even. The general term can then be written

$$(-1)^{r+1}\frac{1}{2^r}$$

and the series

$$\sum_{r=1}^{4}(-1)^{r+1}\frac{1}{2^r}.$$

حال جملهٔ عمومی آن به شکل $\pm\frac{۱}{۲^r}$ می‌باشد. علامت آن مثبت است هرگاه r فرد باشد و منفی است هرگاه r زوج باشد. جملهٔ عمومی می‌تواند به شکل $(-۱)^{r+۱}\frac{۱}{۲^r}$ نوشته شده و سری آن به صورت

$$\sum_{r=۱}^{۴}(-۱)^{r+۱}\frac{۱}{۲^r}$$

Example 5 Write, in sigma notation, the series

$$1.4 + 4.7 + 7.10 + 10.13.$$

Note that the first numbers in the pairs are 1, 4, 7, 10. The difference is 3 in each case and therefore, since the difference is constant, this suggests a linear form such as $ar + b$.

$$r = 1, (ar + b = 1) \Rightarrow (a + b = 1),$$
$$r = 2, (ar + b = 4) \Rightarrow (2a + b = 4),$$
$$\Rightarrow (a = 3, b = -2).$$

Hence, we obtain 1, 4, 7, 10 by substituting the values $r = 1, 2, 3, 4$ in $(3r-2)$.

مثال ۵: سری زیر را بانماد سیگما نمایش دهید:

$$۱\times۴ + ۴\times۷ + ۷\times۱۰ + ۱۰\times۱۳$$

دقت داریم که اولین عددهای، زوجهای فوق عبارتنداز ۱ و ۴ و ۱۰. تفاضل هریک از جملات با جملهٔ قبل ۳ است و بنابراین مادامی که تفاضل عددی ثابت است، یک شکل خطی به‌صورت ar + b ایجاب می‌کند.

$$r = ۱, (ar + b = ۱) \Rightarrow (a + b = ۱)$$
$$r = ۲, (ar + b = ۴) \Rightarrow (۲a + b = ۴)$$
$$\Rightarrow (a = ۳, b = -۲)$$

بنابراین‌مااعداد ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ راباجانشین کردن ۴, ۳, ۲ , ۱ = r در (۲ − ۳r) به‌دست می‌آوریم.

Example 6 The seventh term of an AP is 15 and the tenth term is 21. Find a, the first term of the progression, and d, the common difference. Find also the nth term.

Since the seventh term is 15, $a + 6d = 15$.
Since the tenth term is 21, $a + 9d = 21$.
Solving these equations for a and d, we obtain

$$a = 3,\ d = 2.$$

The nth term is

$$a + (n - 1)d = 3 + (n - 1)2 = 2n + 1.$$

مثال ٦: هفتمین جمله از یک تصاعد عددی ۱۵ می‌باشد و دهـــمین جملهٔ آن ۲۱ است. اولین جمله و قدرنسبت و نیز n امین جملهٔ این تصاعد را پیدا کنید.

از آنجایی که جملهٔ هفتم، ۱۵ می‌باشد داریم، $a + ۶d = ۱۵$.

از آنجایی که جملهٔ دهم، ۲۱ می‌باشد داریم، $a + ۹d = ۲۱$.

از حل این معادلات برحسب a و d، خواهیم داشت:

$$a = ۳ ,\ d = ۲$$

جملهٔ n ام عبارت است از:

$$a + (n - ۱)d = ۳ + (n - ۱)۲ = ۲n + ۱$$

Example 7 The nth term of an AP is $5 - n$. Find a, the first term of the sequence, and d, the common difference.

The first term is obtained by setting $n = 1$

$$\Rightarrow a = 5 - 1 = 4.$$

The second term is $5 - 2 = 3$ and therefore the common difference d is -1.
An alternative way of proceeding is to write $u_n = 5 - n$.
Then

$$u_{n+1} = 5 - (n + 1).$$

Clearly,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \text{common difference } d \\ &= [5 - (n + 1)] - (5 - n) = -1. \end{aligned}$$

مثال ۷: جمله n ام از تصاعدی عددی عبارت است از $(۵ - n)$. جملهٔ اول و قدر نسبت را بیابید.

باجایگذاری $n = ۱$ جملهٔ اول حاصل می‌شود:

$$n = ۱ \Rightarrow a = ۵ - ۱ = ۴$$

دومین جمله $۳ = ۲ - ۵$ می‌باشد و بنابراین قدر نسبت یعنی d برابر است با ۱ −. باقدام به روش دیگری، می‌نویسیم $u_n = ۵ - n$ ، بنابراین $u_{n+۱} = ۵ - (n + ۱)$ و واضح است که، قدر نسبت $u_{n+۱} - u_n$ یعنی،

$$u_{n+۱} - u_n = [۵ - (n + ۱)] - (۵ - n) = -۱$$

Example 8 The eighth term of an AP is five times the second term and the first term is 1. Find the common difference d and the eleventh term.

Since $a = 1$ the eighth term is $1 + 7d$ and the second term is $1 + d$. The given relation between these two terms

$$\Rightarrow [(1 + 7d) = 5(1 + d)]$$
$$\Rightarrow (2d = 4) \Rightarrow (d = 2).$$

The eleventh term is $1 + 10d = 21$.

مثال ۸: جملهٔ هشتم یک تصاعد عددی پنج برابر جملهٔ دوم آن است و جملهٔ اول این تصاعد ۱ است. جملهٔ یازدهم و قدرنسبت را بیابید.

چون $a = ۱$ پس جملهٔ هشتم $(۱ + ۷d)$ و جملهٔ دوم $(۱ + d)$ می‌باشد. حال رابطهٔ بین این دو جمله را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow [(۱ + ۷d) = ۵(۱ + d)] \Rightarrow (۲d = ۴) \Rightarrow d = ۲$$

جملهٔ یازدهم عبارت است از $۱ + ۱۰d = ۲۱$.

5.4 Arithmetic series

When the terms of an AP are added together, we obtain an *arithmetic series*. From the sequence (5.8) we obtain the series

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d]. \qquad (5.9)$$

Using the sigma notation, we may write this as

$$\sum_{r=1}^{n} [a + (r - 1)d].$$

۵.۴ سری عددی

وقتی‌که جملات یک تصاعد عددی بایکدیگر جمع شوند، ما یک سری عددی خواهیم داشت. باتوجه به‌دنبالهٔ (۵.۸) ما سری زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$a + (a + d) + (a + ۲d) + \ldots + [a + (n - ۱)d] \quad (۵.۹)$$

که بااستفاده از نماد سیگما، می‌توان آن را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\sum_{r=۱}^{n} [a + (r - ۱)d]$$

تاریخچهٔ مجله‌های ریاضی در ایران (۹)

مجلهٔ یکان در بهمن‌ماه ۱۳۴۲ پا به‌عرصهٔ مطبوعات ایران گذاشت. عنوان کامل مجله، یکان مجلهٔ ریاضیّات، صاحب امتیاز، مدیر و سردبیر مجله عبدالحسین مصحفی و بهای هر شمارهٔ آن ۲۰ ریال است. هر ماه یکبار منتشر می‌شود، مقاله‌های وارده را مسترد نمی‌کند و طبع و نشر مندرجات و مقالات خود را بدون اجازه ممنوع می‌شمارد.

ادارهٔ موقت مجله: تهران، خیابان سرباز، شمارهٔ ۳۵۳ است و نشانی پستی آن: صندوق پستی ۲۴۶۳.

در مقدمهٔ شمارهٔ اول آن چنین می‌خوانیم:

تهیّه و انتشار یک مجله آن‌هم در زمینهٔ علوم ریاضی با اطلاعات و مآخذ وسیع و قابل اطمینانی که لازم دارد کاری است که در بادی امر غیرممکن به‌نظر می‌رسد اما بذل توجه و عنایت دانشمندان فرهنگ پروری که مقالات و آثار ایشان زینت بخش صفحه‌های مجله می‌باشد و مساعدتهای بی‌دریغ دیگر دانش دوستان امری تقریباً محال را عملی ساخت و ثمرهٔ مساعی این ذوات محترم مخصوصاً حمایتهای جناب استاد دکتر محسن هشترودی است که ماهنامهٔ یکان هم‌اکنون حیات خود را آغاز می‌کند.

سرمقاله از آقایان دکتر ناظر زاده کرمانی که در کسب امتیاز و دکتر محمد علی قینی که در تهیّه مطالب مفید بوده‌اند تشکر می‌کند.

مقاله نویسان شمارهٔ اوّل عبارتند از: دکتر محسن هشترودی، احمد بیرشک، حسین آزرم، غلامرضا عسجدی، پرویز شهریاری، محمد حسن رزاقی خمسی، و البته کسان دیگری که نامشان در مجله نیامده است.

مقالهٔ اوّل شمارهٔ اول از دکتر محسن هشترودی و تحت عنوان بنیان ریاضیات جدید است. در این مقاله چنین می‌خوانیم:

دسته‌بندی و اجتماع افرادی در یک طبقه همواره به‌صورت دلخواه ممکن است. اما مجموعه‌ای که به این صورت به‌دست می‌آید مجموعه‌ای نامشخص و کم و بیش مبهم است. اما با تعریفی خاص که شامل کلّیهٔ افراد مجموعه گشته و افراد غیر عضو را خارج سازد می‌توان مجموعه را مشخص و معین کرد (البته توجه شود که تعریف منطقی جامع و مانع در این مورد ضروری نیست. هر تعریفی که نتیجه را متضمن باشد در این مورد کفایت می‌کند و چنین تعاریفی معادلند) پیداست می‌توان مجموعه‌هایی تعریف کرد که علی‌الظاهر مجموعه خود نیز از افراد مجموعه باشد.

مثلاً اگر مجموعهٔ کلّیهٔ نامهای زبان فارسی را تشکیل دهیم و به این مجموعه نامی دهیم چنین به‌نظر می‌رسد که خود مجموعه عضو مجموعه است. بیشتر تعارضات منطقی در نظریّهٔ مجموعه‌ها از این نقطه شروع می‌شود و رفع چنین مشکلاتی که اکنون خیلی عادی به‌نظر می‌رسد دربادی امر موجب مشکلاتی برای ریاضی‌دانان بود که غلبه بر آن ممتنع می‌نمود.

بعدها روشن شد که این قبیل تعارضات به حوزهٔ ریاضی منحصر نیست و در حوزهٔ منطق نیز روی می‌دهد.

من باب مثال چند مورد از این تعارضات در حوزهٔ منطق در زیر ذکر می‌شود:

اوّل تعارض حکم منفرد: این تعارض از قدیم شناخته شده‌است و از ارسطو منقول است.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی می‌گوید که «کاشانیان دروغگویند» بدیهی است که این حکم موجب دور می‌گردد چه قول مذکور از طرف کاشانی گفته شده است پس مشمول خود حکم می‌گردد و جمله صحیح نیست یعنی کاشانیان راستگویند و چون گوینده کاشانی است حکم صحیح خواهد بود و دور بارز می‌گردد.

باید متوجه بود که در حقیقت این حکم منفرد نیست و از دو حکم تشکیل شده است: غیاث‌الدین جمشید کاشانی است و مدعی است که کاشانیان دروغگویند. تعارض از این جهت پیدا می‌شود و موجب دور می‌گردد که دروغ گروه تشکیل نمی‌دهد چه دروغ دروغ معادل راست می‌باشد نه دروغ. اگر غیاث الدین جمشید کاشانی می‌گفت «کاشانیان راستگویند» تعارضی رخ نمی‌داد چه راست راست معادل راست و راست و گروه تشکیل می‌دهد.

دوم تعارض احکام مستند بر تعریف: برای هر عدد می‌توان تعریفی ریاضی ذکر کرد و همچنین می‌توان تعریف دیگری داد که بی‌آنکه ریاضی باشد آن عدد را مشخص کند. مثلاً عدد (الف) را چنین تعریف می‌کنیم «کوچکترین عددی که تعریف آن کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد» بدیهی است اعدادی که باکمتر ازده کلمه تعریف می‌شوند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند (که ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد) که بین آنها با مقایسه، کوچکترین آنها را تعیین می‌کنیم و عدد «الف» مشخص می‌گردد. فی‌المثل عدد معروف (پی) چنین تعریف می‌شود «نسبت محیط دایره به قطر آن» و این جمله یا (حکم) شش کلمه دارد یعنی حکمی است که از ده کلمه کمتر است پس عدد (پی) از این قبیل اعداد است همچنین عدد ۹ (تعداد سیارات منظومه شمسی) از این قبیل اعداد است زیرا حکم «تعداد سیارات منظومهٔ شمسی» کمتر از ده کلمه دارد و از این قبیل احکام است و اگر به همین دو عدد قناعت شود عدد «الف» عدد (پی) خواهد بود که از دو عدد ۹ و (پی) کوچکترین آنها است. به‌هرحال اگر تعاریف دیگری نیز برای اعدادی از این قبیل ذکر شود همواره می‌توان عدد «الف» را مشخص ساخت. اکنون ملاحظه کنیم که عدد «الف» با جملهٔ «کوچکترین عددی که تعریف آن کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد» تعریف شده است و حکم این تعریف دوازده کلمه دارد و تعارض رخ می‌دهد زیرا عدد «الف» بایستی با جمله‌ای (یا حکمی) که کمتر از ده کلمه داشته باشد تعریف شود یعنی بنا به مدلول تعریف فوق عدد «الف» وجود دارد و بنابر صورت حکم این عدد جزء مجموعه‌اعدادی‌که به موجب این تعریف مشخص می‌شوند نمی‌باشد. با کمی توجه می‌توان دریافت که مجموعه اعدادی که تعریف آنها کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد یک رشته عدد است (متناهی یا نامتناهی برحسب تعداد) و تعریف عدد «الف» در واقع چنین است «کوچکترین عدد این مجموعه» و تعارضی در کار نخواهد بود زیرا حکم اخیر داخل پرانتز کمتر از ده کلمه دارد.

در نظریهٔ مجموعه‌ها این تعارضها قبلاً مشهود شده بود و تعلق آنها به حوزهٔ منطق بعداً روشن شد و مبنی و پایهٔ منطق ریاضی براساس حساب احکام و قضایا و حساب طبقات است.

اگر در مجموعه‌ای (محدود یا نامحدود) بین افراد روابطی ایجاد شود به‌قسمی که حاصل به کار بستن این روابط برای دو فرد از مجموعه فردی دیگر از مجموعه را به دست دهد چنین مجموعه‌ای را یک سازمان می‌نامند.

مثلاً اگر مجموعهٔ اعداد صحیح را با عمل جمع در نظر بگیریم روشن است که مجموع دو عدد صحیح نیز عددی صحیح است در این صورت مجموعهٔ اعداد صحیح را با عمل جمع یک سازمان می‌نامند بی‌آن‌که بر کلیات سازمان در ریاضیات اشاره‌ای شود به همین مختصر قناعت می‌کنیم و به تعادل این سازمان با سازمان حاصل از مجموعهٔ اعداد صحیح و عمل ضرب قناعت می‌کنیم چه مجموعهٔ اعداد صحیح با عمل ضرب نیز یک سازمان تشکیل می‌دهد. (در عمل جمع و سازمان اوّل عدد صفر عنوان واحد دارد چه افزودن آن به هر عددی‌آن‌عدد را محفوظ نگه

می‌دارد. همچنان‌که در ضرب و سازمان دوم عدد یک عنوان واحد دارد و ضرب کردن آن در هر عددی آن عدد را محفوظ نگه می‌دارد.) ممکن است در سازمانی دو رابطه بین افراد مجموعه قابل تصور باشد (مانند مجموع اعداد صحیح و اعمال جمع و ضرب) در این صورت چنین سازمانی را حلقه می‌نامند. تعادل بین حلقه‌ها با سازمان دوگانهٔ جمع و ضرب همواره محقق است. سازمان معادل با رابطهٔ جمع را مدول و سازمان معادل با عمل ضرب را گروه می‌نامند و حلقه در حقیقت سازمانی است که مدول و گروه باشد. هیأت اعداد یا مجموعه‌ای است که حاصل اعمال چهارگانهٔ اصلی حساب در آن مجموعه را محفوظ نگه دارد (جز عمل تقسیم بر صفر مدول که استثنا می‌شود) مثلاً مجموعه اعداد گویا یک هیأت اعداد تشکیل می‌دهد. اعداد موهوم نیز یک هیأت اعداد است اگر عددی موهوم را که اجزای حقیقی و موهوم آن اعداد صحیحند عدد موهوم صحیح بنامیم مشاهده می‌شود که مجموع اعداد صحیح موهوم حلقه تشکیل می‌دهند. به این قسم سازمانهای اصلی نمونه‌بندی ریاضی عبارت است‌از:

۱ ـ Module که به‌آن گروه جمعی Groupe additif نیز گفته می‌شود و همچنین گروه Groupe (که مراد گروه ضربی است Groupe Multiflicatif که به‌طور خلاصه گروه نامیده می‌شود. در صورتی‌که در چنین سازمانی a.b = b.a باشد گروه را گروه آبلی Groupe abélien می‌نامند) تعادل بین مدول و گروه محقق است یعنی این دو سازمان در حقیقت متوازنند.

۲ ـ حلقه Anneou یا Ring سازمانی است که هم مدول است و هم گروه یعنی اعمال سه‌گانهٔ جمع و تفریق در آن میسر است.

۳ ـ هیأت اعداد Groupe de nombres یا Field که اعمال چهارگانهٔ اصلی حساب در آن میسر است. سازمان به دو دستهٔ اساسی سازمانهای جبری (آنچه که تاکنون اشاره شد سازمانهای جبری می‌باشند) و سازمانهای منطقی Structure Logique تقسیم می‌شوند برای هر سازمان منطقی محاسبهٔ خاص جبری وجود دارد که سازمان متناظر آن نامیده می‌شود. مثلاً جبر بول Boole اصول محاسبهٔ سازمان منطقی ارسطو (یعنی منطق دو ارزشی) می‌باشد.

اهمیت این سازمانها در ریاضیات جدید بسیار زیاد است و اصول ماشینهای الکترونیکی یا دستگاههای خودکار براین سازمانها است.

در مقالهٔ از اقلیدس تاکانتور نوشتهٔ حسین آزرم در مورد مجموعه‌ها که در آن زمان یعنی در سال ۱۳۴۲ تازه در ریاضیات دبیرستانی از آن سخن به میان آمده بود چنین می‌خوانیم:

کانتور «مجموعه» را به دو صورت زیر تعریف کرده است:

۱ ـ **مجموعه عبارت است از اجتماع اشیایی که دارای صفت ممیزهٔ مشترک و معلومی باشند. هر یک از آن اشیا را «عنصر» مجموعه می‌گویند.**

۲ ـ **مجموعه عبارت است از اجتماع اشیایی مشخص و متمایز ولی ابتکاری و یا تصوری.**

تعریف مجموعه به صورت اول بسیار مشخص و منطقی و فارغ از هر نوع تردید است زیرا هر شیء موجود در عالم نسبت به چنین مجموعه‌ای فقط یک وضع قطعی دارد یا این شیء جزء مجموعه است و یا به آن تعلق ندارد و اجتماع‌دووضع مذکور در آن واحد ممکن نیست و نیز دو شیء متعلق به چنین مجموعه‌ای مشابه یکدیگرند هرچند به صورت ظاهر تفاوتهایی داشته باشند. مثلاً وقتی می‌گوییم مجموعه فرشهای یک خانه تمام فرشهای این خانه بی‌توجه به‌رنگ و ابعاد و جنس عناصر این مجموعه هستند.

از نقطه‌نظر تشکیل مجموعه‌ها تعاریف مذکور را می‌توان در یک «اصل کلی» خلاصه کرد و آن تشکیل مجموعه‌ای است که اشیا و عناصر آن دارای خاصیت مفروضی باشند. توسعهٔ فرضیهٔ مجموعه‌ها نشان داده است که با قبول این اصل تناقض دو تعریف از بین می‌رود و تصور مجموعه مفهوم بسیار وسیعی پیدا می‌کند.

همین که بگوییم «تمام اشیایی که....» یک مجموعه داریم،

مثلاً مجموعهٔ تمام کتابها، مجموعهٔ اعداد اوّل و امثال آن شاید در بادی امر قبول چنین تحولی در علم ریاضی آن هم بخصوص از یک نقطهٔ به‌کلی تاریک بعید به‌نظر می‌آید لکن گذشت زمان و سیر تاریخ ریاضیات کلاسیک قرون قبل لزوم چنین تحولی را به سوی فرضیهٔ کانتور به ثبوت رسانده، فرضیه‌ای که همان خدمت را به نحو بهتر و جالبتری انجام می‌دهد. در حوالی سال ۱۸۷۰ میلادی در حالی که علمای ریاضی آن عصر سردرگم تعاریف مبهم و استدلالهای پیچیده و مشکل بودند کانتور فرضیهٔ خود را در مورد مجموعه‌های فرعی و ساده روی اعداد حقیقی آزمایش می‌کرد و بتدریج به مجموعه‌های مجرد می‌پرداخت. این روش بتدریج به وسیله دیگران ابتدا در مورد اعداد حقیقی و منطق و بتدریج دربارهٔ رشته‌های دیگر ریاضی به‌کار می‌رفت و فکر وحدت رشته‌های مختلف علم ریاضی رفته رفته تحقق می‌یافت. در این مرحله بود که اعداد طبیعی رفته رفته در علم آنالیز دخالت نمود و گفتهٔ «کرنکر[1]» را تأیید کرد. «خداوند اعداد طبیعی را خلق کرد و بقیه مخلوق بشر است» و نیز اضافه نمود که «تمام نتایج ریاضی باید به وسیلهٔ بسیار ساده خواص اعداد قابل تعبیر باشند.»

اگر بخواهیم یک مراجعهٔ مختصر و سریع به فرضیّهٔ کانتور و نتایج ناشی از آن بنماییم باید از تعریف مجموعه و بستگی و تعلق عنصری به آن ـ مجموعهٔ خالی ـ مجموعه شامل فقط یک عنصر شروع کنیم و همچنین مجموعه‌های فرعی که از یک مجموعه تشکیل می‌شوند و عناصر متعلق به هر کدام دارای خاصیت مفروضی هستند و نیز مجموع دو یا چند مجموعه.

در خلال این مطالب به اصلی موسوم به «آکسیوم انتخاب» که به‌طور ضمنی به وسیلهٔ کانتور و دیگران به‌کار رفته و به نام «آکسیوم زرملو[2]» نیز نامیده می‌شود برخورد می‌کنیم که عبارت است از:

اگر Z مجموعهٔ غیرخالی از مجموعه‌های غیرخالی و فاقد عناصر مشترک y باشد در این صورت مجموعه‌ای مانند S وجود دارد که شامل منحصراً یک عنصر x متعلق به Z و مشترک با y است.

در مقالهٔ **هانری پوانکاره** دربارهٔ این ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی چنین می‌خوانیم:

یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان دوران که عدهٔ کمی از دانشمندان ریاضی را می‌توان با او مقایسه کرد بدون این که از او پیشی گیرند (هانری پوانکاره) است. در اواخر قرن نوزده کشور فرانسه توانست به خود ببالد که علاوه بر (کوشی) که در ثلث اوّل همان قرن می‌زیسته یکی دیگر از فرزندانش عنوان رکن اصلی ریاضی را به دست آورد و در تمام رشته‌های ریاضی نظری و عملی نبوغ خود را ظاهر سازد و به حل بسیاری از مسائل مشکل و پیچیدهٔ این علم موفق آید. (امیل پیکار) درباره وی به جا می‌گوید: (هر کجا ابزار کار برای تفوق بر مشکلات را از سر راه برمی‌داشت). پوانکاره در ۲۹ آوریل ۱۸۵۴ در شهر (نانسی) به‌دنیا آمد و در ۱۷ ژوئیه ۱۹۱۲ در پاریس درگذشت. هنوز بیش از سی‌وسه سال نداشت که به عضویت آکادمی علوم پذیرفته شد، در سال ۱۸۷۳ به مدرسهٔ معروف (پلی تکنیک) رفت و پس از فراغت از تحصیل به‌عنوان مهندس معدن در شهر (وزول) شروع به کار کرد ولی پرتو درخشان آثار اوّلیّه‌اش در ریاضیات خیلی زود او را متوجه آموزش این علم نمود و در دانشکده علوم (کان) به تدریس آنالیز پرداخت. سپس به پاریس رفت و در (سوربن) دانشگاه معروف پاریس معلم کنفرانسها شد (سال ۱۸۸۱) و بعد عهده‌دار تدریس مکانیک فیزیک و مکانیک تجربی شد. در سال ۱۸۸۵ به تدریس فیزیک ریاضی و حساب احتمالات و در ۱۸۸۶ به تدریس مکانیک سماوی پرداخت. در این اثنا مدرسهٔ پلی تکنیک پست تمرین و سپس کرسی استادی نجوم را به وی محول داشت که از ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۸ میلادی بدان مشغول بود.

اوّلین اثرش دربارهٔ توابعی است که به وسیلهٔ معادلات فاضله مشخص می‌شوند و در ۱۸۸۷ ظاهر شده در این اثر نتایج (بریو)

و (بوکه) به وجه محسوسی تکامل یافته‌اند.

در همین سال پوانکاره تز دکترای خود را که متضمن موضوع جالبی درباره انتگراسیون معادلات با مشتقات جزئی با چند متغیر است گذراند. پوانکاره در این رساله مفاهیم تازه‌ای به کار برده است که بعداً جداگانه روی هر یک تحقیق نموده است. از این پس تحقیق در زمینه‌های بسیار و فوق‌العاده گوناگون پرداخت و در تمام آنها تنوع استثنایی خود را عیان ساخت. از آن جمله (معادلات دیفرانسیل) و (معادلات با مشتقات جزئی) و (توابع تحلیلی با یک یا چند متغیر)، (مکانیک تحلیلی)، (مکانیک سماوی) و (جبر و نظریهٔ اعداد) را می‌شود نام برد.

در ۱۸۸۰ میلادی نیروی خلاقه و فکر مبتکر او به مطالعه و بحث در شکل عمومی منحنیهای حقیقی جواب معادلات دیفرانسیل با ضرایب حقیقی متوجه شد و بررسی عمیقی دربارهٔ نقاط غیرعادی این منحنیها به عمل آورد. برای این نقاط اصطلاحات تازه‌ای از قبیل (گلو ـ گره ـ کانون ـ مرکز) ساخت که بلافاصله کلاسیک گشت.

در سال ۱۸۸۲ میلادی رسالهٔ دیگری دربارهٔ جوابهای حقیقی دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب حقیقی منتشر کرد. این جوابها عبارتند از دنباله‌های متقاربی از توانهای یک متغیر کمکی و زیباترین نتایجی است که بعد از (کشی) به‌دست آمده است.

ولی بدون شک بالاترین افتخار پوانکاره در آنالیز کشف توابعی است که بعضی را (فوکسین) و بعضی دیگر را (کلینین) نامیده است، که بعداً توابع (اتومورف) نامیده شدند، و منتهی به طرح انتگراسیون کلیهٔ معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب جبری می گردد. در مقابل کارهای عظیم این دانشمند به جد هرکسی دچار سرگیجه و لااقل اعجاب می‌شود ـ مغزی که هرگز از فعالیت و تجلی باز نایستاد تا آن‌جا که گاهی از زندگی عادی به دور می‌افتاد. حواس پرتی معروف او در هنگام سخنرانی تشریفاتی رئیس آکادمی در پذیرایی و تجلیل از او شاهد این مطلب است. مرگ زودرس پوانکاره در پنجاه‌وهشت سالگی اتفاق افتاد هنگامی که نبوغش هنوز با تمام قدرت و شدت می‌درخشید و اگر چنین نشده بود سهم این دانشمند در تحولات عظیمی که در تئوریهای فیزیک نوین پدید آمد تا چه پایه بود؟

به مقالهٔ **چرا معلم ریاضی شدم از غلامرضا عسجدی** می‌رسیم و در این مقاله که حکایتی از دوران گذشتهٔ یکی از معلمان ریاضی این مرزوبوم است چنین می‌خوانیم:

پدر وکسان پدری من بیشتر اهل داد و ستد و بازاری بوده‌اند و خود مرحوم پدرم عقیده داشت اگر من در آتیه شغل آزاد داشته باشم بهتر است در صورتی که خویشان مادری من کتابی و از دوستان علم بوده‌اند بین آنها چند تن روحانی بزرگ؛ چند تن طبیب یافت می‌شد. به خاطر دارم در ایام طفولیت گاهی به خانهٔ دایی خود که از مجتهدین طراز اوّل بود می‌رفتم. موقعی که بین آن مرحوم و شاگردانش بحث علمی درگرفته بود در آن زمان رسم چنین بود که استاد هر اندازه دانشمند و شاگرد، هر قدر حقیر و کم اطلاع باشد در بحث علمی خجالت و تعارف و مداهنه وجود نداشت. اگر شاگرد در گفتار استاد نکتهٔ ضعیفی به نظرش می‌رسید بی‌پروا اظهارمی‌کرد. این دیگر وظیفه استاد بود یا با منطق او را متقاعد سازد و یا خود تسلیم شود. این جریان ابداً و به‌قدر ذره‌ای از مقام استاد کم نمی‌کرد و حتی بر صفا و صدق مقام او می‌افزود. بارها به چشم خود دیده بودم این آقایان پس از بحث علمی مفصل که شبیه مشاجره بود یک دفعه فارغ شده و مشغول تناول ناهار که عبارت از یک غذای ساده ایرانی بود می‌شدند اگر کسی شوخیها و خنده‌های ایشان را در این موقع می‌دید باور نمی‌کرد که همان کسانی هستند که لحظهٔ پیش در بحث علمی چنان سختگیر و بی‌گذشت بودند. این قبیل سجایا که منشأ ترقی قومی تواند بود متأسفانه در محیط فرهنگ جدید ما ضعیف شده است. گاهی انسان مشاهده می‌کند تسامح و چاپلوسی از یک طرف و افاده و تفرعن بی‌جا از طرف دیگر همه جا حتی به مجالس درس و تحقیق نیز راه یافته است.

ریاضیات گسسته

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

> با توجه به نقش مهم **ریاضیات گسسته** در علوم معاصر، به‌خصوص علوم کامپیوتری هیأت تحریریهٔ مجله تصمیم به نشر مطالبی در این زمینه گرفت. برای انجام این منظور مقالاتی را که از این پس تحت این عنوان می‌آوریم از کتاب مشهور و مهم
>
> Discrete and Combinatorial Mathematics. An Applied Introduction. Ralph P.Grimaldi
>
> که یکی از کتابهای مقدماتی این شاخه از ریاضیات است انتخاب کرده‌ایم. امیدواریم مطالعهٔ این مقاله‌ها خواننده را با این شاخه از ریاضیات آشنایی بیشتری دهد.

فصل ۱ ـ اصول اساسی شمارش

ممکن است شمارش، به‌نظر اشخاص به‌عنوان فرایند واضحی بیاید که دانش آموزان هنگامی که برای اوّلین بار حساب می‌آموزند با آن آشنا می‌شوند. اما از پس آن، چنین به‌نظر می‌رسد که چون دانش‌آموز به زمینه‌های «مشکلتر» ریاضیات، چون جبر، هندسه، مثلثات، و حساب دیفرانسیل و انتگرال رو آورد، توجه کمی به گسترش بیشتر شمارش مبذول می‌شود. نتیجتاً، فصل اوّل باید اخطاری چند در مورد جدی بودن و مشکل نمودن شمارش «صرف» به دست دهد.

شمارش با حساب پایان نمی‌گیرد، و کاربردهایی در زمینه‌هایی چون نظریهٔ رمزنویسی، احتمال، و آمار (در ریاضیات) و در تحلیل الگوریتمها (در علوم کامپیوتری) نیز دارد. فصول بعدی به ارائهٔ بعضی از مثالهای خاص این کاربردها می‌پردازد.

هنگامی که به این حوزهٔ جذاب ریاضیات وارد می‌شویم، به مسائل بسیاری برخورد می‌کنیم که بیانشان بسیار ساده اما حلشان تا اندازه‌ای مشکل است. مواظب فورمولها باشید! چه استفادهٔ صرف از فرمول، بدون تحلیل مسأله، کاری عبث است. برعکس، در حل مسأله، کلنجار رفتن با مسائل غیرمتعارف یا مسائلی متفاوت با آنچه در گذشته با آنها مواجه شده‌اید، را خوش بدارید. راه‌حلها را بر مبنای جستجوی کامل و جامع خود جستجو کنید، و این کار را بی‌توجه به این که آیا موردی را که مؤلف به دست داده حاصل می‌کند یا خیر، انجام دهید.

۱.۱ ـ قواعد جمع و ضرب

مطالعهٔ ریاضیات ترکیبی و گسسته‌مان با دو اصل اساسی شمارش، یعنی، قواعد جمع و ضرب، آغاز می‌شود. صورت و کاربردهای اوّلیهٔ این اصول کاملاً ساده ظاهر می‌شوند. در تحلیل مسائل بغرنجتر، شخص اغلب می‌تواند آنها را به اجزایی تقسیم کند که توان به انجام رساندن‌شان را با استفاده از این اصول اساسی داشته باشد. در این مسائل، خواستمان بر این است که قابلیت «تجزیهٔ» آنها و پهلوی هم قرار دادن راه‌حلهای جزیی‌مان، تا رسیدن به جواب نهایی، را گسترش دهیم. یکی از طرق صحیح انجام این کار تحلیل و حل مسائل شمارشی گوناگون بسیاری، با توجه به اصول به‌کار رفته در راه حلشان است، و این رهیافتی است که در این کتاب از آن پیروی می‌کنیم.

اصل اوّل شمارشمان را می‌توان به‌طریق زیر بیان کرد:

> **قاعدهٔ جمع.** اگر عمل اولی را بتوان به m طریق انجام داد، در حالی‌که عمل دومی را بتوان به n طریق انجام داد، و دو عمل مزبور نتوانند به‌طور همزمان انجام گیرند، در این صورت انجام هر یک از آنها را می‌توان به $m + n$ طریق انجام داد.

توجه داشته باشید زمانی که می‌گوییم واقعه‌ای خاص، به‌عنوان عمل اوّل، می‌تواند به m طریق انجام شود، فرضمان بر این است که m طریق مزبور متمایزند، و غیر این‌صورت را با گزاره‌ای بیان می‌کنیم. این موضوع در سراسر این متن صادق است.

مثال ۱.۱. کتابخانهٔ دانشکده‌ای دارای ۴۰ کتاب درسی جامعه‌شناسی و ۵۰ کتاب درسی مربوط به انسان شناسی است. بنا به قاعدهٔ مجموع، دانش‌آموز این دانشکده می‌تواند، برای آموختن مطالب بیشتری در مورد یکی از این دو موضوع، از میان $۹۰ = ۵۰ + ۴۰$ کتاب درسی، کتاب انتخاب کند. □

مثال ۲.۱. قاعدهٔ مزبور را می‌توان در مورد بیش از دو عمل، البته تا جایی که هیچ جفتی از عملها نتواند به‌طور همزمان رخ دهد، تعمیم داد. به عنوان نمونه، یک معلم علوم کامپیوتر که، مثلاً، برای هر یک از موارد **ای.پی.ال «APL»**، **بیسیک «BASIC»**، **فرترن «FORTRAN»**، **و پاسکال «PASCAL»** پنج کتاب مقدماتی دارد، می‌تواند هر یک از ۲۰ کتاب مزبور را، به دانش‌آموزی علاقه‌مند به آموختن زبان برنامه نویسی اوّلیّه‌ای، سفارش کند. □

مثال ۳.۱. معلم علوم کامپیوتر مثال ۲.۱ دو همکار دارد. یکی از این همکاران دارای سه کتاب درسی در مورد تحلیل الگوریتم است، و دیگری پنج کتاب از این دست دارد. اگر n تعداد کتب مربوط به این موضوع را که معلم مزبور می‌تواند از آنها امانت بگیرد، نمایش دهد، آنگاه $۵ \le n \le ۸$، زیرا در این حالت هر دو همکار مزبور می‌توانند نسخه‌هایی از یک نوع کتاب(های) درسی داشته باشند. □

مثال زیر قاعدهٔ حاصل‌ضرب را معرفی می‌کند.

مثال ۴.۱. مدیر مؤسسه‌ای، برای اخذ تصمیم در مورد توسعهٔ دستگاههای ماشین‌آلات، ۱۲ نفر از کارمندان خود را به دو کمیته تخصیص می‌دهد. کمیتهٔ A شامل پنج عضو است و مأمور بررسی نتایج مطلوب ممکن حاصل از چنین توسعه‌ای است. هفت نفر دیگر، کمیتهٔ B، بازتابهای نامطلوب ممکن را مورد رسیدگی قرار می‌دهند. در صورتی که مدیر مورد بحث پیش از گرفتن تصمیم، مصمم به گفتگو با تنها یکی از اعضای کمیته‌ای باشد، در این صورت بنا به قاعدهٔ جمع ۱۲ کارمند برای انجام چنین کاری موجودند. اما برای بی‌طرفی بیشتر، بر آن شد که قبل از اخذ تصمیم، با عضوی از کمیتهٔ A در دوشنبه، و بعد با عضوی از کمیتهٔ B در چهارشنبه گفتگو کند. با استفاده از اصل زیر، در می‌یابیم که مدیر مزبور می‌تواند با دو عضو از چنین اعضایی به $۵ \times ۷ = ۳۵$ طریق گفتگو داشته باشد. □

> **قاعدهٔ حاصل‌ضرب:** اگر فرایندی را بتوان به مراحل اوّل و دوم تقسیم کرد، و اگر m نتیجهٔ ممکن برای مرحلهٔ اوّل و n نتیجهٔ ممکن برای مرحلهٔ دوم موجود باشند، در این صورت کل فرایند مزبور را می‌توان، در ترتیب مشخص شدهٔ مورد بحث، به mn طریق انجام داد.

گاهی به این قاعده به‌عنوان اصل انتخاب «Principle of choice» اشاره می‌شود.

مثال ۵.۱. کلوب نمایشنامهٔ دانشگاه مرکزی «Central University» آزمونهایی برای نمایشنامهٔ بهار خود انجام می‌دهد. کارگردان نمایشنامه، بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب می‌تواند، از میان شش مرد و هشت زنی که صداهایشان برای نقشهای زن و مرد اصلی نمایشنامه مورد آزمایش قرار گرفته‌اند، زوج اصلی خود را به $۶ \times ۸ = ۴۸$ طریق انتخاب کند. □

مثال ۶.۱. در این‌جا توسیعات گوناگون قاعدهٔ مورد بحث را با

بررسی شماره‌ای اتومبیل شامل دو حرف از الفبای انگلیسی و چهار رقم پس از آنها، توضیح داده‌ایم.

a) اگر هیچ حرف یا رقمی نتواند تکرار شود:

۲۶ × ۲۵ × ۱۰ × ۹ × ۸ × ۷ = ۳,۲۷۶,...

شمارهٔ مختلف ممکن موجودند.

b) با مجاز بودن تکرار حروف و ارقام:

۲۶ × ۲۶ × ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ = ۶,۷۶۰,...

شمارهٔ مختلف ممکن موجودند.

c) در صورت مجاز بودن تکرار، در چند شمارهٔ قسمت (b) هر دو حرف صدا دارند (a,e,i,o,u) و جمیع ارقام زوجند (۰ رقمی زوج است.) □

مثـــال ۷.۱. در حـافظهٔ اصـلی کـامپیوتری، اطلاعـاتی را در سلولهای حافظه ذخیره کرده‌ایم. برای شناختن سلولهـای واقـع در حافظهٔ اصلی کامپیوتر، به هـر سـلول نـامی یکتـا مـوسوم بـه آدرس «address» تخصیص داده‌ایم. آدرس مزبور دربعضی از کامپیوترها به صورت فهرست مرتبی از هشت نماد نمایش داده شده است، که هر نماد آن یکی از بیتها «bits» ی ۰ یـا ۱ است. فـهرست هشت بـیتی مزبور به بایت «byte» موسوم است. با استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب، در می‌یابیم که

۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۲^۸ = ۲۵۶

بایت از چنین بایتهایی موجودند. در نتیجه، برای سلولهـای حـافظه ۲۵۶ آدرس داریم که در آنها می‌توان اطلاعات را ذخیره کرد.

بـعضی از مـاشینها (از جـمله خـانوادهٔ PDP ۱۱)[۱] آدرسهـای دوبایتی را به کار می‌برند. آدرسی چنین از دو بایت متوالی، یـا ۱۶ بیت متوالی تشکیل شده است، بنابراین ذخیره کردن

۲۵۶ × ۲۵۶ = ۲^۸ × ۲^۸ = ۲^{۱۶} = ۶۵,۵۳۶

تکه اطلاعات در آنها امکان‌پذیر است. کامپیوترهای دیگر (از جمله IBM PC/RT)[۲] از دستگاههای آدرس چهار بایتی استفاده می‌کنند. در این حالت، برای ذخیرهٔ اطلاعات در سلولهای حافظهٔ ماشین مزبور:

۲^۸ × ۲^۸ × ۲^۸ × ۲^۸ = ۲^{۳۲} = ۴,۲۹۴,۹۶۷,۲۹۶

آدرس در دسترس است.

مثـــال ۸.۱. گـاهی لازم مـی‌آید که در حـال مسأله‌ای اصـول شمارش متفاوت چندی را ترکیب کنیم. در این حالت درمی‌یابیم که هر دو قاعدهٔ جمع و ضرب برای به‌دست آوردن پاسخ مورد نیازند.

در صورتهای خاصی از زبان برنـامه‌نویسی **بـیسیک**، نـام یک متغیر عبارت از حرفی منفرد (A، B، C،...) یا حرفی منفرد پیش از رقمی منفرد است. به‌علت این که کامپیوتر تمایزی بین حروف بزرگ و کوچک قائل نمی‌شود، a و A، چنـان‌که EV و ev، نـام مـتغیر یکسانی در نظر گرفته می‌شوند. بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب

۲۶ × ۱۰ = ۲۶۰

نام متغیر شامل حرفی بیش از یک رقم موجودند، و به علت این‌که ۲۶ نام متغیر شامل حرفی منفرد وجود دارند، بنا به قاعدهٔ جمع، در زبان برنامه‌نویسی مزبور، کلاً

۲۶ + ۲۶۰ = ۲۸۶

نام متغیر موجودند. □

۲.۱ ـ جایگشتها

اکنون در ادامهٔ بـررسی کـاربردهای قـاعدهٔ حـاصل‌ضرب، بـه شمارش ترتیبات اشیای متمایز در تـرتیبی مشـخص، رو مـی‌آوریم. عموماً اشیای مورد نظر را واقع در سطر، یا خـطی مسـتقیم، در نـظر می‌گیریم، و این کار به ترتیب خطی معینی می‌انجامد. این ترتیبات را اغلب جایگشت «Permutation» می‌نامیم، روشهـای سیستمـاتیک

۱) خانواده‌های کامپیوترهای PDP 11 محصولی از Digital Equipment Corporation است.

۲) پروسسور IBM PC/RT توسط International Business Machines Corportation ساخته شده است.

چندی را برای انجامشان مطرح می‌کنیم. کار را با مثالی نمونه آغاز می‌کنیم.

مثال ۹.۱. در کلاسی با ۱۰ دانش آموز باید پنج نفر برای گرفتن عکس در ردیفی بنشینند. چند نوع از چنین ترتیباتی خطی ممکن‌اند؟

کلمهٔ کلیدی این مسأله ترتیب «*arrangement*» است، که اهمیت مرتب کردن را مشخص می‌کند. اگر A، B، C، ....، I، J ده دانش‌آموز مورد بحث را نمایش دهند، در این صورت BCEFI، CEFIB و ABCFG سه مورد از چنین ترتیباتی هستند، هرچند دو مورد اول شامل پنج دانش‌آموز یکسان باشند.

برای پاسخ دادن به‌سؤال مورد نظر، مکانها و تعداد ممکن دانش‌آموزانی را‌که برای پر کردن هر مکان، می‌توانیم از آنها انتخاب کنیم، در نظر می‌گیریم. پر کردن یک مکان مرحله‌ای از فرایندمان است.

۱۰	×	۹	×	۸	×	۷	×	۶
مکان‌اوّل		مکان‌دوم		مکان‌سوم		مکان‌چهارم		مکان‌پنجم

در سطر فوق هر یک از ۱۰ دانش‌آموز می‌تواند مکان اول را اشغال کند. به‌علت این‌که در این حالت، تکرار ممکن نیست، می‌توان برای پر کردن مکان دوم تنها یکی از نه دانش‌آموز باقیمانده را اختیار کرد. با ادامه دادن به این مسیر، تنها شش دانش‌آموز را برای پر کردن مکان پنجم و نهایی پیدا می‌کنیم. این کار، کلاً ۳۰٬۲۴۰ ترتیب ممکن انتخاب پنج دانش‌آموز از کلاسی ده نفری را به دست می‌دهد.

در صورتی که مکانهای مورد بحث به ترتیب مقابل $(6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10)$ پر شوند نیز همین پاسخ را به‌دست می‌آوریم. در صورتی که ترتیب در نظر گرفته شده سومی، اوّلی، چهارمی، پنجمی، و دومی باشد (یعنی، ابتدا مکان سوم، بعد مکان اول، سپس مکان چهارم، چهارم مکان پنجم، و بالاخره مکان دوم پر شود)، در این صورت پاسخ $7 \times 8 \times 10 \times 6 \times 9$ است. □

تعریف ۱.۱. به ازای عدد صحیح $n \ge 0$، فاکتوریل «*factorial*» n (که با $n!$ نمایش داده می‌شود.) با

$0! = 1$ و

$n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)$ به ازای $n \ge 1$

تعریف می‌شود.

به این ترتیب درمی‌یابیم که

$1! = 1$ و $2! = 2$ و $3! = 6$ و $4! = 24$ و $5! = 120$

علاوه بر این، به ازای هر $n \ge 0$،

$$(n+1)! = (n+1)(n)!$$

با استفاده از نماد فاکتوریل، درمی‌یابیم که پاسخ مسألهٔ ۹.۱ را می‌توان به صورتی فشرده‌تر، به‌طریق زیر بیان کرد:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10!}{5!}$$

تعریف ۲.۱. با معلوم بودن مجموعه‌ای از n شیء متمایز، هر ترتیب (خطی) از آنها به جایگشت «*Permutation*» موسوم است.

با آغاز از حرف a، b، c، درمی‌یابیم که شش طریق در ترتیب دادن این حروف موجودند:

در صورتی‌که به ترتیب تنها دو حرف در هر بار علاقه‌مند باشیم، شش جایگشت از چنین جایگشتهایی دو اندازه‌ای، از مجموعهٔ موردبحث وجود دارند:

ab , ba , ac , ca , bc , cb

> درحالت‌کلی، اگرشیء متمایز، نمایش‌داده‌شده‌با a_1، a_2، ...، a_n، موجود باشند، و r عددی صحیح باشد، با $1 \le r \le n$، در این‌صورت بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، تعداد جایگشتهای r اندازه‌ای n شیء مزبور عبارت است از:
>
> $$\underset{\text{مکان اوّل}}{(n)} \times \underset{\text{مکان دوم}}{(n-1)} \times \underset{\text{مکان سوم}}{(n-2)} \times \ldots \times \underset{\text{مکان r ام}}{(n-r+1)} =$$
>
> $$(n) \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\ldots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تعداد مورد بحث را با $P(n,r)$ نمایش می‌دهیم. به ازای $r = ۰$،

$$P(n , ۰) = ۱ = n! / (n - ۰)!$$

بنابراین:

$$P(n , r) = n! / (n - r)!$$

که در آن $۰ \le r \le n$. مثال ۹.۱ حالت خاصی از این مطلب است، که در آن $n = ۱۰$، $r = ۵$ و $P(۱۰ , ۵) = ۳۰۲۴۰$.

چون جایگشت جمیع n شیء واقع در مجموعهٔ مورد بحث را در نظر بگیریم، $r = n$ را داریم و درمی‌یابیم که

$$P(n , n) = n! / ۰! = n!$$

تعداد جایگشتهای r اندازه‌ای، با $۰ \le r \le n$، از مجموعهٔ n شیء عبارت است از:

$$P(n , r) = n! / (n - r)!$$

اما، در صورت مجاز بودن تکرار، و بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب n^r ترتیب ممکن با $r \ge ۰$ موجودند.

مثــــال ۱۰.۱. تـعداد جـایگشتهای حـروف واقـع در کـلمهٔ COMPUTER، !۸ است.

اگر تنها چهار حرف از آن‌را به‌کار بریم، تعداد جایگشتها (ی به اندازهٔ چهار) عبارت است از:

$$P(۸ , ۴) = ۸!(۸ - ۴)! = ۸! / ۴! = ۱۶۸۰$$

و اگر تکرار حروف مجاز باشد، تعداد دنباله‌های ۱۲ حرفی ممکن $۸^{۱۲} = ۶۰۸۷۲ \times ۱۰^{۱۰}$ است. □

مثـال ۱۱.۱. برخـلاف مثـال ۱۰.۱. تـعداد ترتیبـات حـروف کلمهٔ BA۱۱، ۱۲ و نه !۴، یا ۲۴، است. دلیل آن این است که در این مورد، برای انجام ترتیب، چهار حرف متمایز نداریم. برای به‌دست آوردن ۱۲ ترتیب مورد بحث، می‌توانیم آنها را چنانچه در جدول ۱.۱ (a) نشان داده شده است، فهرست کنیم.

اگر دو L مزبور را به‌صورت $L_۱$ و $L_۲$ متمایز کنیم، مـی‌توانیـم اندیشه‌های قبلی‌مان، در مورد جایگشتهای اشیای متمـایز، را بـه‌کـار بریم، در این‌صورت، با چهار نماد متمایز B، A، $L_۱$، $L_۲$، ۲۴ =!۴ جایگشت داریـم. ایـن جـایگشتها را در جـدول ۱.۱ (b) فـهرست کرده‌ایم. جدول ۱.۱ آشکار می‌کند که در مورد هر ترتیبی که، به ازای آن، L های مزبور تمیز ناپذیرند، یک جفت جایگشت با Lهای متمایز متناظر است.

نتیجتاً (تعداد ترتیبات نمادهای B، A، L، L) × ۲ = (تعداد جایگشتهای نمادهای B، A، $L_۱$، $L_۲$)

و پـاسخ مسـألهٔ اصلـی یـافتن جمیع ترتیبـات حـروف BA۱۱، ۱۲ = ۲ / !۴ است. □

جدول ۱.۱

(a)	(b)	
A B L L	A B $L_۱$ $L_۲$	A B $L_۲$ $L_۱$
A L B L	A $L_۱$ B $L_۲$	A $L_۲$ B $L_۱$
A L L B	A $L_۱$ $L_۲$ B	A $L_۲$ $L_۱$ B
B A L L	B A $L_۱$ $L_۲$	B A $L_۲$ $L_۱$
B L A L	B $L_۱$ A $L_۲$	B $L_۲$ A $L_۱$
B L L A	B $L_۱$ $L_۲$ A	B $L_۲$ $L_۱$ A
L A B L	$L_۱$ A B $L_۲$	$L_۲$ A B $L_۱$
L A L B	$L_۱$ A $L_۲$ B	$L_۲$ A $L_۱$ B
L B A L	$L_۱$ B A $L_۲$	$L_۲$ B A $L_۱$
L B L A	$L_۱$ B $L_۲$ A	$L_۲$ B $L_۱$ A
L L A B	$L_۱$ $L_۲$ A B	$L_۲$ $L_۱$ A B
L L B A	$L_۱$ $L_۲$ B A	$L_۲$ $L_۱$ B A

مثال ۱۲.۱. اکـنون، بـا استفـاده از ایـدهٔ مـطرح شـده در مثـال ۱۱.۱، به بررسی ترتیبات جمیع حروف PEPPER می‌پردازیم.

به ازای هر ترتیبی که در آن P ها متمایز نیستند، ۶ = !۳ ترتیب با P های متمایز موجودند. به عنوان مثال

$P_۱EP_۲P_۳ER$ و $P_۱EP_۳P_۲ER$ و $P_۲EP_۱P_۳ER$ و

$P_۲EP_۳P_۱ER$ و $P_۳EP_۱P_۲ER$ و $P_۳EP_۲P_۱ER$

چون اندیسهای P ها را حذف کنیم، جمیعاً متناظر با PEPPER اند.

علاوه براین، چون E ها متمایز شوند، جفت جایگشت $P_1E_1P_2P_3E_2R$ ، $P_1E_2P_2P_3E_1R$ ، متناظر با ترتیب $P_1EP_2P_3ER$ اند نتیجتاً:

(تعداد ترتیبات حروف PEPPER)(۳!)(۲!)

= (تعداد جایگشتهای نمادهای P_1 ، E_1 ، P_2 ، P_3 ، E_2 ، R)

بنابراین تعداد ترتیبات حروف PEPPER عبارت است از:

$$6!/(2!3!) = 60$$ □

پیش از بیان اصل عمومی ترتیبات با نمادهای مکرر، مایل به خاطرنشان این نکته‌ایم که در دو مثال پیشین‌مان، نوع جدیدی از مسأله را، با ربط آن به اصول شمارش قبلی، حل کردیم. این‌کار عملی متعارف در ریاضیات در حالت عمومی است، و غالباً در استخراج فرمولهای گسسته و ترکیباتی به‌کار می‌رود.

> در حالت عمومی، اگر n شیء با n_1 شیء از نوع اول، n_2 شیء از نوع دوم، ...، و n_r شیء از نوع rام، با
>
> $$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$
>
> موجود باشند، در این صورت $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$ ترتیب از n شیء داده شده وجود دارند. (اشیای از یک نوع تمایزناپذیرند.)

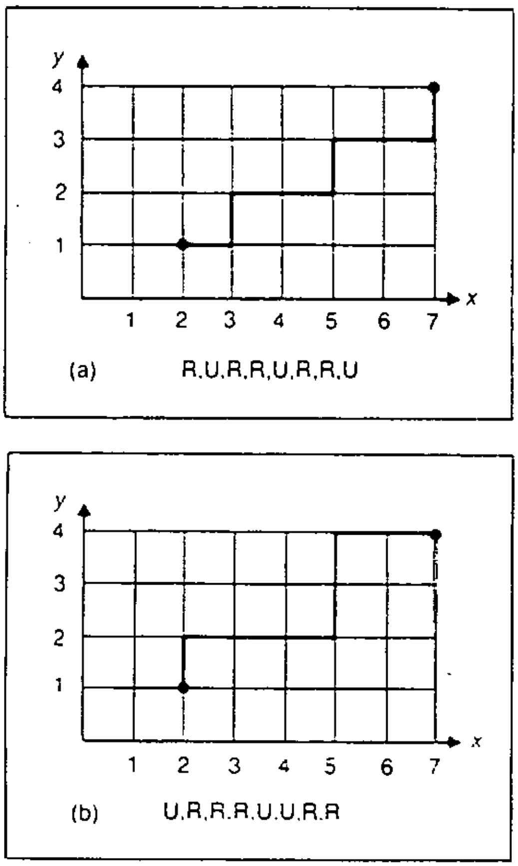
مثال ۱.۱۳. MASSASAUGA مار سمی قهوه‌ای و سیاه از خزنده‌های بومی آمریکای شمالی است. با ترتیب جمیع حروف MASSASAUGA ، در می‌یابیم که $\frac{10!}{4!1!1!1!1!} = 25,200$ ترتیب ممکن موجودند. در میان آنها $\frac{7!}{3!1!1!1!1!} = 840$ ترتیب وجود دارند که در آنها جمیع چهار A با هم‌اند. برای به‌دست آوردن نتیجهٔ اخیر، جمیع ترتیبات هفت‌نماد AAAA (یک‌نماد) ، S ، S ، S ، M ، U ، G را در نظر گرفته‌ایم.□

مثال ۱.۱۴. تعداد مسیرهای (پلکانی) واقع در صفحهٔ xy از (۱ , ۲) به (۴ , ۷) را بیابید که در آنها هریک چنین مسیری از مراحلی فردی، که یک واحد به راست (R) یا یک واحد به بالا (U) می‌رود، تشکیل شده است. خطوط پررنگ واقع در شکل ۱.۱ دو مسیر از چنین مسیرهایی را نشان می‌دهند.

در زیر هر مسیر شکل ۱.۱ مراحل فردی مربوط به آن‌را فهرست کرده‌ایم. به عنوان مثال، در قسمت (a)ی شکل مزبور، فهرست

U , R , R ,U , R , R , U , R

مشخص می‌کند که با آغاز از نقطهٔ (۱ , ۲) ، ابتدا یک واحد به راست [به (۱ و ۳)]. سپس یک واحد به بالا [به (۲ , ۳)] ، پس از آن دو واحد به راست [به (۲ , ۵)] ، و غیره حرکت کرده تا به نقطه (۴ , ۷) رسیده‌ایم. مسیر مزبور شامل ۵ ، R برای حرکات به راست و ۳ ، U برای حرکات به بالاست.



شکل ۱.۱

مسیر واقع در قسمت (b) ی شکل مورد بحث نیز از ۵ ، R و ۳ ،

U تشکیل شده‌است. درحالت‌عمومی، کل سفر از (۱ , ۲) به (۴ , ۷) به ۵ = ۲ − ۷ حرکت افقی به راست و ۳ = ۱ − ۴ حرکت قائم به بالا نیازمند است. نتیجتاً، هر مسیر متناظر با فهرستی از ۵، R و ۳، U است، و جواب مربوط به تعداد مسیرها به عنوان تعداد ترتیبات ۵، R و ۳، U پدیدار می‌شود، که $\frac{۸!}{۵!۳!} = ۵۶$ است. □

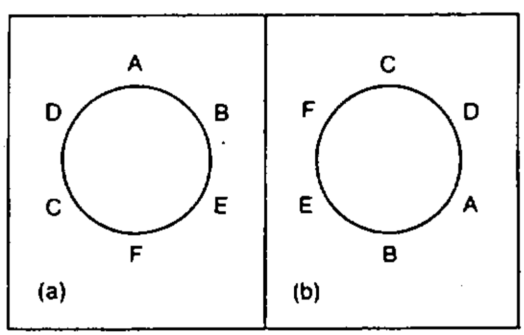
مثال ۱۵.۱. اکنون به‌عملی مجردتر دست می‌زنیم و اثبات می‌کنیم که اگر n و k اعدادی صحیح، با $n = ۲k$، باشند، در این صورت $n! / ۲^k$ عددی صحیح است. این موضوع، از آن‌جا که استدلالمان متکی بر شمارش است، مثالی از اثبات ترکیباتی است.

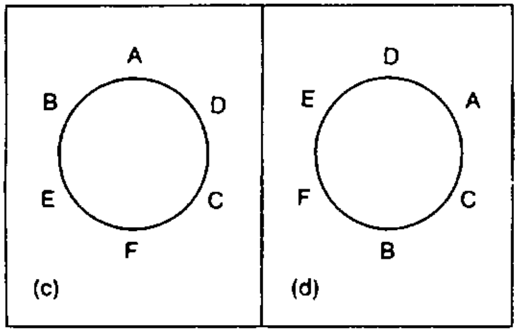
n نماد $x_۱$، $x_۱$، $x_۲$، $x_۲$، ...، x_k، x_k را در نظر می‌گیریم. تعداد طرقی که طبق آنها می‌توانیم جمیع این $n = ۲k$ نماد را مرتب کنیم عددی صحیح است یعنی:

$$\frac{n!}{۲!۲!\dots۲!} = \frac{n!}{۲^k}$$ □

سرانجام، آنچه را تاکنون مطرح کرده‌ایم، در حالتی به کار ببریم که ترتیبات آن دیگر خطی نیستند.

مثال ۱۶.۱. اگرشش‌فرد، مشخص‌شده‌به‌صورت A، B، ...، F، دور میز گردی نشسته باشند، چند ترتیب دوری متفاوت ممکند، در صورتی که ترتیبات را، هنگامی که یکی از آنها را بتوان با دوران از دیگری به دست آورد، یکسان به شمار آوریم؟ (در شکل ۲.۱. ترتیبات (a) و (b) یکسان در نظر گرفته می‌شوند، در حالی که (b)، (c)، و (d) سه ترتیب متمایزند.)





شکل ۲.۱

چون در مورد غالب وضعیات جدید سعی در ارتباط دادن با مفاهیم گذشته می‌کنیم. با ملاحظهٔ شکلهای ۲.۱ (a) و ۲.۱ (b)، و با آغاز از بالای دایره و حرکت ساعتگرد، ترتیبات خطی متمایز ABEFCD و CDABEF را که متناظر با ترتیب دوری یکسانی هستند، فهرست می‌کنیم. علاوه بر این دو، چهار ترتیب خطی دیگر ـ BEFCDA، DABEFC، EFCDAB، EFCDAB و FCDABE ـ پیدا می‌کنیم که متناظر با همان ترتیب دوری واقع در (a) یا (b) اند. بنابراین، از آن‌جا که هر ترتیب دوری متناظر با شش ترتیب خطی است، داریم:

(تعداد ترتیبات دوری A، B، ...، F) × ۶ =

(تعداد ترتیبات خطی A، B، ...، F) = !۶

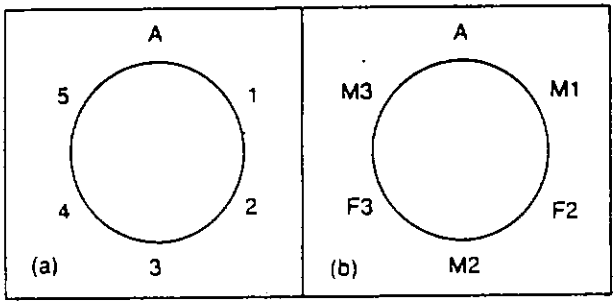
نتیجتاً ۱۲۰ = !۵ = ۶ / !۶ ترتیب از A، B، ...، F حول میزگردمان موجودند. □

مثال ۱۷.۱. اکنون فرض می‌کنیم که شش فرد مثال ۱۶.۱ شش زوجند و A، B، و C زنهای مربوطه‌اند. می‌خواهیم این شش فرد را حول میزگردی چنان قرار دهیم که زن و مردها یک درمیان باشند. (بار دیگر، ترتیبات را، در صورتی که یکی از آنها را بتوان با دوران از دیگری به دست آورد، یکسان در نظر می‌گیریم.)

پیش از حل این مسأله، مثال ۱۶.۱ را با روش دیگری که به حل مسألهٔ حاضر کمک می‌رساند، حل کنیم.

اگر A را، چنان که در شکل ۳.۱ (a) نشان داده‌ایم، پشت میز

مورد بحث قرار دهیم، پنج محل (ساعتگرد از A) برای پر شدن باقی می‌مانند. پر کردن مکانهای مزبور با B ، C ، ... ، F به روشی خطی است، و این کار رامی‌توان به ۱۲۰ = !۵ انجام داد.



شکل ۳.۱

برای حل مسألهٔ جدید زن و مردهای یک درمیان، روش نشان داده شده در شکل ۳.۱ (b) را در نظر می‌گیریم. A (یکی از زنها) را، چون قبل، مکان می‌دهیم. مکان بعدی، ساعتگرد از A ، نشان شده با M_1 (مرد اوّل) ، می‌تواند به سه طریق پر شود. با ادامه دادن ساعتگرد از A ، مکان F_2 (زن دوم) را می‌توان به دو طریق پر کرد. با حرکت به این طریق، و با قاعدهٔ حاصل‌ضرب ۱۲ = ۱ × ۱ × ۲ × ۲ × ۳ طریق موجودند که در آنها شش فرد مزبور را می‌توان، بدون این که هیچ دو مرد یا دو زنی کنار یکدیگر واقع شوند، گرد میز نشاند. □

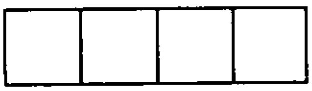
ادب ریاضی

در پنجاه و یک سالگی لاگرانژ این احساس را داشت که به پایان قدرت خویش رسیده است. وضع او مثال بارزی از ایجاد ناتوانی کامل اعصاب در نتیجه کار فکری ممتد و مداوم بوده است.

پاریسیها او را هنگام معاشرت و مصاحبت آرام و مطبوع می‌دیدند، لیکن هرگز پیشقدم مباحثه و اقدامی نمی‌شد. بندرت حرف می‌زد و غالباً گیج و مبهوت و غوطه‌ور در مالیخولیایی عمیق به‌نظر می‌رسید. در اجتماعات دانشمندان که در منزل لاوازیه «Lavoisier» تشکیل می‌شد غالباً در کنار پنجره‌ای می‌ایستاد و به خارج می‌نگریست و پشت به مهمانانی می‌کرد که برای ادای احترام به او آمده بودند. غالباً اظهار می‌داشت که آتش شور، وی خاموش شده و ذوق ریاضیات رااز دست داده است. هنگامی که به او اطلاع می‌دادند که فلان ریاضی‌دان به فلان تجسس مهم پرداخته است جواب می‌داد: «چه خوب شد، من این کار را شروع کرده بودم و مجبور نیستم آن‌را خاتمه دهم.»

ریاضی‌دانهای نامی ـ حسن صفاری

تفریح اندیشه ۱



کلمهٔ چهار حرفی متداول انگلیسی‌ای را با این معلومات بیابید که با هر یک از چهار کلمهٔ زیر دو حرف مشترک، اما نه در مکان درست، داشته باشد:

EGIS

PLUG

LOAM

ANEW

جواب در صفحهٔ ۹۶

آیا تابعی جبری وجود دارد که متناوب باشد؟

دکتر احمد شرف‌الدین

در سطور زیر ثابت می‌کنیم که تنها تابع جبری متناوب، تابع ثابت است. مطالعهٔ این مقاله نه‌تنها برای دانش‌آموزان مفید است که برای دبیران و دانشجویان نیز مفید است.

ابتدا مقدمات لازم برای اثبات حکم مورد نظر را ذکر می‌کنیم و سپس به اثبات مطلب می‌پردازیم.

۱. قضیّه. معادلهٔ

$$(1)\quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

که در آن n عدد صحیح بزرگتر یا مساوی یک است، دارای n ریشه است.

در این قضیه اعداد مختلطی که در معادله (۱) صدق می‌کنند جواب محسوب می‌شوند و همچنین هر ریشه مکرر از مرتبه p، به‌عنوان p ریشه محسوب می‌شوند.

مثال ۱. معادله درجهٔ دوم $x^2 - 5x + 6 = 0$ دارای دو جواب حقیقی $x = 2, 3$ است. معادله درجهٔ دوم $x^2 - 3x + 4 = 0$ دارای دو جواب مختلط $x = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$ است. معادله درجه دوم $x^2 - 2x + 1 = 0$ دارای دو جواب مساوی $x = 1$ است. معادله اخیر به‌صورت $(x - 1)^2 = 1$ است. منظور ما از این مثال آن است که بگوییم یک معادله درجه دوم همواره دارای دو جواب است.

مثال ۲. معادلهٔ درجه سوم $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ دارای سه جواب حقیقی $x = -1, 2, 3$ است. معادلهٔ درجه سوم $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ دارای یک جواب حقیقی $x = 1$ و دو جواب مختلط $x = -1 \pm \sqrt{-4}$ است. معادلهٔ $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ دارای یک جواب ساده $x = 2$ و دو جواب مساوی $x = 1$ است. معادلهٔ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ دارای سه جواب مساوی $x = -1$ است (جواب مکرر از مرتبهٔ ۳). منظور ما از این مثال آن است که توضیح دهیم یک معادلهٔ درجه سوم همواره دارای سه جواب است.

۲. قضیّه. یک شرط لازم و کافی برای آن که معادلهٔ

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

دارای بی‌نهایت جواب باشد، آن است که ضرایب مساوی صفر باشند:

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0$$

۳. تعریف تابع متناوب. تابع f را متناوب با دوره تناوب T $(T \neq 0)$ می‌نامند، اگر $x \in \mathrm{Dom} f$ آنگاه

$$\begin{cases} x \pm T \in \mathrm{Dom}\, f \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$$ و

۴. قضیّه. هرگاه تابع f متناوب با دوره تناوب T باشد، به ازای هر عدد صحیح مثبت یا منفی n چنین داریم:

$$f(x + nt) = f(x)$$

۵. تعریف تابع جبری. بنا به تعریف، y تابعی جبری از x است اگر در معادلهٔ جبری تجزیه ناپذیری به‌صورت:

$$(2)\quad P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\dots+P_1(x)y+P_0(x)=0$$

صدق کند. در معادلهٔ بالا، n عدد است صحیح و نسبت و ضریبهای $p_n(x)$، $P_{n-1}(x)$،...،$P_1(x)$، $P_0(x)$ چند جمله‌ایهایی از x می‌باشند.

مثال ۱. $y=\sqrt{x}$ ، $(x>0)$ یک تابع جبری را تعریف می‌کند که عضوهای (x,y) آن در معادله تجزیه‌ناپذیر زیر صدق می‌کنند:

$$y^2-x=0$$

مثال ۲. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}(x>0)$ یک تابع جبری را تعریف می‌کند که عضوهای (x,y) آن در معادله تجزیه ناپذیر زیر صدق می‌کنند:

$$(x-1)y^2+2xy-x^2=0$$

تابع جبری را می‌توان به‌صورت ساده زیر نیز تعریف کرد:

تابع جبری تابعی است که از تعدادی متناهی عمل جبری بر تابع همانی (یعنی تابع x) و تابع ثابت حاصل شود. (اعمال جبری شامل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، به توان رساندن، و ریشه گرفتن می‌شوند.)

۶. تعریف تابع غیرجبری. تابعی که جبری نباشد تابع غیر جبری یا متعالی نامیده می‌شود. تابعهای مثلثاتی و لگاریتمی از جمله تابعهای غیر جبری‌اند.

تابع $\sin x$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

تابع بالا با اعمال جبری بر تابع همانی و تابع ثابت حاصل شده است. اما باید توجه کرد که تعداد این اعمال متناهی نیست. لذا تابع $\sin x$ یک تابع جبری نیست.

۷. حکم. تابع ثابت تنها تابع جبری متناوب است.

برهان. تابع جبری

$$(3)\quad y=f(x)$$

را درنظر می‌گیریم. بنابر شمارهٔ (۵)، این تابع در معادلهٔ جبری تجزیه ناپذیری به‌صورت (۲) که در شمارهٔ (۵) ذکر شد، صدق می‌کند.

اکنون مقدار دلخواه y_0 متعلق به برد تابع (۳) را درنظر می‌گیریم. مقدار y_0 را در معادلهٔ (۲)، به‌جای y می‌گذاریم، معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(4)\quad P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\dots+P_1(x)y+P_0(x)=0$$

معادلهٔ (۴) یک معادلهٔ جبری بر حسب x است. اگر درجه این معادله k باشد آنگاه بنا بر قضیّه (۱)، تعداد جوابهای آن در حالت کلی برابر k است.

جوابهای معادله:

$$(5)\quad y_0=f(x)$$

در معادله (۴) صدق می‌کنند پس تعداد جوابهای معادلهٔ (۵) متناهی است.

اکنون فرض می‌کنیم که تابع جبری (۳) متناوب باشد. می‌گوییم حداقل یک مقدار x_0 وجود دارد به‌طوری که $y_0=f(x_0)$ باشد. اگر دورهٔ تناوب تابع f برابر T باشد، آنگاه چنین داریم:

$$f(x_0+xt)=f(x_0)$$

n عددی صحیح است (مثبت یا منفی). پس اگر تابع f(x) متناوب باشد معادلهٔ (۵) دارای بی‌نهایت جواب است. این نتیجه با نتیجه‌ای که قبلاً به‌دست آوردیم متناقض است. پس تابع جبری درحالت کلی متناوب نیست.

حالت خاص. اگر تابع f(x) ثابت و برابر C می‌باشند چنین داریم:

$$(6)\quad y_0=c$$

زیرا y_0 متعلق به برد تابع اختیار شده است. چون در معادله (۶)، ضریبهای توانهای مختلف x صفرند و جمله ثابت یعنی: (y_0-c) نیز صفر است پس بنابر قضیّهٔ (۲)، این معادله دارای بی‌نهایت جواب است. لذا تنها تابع جبری متناوب، تابع ثابت است.

تابع ثابت دارای بی‌نهایت دورهٔ تناوب است. این تابع دارای کوچکترین دورهٔ تناوب نیست.

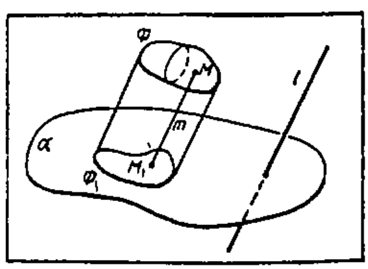
مفهومهای اصلی و اصل موضوعها در هندسه فضایی (۴)

پرویز شهریاری

۱۰. تصویر موازی شکلها. ویژگیهای تصویر موازی

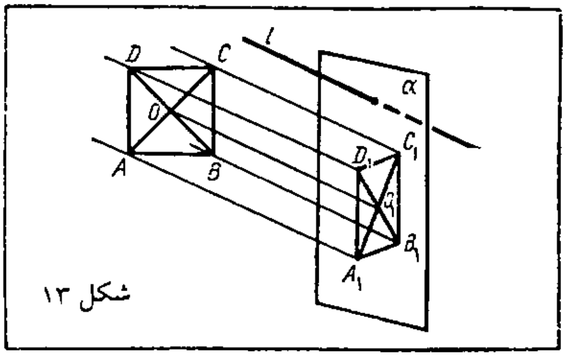
در این بخش و بخش بعد، قانونهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که، در هندسهٔ فضایی، برای نشان دادن شکلها در روی صفحه، به کار می‌روند. ابتدا با نوع تازه‌ای از نگاشت شکلها، یعنی تصویر موازی آشنا می‌شویم.

صفحه α و خط راست l، متقاطع با صفحه α را، درنظر می‌گیریم (شکل ۱۲). اگر از نقطهٔ دلخواه M، متعلق به شکل مفروض ϕ، خط راست m را موازی باخط راست l رسم کنیم، نقطهٔ M_1، نظیر نقطهٔ M (یانگارهٔ M)، در محل برخورد خط راست m باصفحه α به‌دست می‌آید. این نگاشت f را، **تصویر شکل ϕ برصفحهٔ α، موازی باخط راست l** گویند. نقطهٔ $M_1 = f(M)$ را، **تصویر موازی نقطهٔ M**، m را **خط راست تصویر کننده**، شکل $\phi_1 = f(\phi)$ را تصویر موازی شکل ϕ و صفحه α را صفحهٔ تصویر نامند.



شکل ۱۲

تصویر دربارهٔ تصویر موازی را، می‌توان با سایه‌ای که از نمونهٔ مقوایی شکل، در اثر نور آفتاب، روی دیوار می‌افتد، مجسم کرد. به‌علت دوری خورشید از زمین، می‌توان پرتوهای خورشیدی را، به تقریب، موازی به حساب آورد.



شکل ۱۳

اگر مقوایی را به شکل مربع ABCD بریده باشیم، سایه آن روی دیوار، به شکل چهار ضلعی $A_1B_1C_1D_1$ (شکل ۱۳) در می‌آید. مطالعهٔ شکلهای ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ در موقعیتهای مختلف صفحهٔ مربع، موجب می‌شود تا بتوانیم، فرضیّه‌هایی دربارهٔ ویژگیهای تصویر موازی، حدس بزنیم. این ویژگیها را، با این شرط تنظیم می‌کنیم که تصویر، موازی باخط راست l باشد، ولی خط راست l، هیچ کدام از پاره‌خطها یا خطهای راستی که تصویر می‌شوند، موازی نباشد (شکل ۱۳).

الف) می‌بینیم که تصویر هرضلع یا قطر مربع، به‌صورت پاره‌خط راست در می‌آید.

ویژگی ۱. تصویر یک خط راست (پاره‌خط راست)، **یک خط راست** (پاره‌خط راست) **است.**

ب) در مربع ABCD داریم: $[AB] \parallel [CD]$ و $[AD] \parallel [BC]$. در تصویر هم، «سایهٔ» این پاره‌خطهای راست، موازیند. $[C_1D_1] \parallel [A_1B_1]$ و $[B_1C_1] \parallel [A_1D_1]$.

ویژگی ۲. تصویرهای دو خط راست موازی، باهم موازیند.

ج) داریم: $|AO| : |AC| = \frac{1}{2}$ و $|AB| : |DC| = 1$. می‌توان توجه کرد که همین نسبتها، برای پاره‌خطهای تصویر هم وجود دارد، یعنی: $\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|A_1B_1|}{D_1C_1}$ و $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|A_1D_1|}{A_1C_1}$.

ویژگی ۳. نسبت طولهای دو پاره‌خط راست موازی، برابر است با نسبت طولهای تصویرهای آنها.

پرسشها و مسأله‌ها

۸۶. سه نقطه مفروضند. ضمن تصویر موازی، چند نقطه روی صفحهٔ تصویر به‌دست می‌آیند؟

۸۷. در تصویر صفحه، نیم صفحه زاویه، چه شکلی به‌دست می‌آید؟

۸۸. طول یک پاره‌خط راست، با طول تصویر آن برابر شده است. این پاره‌خط راست، نسبت به صفحهٔ تصویر، چه وضعی می‌تواند داشته باشد؟

۸۹. دو خط راست، تصویرهایی موازی دارند. آیا این گزاره درست است: خود خطهای راستی که تصویر شده‌اند، موازیند؟

۹۰. ۱) ثابت کنید، تصویر نقطهٔ وسط یک پاره‌خط راست، در وسط پاره‌خط راست تصویر است؛ ۲) آیا می‌توان چهارضلعی ABCD را، طوری بر یک صفحه تصویر کرد که در تصویر، یک متوازی‌الاضلاع به‌دست آید؟

۹۱. پاره‌خط راست AB، صفحهٔ تصویر را در نقطهٔ M قطع کرده است. تصویر آن را A_1B_1 می‌نامیم. می‌دانیم $|AB| = m$ و $\frac{p}{q} = \frac{|A_1M|}{|MB_1|}$. مطلوب است $|AM|$ و $|BM|$.

۹۲. ۱) تصویرهای دو نقطهٔ مفروض A و B بر صفحهٔ α را، A_1 و B_1 می‌نامیم. چگونه می‌توان نقطهٔ برخورد خط راست AB را با صفحهٔ α پیدا کرد؟ ؛ ۲) نقطه‌های A و B و C ـ که روی یک خط راست نیستند ـ و تصویرهای آنها، A_1 و B_1 و C_1، بر صفحهٔ α، داده شده است. خط راست فصل مشترک دو صفحهٔ ABC و α را، چگونه می‌توان پیدا کرد؟

۱۱. نمایش شکلها در هندسهٔ فضایی

تا این‌جا، بدون این‌که به چگونگی روش کار بپردازیم، شکلهایی مثل چهاروجهی و متوازی‌السطوح را، روی صفحه نشان داده‌ایم. اکنون می‌خواهیم دربارهٔ نمایش شکلها، اندکی دقیقتر، صحبت کنیم.

وقتی در هندسهٔ فضایی، از **نمایش یک شکل** صحبت می‌کنیم، **منظور شکلی است که با تصویر موازی شکل مفروض بر صفحه، متشابه باشد.**

در این بخش، قانونهای نمایش ساده‌ترین چندضلعیها و چندوجهیها را شرح می‌دهیم. وجه‌های یک چندوجهی، چندضلعیهایی هستند که روی صفحه‌های مختلف قرار گرفته‌اند و، بنابراین، طبیعی است ابتدا، به نمایش چند ضلعیهایی بپردازیم که صفحهٔ آنها، منطبق بر صفحهٔ تصویر و یا موازی با آن نیست. از حالتی که، صفحهٔ چندضلعی، با خط راست تصویر کننده (خط راستی که تصویر، موازی با آن انجام می‌شود) صرف‌نظر می‌کنیم، زیرا در این حالت، تصویر چند ضلعی، به‌صورت یک پاره‌خط راست درمی‌آید.

۱. مثلث. اگر سایهٔ یک مثلث مقوایی را روی دیوار، ضمن تغییر وضع مثلث، مورد مطالعه قرار دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که، تصویر یک مثلث، می‌تواند مثلثی به هر شکل باشد: **تصویر یک مثلث مفروض بر یک صفحه (یعنی نمایش مثلث) می‌تواند مثلثی به شکل دلخواه**

باشد. مثلاً، مثلث متساوی‌الاضلاع، می‌تواند به‌صورت هرگونه مثلثی با ضلعهای مختلف درآید. درنتیجه: در تصویر موازی، مقدار زاویه‌ها و نسبت طول پاره‌خطهای راستی که با هم موازی نیستند، در حالت کلی، ثابت نمی‌ماند.

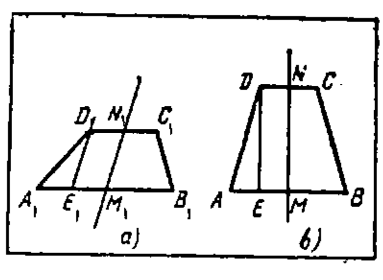
مسألهٔ ۱. **در نمایش یک مثلث متساوی‌الاضلاع (یعنی در تصویر موازی این مثلث)، جای تصویر مرکز مثلث را پیدا کنید.**

حل. مرکز هر مثلث، نقطهٔ برخورد میانه‌های آن است. با توجه به ویژگی ۳، تصویر هر میانه، به‌صورت میانهٔ تصویر به‌دست می‌آید. بنابراین، کافی است در مثلث تصویر، دو میانه را رسم کنیم؛ محل برخورد آنها، تصویر مرکز مثلث اصلی را به ما می‌دهد.

۲. متوازی‌الاضلاع. چون ضمن تصویر، موازی بودن دو خط راست حفظ می‌شود، بنابراین نمایش یک متوازی‌الاضلاع فضایی بر صفحه (و در حالت خاص، نمایش یک مستطیل، یک لوزی یا یک مربع)، یک متوازی‌الاضلاع است، ولی البته، طول ضلعها و اندازهٔ زاویه‌های تصویر، می‌تواند تغییر کند. در واقع، برای درک بیشتر این موضوع، می‌توان دو مثلثی را درنظر گرفت که به‌وسیلهٔ یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع اصلی، به‌وجود آمده‌اند و، سپس، به آن چه در مورد نمایش مثلث گفته‌ایم، توجه کرد.

۳. ذوزنقه. از ویژگیهای تصویر موازی نتیجه می‌شود که نمایش یک ذوزنقه، ذوزنقهٔ دیگری است که، در آن، نسبت طولهای دو قاعده، ثابت می‌ماند.

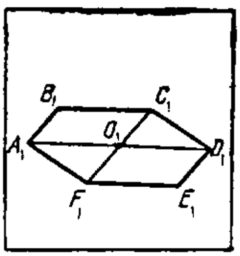
مسألهٔ ۲. روی تصویر یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، تصویر ارتفاع را پیدا کنید.



شکل ۱۴

حل: ذوزنقهٔ $A_1B_1C_1D_1$ را نمایش یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌گیریم (شکل ۱۴، a). در ذوزنقهٔ اصلی (شکل ۱۴، b)، ارتفاع DE موازی محور تقارن MN است (M و N، نقطه‌های وسط دو قاعده‌اند). چون در تصویر موازی، خطهای راست موازی، موازی باقی می‌مانند؛ در ضمن، نسبت پاره‌خطها، درحالت موازی بودن آنها، تغییر نمی‌کند، بنابراین ارتفاع ذوزنقهٔ $A_1B_1C_1D_1$ را می‌توان به این ترتیب ساخت: ۱) نقطه‌های M_1 و N_1، وسط پاره‌خطهای راست A_1B_1 و D_1C_1 را پیدا می‌کنیم؛ ۲) خط راست M_1N_1 را رسم می‌کنیم؛ ۳) پاره‌خط راست D_1E_1 را موازی (M_1N_1) رسم می‌کنیم.

۴. شش ضلعی منتظم. شش ضلعی منتظم ABCDEF را درنظر می‌گیریم. محل برخورد قطرهای AD و FC، مرکز تقارن شش ضلعی است، بنابراین، لوزیهای ABCD و DEFO نسبت به نقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند.



شکل ۱۵

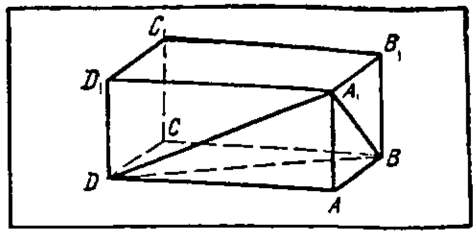
لوزی ABCD، در تصویر، به‌صورت متوازی‌الاضلاعی مثل $A_1B_1C_1D_1$ درمی‌آید (شکل ۱۵). نقطه‌هایی که نسبت به مرکز O قرینهٔ یکدیگرند، در تصویر، قرینهٔ هم، نسبت به نقطهٔ O_1 درمی‌آیند. (بخش ۱۰، ویژگی ۳). به این ترتیب، برای به‌دست آوردن بقیهٔ رأسهای تصویر، کافی است نقطه‌های D_1 (قرینهٔ A_1 نسبت به O_1)، E_1 (قرینهٔ B_1 نسبت به O_1) و F_1 (قرینهٔ C_1 نسبت به O_1) را پیدا کنیم. قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر را معمولاً با حرف Z نشان می‌دهند و این‌طور می‌نویسند:

$$D_1 = Z_{O_1}(A_1) \quad , \quad E_1 = Z_{O_1}(B_1) \quad , \quad F_1 = Z_{O_1}(C_1)$$

در این‌صورت، شش ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ، نمایش مطلوب است.

۵. چهاروجهی. اگر مُدل یک چهاروجهی را، مثلاً با مقوا، تهیّه کنیم و سایهٔ آن را، با تغییر موقعیت چهاروجهی، روی دیوار، مورد مطالعه قرار دهیم، می‌توانیم قانون نمایش آن را به این صورت تنظیم کنیم: **یالهای یک چهاروجهی، در نمایش مسطحهٔ آن، به‌صورت ضلعها و قطرهای یک چهارضلعی درمی‌آیند.**

۶. متوازی‌السطوح. فرض می‌کنیم، متوازی‌السطوح AC_1 داده شده باشد. یالهای AB ، AD و AA_1 را، که در یک رأس به هم رسیده‌اند، درنظر می‌گیریم و به چهاروجهی A_1ABD توجه می‌کنیم. با استفاده از قانون نمایش چهاروجهی، به این نتیجه می‌رسیم که نمایش یالهای AB ، AD و AA_1 را می‌توان به‌صورت سه پاره‌خط راستی نشان داد که از یک نقطه آغاز شده‌اند (شکل ۱۶)؛ ولی هیچ دو تایی از آنها، روی یک خط راست نیستند.



شکل ۱۶

با مشخص کردن این سه پاره‌خط راست، وضع متوازی‌السطوح در نمایش مسطحهٔ خود، مشخص می‌شود. هریک از یالهای دیگر، با یکی از این سه پاره‌خط راست موازی است و طولی برابر آن دارد (ویژگیهای ۱ تا ۳ از بخش ۱۰).

پرسشها و مسأله‌ها

۹۳. $A_1B_1C_1$ را نمایش مثلث ABC می‌گیریم. آیا ارتفاع مثلث $A_1B_1C_1$، نمایش ارتفاع مثلث ABC است؟

۹۴. یک مثلث متساوی‌الساقین را طوری تصویر کنید که، در تصویر، به‌صورت یک مثلث متساوی‌الاضلاع درآید. در این تصویر، پیدا کنید: ۱) تصویر نیمساز زاویهٔ رأس؛ ۲) تصویر پاره‌خط راستی که از وسط ساق بر قاعده عمود شده است.

۹۵. در تصویر یک مثلث دلخواه، تصویر ارتفاع و تصویر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث اصلی را پیدا کنید.

۹۶. ۱) در مثلث ABC می‌دانیم، نسبت طولهای دو ضلع AB و BC برابر $\frac{2}{3}$ است. نمایش این مثلث و نمایش نیمساز زاویهٔ B از آن را پیدا کنید؛ ۲) نسبت طول ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ AC و BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر $\frac{3}{4}$ است. نمایش مرکز دایرهٔ محاطی این مثلث را پیدا کنید.

۹۷. ۱) آیا ممکن است نمایش یک چهارضلعی، یک چهارضلعی دلخواه باشد؟ ؛ ۲) آیا ممکن است نمایش یک ذوزنقه، یک متوازی‌الاضلاع باشد؟ ؛ ۳) آیا ممکن است نمایش یک لوزی، یک مربع باشد؟

۹۸. ۱) چه ویژگیهایی از لوزی، ضمن نمایش تصویری آن، حفظ می‌شود و چه ویژگیهایی از آن تغییر می‌کند؟ ؛ ۲) چه ویژگیهایی از مستطیل، ضمن نمایش تصویری آن، حفظ می‌شود؟

۹۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی مفروض است. نمایش تصویری آن را پیدا کنید و، سپس، نمایش مربعی را پیدا کنید که ضلع آن: ۱) ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث مفروض؛ ۲) وتر مثلث مفروض باشد.

۱۰۰*. در چهارضلعی ABCD ، طول همه یالها با هم برابرند و k ، وسط یال BD است. ۱) خطهای راست KM و KN را، به‌ترتیب، بر (AD) و (DC) عمود کرده‌ایم (M و N ، پای عمودها هستند)؛ ۲) نقطهٔ برخورد صفحهٔ KMN را با خط راستی که از نقطهٔ D به محل برخورد میانه‌های وجه مقابل وصل می‌کند، نشان دهید؛ ۳) مساحت مثلث KMN را پیدا کنید، به‌شرطی که طول هر یال چهاروجهی برابر a باشد.

۱۰۱. ۱) مقطع مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را با صفحه‌ای که از وسط یالهای BC ، AA_1 و CC_1 گذشته است، مشخص کنید؛ ۲)

* در این مسأله و برخی مسأله‌های دیگر، واژهٔ «نمایش» یا «نمایش تصویری» را انداخته‌ایم.

اگر طول هر یال مکعب برابر A باشد، طول ضلعهای مقطع را پیدا کنید.

۱۰۲. در مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، طول یالهای AB ، BC ، BB_1 متناسبند با عددهای ۳، ۲، ۱. مطلوب است نقطهٔ برخورد ۱) یال AB با نیمساز زاویهٔ BB_1A ؛ ۲) خط راست CC_1 با نیمساز زاویهٔ BB_1C_1 .

۱۲. مسأله‌های اضافی

اصل موضوعها و نتیجه‌های آن

۱۰۳. چهار نقطه را درنظر می‌گیریم که هیچ سه‌تایی از آنها، روی یک خط راست نباشند. چند خط راست متفاوت می‌توان رسم کرد که، هریک از آنها، از دو نقطهٔ مفروض بگذرد؟

۱۰۴. چهار نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه داده شده‌اند. چند صفحهٔ مختلف می‌توان رسم کرد به‌نحوی که، هریک از آنها، از سه نقطهٔ مفروض بگذرد؟

۱۰۵. آیااین گزاره‌درست است: ۱) هرسه نقطه‌ای به‌یک صفحه تعلق دارند، ۲) از هر سه نقطهٔ دلخواه، تنها یک صفحه عبور می‌کند؟

۱۰۶. آیا ممکن است، دو صفحه دارای دو خط راست مشترک باشند؟

۱۰۷. آیا این گزاره درست است: اگر خط راستی با هر یک از خطهای راست متقاطع، نقطهٔ مشترکی داشته باشد؛ با این خطهای راست، در یک صفحه قرار دارد؟

۱۰۸. نقطه‌های A ، B ، C ، و D ، غیرواقع بر یک صفحهٔ مفروضند. ثابت کنید، وسط پاره‌خطهای راست AB ، BC ، CD و DA روی یک صفحه‌اند. این نقطه‌ها، رأسهای چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

۱۰۹. در چهاروجهی ABCD ، نقطه‌های M و N ، به‌ترتیب، درون یالهای AC و BC قرار دارند، در ضمن، $(AB) \nparallel (MN)$. اگر نقطهٔ P ، در درون وجه ABD باشد، مقطع چهاروجهی ABCD را با صفحهٔ MNP پیدا کنید.

خطهای راست متنافر

۱۱۰. $[BC_1]$ قطر وجه BCC_1B_1 از منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ است. با استفاده از معیار شناسایی خطهای راست متنافر، خطهای راستی را نام ببرید که: ۱) با (BB_1) ؛ ۲) با (AC) ؛ ۳) با (BC_1) متنافر باشند.

۱۱۱. می‌دانیم دو خط راست p و q با هم متنافرند و خط راست r ، خط راست p را قطع می‌کند. موقعیت دو خط راست q و r ، نسبت به هم، چگونه می‌تواند باشد؟

۱۱۲. می‌دانیم $\alpha \cap \beta = m$ ، $a \subset \alpha$ ، $b \cap \alpha = a$. موقعیت خطهای راست a و b ، نسبت به هم، چگونه می‌تواند باشد؟

۱۱۳. دو خط متنافر a و b و نقطهٔ M ، که روی a یا b نیست، مفروضند. آیا خط راستی وجود دارد که از نقطهٔ M بگذرد و هریک از دو خط راست a و b را قطع کند؟

خطهای راست و صفحه‌های موازی

۱۱۴. مربع ABCD قاعدهٔ هرم قائم SABCD را تشکیل می‌دهد. M و N ، به‌ترتیب، وسط یالهای SB و SC هستند. نشان دهید: ۱) خطهای راست موازی با صفحهٔ ABC ؛ ۲) خطهای راست موازی با صفحهٔ ASD ؛ ۳) صفحه‌های موازی با خط راست AB.

۱۱۵. خط راست a ، صفحهٔ α را قطع می‌کند. آیا روی صفحهٔ α می‌توان خط راستی موازی با a رسم کرد؟

۱۱۶. موقعیت خط راست a ، نسبت به صفحهٔ α ، چگونه است، اگر خط راست a خط راستی واقع بر صفحهٔ α ، نسبت به هم متنافر باشند؟

۱۱۷. خط راست a با صفحهٔ α موازی است. ثابت کنید، اگر از نقطهٔ M واقع بر صفحهٔ α ، خط راستی موازی با a رسم کنیم، روی صفحهٔ α قرار دارد.

۱۱۸. یک صفحه و خط راستی موازی با آن، که روی صفحه نیست، مفروضند. ثابت کنید، پاره خطهای راست موازی با هم، که بر خط راست و صفحهٔ مفروض تکیه دارند، طولهایی برابر دارند.

۱۱۹. مقطع چهاروجهی ABCD را با صفحه‌ای که از نقطهٔ M واقع در درون صفحهٔ ABC موازی با خطهای راست AB و DC رسم شده است، پیدا کنید.

۱۲۰. هرم منتظم SABCD مفروض است. مطلوب است مقطع آن ۱) با صفحه‌ای که از (BC) و نقطهٔ M واقع بر مثلث SAD می‌گذرد؛ ۲) با صفحه‌ای که از نقطهٔ O واقع بر قاعده، موازی صفحهٔ SAB رسم شده است. اگر $|AB| = a$ و $|SA| = b$ باشد، محیط مقطع را پیدا کنید.

صفحه‌های موازی

۱۲۱. موقعیت دو صفحهٔ α و β، نسبت به هم، چگونه است، اگر: ۱) خط راستی واقع در صفحهٔ α، با صفحهٔ β موازی باشد؛ ۲) هر خط راست واقع در صفحهٔ α، با صفحهٔ β موازی باشد، ۳) خط راستی که صفحهٔ α را قطع کرده است، با صفحهٔ β موازی باشد؟

۱۲۲. آیا این گزاره‌ها درستند: ۱) اگر صفحه‌های α و β موازی باشند و خط راستی متعلق به صفحهٔ α باشد، آن‌وقت این خط راست با صفحهٔ β موازی است؛ ۲) اگر دو خط راستی که، یکی بر α و دیگری بر β قرار دارد، نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، آن‌وقت دو صفحهٔ α و β موازیند؟

۱۲۳. متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. ثابت کنید: ۱) $(A_1DB) \parallel (D_1CB_1)$؛ ۲) $(A_1BC_1) \parallel (ACD_1)$.

۱۲۴. صفحه‌های موازی α و β مفروضند. از نقطهٔ M، که بر هیچ یک از این دو صفحه واقع نیست، خطهای راست a و b را، به‌نحوی رسم کرده‌ایم که صفحهٔ α را در نقطه‌های A_1 و B_1، و صفحهٔ β را در نقطه‌های A_2 و B_2 قطع کنند. می‌دانیم $|MA_1| = ۸$، $|A_1A_2| = ۱۲$، $|A_2B_2| = ۲۵$. مطلوب است محاسبهٔ $|A_1B_1|$.

۱۲۵. مقطع متوازی السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را با صفحهٔ MNP پیدا کنید، به‌شرطی که نقطه‌های M و N و P، به‌ترتیب، متعلق به یال AB، وجه AA_1D_1D و وجه BB_1C_1C باشند.

۱۲۶. در چهاروجهی ABCD، رأس D را به نقطهٔ M، محل برخورد میانه‌های وجه ABC، وصل کرده‌ایم. ۱) مقطع چهاروجهی را با صفحه‌ای پیدا کنید که از نقطهٔ N وسط پاره‌خط راست DM، موازی با وجه BCD رسم شده است؛ ۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به‌شرطی که طول هر یال چهاروجهی برابر a باشد.

۱۲۷. روی سه یال دو به دو متنافر متوازی‌السطوح، سه نقطه انتخاب کرده‌ایم. مقطع متوازی‌السطوح را با صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، پیدا کنید.

۱۲۸. آیا ممکن است، مقطع مکعب: ۱) مثلثی متساوی‌الاضلاع؛ ۲) مربع؛ ۳) پنج ضلعی منتظم؛ ۴) شش‌ضلعی منتظم؛ ۵) هفت ضلعی منتظم باشد؟

تصویر موازی، نمایش شکلها

در مسأله‌های از ۱۲۹ تا ۱۳۱، حالتهایی را هم درنظر بگیرید که، خط راستی که تصویر موازی با آن صورت می‌گیرد، بتواند با صفحهٔ تصویر و یا با صفحهٔ شکل مسطحه، موازی باشد.

۱۲۹. در تصویر موازی، تصویر ۱) نقطه؛ ۲) خط راست؛ ۳) پاره‌خط راست؛ ۴) نیم خط راست؛ ۵) زاویه؛ ۶) صفحه، به چه صورتی درمی‌آید؟

۱۳۰. در تصویر موازی، تصویر ۱) مثلث؛ ۲) ذوزنقه؛ ۳) چهاروجهی؛ ۴) متوازی‌السطوح، چه شکلی می‌تواند باشد؟

۱۳۱. تصویر زاویهٔ ABC، ضمن تصویر موازی، به‌صورت ۱) نیم خط راست B_1A_1؛ ۲) خط راست A_1C_1؛ ۳) زاویهٔ $A_1B_1C_1$ درآمده است. در کدام یک از این حالتها، نگاشتی معکوس پذیر از شکل مفروض بر تصویر خود است؟

۱۳۲. خطهای راست متنافر a و b را، روی صفحه‌ای که هر دو خط راست را قطع کرده است، تصویر کرده‌ایم؛ درضمن، خط راست a را موازی با b و خط راست b را موازی با a. ثابت کنید تصویرها با هم موازیند.

فیثاغورس و هوش آزمایی فرزندان در تعطیلات تابستانی*

ترجمه: حسن نصیرنیا**

در یک تابستان که فیثاغورس و فرزندانش سرگرم گذراندن تعطیلات در جزیرهٔ «کِرت» بودند، او در ساحل نشسته بود و بانگاههای تحسین آمیز، به مثلث قائم‌الزاویه‌ای که روی شنها کشیده بود می‌نگریست. در همین هنگام، سه پسر او از کلبهٔ ساحلیِ محلِ اقامتشان شتابان به سوی پدر آمدند.

فیثاغورس با دیدن آنها به صدای بلند گفت: «پیش پایتان را ببینید، این قدر شلوغ و بی‌نزاکت نباشید.»

پسر بزرگ در حالی که غُرولند می‌کرد، گفت: «دیگر مثلثهای قائم‌الزاویه بس است، آخر ما داریم تعطیلاتمان را می‌گذرانیم!»

پدر گفت: کمی تأمل کنید، من یک مسأله برای شما دارم، درست از نوع مسائلی که برای فرزندان یک نابغه مناسب است.»

فرزند میانی که تسلیم خواستهٔ پدر شده بود، گفت: «باشد! مسأله را طرح کن چون اگر حالا آن را حل نکنیم، بعدها ناگزیر از انجام آن خواهیم شد.»

پدر گفت: «به عقیدهٔ من، شما نسبت به من و ریاضیات تکلیفی دارید که با انجام دادن آن، نام خانوادهٔ ما را زنده نگه خواهید داشت.»

پسرکوچک پرسید: «تکلیف؟ ما چه باید بکنیم؟»

پدر گفت: «به مثلثی که کشیده‌ام نگاه کنید. از شما می‌خواهم یک مثلث مختلف‌الاضلاع روی شن بکشید که با مثلث قائم‌الزاویه‌ای که من کشیده‌ام، و وجه تشابه داشته باشد. یعنی اولاً: با آن هم محیط باشد و ثانیاً: مجموع مساحتهای سه مربعی که بر روی سه ضلعِ آن می‌سازید، با کلِّ مساحتهای سه مثلثی که بر روی ضلعهای مثلث من ساخته می‌شود، برابر باشد. این بیش از یک راه حل دارد و من برای مثلثی که کوچکترین مساحت را داشته باشد، جایزه‌ای در نظر گرفته‌ام.»

دو پسر بزرگتر با بی‌میلی دست به کار شدند و گه‌گاه با حیرت، به برادر کوچک خود می‌نگریستند که تنها یک خط راست کشیده بود و موشکافانه به آن نگاه می‌کرد. وقتی هر یک از آن دو راه‌حلی یافتند، پدر را فراخواندند.

پدر که مثلثِ پسرِ بزرگ را بررسی کرده بود، به او گفت: «بسیار خوب، آفرین!» به پسر میانی نیز گفت: «عالی است! مساحت مثلث تو حتی کوچکتر از مساحت مثلثِ برادرت است.»

پسر میانی که تحسین پدر را شنید، پرسید: «جایزه به من تعلّق می‌گیرد؟»

پدر گفت: «بگذارید ببینم برادر کوچکتان چه کرده است؟»

دو پسرِ بزرگتر اعتراض‌کنان گفتند: «اما او فقط یک خطِّ راست کشیده است!»

پدر گفت «خاموش! بگذارید او هم حرف بزند.»

پسر کوچک که چشمانش برق می‌زد، گفت: «متأسفم از این که نتوانستم تکلیفم را نسبت به شما ادا کنم. مثلث من اصلاً مساحتی ندارد. می‌توانم ادعا کنم که دو شرط دیگر شما را برآورده کرده‌ام؟»

پدر با تردید پرسید: «چرا این سؤال را می‌کنی؟»

پسر گفت: «اگر چنین باشد، یک مثلث قائم‌الزاویهٔ حتی کوچکتر هست که به راه حلی مشابه منجر می‌شود. با این حال، مثلث قائم‌الزاویه

---

* برگرفته شده از کتاب: «سرگرمیهای علمی و آموزشی (جلد اوّل)، گردآورنده و مترجم حسن نصیرنیا، انتشارات مدرسه، چاپ سوّم، زمستان ۱۳۷۰»

** منبع ترجمه: Mathematics in School Magazine

کوچکتر، این اشکال را دارد که آن نوع راه‌حلهایی را که برادرانم پیشنهاد کردند، به دست نمی‌دهد.»

برادر میانی گفت: «او دارد کَلَک می‌زند! چگونه می‌توان گفت یک خطِّ مستقیم یک مثلث است؟»

برادر بزرگ گفت: «البته که نمی‌توان چنین ادعایی کرد! همه می‌دانند که مجموع هر دو ضلع یک مثلث، باید از ضلع ثالث بزرگتر باشد. این آشکارا به معنای آن است که سه ضلع نمی‌توانند با هم برابر باشند.»

در تمام این مدّت، پدر فرزند کوچکش را تماشا می‌کرد که آرام ایستاده بود و رضایت و خرسندی خاصی در چهره‌اش دیده می‌شد.

سپس از او پرسید: «فرزندم، چیز دیگری داری که بگویی؟»

پسر با خنده گفت: «بلی، من در این مطلب پافشاری نخواهم کرد. اتفاقاً من می‌توانم برای مسأله دو راه حلّ درست ارائه دهم به طوری که مساحتهای هر دو مثلث من، کمتراز مساحتهای پیشنهادی برادرانم باشد. بنابراین، من هنوز می‌توانم مدّعی دریافت جایزه باشم.»

پدر گفت: «همهٔ شما بخوبی از عهدهٔ این کار برآمدید و مایهٔ سرافرازی و مباهات من هستید. اما زیاد در فکر جایزه نباشید، چون به قدر کافی آزموده هستید که هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید. حالا مثلثی بکشید (کوچکترین مثلث ممکن) که تنها یک راه‌حل پذیرفتنی برای مسألهٔ پیشنهادی من باشد.»

ساعتهای بعد، پس از آن‌که فیثاغورس نتیجه کار سه فرزند خسته و کسل خود را بررسی کرد، به پسر کوچک گفت: «تکبر عَزازیل را خوار کرد![1] این بار تو سربلند نشدی.»

پسر گفت: «امّا هر دو مثلث قائم‌الزاویه و مثلث مختلف‌الاضلاع من کوچکتر از مثلثهای برادرانم است.»

پدر گفت: «درست است، اما آنان قواعد خواسته شده را رعایت کرده‌اند و چندین راه‌حل یافته‌اند که در میان آنها، فقط یک پاسخ پذیرفتنی است و تو که از موفقیّت سرخوش بودی، فراموش کردی به این نکته توجه کنی که برای مثلث قائم‌الزاویه‌ات دو راه‌حل وجود دارد.»

فرزند کوچک با شنیدن سخنان پدر، دلگیر شد. امّا فیثاغورس به او گفت: «این قدر دل آزرده مباش! من براستی از همهٔ شما خشنودم.»

پسر گفت: «چه خوب! حالا می‌توانیم برویم شنا کنیم؟»

پدر گفت: «البته که می‌توانید! حال بروید استراحت کنید. امّا برای فردای شما مسأله‌ای دارم که در مقایسه با مسألهٔ امروز، چیزی بیش از صرفاً یک مسألهٔ انحرافی یا ابهام‌آمیز نیست. آن مسأله این است:

یک مثلث قائم الزاویه و یک مثلث مختلف‌الاضلاع با محیطهای نابرابر، چنان رسم کنید که مجموع مربعهای سه ضلع یکی، با مجموع مربعهای سه ضلعِ مربع دیگر برابر باشد. به یاد داشته باشید که طول هیچ یک از شش ضلع دو مثلث نباید با یکدیگر برابر باشد. حال می‌توانید بروید و خوش بگذرانید» (پاسخ معماها را در صفحه ۵۴ مجلّه ببینید.)

---

[1] ـ در این‌جا فیثاغورس جمله‌ای قصار از کتاب مقدس را باز می‌گوید که معادل فارسی آن ـ که از سعدی برگرفته شده است ـ جملهٔ: «تکبر عزازیل را خوار کرد.» است. عزازیل، یا به قولی ابلیس، نام فرشته‌ای است که از اطاعت خداوند سرپیچی کرد و کافر شد. (م.)

ادب ریاضی

ریمان یعنی موجد افکاری که موهای ریاضی‌دانان را روی سرشان بلند کرده بود از لحاظ ظاهر قیافهٔ شخص انقلابی را نداشت. وی جوان بیست و هشت ساله‌ای بود که حجب و حیا در او به مرتبهٔ مرض رسیده بود و از عایدات درسهای خصوصی که می‌داد با نهایت فقر و فلاکت زندگی می‌کرد. بعد از آن‌که در سال ۱۸۵۴ میلادی تتبعات خود را انتشار داد توانست اندکی کره روی نان خالی خود بمالد، اما افسوس که از این وضع استفاده شایانی نکرد زیرا از مرض سل رنج فراوان می‌برد و مجبور شد برای استراحت به ایتالیا رود و در آن‌جا هر وقت که از چنگ مرض فراغتی می‌یافت کار می‌کرد و آخرین روزهای عمر خود را در کنار دریاچهٔ ماژور گذرانید. روز ۲۰ ژوئیه ۱۸۶۶ میلادی در نهایت افتخار و در منتهای جوانی زندگی را بدرود گفت.

تاریخ علوم ـ حسن صفاری

مثلث ارتفاعیه

● ساسان اسماعیلی شاهرودی (دبیرستان سروش)

مثلث ارتفاعیه چیست؟

تعریف: اگر پای ارتفاعهای یک مثلث را به هم وصل کنیم، مثلثی بوجود می‌آید که مثلث ارتفاعیه نام دارد و ویژگیهای زیر را داراست. (تذکر: مثلث ABC مثلث اصلی و مثلث HKL مثلث ارتفاعیه نام دارد)

ویژگی اوّل:

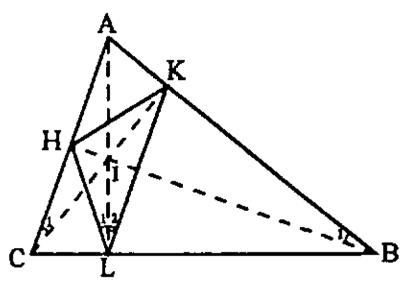
ارتفاعهای مثلث ABC، نیمسازهای زوایای مثلث ارتفاعیه‌اند.

چهارضلعی HKBC محاطی است زیرا نقاط H و K ضلع BC را با زاویه $\frac{\pi}{2}$ رؤیت می‌کنند. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود چهارضلعیهای IKBL و HILC نیز محاطی هستند.

$$\text{HKBC} \text{ محاطی} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

$$\text{IKBL} \text{ محاطی} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{L}_2 \Rightarrow \hat{L}_1 = \hat{L}_2$$

$$\text{HILC} \text{ محاطی} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{L}_1$$

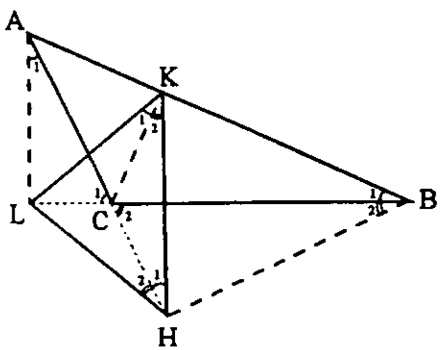


لذا AL نیمساز زاویهٔ L می‌باشد. برای دو رأس دیگر نیز به‌همین صورت اثبات می‌کنیم. این ویژگی در مثلث منفرجة الزاویه به‌صورت زیر است:

ارتفاع نظیر زاویه منفرجه و امتداد دو ضلع دیگر، نیمسازهای زوایای مثلث ارتفاعیه‌اند.

چهارضلعی AKCL محاطی است لذا:

$$\begin{cases} \hat{K}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{A}_1 + \hat{C}_2 = \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{B}_2 \quad (I)$$



چهارضلعی KBHC محاطی است لذا:

$$\hat{K}_2 = \hat{B}_2 \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{K}_2$$

پس ارتفاع نظیر زاویه منفرجه نیمساز زاویه مقابل خود است.

چون داریم $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$ لذا چهارضلعی ABHL محاطی است پس:

$$\hat{B}_1 = \hat{H}_2 \quad (III)$$

چهارضلعی KBHC محاطی است پس:

$$\hat{B}_1=\hat{H}_1 \quad (IV)$$

$$(III),(IV) \quad \Rightarrow \quad \hat{H}_1=\hat{H}_2$$

لذا AH امتداد AC ، نیمساز زاویهٔ H می‌باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود امتداد ضلع BC نیز نیمساز زاویه سوم مثلث ارتفاعیه است.

ویژگی دوّم:

مرکز ارتفاعیه مثلث ABC بر مرکز دایره محاطی مثلث ارتفاعیه منطبق است.

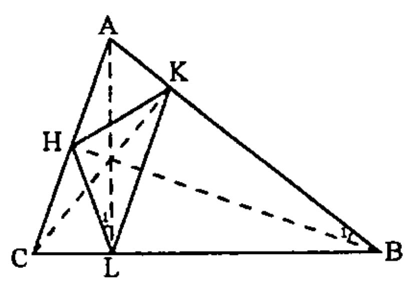
در ویژگی قبل اثبات شد که سه ارتفاع مثلث ABC نیمساز زوایای مثلث HKL هستند پس I که مرکز ارتفاعیه مثلث ABC است، مرکز دایره محاطی مثلث ارتفاعیه نیز می‌باشد. (در مثلث منفرجة‌الزاویه این ویژگی برقرار نیست.)

ویژگی سوّم:

اندازهٔ زوایای مثلث ارتفاعیه به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} 2\hat{L}_1=\hat{L} \\ \hat{L}_1=\hat{B}_1 \\ \hat{B}_1=\dfrac{\pi}{2}-\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \hat{L}=\pi-2\hat{A}$$

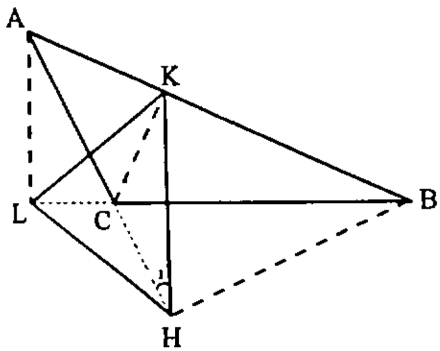
به همین ترتیب اثبات می‌شود: $\hat{H}=\pi-2\hat{B}$ و $\hat{K}=\pi-2\hat{C}$



حال به بررسی این ویژگی در مثلث منفرجة‌الزاویه می‌پردازیم.

$$\begin{cases} 2\hat{H}_1=\hat{H} \\ \hat{H}_1=\hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{H}=2\hat{B}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود: $\hat{L}=2\hat{A}$



و در مورد زاویهٔ دیگر داریم:

$$\hat{K}=\pi-\hat{L}-\hat{H}$$
$$=\pi-2\hat{A}-2\hat{B}$$
$$=\left(\pi-\hat{A}-\hat{B}\right)-\hat{A}-\hat{B}$$
$$\hat{K}=\hat{C}-\hat{A}-\hat{B}$$

ویژگی چهارم:

شعاع دایره محیطی مثلث ABC دو برابر شعاع دایره محیطی مثلث ارتفاعیه است.

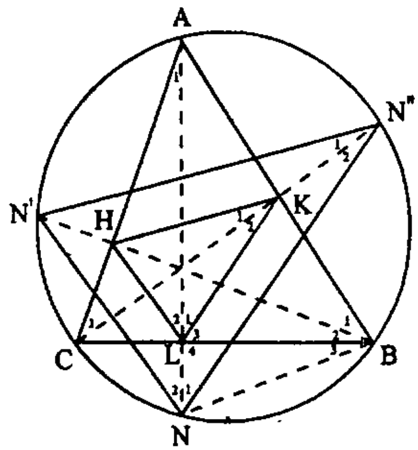
ارتفاعهای مثلث ABC را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث ABC را در نقاط N و N′ و N″ قطع کنند.

محاطی IKBL $\Rightarrow \hat{K}_2=\hat{B}_2$

$$\hat{B}_2=\hat{N''}_1 \quad \Rightarrow \hat{K}_2=\hat{N''}_1$$

محاطی AKIH $\Rightarrow \hat{K}_1=\hat{A}_1$

$$\hat{A}_1=\hat{N''}_2 \quad \Rightarrow \hat{K}_1=\hat{N''}_2$$



$$\hat{K}_2 = \hat{N''}_1$$

$$\hat{K}_1 = \hat{N''}_2 \quad \Rightarrow \hat{N''}_1 = \hat{N''}_2 \ , \ \hat{K} = \hat{N''}$$

$$\hat{K}_1 = \hat{K}_2$$

به همین ترتیب ثابت می‌کنیم $\hat{L} = \hat{N}$ و نتیجه می‌گیریم:

$$N\overset{\triangle}{N'}N'' \sim H\overset{\triangle}{K}L$$

و از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}_2 = \hat{N''}_1 \\ \hat{B}_3 = \hat{N''}_2 \\ \hat{N''}_1 = \hat{N''}_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{B}_3$$

$$\begin{cases} BL = BL \\ \hat{B}_2 = \hat{B}_3 \\ \hat{L}_1 + \hat{L}_3 = \hat{L}_4 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow B\overset{\triangle}{L}N = B\overset{\triangle}{L}I \ \Rightarrow LI = LN$$

$$LI = LN \ \Rightarrow LI = \frac{NI}{2} \ \Rightarrow \frac{LI}{NI} = \frac{1}{2} = m$$

(که m نسبت تشابه دو مثلث HKL و NN'N" می‌باشد.)

$$m = \frac{1}{2} = \frac{R'}{R} \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{R}{2}$$

(تذکر: R شعاع دایره محیطی مثلث ABC و R' شعاع دایره محیطی مثلث ارتفاعیه است.)

در اثبات این ویژگی نتیجه می‌گیریم قرینهٔ مرکز ارتفاعیه نسبت به اضلاع مثلث ABC بر روی دایره محیطی آن مثلث واقع است.

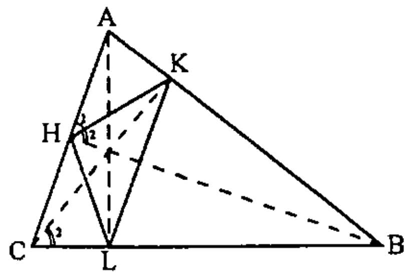
ویژگی پنجم:

با رسم مثلث ارتفاعیه سه مثلث به‌وجود می‌آیند که با مثلث ABC متشابه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \frac{\pi}{2} - \hat{H}_2 \\ \hat{C}_2 = \frac{\pi}{2} - \hat{B} \\ \text{محاطی } HKBC \Rightarrow \hat{H}_2 = \hat{C}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hat{H}_1 = \hat{B}$$

$$\hat{A} = \hat{A} \quad \Rightarrow A\overset{\triangle}{K}H \sim A\overset{\triangle}{B}C$$



به همین ترتیب ثابت می‌شود:

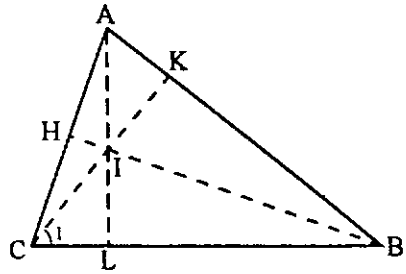
$$H\overset{\triangle}{L}C \sim A\overset{\triangle}{B}C \quad \text{و} \quad K\overset{\triangle}{B}L \sim A\overset{\triangle}{B}C$$

اگر $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$ باشد، آنگاه: $H\overset{\triangle}{K}L \sim A\overset{\triangle}{B}C$

ویژگی ششم:

مرکز ارتفاعیه هر مثلث اضلاع BC، AC، و AB را به‌ترتیب با زوایای $\pi - \hat{A}$ ، $\pi - \hat{B}$ و $\pi - \hat{C}$ رؤیت می‌کند.

$$\begin{cases} A\hat{I}C = \pi - L\hat{I}C \\ L\hat{I}C = \frac{\pi}{2} - \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1 = \frac{\pi}{2} - \hat{B} \end{cases} \Rightarrow A\hat{I}C = \pi - \hat{B}$$



به همین ترتیب ثابت می‌کنیم:

$$A\hat{I}B = \pi - \hat{C} \quad \text{و} \quad B\hat{I}C = \pi - \hat{A}$$

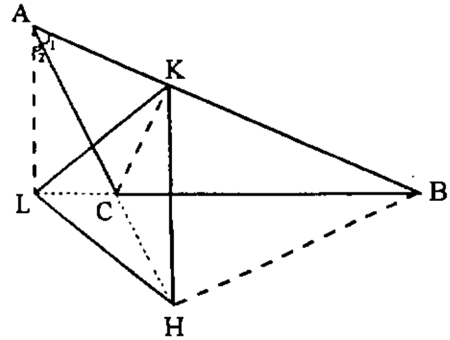
این ویژگی در مثلث منفرجة الزاویه به‌صورت زیر مطرح است:

محاطی AKCL :

$$K\hat{C}L = \pi - \hat{A}_1 - \hat{A}_2 \quad (I)$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\pi}{2} - \hat{B} \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow K\hat{C}L = \frac{\pi}{2} + \hat{B}$$



به همین ترتیب ثابت می‌شود: $K\hat{C}H = \frac{\pi}{2} + \hat{A}$

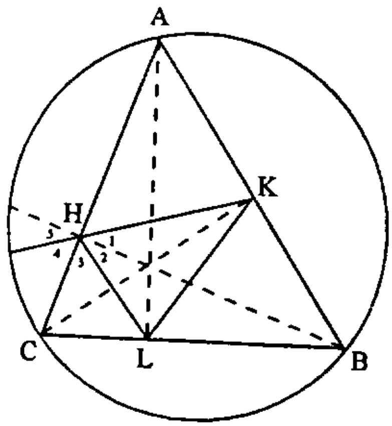
از طرفی $\hat{C}$ و $L\hat{C}H$ متقابل به رأسند پس: $L\hat{C}H = \hat{C}$

بنابراین در مثلث منفرجة‌الزاویه، رأس منفرجه سه ضلع HK ، KL و HL از مثلث ارتفاعیه را به‌ترتیب با زوایای $\frac{\pi}{2} + B$ ، $\frac{\pi}{2} + A$ و C می‌بینند.

ویژگی هفتم:

اضلاع مثلث ABC، نیمساز زوایای خارجی مثلث ارتفاعیه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{H}_5 = \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 = \hat{H}_1 \\ \hat{H}_5 + \hat{H}_4 = \frac{\pi}{2} \\ \hat{H}_2 + \hat{H}_3 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{H}_3 = \hat{H}_4$$



لذا AC نیمساز زاویهٔ خارجی $\hat{H}$ از مثلث ارتفاعیه است. برای دو ضلع دیگر نیز به همین شکل ثابت می‌کنیم.

در مثلث منفرجة‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه منفرجه و دو ارتفاع نظیر زوایای حاده، نیمساز خارجی زوایای مثلث ارتفاعیه‌اند.

ادامه دارد

توابع گزاره‌ای و سورها

غلامرضا یاسی‌پور

ادامهٔ شمارهٔ قبل

اوّلین آنها، یعنی قضیّهٔ A، را می‌توان متوالیاً به صورت زیر تفسیر:

با معلوم بودن هر شیء فردی، اگر این (شیء) انسان باشد در این صورت میراست.

با معلوم بودن هر x، اگر x انسان باشد در این صورت x میراست.

با معلوم بودن هر x، x انسان است $\supset$ x میراست

و بالاخره به صورت:

$$(x)\ [\ Hx \supset Mx\ ]$$

علامتی کرد.

تنظیم علامتی قضیّهٔ A مان تسویر عمومی تابع گزاره‌ای مختلط «$Hx \supset Mx$»ی است که به عنوان مثالهای جانشینش نه قضایای فردی بلکه قضایای شرطی‌ای که مقدم و تالیشان قضایای فردی‌ای هستند که موضوعات یکسانی دارند را داراست. در میان مثالهای جانشین تابع گزاره‌ای «$Hx \supset Mx$» شرطیهای «$Ha \supset Ma$»، «$Hb \supset Mb$»، «$Hc \supset Mc$» و غیره قرار دارند. در علامتی کردن قضیهٔ A از کروشه‌ها به عنوان علامات جداسازی، برای دلالت کردن به این‌که سور عمومی «(x)» در مورد تمام تابع گزاره‌ای مختلط «$Hx \supset Mx$» به کار می‌رود یا تمام این تابع را در قلمرو خود دارد، استفاده می‌شود. علامت قلمرو یک سور بسیار مهم است، چه تفاوت در قلمرو متناظر با تفاوت در معنی است. عبارت «$(x)\ [Hx \supset Mx]$» قضیه‌ای است که ادعا می‌کند تمام مثالهای جانشین تابع گزاره‌ای «$Hx \supset Mx$» راست‌اند. در صورتی که عبارت «$(x)\ Hx \supset Mx$» تابع گزاره‌ای‌ای است که در مثالهای جانشینش «$(x)\ Hx \supset Ma$»، «$(x)\ Hx \supset Mb$»، «$(x)\ Hx \supset Mc$» و غیره می‌باشد[1].

قضیّه E یعنی «هیچ انسانی میرا نیست» را می‌توان به همین ترتیب و متوالیاً به صورت زیر تفسیر:

با معلوم بودن هر شیء فردی، اگر آن (شیء) انسان است در این صورت میرا نیست.

با معلوم بودن هر x، اگر x انسان است در این صورت x میرا نیست.

با معلوم بودن هر x، x انسان است $\supset$ x میرا نیست.

و سپس به صورت:

$$(x)\ [Hx \supset \sim Mx]$$

علامتی کرد. به همین ترتیب، قضیّهٔ I یعنی «بعضی انسانها میرا هستند» را می‌توان به صورت زیر تفسیر:

حداقل یک شیء وجود دارد که انسان و میراست.

حداقل یک شیء وجود دارد به‌طوری که آن (شیء) انسان و میراست.

حداقل یک x وجود دارد به‌طوری که آن x انسان و میراست.

حداقل یک x وجود دارد به طوری که x انسان است $\wedge$ x میراست.

و به‌طور کامل به صورت:

$$(\exists x)\ [\ Hx \wedge Mx\ ]$$

علامتی کرد. بالاخره، قضیّهٔ O یعنی «بعضی انسانها میرا نیستند» به

صورت:

حداقل یک شیء وجود دارد که انسان است اما میرا نیست.

حداقل یک شیء وجود دارد به طوری که آن (شیء) انسان است اما میرا نیست.

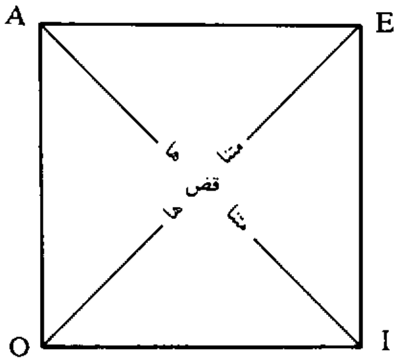
حداقل یک x وجود دارد به‌طوری که آن x انسان است و میرا نیست.

در می‌آید و سپس به صورت تسویر وجودی تابع مختلط:

$(\exists x)[Ex \wedge \sim Mx]$

علامتی می‌شود. چون حروف یونانی فی و پسی را برای نمایش هر علائم صفتی‌ای به‌کار بریم، چهار قضیهٔ موضوع محمولی عمومی منطق قدیم را می‌توان با جدول مربع شکل زیر نمایش داد.

$(x)(\varphi x \supset \psi x)$ $(x)(\varphi x \supset \psi x)$



$(\exists x)(\varphi x \wedge \psi x)$ $(\exists x)(\varphi x \wedge \sim \psi x)$

از این چهار، A و O متناقض، و E و I نیز متناقضند. اما هیچ یک از روابط دیگری که در رابطه با جدول مربع شکل واقع در شمارهٔ قبل مورد بحث قرار گرفت، حتی زمانی‌که فرض کنیم حداقل یک فرد در عالم موجود است، در مورد قضایای A، E، I، و O قدیم برقرار نیست. زمانی که « φx » تابع گزاره‌ای‌ای که مثالهای جانشین راست ندارد باشد، در این صورت بی‌توجه به‌این‌که چه صفتی توسط «φ» علامتی شده، توابع گزاره‌ای « $\varphi x \supset \psi x$ » و « $\varphi x \supset \sim \psi x$ » تنها مثالهای جانشین راست دارند، زیراتمام مثالهای جانشینشان گزاره‌های شرطی با مقدمهای دروغند. در چنین حالاتی، قضایای A و E که تسویرات عمومی این توابع گزاره‌ای مختلطند، راستند، بنابراین، قضایای A و E متضادنیستند.بار دیگر،وقتی «φx» تابع گزاره‌ای‌ای که مثالهای جانشین راست ندارد باشد، در این صورت بی‌توجه به این‌که «φx» چیست، توابع گزاره‌ای « $\varphi x \wedge \psi x$ » و « $\psi x \wedge \sim \psi x$ » تنها مثالهای جانشین دروغ دارند، زیرا مثالهای جانشینشان گزاره‌های عطفی‌ای هستند که منعطف اوّلشان دروغ است. در چنین حالاتی قضایای I و O که تسویرات وجودی این توابع گزاره‌ای مختلطند دروغند، و بنابراین،قضایای I و O تحت متضاد نیستند. در تمام چنین حالاتی، از آن‌جاکه قضایای A و E راست و قضایای I و O دروغند، راستی یک کلیه مستلزم راستی جزئیهٔ متناظرش نیست، و رابطهٔ استلزامی‌ای بین آنها برقرار نمی‌باشد.

اگر این فرض را داشته باشیم که حداقل یک فرد موجود است، در این صورت « $(x)[\varphi x \supset \psi x]$ » مستلزم « $(\exists x)[\varphi x \supset \psi x]$ » است. اما گزارهٔ اخیر قضیهٔ I نیست. قضیهٔ I به‌شکل «بعضی φها ψ هستند» به صورت « $(\exists x)[\varphi x \wedge \psi x]$ » ؛ که ادعا می‌کند حداقل یک شیء موجود است که هر دو صفت φ و ψ را داراست، علامتی می‌شود. اما قضیهٔ « $(\exists x)[\varphi x \supset \psi x]$ » تنها ادعا می‌کند که حداقل یک شیء که یا صفت ψ را دارد یا صفت φ را ندارد موجود است که ادعایی بسیار متفاوت و ضعیفتر از اوّلی است.

چهار صورت موضوع محمولی سنتی A، E، I و O تنها صورتهای قضایای عمومی نیستند، و قضایای عمومی دیگری که شامل تسویر توابع گزاره‌ای پیچیده‌تری هستند نیز وجود دارند. به این ترتیب قضیهٔ عمومی «تمام اعضا یا ولی یا معلم هستند» که به همان معنی «تمام اعضا ولی هستند یا تمام اعضا معلمند» نیست، به صورت « $(x)[Mx \supset (Px \vee Tx)]$ » علامتی می‌شود. و قضیهٔ عمومی «بعضی سناتورها یا خائن‌اند یا فریب خورده» به صورت «$(\exists x)[Sx \wedge (Dx \vee Mx)]$»علامتی می‌شود.باید توجه کرد که قضیه‌ای چون «سیب وموزمغذی‌است» را می‌توان یابه‌صورت ترکیب عطفی دوقضیهٔ A، «$\{(x)[Ax \supset Nx]\} \wedge \{(x)[Bx \supset Nx]\}$» یا به‌صورت یک قضیهٔ عمومی نامرکب واحد

«$(x)[(Ax \vee Bx) \supset Nx]$» علامتی کرد، در حالی که نباید آن‌را به صورت:
«$(x)[(Ax \wedge Bx) \supset Nx]$» علامتی کرد، زیرا گفتن این‌که «سیب و موزمغذی است» مساوی این است که بگوییم چیزی مغذی است که یا سیب یا موز باشد، نه این‌که مساوی این است که بگوییم چیز (هر چه که باشد) مغذی است که هم سیب هم موز باشد. باید تأکید شود که هیچ قاعدهٔ مکانیکی‌ای که گزاره‌ها را از زبان طبیعی به علائم منطقیمان ترجمه کند موجود نیست، و در هر حالت شخص باید معنی جملهٔ زبان طبیعی را بداند، و بعد این معنی را برحسب توابع گزاره‌ای و سورها بیان کند.

یادداشتها

۱ ـ در این مورد همان قرارداد علامتی را که برای نقیض به کار می‌بردیم (هم در مورد سور عمومی هم در مورد سور وجودی) داریم، یعنی سور در مورد کوچکترین ترکیب کننده‌ای که جداسازی اجازه می‌دهد به کار می‌رود یا آن‌را در قلمرو دارد.

مرجع:

Symbolic Logic
Irving M. Copi

پاسخ معماهای فیثاغورس

۱ـ پاسخهای من به مسأله‌های پیشنهادی فیثاغورس به شرح زیر است:

الف: به نظر من سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه نخست او ۹۱، ۸۴ و ۳۵ واحد بود.

ب: سه ضلع مثلث مختلف‌الاضلاع پیشنهادی پسر بزرگ احتمالاً ۹۵، ۷۹ و ۳۶ واحد بود.

ج: سه ضلع مثلث مختلف‌الاضلاع پیشنهادی پسر دوّم تقریباً به‌طور حتم ۱۰۰، ۷۱ و ۳۹ واحد بود.

۲ـ الف: سه ضلع مثلثِ «شوخی‌آمیز» پیشنهادیِ پسر کوچک ۴۹، ۵۶ و ۱۰۵ واحد بود.

ب: سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه کوچکی که او از سَرِ طنز فکر کرده بود ۵، ۱۲ و ۱۳ واحد بود و همچنین ضلعهای مثلث مختلف‌الاضلاع او ۷، ۸ و ۱۵ واحد طول داشت!

۳ـ الف: نخستین راه‌حل جدی پیشنهادی پسر کوچک، مثلثی با ضلعهای ۱۰۱، ۶۹ و ۴۰ واحد بود. دومین راه‌حل او مثلثی بود به ضلعهای ۱۰۴، ۶۱ و ۴۵ واحد. احتمال می‌رود که راه حل پسر بزرگ برای دوّمین معمای فیثاغورس عبارت بود از:

ـ مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۶۵، ۵۶ و ۳۳ واحد.

ـ مثلث مختلف‌الاضلاع به اضلاع ۶۸، ۵۱ و ۳۵ واحد.

ب: و اما راه حل پسر دوّم:

ـ احتمالاً مثلث قائم‌الزاویه او دارای ضلعهای ۵۳، ۴۵ و ۲۸ و مثلث مختلف‌الاضلاع وی به ضلعهای ۵۶، ۳۹ و ۳۱ واحد بود.

ـ راه‌حل نادرستِ پسرِ کوچک ممکن است چنین بوده باشد:

مثلث قائم‌الزاویه با ضلعهای ۳۵، ۲۸ و ۲۱ واحد.

مثلث مختلف‌الاضلاع با ضلعهای ۳۶، ۲۵ و ۳۵ واحد.

دومین راه‌حل (که او آن را از نظر دور داشت)، مثلثی است مختلف‌الاضلاع با ضلعهای ۳۳، ۳۱ و ۲۰ واحد.

۴ـ من مطمئن نیستم که فیثاغورس با طرح مسألهٔ آخر قصد آن داشت که سربه سرِ فرزندان خویش بگذارد، بلکه به شخصه آن رایک مسألهٔ تفکربرانگیز می‌دانم. بهترین راه‌حلی که می‌توانم برای آن ارائه دهم، معادله‌ای است که در پی می‌آید:

$$(۲۷x^۲ + ۳۶۶x + ۱۱۲۰)^۲ + (۳۶x^۲ + ۶۷۸x + ۳۱۰۲)^۲ + (۴۵x^۲ + ۷۶۲x + ۳۲۹۸)^۲ = (۲۷x^۲ + ۳۵۸x + ۱۰۷۰)^۲ + (۳۶x^۲ + ۶۱۴x + ۲۷۰۲)^۲ + (۴۵x^۲ + ۸۱۸x + ۳۶۴۸)^۲$$

که در آن $x \geq ۰$ است.

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که فیثاغورس، به یک تعبیر، نیّت سَربه‌سَر گذاشتنِ آنها را داشت. امّا هیچ لازم نبود که من یک چنین راه‌حل پیچیده‌ای برای مسألهٔ آخر فیثاغورس ارائه دهم. در واقع کوچکترین (؟) راه حل که عملاً در محدودهٔ اشتباه و لغزش پسر کوچک قرار می‌گیرد، از این قرار است:

$$۳۵^۲ + ۲۸^۲ + ۲۱^۲ = ۲۰^۲ + ۲۳^۲ + ۳۹^۲$$

گزارشی از بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور

دانشگاه صنعتی شریف ـ تهران
۸ تا ۱۱ فروردین ۱۳۷۳

از: غلامرضا یاسی پور

بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور، روز دوشنبه ۸ فروردین ۱۳۷۳، ساعت ۹ صبح، در دانشگاه صنعتی شریف با سخنرانیهای مسؤولان مربوطه افتتاح شد.

هیأت امنای سازمان و تشکیلات کنفرانس عبارتند از:

محمد علی نجفی (رئیس)	وزیر آموزش و پرورش
محمد جواد لاریجانی	نمایندهٔ مجلس شورای اسلامی و رئیس مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات
علی اکبر صالحی	معاون آموزشی وزارت فرهنگ و آموزش عالی
سید محمد اعتمادی	رئیس دانشگاه صنعتی شریف
عباس مظفر	معاون مالی و اداری دانشگاه صنعتی شریف
علی اصغر اسکندربیاتی	رئیس دفتر برنامه و بودجه دانشگاه صنعتی شریف
احمد حقانی	دبیر انجمن ریاضی ایران
سیاوش شهشهانی	استاد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف وقائم مقام مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات
محمد مهدوی هزاوه‌ای	رئیس دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف
یحیی تابش (دبیر)	معاون دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف

و کمیتهٔ علمی و برگزاری آن عبارت از:

یحیی تابش (دبیر)، سید عباداله محمودیان، محمود حصارکی، نظام‌الدین مهدوی امیری، بیژن زنگنه، محمد مهدوی هزاوه‌ای، داریوش شادمان، بهمن مهری، سیاوش شهشهانی، هدایت ا... یاسائی.

نشریات کنفرانس: علاوه بر مجموعهٔ خلاصهٔ مقالات، یادنامهٔ کنفرانس، و جزوهٔ تحلیل از پیشکسوتان که توسط کمیتهٔ برگزاری کنفرانس تهیّه شده است، کتابهای زیر نیز به مناسبت برگزاری کنفرانس و همزمان با آن انتشار یافته است:

۱. دفاعیّهٔ یک ریاضی‌دان اثر: گ.ه. هاردی، ترجمهٔ سیامک کاظمی.
ناشر: سازمان آموزش و انتشارات انقلاب اسلامی، ۱۳۷۳، تهران.

۲. گفت و شنودهایی در ریاضیات اثر: آلفرد رینی، ترجمهٔ سعید قهرمانی
ناشر: انتشارات خوارزمی (با همکاری دانشگاه صنعتی شریف)، ۱۳۷۳، تهران

۳. آزمون ریاضی فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران (مسائل، جوابها)، ناشر: انتشارات امیرکبیر، ۱۳۷۳، (تهران)

از دیگر برنامه‌های جنبی کنفرانس می‌توان از موارد زیر یاد کرد: مسابقهٔ ریاضی دانشجویی، مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران، کارگاه آشنایی با نرم‌افزار مَتِمَتیکا، کارگاه آشنایی با TEX، نمایش فیلمهای ریاضی، برنامه‌های علمی کنفرانس شامل سخنرانیهای عمومی، کارگاهها و سخنرانیهای تخصصی به مسؤولیت اساتید زیر:

دکتر بیژن ظهوری زنگنه، دکتر سید عباداله محمودیان، دکتر محمد مهدوی هزاوه‌ای، نظام‌الدین مهدوی امیری، سیاوش شهشهانی، زهرا گویا، میزگردی به زبان انگلیسی تحت عنوان **«دورنمای ۲۵ سال آیندهٔ ریاضیات در جهان سوم»** با شرکت:

استیو اسمیل، مهدی رجبعلی‌پور، سزار کاماچو، عطارد کاویان، امیدعلی کرمزاد، ام.اس. ناراسیمان و سیاوش شهشهانی (هماهنگ کننده).

و نمایشگاه کتاب با شرکت ناشران داخلی و ناشران بین‌المللی زیر:

اشپیرنگر فرلاگ، الزویر وکلوور، بیرک هویزر، جان وایلی، چاپمن اندمول، ورلد ساینتفیک.

در جزوهٔ خلاصهٔ مقالات کنفرانس خلاصهٔ مقالات ارائه شده به کنفرانس آورده شده است. خلاصهٔ بعضی از مقاله‌های فارسی ارائه شده به ترتیب زیر است:

معرفی کتاب لطائف‌الحساب قطب‌الدین لاهیجی

محمد باقری

بنیاد دایرةالمعارف اسلامی

دراین مقاله، کتابی که چهار قرن پیش یعنی در عهد صفویه به زبان فارسی و عربی (آمیخته) در لاهیجان نوشته شده، معرفی می‌شود و محتوای آن مورد بحث قرار می‌گیرد. قطب‌الدین لاهیجی فیلسوف و فقیه و ریاضی‌دان بود. تفسیر قرآن کریم وی با عنوان «تفسیر شریف لاهیجی» یکبار در هندوستان و یکبار در ایران به چاپ رسیده است. کتاب معروف او در تاریخ فلسفه «محبوب القلوب» نام دارد. قطب‌الدین لاهیجی کتاب لطائف‌الحساب خود را که در واقع نوعی کتاب سرگرمیهای ریاضی است در سال ۱۰۲۰ هجری هنگامی که از شهر اصفهان پایتخت حکومت صفویه به لاهیجان برگشته بود نگاشته است. نسخهٔ خطی منحصر به فرد این اثر در ۱۳۲ صفحه، در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی (مشهد) نگهداری می‌شود.

لطائف‌الحساب شامل دیباچه، مقدمه، دو مقاله و یک خاتمه است. مقالهٔ اول آن در دو باب است. در باب اوّل از خبایا (جمع خبی) سخن می‌رود یعنی در بیان آن‌که چیزی در دست پنهان کرده باشند و دانستن این‌که در دست راست است یا دست چپ. باب دوم در مضمرات است یعنی فهمیدن عددی که کسی در ذهن اختیار کرده است. مقالهٔ دوم در حل انواع مسائل حساب و خاتمه دربارهٔ نمایش اعداد یک تا ده‌هزار با انگشتان و حل انواع معماهاست.

بررسی وضعیت علمی فارغ‌التحصیلان دوره‌های کارشناسی ریاضی دانشگاه‌های مختلف

حسین پور کاظمی

دانشکدهٔ علوم ریاضی

دانشگاه شهید بهشتی

در ۲۱ دانشگاه دولتی کشور و همچنین در ۳۰ مرکز دانشگاه پیام‌نور رشته ریاضی در گرایشهای مختلف محض، کاربردی و دبیری دایراست. اکثریت فارغ‌التحصیلان رشته ریاضی این دانشگاه‌ها در آزمون سراسری کارشناسی ارشد شرکت می‌کنند. پنج سال است که این آزمون برگزار می‌شود، جدا از ایراداتی که ممکن است به این آزمون وارد باشد، این آزمون ملاک جالبی برای مقایسهٔ فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف به‌دست می‌دهد. با استفاده ازنتایج آزمون سراسری، وضعیت فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف در مجموع و در هر درس بررسی می‌شود. همچنین با توجه به معدل دورهٔ کارشناسی هر دانشگاه، ضریب همبستگی بین سطح معدل در دانشگاه‌های مختلف با نمرهٔ آزمون مشخص می‌شود. وابستگی عوامل موفقیت فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌ها با متغیرهای ملاک (از جمله اساتید، وضعیت علمی ورودیها...) تعیین می‌گردد.

مسابقات ریاضی دانش‌آموزی در ایران

علی رجالی

دانشکدهٔ ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

در سال ۱۳۶۲، اوّلین مسابقهٔ ریاضی اصفهان توسط دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار گردید و از فروردین ماه ۱۳۶۳ همزمان با پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور اولین المپیاد ریاضی ایران توسط

انجمن ریاضی ایران و با همکاری وزارت آموزش و پرورش برگزار شد.

از سال ۱۳۶۶ شورایی در دفتر تحقیقات وزارت آموزش‌وپرورش به این منظور تشکیل و همزمان تیمهای ایرانی به المپیاد بین‌المللی ریاضی راه یافته و موفقیتهای چشمگیری که حاصل تلاش دانش‌آموزان علاقه‌مند، دبیران محترم ریاضی، مسؤولان وزارت آموزش و پرورش و اعضای هیأت علمی ریاضی دانشگاه‌ها و نیز دانشجویان المپیادی بود به دست آمد.

اثرات مثبت برگزاری این مسابقات در آموزش ریاضی ایران بسیار واضح است.

در این سخنرانی نقاط ضعف، مسائل و مشکلات اجرایی مسابقات و تأثیرات منفی و راه‌های جلوگیری از اثرات نامفید این پدیدهٔ مهم فرهنگی مطرح و پیشنهاداتی جهت نظم‌بخشی بیشتر به این مسابقات و بررسی مسائل و نتایج آماری آن در جهت اصلاح نظام آموزشی ارائه خواهد شد.

برای آموزش ریاضی بنویسیم

هوشنگ شکرانیان
بخش ریاضی
دانشگاه رازی کرمانشاه

هدف ما طرح دشواریهای پرداختن به نگارش مطالب درسی ریاضی در دورهٔ کارشناسی ریاضی و تا حدودی دبیرستان و چگونگی فایق آمدن بر این دشواریها است. هم مشکلات و هم راه حل را در رابطه با «برنامه‌ریزی آموزشی می‌دانیم».

چارهٔ کار را در «جزوه‌نویسی» دانسته‌ایم. جزوه را وسیله‌ای جهت ارتباط بین شاگرد، کتاب، مدرس و برنامه درسی می‌دانیم. کار را با نوشتن جزوه‌های کم حجم برای برطرف کردن پاره‌ای از دشواریهای کتابهای درسی و شرح وبسط برخی از مطالب آن آغاز می‌کنیم، البته کار را در سطح وسیعی مطرح می‌کنیم. با ادامهٔ کار جزوه‌های پرحجمتری به دست می‌آوریم و در ضمن به تبلیغ «ویرایش» می‌پردازیم. به‌تدریج بخشی از معلمین با «قلم» آشنا شده و در مورد برطرف کردن دشواریهای آموزشی «صاحب‌نظر» خواهند شد.

سمینارهایی در مورد دروس مهم دورهٔ کارشناسی برگزار می‌کنیم. در این جامی‌توان به نارساییهای برنامهٔ آموزشی و دشواریهای نگارش به طور جدی پرداخت و راه را برای مطالعهٔ تاریخی و فلسفی ریاضی هموار ساخت.

مراحل کار را تا آن‌جا شرح می‌دهیم که قادر به نوشتن کتابهایی باشیم که در سطح بین‌المللی قابل عرضه باشند. در آن زمان انبوهی از نویسندگان کتابهای درسی و افراد صاحب‌نظر در امور برنامه‌ریزی خواهیم داشت.

در مورد ضرورت پرداختن به ترجمهٔ متون تاریخی و فلسفی و کتابهای تخصصی و دشواریهای آن صحبت می‌کنیم و دراین مورد نیز راه‌حلی که مبتنی بر شرکت فعّال جمعی از مدرسین و مترجمین باشد ارائه می‌دهیم.

نشان می‌دهیم که برنامهٔ ما به نشریات ریاضی ایران تحرک می‌دهد و آموزش را پرمحتوی و مناسب حال خودمان می‌کند. دربارهٔ آیندهٔ کتاب بحث می‌کنیم. متذکر خواهیم شد که سیر تحولات به مراتب شدیدتر از آن است که در باور ما می‌گنجد. نشان خواهیم داد که در آینده کتابها به صورت بسیار متنوعی منتشر خواهد شد و نقش کامپیوتر را در این تحول ذکر می‌کنیم. سرانجام از دشواریهای این طرح صحبت می‌کنیم.

به‌مسائل‌ریاضیات‌عمومی‌دقیقترنگاه‌می‌کنیم

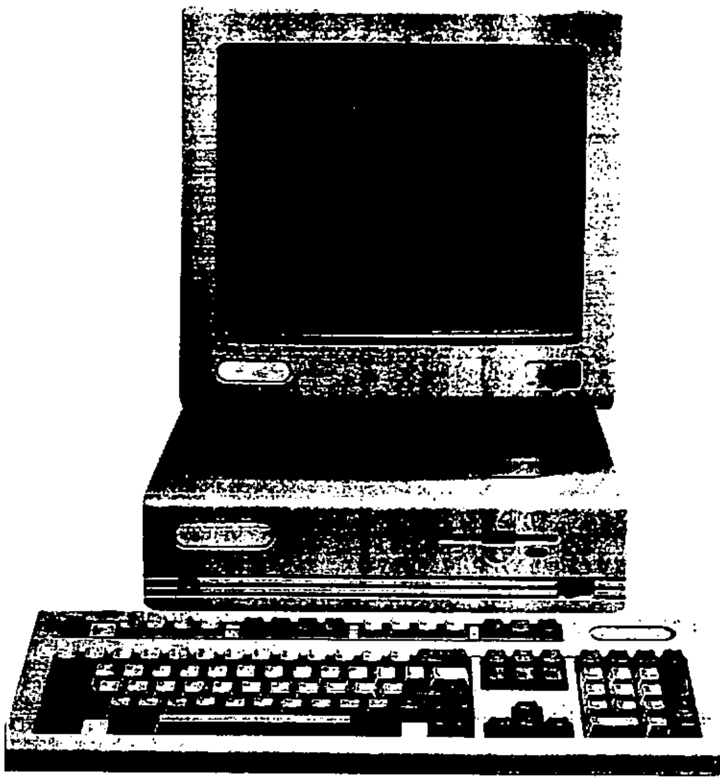
دکتربهمن طباطبائی
بخش ریاضی
دانشگاه شیراز

در کتاب جبروآنالیز سال چهارم دبیرستان و همچنین در دروس ریاضی عمومی سال اوّل دانشجویان رشته‌های ریاضی و مهندسی بعضاً مسائلی یافت می‌شود که برای حل آنها اگر از دیدگاهی دقیق نگاه نشود مشکل آفرین است و چه بسا حل آنها هیچ‌گونه ایده‌ای به محصل نمی‌دهد. دراین مقاله سعی بر آن است که تا آن‌جا که ممکن است به حل دقیق این‌گونه مسائل پرداخته شود.

لازم به تذکر است که دراین کنفرانس از چند نفر از اساتید ریاضیات در ایران توسط مقامات تجلیل به عمل آمد، که شرح مفصل آن به همراه زندگینامه مختصری از ایشان در شمارهٔ آینده به چاپ خواهد رسید.

والسلام

استفاده از کامپیوتر در حل معادلات غیر خطی



● مهندس حسین ابراهیم زادهٔ قُلزم

می‌خواهیم مبحث آشنا و جالبی را مورد بحث و بررسی قرار دهیم و آن، استفاده از کامپیوتر در حل معادلات غیرخطی[1] است.

قبل از وارد شدن به بحث، نخست تعریفی از صفر[2] یا ریشه[3] یک معادله ارائه می‌دهیم.

تعریف: فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع پیوسته[4] باشد. هر عددی مانند x_0 که به ازای آن $f(x_0) = 0$ باشد یک ریشه یا یک صفر معادلهٔ $f(x) = 0$ نامیده می‌شود.

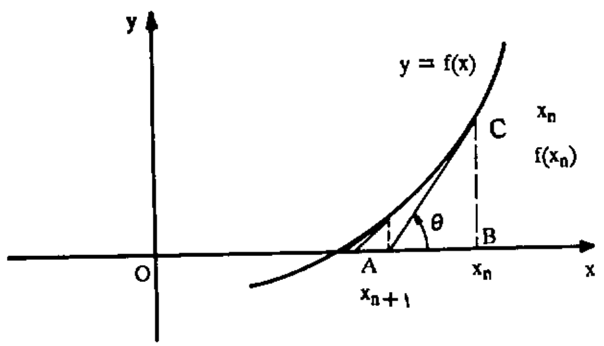
در بحثهایی که در زیر می‌آید فرض می‌کنیم تابع غیرخطی $y = f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و $f(a) . f(b) < 0$ است. به‌عبارت دیگر از فرض پیوسته بودن $y = f(x)$ و شرط $f(a) . f(b) < 0$، نتیجه می‌گیریم که $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ حداقل دارای یک ریشه است.

ریشه‌های هر معادلهٔ[5] غیرخطی مانند $f(x) = 0$ را می‌توان به‌طور تقریبی از طریق ترسیم، روش تفکیک معادلهٔ $f(x) = 0$ به دو معادله و ترسیم آنها، یا با تشکیل جدولی از مقادیر متغیر[6] و تابع به‌دست آورد که هیچ‌یک از آنها مورد نظر ما نیست. ما می‌خواهیم ریشهٔ تقریبی معادلهٔ غیرخطی $f(x) = 0$ را با استفاده از روشی موسوم به روش نیوتن یا به بیان دقیق‌تر با روش نیوتن - رفسون[7] به کمک یک برنامهٔ کامپیوتری[8] به‌دست آوریم. اینک شرح این روش:

در این روش، ابتداکار را با یک تخمین[9] تقریبی[10] از ریشهٔ معادله که در فاصلهٔ[11] $[a,b]$ قرار دارد شروع می‌کنیم و تخمین اولیه[12] را x_0 می‌نامیم. پس از رسم نمودار $y = f(x)$، از نقطهٔ $(x_0 , f(x_0))$ خطی مماس[13] بر منحنی[14] رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی[15] خط مماس بر منحنی و محور xها، تخمین بعدی برای ریشهٔ معادله است. همینطور از نقطهٔ $(x_1 , f(x_1))$ واقع بر منحنی، خط مماس دیگری بر منحنی رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی خط مماس جدید و محور xها، تخمین دیگری برای ریشهٔ معادله است والی آخر. اگر نقطهٔ $(x_n , f(x_n))$ آخرین نقطهٔ روی منحنی باشد که از آن نقطه خط مماس بر منحنی رسم شده است و x_{n+1} آخرین تخمین برای ریشهٔ معادله باشد مقدار

خطا[۱۶] از رابطهٔ $|x_{n+1} - x_n|$ به‌دست می‌آید. در این روش، در هر مرحله از تخمین ریشه، فاصلهٔ دو نقطهٔ متوالی[۱۷] روی محور xها یا مقدار خطا را به‌دست می‌آوریم، اگر مقدار خطا از یک تقریب معینی مثلاً از 10^{-6} کمتر باشد آنگاه آخرین تخمین، x_{n+1}، ریشهٔ تقریبی معادله است.

طریقهٔ به‌دست آوردن فرمول نیوتن ـ رفسون:



باتوجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ[۱۸] ABC و تعریف مشتق[۱۹] داریم:

$$\triangle ABC: TAN\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n)$$

$$\Rightarrow f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{فرمول نیوتن ـ رفسون}$$

بنابراین با فرض اینکه $x_{n+1} = g(x)$ و $x_n = x$ باشد داریم:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

در این روش همواره فرض می‌کنیم $f'(x) \neq 0$ است.

پس از این مقدمه، اکنون آماده‌ایم برنامه[۲۰]ای کامپیوتری برای به‌دست آوردن ریشهٔ تقریبی هر معادلهٔ غیرخطی بنویسیم. امیدوارم با ارائه چند مثالِ کامپیوتری به همراه خروجی برنامه‌ها، شما را در درک بهتر روش نیوتن ـ رفسون یاری کرده باشم.

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون ریشهٔ معادلهٔ $F(X) = XSINX + COSX = 0$ را که بین $[0, \pi]$ قرار دارد با تقریب 10^{-6} به‌دست آورد. X برحسب رادیان است.

برنامه:

```
10   REM NEWTON - RAPHSON METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS
20   INPUT"ENTER A NUMBER BETWEEN 2 & 4 PLEASE : ";X
30   LET Y=X-(X*SIN(X)+COS(X))/(X*COS(X))
40   WHILE ABS(Y-X) > .000001
50      LET  X      = Y
60      LET FX      = X*SIN(X)+COS(X)
70      LET FPRIME=  X*COS(X)
80      LET Y       = X-FX/FPRIME
90   WEND
100  PRINT"APPROXIMATE ROOT OF XSINX+COSX=0 EQUALS X= ";Y
110  END
```

خروجی[۲۱] برنامهٔ بالا با دو اجرای[۲۲] مختلف به‌صورت زیر است:

اجرای اول:

```
ENTER A NUMBER BETWEEN 2 & 4 PLEASE : ? 2.3
APPROXIMATE ROOT OF XSINX+COSX=0 EQUALS X=  2.798386
```

اجرای دوم:

```
ENTER A NUMBER BETWEEN 2 & 4 PLEASE : ? 3.5
APPROXIMATE ROOT OF XSINX+COSX=0 EQUALS X=  2.798386
```

همانگونه که ملاحظه می‌کنید ریشهٔ تقریبی معادلهٔ داده شده، $X = 2.798386$ است.

مثال: برنامه‌ای به‌زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون ریشهٔ معادله $F(X) = X^3 + 3X + ۱ = ۰$ را که بین $[-1,۰]$ قرار دارد با تقریب 10^{-4} به‌دست آورد.

برنامه:

```
10 REM  SOLVING X^3+3*X+1=0 BY NEWTON - RAPHSON METHOD
20 INPUT"ENTER A NUMBER  : ";X
30 LET Y=X-(X^3+3*X+1)/(3*X^2+3)
40  WHILE ABS(Y-X) > .000001
50     LET  X     = Y
60     LET FX     = X^3+3*X+1
70     LET FPRIME= 3*X^2+3
80     LET Y      = X-FX/FPRIME
90  WEND
100 PRINT"X= ";Y;" IS A ROOT OF X^3+3*X+1=0 "
110 END
```

خروجی برنامهٔ بالا با دو اجرای مختلف به‌صورت زیر است:

اجرای اول:

```
ENTER A NUMBER  : ? -1
X= -.3221854  IS A ROOT OF X^3+3*X+1=0
```

اجرای دوم:

```
ENTER A NUMBER  : ? 20
X= -.3221854  IS A ROOT OF X^3+3*X+1=0
```

همانگونه که ملاحظه می‌کنید ریشهٔ تقریبی معادلهٔ داده شده، $X = -0.3221854$ است.

تمرین: اولاً نشان دهید[۲۳] معادلهٔ $(2X + ۱)^2 = 4COS\pi X$ دارای یک ریشه در فاصلهٔ $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ است، ثانیاً برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون ریشهٔ تقریبی معادلهٔ $(2X + ۱)^2 = 4COS\pi X$ را تا چهار رقم اعشار[۲۴] به‌دست آورد.

جواب: $X = -0.2872$

مثال: الف) با استفاده از فرمول نیوتن ـ رفسون، دستور محاسبهٔ ریشهٔ nام[۲۵] عدد ثابتِ مثبت و حقیقی[۲۶] C را به‌دست آورید. ب) برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با خواندن[۲۷] دو عدد N و C، ریشهٔ Nام عدد C را با تقریب 10^{-6} به‌دست آورد. برنامه را به‌صورت سؤال و جوابی[۲۸] بنویسید تا هربار سؤال کند که آیا دادهٔ دیگری دارید یا خیر؟

حل: الف) عدد حقیقی مثبت و ثابت C و عدد صحیح N داده شده است. ریشهٔ N ام عدد C جواب معادلهٔ زیر است: $X^N = C$

قرار می‌دهیم: $F(X) = X^n - C$

باتوجه به‌روش نیوتن ـ رفسون و بافرض اینکه $X_{n+1}=Y$ و $X_n=X$ باشد داریم:

$$Y = X - \frac{X^N - C}{NX^{N-1}}$$

$$= \left[(N-1).X + \frac{C}{X^{N-1}}\right] / N$$

مثلاً به ازای $N = 3$، برای ریشهٔ سوم عدد C، فرمول زیر را داریم:

$$Y = \left(2X + \frac{C}{X^2}\right) / 3$$

ب ـ برنامه:

```
10   REM THE Nth ROOT OF A CONSTANT C
20   INPUT"DO YOU WANT THE PROGRAM EXECUTE : ";ANS$
30   WHILE ANS$="Y" OR ANS$="y"
40       INPUT"ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ";C,N
50       INPUT"ENTER YOUR FIRST GUESS ";X
60       Y= ((N-1)*X+C / X^(N-1)) / N
70       WHILE  ABS(Y-X) > .000001
80          LET  X = Y
90          LET  Y = ((N-1)*X+C/X^(N-1)) / N
100      WEND
110      PRINT"THE ";N;"th ROOT OF ";C;" =";Y
120      PRINT
130      INPUT "DO YOU HAVE ANY MORE DATA ";ANS$
140  WEND
150  PRINT "THE PROGRAM HAS ENDED"
```

خروجی برنامهٔ بالا پس از اجرا به‌صورت زیر است:

```
DO YOU WANT THE PROGRAM EXECUTE : ? Y
ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ? 2,2
ENTER YOUR FIRST GUESS ? 1
THE  2 th ROOT OF  2  = 1.414214

DO YOU HAVE ANY MORE DATA ? Y
ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ? 3,2
ENTER YOUR FIRST GUESS ? 1.1
THE  2 th ROOT OF  3  = 1.732051
```

```
DO YOU HAVE ANY MORE DATA ? y
ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ? 5,3
ENTER YOUR FIRST GUESS ? 2.2
THE  3 th ROOT OF  5  = 1.709976

DO YOU HAVE ANY MORE DATA ? Y
ENTER INTEGER & REAL NUMBERS ? 7,5
ENTER YOUR FIRST GUESS ? 3.5
THE  5 th ROOT OF  7  = 1.475773

DO YOU HAVE ANY MORE DATA ? N
THE PROGRAM HAS ENDED
```

تمرین: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون، ریشهٔ مثبت[۲۹] معادلهٔ $2 \sin X = X$ را که بین $[0, 2]$ قرار دارد تا چهار رقم اعشار به‌دست آورد.

جواب: $X = 1.8955$

تمرین: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا با استفاده از روش نیوتن ـ رفسون ریشهٔ تقریبی معادلهٔ $F(X) = X^3 + X - 1 = 0$ را که در فاصلهٔ $[0, 1]$ قرار دارد[۳۰] با تقریب 10^{-6} به‌دست آورد.

جواب: $X = 0.682328$

استفاده از کامپیوتر درتعیین نقـاط مـاگـزیموم و مینیموم یک تابع

فرض کنید در فاصلهٔ $[a,b]$ در جستجوی[۳۱] دو مقدار برای متغیر x هستیم که به ازای آنها مقدار تابع $y = f(x)$ ماگزیموم و مینیموم می‌شود. به ازای xهایی که در فاصلهٔ $[a,b]$ قرار دارند مقادیر مختلفی برای $y = f(x)$ به‌دست می‌آید و ما می‌خواهیم کوچکترین[۳۲] و بزرگترین[۳۳] مقدار y را در بین این مقادیر به‌دست آوریم.

قبل از نوشتن برنامهٔ تعیین نقاط ماگزیموم و مینیموم یک تابع، الگوریتم[۳۴] برنامه‌ای را می‌نویسیم که با دریافت[۳۵] N عـدد، کـوچکترین و بزرگترین عدد داخل لیست N عددی را پیدا کرده در خروجی چاپ می‌کند.

الگوریتم تعیین کوچکترین و بزرگترین عددِ یک لیست N عددی به شرح زیر است:

۰ ـ شروع

۱ ـ عدد N را می‌خوانیم.

۲ ـ اولین عدد را خوانده آن را NUM می‌نامیم.

۳ ـ مقدار COUNT را به‌عنوان شمارندهٔ[۳۶] تعداد اعداد برابر 1 قرار می‌دهیم[۳۷].

۴ ـ مقدار MAX و MIN را برابر NUM قرار می‌دهیم.

۵ ـ عدد بعدی را خوانده آن را برابر NUM قرار می‌دهیم.

۶ ـ به مقدار COUNT یک واحد اضافه کرده آن را COUNT می‌نامیم.

۷ ـ اگر مقدار MAX کوچکتر از مقدار NUM باشد مقدار NUM را برابر MAX قرار می‌دهیم.

۸ ـ اگر مقدار MIN بزرگتر از مقدار NUM باشد مقدار NUM را برابر MIN قرار می‌دهیم.

۹ ـ اگر مقدار COUNT برابر مقدار N نبود به مرحلهٔ ۵ می‌رویم.

۱۰ ـ مقدار MIN و MAX را به‌عنوان کوچکترین و بزرگترین عددِ داخل لیست با پیغام[۳۸] مناسب چاپ می‌کنیم.

۱۱ ـ پایان

در برنامهٔ زیر روشِ کار به همان صورتی است که در الگوریتم بالا گفته شده است با این تفاوت که اعداد هربار توسط تابع تولید[۳۹] می‌شوند و پایان داده[۴۰]ها هم مقدار معلوم f(b) است و از این رو در برنامه احتیاج به شمارنده نداریم. با یک حلقهٔ[۴۱] FOR برنامه براحتی قابل پیاده‌سازی[۴۲] است.

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ماگزیموم و مینیموم تابع Y = SINX + COSX را در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ به‌دست آورده، مقادیر ماگزیموم و مینیموم تابع را به‌همراه Xهای مربوطه[۴۳] با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه:

```
10   REM FINDING MAX & MIN OF Y=SINX+COSX
20   LET MAX=0: LET MIN=0
30   FOR D = 0  TO  360
40     LET  R = 4*ATN(1)*D/180
50     LET  Y = SIN(R)+COS(R)
60     IF MAX < Y THEN MAX = Y : LET  K=D
70     IF MIN > Y THEN MIN = Y : LET  S=D
80   NEXT D
90   PRINT "MAXIMUM = ";MAX;"AT X= ";K;" DEGREES"
100  PRINT
110  PRINT "MINIMUM = ";MIN;"AT X= ";S;"DEGREES"
120  END
```

خروجیِ برنامه:

```
MAXIMUM =  1.414214 AT X=  45  DEGREES

MINIMUM = -1.414214 AT X=  225 DEGREES
```

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ماگزیموم و مینیموم تابع Y = 2 SINX + 3COSX را در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ به‌دست آورده، مقادیر ماگزیموم و مینیموم تابع را به همراه Xهای مربوطه با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه: این برنامه دقیقاً مانند برنامهٔ Y = SINX + COSX است فقط با این تفاوت که لازم است خط 10 برنامهٔ مثال قبل را به‌صورت زیر تغییر دهیم:

```
10  REM FINDING MAX & MIN OF Y = 3*SINX+3*COSX
```

و در خط 50، ضابطهٔ تابع جدید را به‌صورت زیر بنویسیم:

```
50  LET Y = 2*SIN(R) + 3*COS(R)
```

با اِعمال تغییر در خط 10 و 50 برنامهٔ مثال قبل، پس از اجرا، خروجیِ برنامه را به‌صورت زیر مشاهده خواهید کرد:

```
MAXIMUM =  3.605499 AT X=  34  DEGREES
```

```
MINIMUM = -3.605498 AT X=  214 DEGREES
```

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ماگزیموم و مینیموم مطلق[۴۴] تابع $y = x^3 - x^2 - 120x - 20$ را در فاصلهٔ [10 , 10-] به‌دست آورده، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه:

```
10   REM FINDING MAX & MIN OF Y=X^3-X^2-120*X-20
20   LET MAX=0: LET MIN=0
30   FOR X = -10  TO  10
40     LET Y =X^3-X^2-120*X-20
50     IF MAX < Y THEN MAX = Y : LET  K=X
60     IF MIN > Y THEN MIN = Y : LET  S=X
70   NEXT X
80   PRINT "MAXIMUM OF Y= ";MAX;"AT X= ";K
90   PRINT
100  PRINT "MINIMUM OF Y= ";MIN;"AT X= ";S
110  END
```

خروجی برنامه:

```
MAXIMUM OF Y=  448 AT X= -6

MINIMUM OF Y= -566 AT X=  7
```

مثال: برنامهٔ مثال قبل را به گونه‌ای تغییر دهید تا ماگزیموم و مینیموم مطلق تابع $y = x^3 - x^2 - 120x - 20$ را در فاصلهٔ [13 , 13-] به‌دست آورد.

برنامه: در این برنامه کافی است خط شمارهٔ 30 مثال قبل را به‌صورت زیر تغییر دهیم:

```
30   FOR X = -13  TO  13
```

با اعمال تغییر بالا در خط 30 از مثال قبل، پس از اجرا، خروجی برنامه را به‌صورت زیر مشاهده خواهید کرد:

```
MAXIMUM OF Y=  448 AT X= -6

MINIMUM OF Y= -826 AT X= -13
```

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ماگزیموم و مینیموم نسبی[۴۵] تابع $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ را در فاصلهٔ [10 , 10-] به‌دست آورده، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه:

```
10  REM FINDING MAX & MIN OF Y=2*X^3-3*X^2-12*X+7
20  FOR X = -10  TO 10
30    LET Y = 2*X^3-3*X^2-12*X+7
40    LET X1 = X-.01
50    LET X2 = X+.01
60    LET Y1 = X1^2-X1-12
70    LET Y2 = X2^2-X2-12
80    IF Y1*Y2 < 0  AND Y1 < 0  THEN  PRINT"AT X= ";X;" Y= ";Y;"IS MINIMUM"
90    IF Y1*Y2 < 0 AND  Y1 > 0  THEN  PRINT"AT X= ";X;" Y= ";Y;"IS MAXIMUM"
100 NEXT
110 END
```

خروجیِ برنامه:

```
AT X= -3   Y= -38 IS MAXIMUM
AT X=  4   Y=  39 IS MINIMUM
```

مثال: برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ضرایب یک تابع درجهٔ سوم، کران پایین و بالای یک فاصله را از ورودی بخواند. مقادیر ماگزیموم و مینیموم نسبی و مطلق تابع را در آن فاصله به‌دست آورده، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

برنامه:

```
10 PRINT"Y=AX^3+BX^2+CX+D"
20 INPUT"Enter A,B,C,D";A,B,C,D
30 LOCATE 3,1: INPUT"PLEASE ENTER L & U [L,U]" ; L , U
40 IF U < L THEN PRINT"U SHOULD BE GREATER THEN L ":GOTO 40
50 OLDY = A*(L-.01)^3+B*(L-.01)^2+C*(L-.01)+D
60 YMAX= OLDY:YMIN=OLDY:FALSE1=0:
70 FOR X = L TO U STEP .05
80     NEWY = A*X^3+B*X^2+C*X+D
90     IF YMAX < NEWY THEN YMAX=NEWY
100    IF YMIN > NEWY THEN YMIN=NEWY
110    IF NEWY > OLDY THEN FALSE = 1 ELSE FALSE = -1
120    OLDY=NEWY
130    IF FALSE1-FALSE  = 2 THEN PRINT"AT X = "X-.049:PRINT"REL MAX OF Y="OLDY
140    IF FALSE1-FALSE = -2 THEN PRINT"AT X = "X-.049:PRINT"REL MIN OF Y="OLDY
150    FALSE1=FALSE
160 NEXT
170 PRINT"ABSOLUTE MAXIMUM OF Y=";YMAX
180 PRINT"ABSOLUTE MINIMUM OF Y=";YMIN
```

اجرایِ اول:

```
Y=AX^3+BX^2+CX+D
Enter A,B,C,D? 2,-6,0,5
PLEASE ENTER L & U [L,U]? -4,4
AT X =  9.975508E-04
REL MAX OF Y= 4.985252
AT X =  2.000997
REL MIN OF Y=-2.984753
ABSOLUTE MAXIMUM OF Y= 36.99976
ABSOLUTE MINIMUM OF Y=-220.443
```

اجرایِ دوم:

```
Y=AX^3+BX^2+CX+D
Enter A,B,C,D? 1,0,-3,3
PLEASE ENTER L & U [L,U]? -4,4
AT X = -.9990026
REL MAX OF Y= 4.992626
AT X =  1.000998
REL MIN OF Y= 1.007624
ABSOLUTE MAXIMUM OF Y= 54.99978
ABSOLUTE MINIMUM OF Y=-49.45121
```

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1 - Nonlinear
2 - Zero
3 - Root
4 - Continuous Function
5 - Equation
6 - Variable
7 - Newton - Raphson method
8 - A computer program
9 - Estimate
10 - Approximate
11 - interval
12 - Initial Estimate
13 - A tangent Line
14 - Curve
15 - Intersection
16 - Error value
17 - Two successive points
18 - Right Triangle
19 - Derivative
20 - Program
21 - output
22 - Running
23 - Show That
24 - To Four Decimal Places
25 - The nth Root
26 - Real
27 - Read
28 - Interactive
29 - Positive Root
30 - Lies
31 - Search
32 - Smallest
33 - Largest
34 - Algorithm
35 - Get
36 - Counter
37 - Set
38 - Message
39 - Generate
40 - End of Data
41 - Loop
42 - Implementable
43 - Corresponding
44 - Absolute
45 - Relative

طرح و حل مسائل

اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۸)

از: مسائل پیکارجوی ریاضی

ای.ام. یاگلوم، آی.ام. یاگلوم

عدد ۱۸۰۰۰ چند مقسوم علیه (از جمله ۱ و خود ۱۸۰۰۰) دارد؟ مجموع جمیع این مقسوم علیه‌ها را بیابید.

حل: تجزیهٔ ۱۸۰۰۰ به حاصل‌ضرب اعداد اوّل عبارت است از:

$$۱۸۰۰۰ = ۲^{۴} . ۳^{۲} . ۵^{۳}$$

در نتیجه، جمیع مقسوم علیه‌های ۱۸۰۰۰ صورت $۲^{a} . ۳^{b} . ۵^{c}$ را، که در آن a، b، c اعداد صحیح صادق در $۰ \leq a \leq ۴$ ، $۰ \leq b \leq ۲$ ، $۰ \leq c \leq ۳$ اند، خواهند داشت. (توجه کنید که مقسوم علیه ۱ با در نظر گرفتن $a = b = c = ۰$ حاصل شده است.) به این ترتیب ۵ امکان برای a (یعنی ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴)، ۳ امکان برای b، و ۴ امکان برای c موجودند. از آن‌جا که این موارد می‌توانند به جمیع طرق ممکن ترکیب شوند، تعداد مقسوم علیه‌های ۱۸۰۰۰

$$۵ . ۳ . ۴ = ۶۰$$

است.

اکنون مجموع تمام مقسوم علیه‌های مورد بحث را پیدا می‌کنیم. در این مورد می‌خواهیم اعداد $۲^{a} . ۳^{b} . ۵^{c}$ را، که در آنها a، b، c روی مقادیر مشخص شدهٔ فوق تغییر می‌کنند، جمع کنیم. اگر عبارت:

$$(۱ + ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + ۲^{۴})(۱ + ۳ + ۳^{۲})(۱ + ۵ + ۵^{۲} + ۵^{۳})$$

به‌طریق معمول بسط داده شود، جملات آن دقیقاً اعداد $۲^{a}.۳^{b}.۵^{c}$ خواهند بود (توجه داشته باشید که $۱ = ۵^{۰} = ۳^{۰} = ۲^{۰}$).

بنابراین مجموع مطلوب عبارت است از:

$$(۱ + ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + ۲^{۴})(۱ + ۳ + ۳^{۲})(۱ + ۵ + ۵^{۲} + ۵^{۳})$$
$$= ۳۱ . ۱۳ . ۱۵۶ = ۶۲,۸۶۸$$

اکنون نوع دیگری از این راه حل را ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم m و n دو عدد صحیح و مثبت نسبت به هم اوّل باشند. در این حالت هر مقسوم علیه mn می‌تواند به‌طور منحصر به فردی به صورت حاصل‌ضرب مقسوم علیهی از m و مقسوم علیهی از n بیان شود. از این مطلب می‌توان ملاحظه کرد که اگر $\tau(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح و مثبت n را نمایش دهد، در این‌صورت:

$$\tau(mn) = \tau(n)\,\tau(m)$$

به همین ترتیب اگر $\sigma(N)$ مجموع مقسوم‌علیه‌های N باشد، داریم:

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\,\sigma(m)$$

در نظریّهٔ اعداد $f(N)$، تابع عدد صحیح و مثبت N، ضربی[1] نامیده می‌شود اگر، m و n نسبت به‌هم اوّل باشند، $f(mn) = f(m)\, f(n)$ برقرار باشد. مثالی دیگر از چنین تابعی تابع اولر، $\varphi(N)$، تعداد اعداد صحیح و مثبت $\leq N$ نسبت به N اوّل است[2].

به این ترتیب $\tau(N)$ و $\sigma(N)$ توابعی ضربی‌اند. اما، توجه داشته باشید که اگر m و n نسبت به هم اوّل نباشند، آنگاه ضروری نیست که معادلات:

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\,\sigma(n) \text{ و } \tau(mn) = \tau(m)\,\tau(n)$$

برقرار باشند؛ به‌عنوان مثال، $\tau(۴)=۳$، اما $\tau(۲)\tau(۲)=۲\,.\,۲=۴$.

اگر $f(N)$ ضربی باشد، آنگاه:

$$f(n_1\, n_2 \dots n_k) = f(n_1)\, f(n_2) \dots f(n_k)$$

به شرطی که هر زوج از اعداد n_1، ...، n_k نسبت به هم اول باشند، برقرار است. از آن‌جا که $۱۸۰۰۰ = ۲^۴\,.\,۳^۲\,.\,۵^۳$، این مطلب مستلزم آن است که $\tau(۱۸۰۰۰) = \tau(۲^۴)\tau(۳^۲)\tau(۵^۳)$.

اما اگر P اوّل باشد، آنگاه $\tau(P^r) = r + ۱$، زیرا مقسوم‌علیه‌های P^r عبارتند از ۱، P، P^2، ...، P^r. در نتیجه:

$$\tau(۱۸۰۰۰) = ۵\,.\,۳\,.\,۴ = ۶۰$$

به همین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که

$$\sigma(۱۸۰۰۰) = \sigma(۲^۴)\,\sigma(۳^۲)\,\sigma(۵^۳)$$

از آنجا که

$$\sigma(P^r) = ۱ + P + P^2 + \dots + P^r = \frac{P^{r+1}-۱}{P-۱}$$

داریم:

$$\sigma(۱۸۰۰۰) = ۳۱\,.\,۱۳\,.\,۱۵۶ = ۶۲,۸۶۸$$

تبصره. همین استدلال بلافاصله به این حقیقت منجر می‌شود که اگر N دارای تجزیهٔ به عوامل اوّلی به صورت

$$N = P_1^{a_1}\, P_2^{a_2} \dots P_k^{a_k}$$

باشد، در این صورت:

$$\tau(N) = (a_1 + ۱)(a_2 + ۱)\dots(a_k + ۱)$$

و

$$\sigma(N) = \frac{P_1^{a_1+1}-1}{P_1-1}\cdot\frac{P_2^{a_2+1}-1}{P_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{P_k^{a_k+1}-1}{P_k-1}$$

یادداشت

1. multiplicative

۲. اگر N عددی صحیح و مثبت و

$$N = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_m^{a_m}$$

تجزیهٔ به عوامل اوّل آن باشد، در این صورت $\varphi(N)$، تعداد اعداد صحیح و مثبت $\leq N$ و نسبت به N اوّل، از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\varphi(N) = N - \frac{N}{P_1} - \frac{N}{P_2} - \dots - \frac{N}{P_m} + \frac{N}{P_1P_2} + \frac{N}{P_1P_3} + \dots + \frac{N}{P_{m-1}P_m} - \frac{N}{P_1P_2P_3} - \dots - \frac{N}{P_{m-2}P_{m-1}P} + \dots + (-1)^m \frac{N}{P_1P_2\dots P_m} = N\left(1-\frac{1}{P}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{P_m}\right)$$

پوزش: در برهان ۸ و شمارهٔ (۶) سلسله مقالات طرح و حل ... و در یادداشتها تاریخ تولد و تاریخ درگذشت اویلر به‌صورت [(۱۷۸۳ - ۱۷۰۷) ریاضیدان سوئیسی] اصلاح می‌گردد.

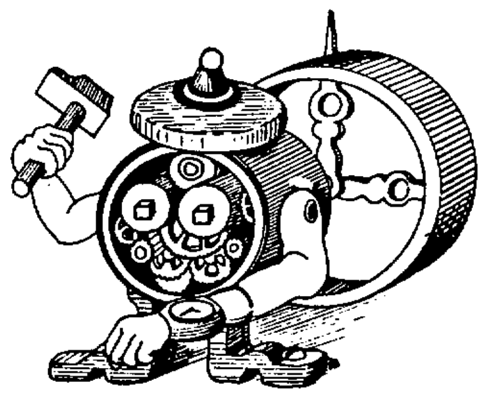
تفریح اندیشه ۲

یک ساعت دیواری رأس هر ساعت به تعداد شماره آن ساعت زنگ می‌زند.

اعلام ساعت ۵، مدت ۶ ثانیه و اعلام ساعت ۹، مدّت ۱۲ ثانیه طول می‌کشد و برای اعلام ساعت ۱ زمانی درنظر گرفته نمی‌شود.

تعیین کنید در مدّت ۲۴ ساعت چه زمانی صرف زدن زنگ می‌شود؟

ترجمهٔ ـ سیمین‌دخت ترکپور



جواب در صفحهٔ ۹۶

کانون‌یاب بیضی

● مریم رفعتی و الهه تاجیک سال دوم ریاضی (مرکز فرزانگان منطقه ۱۴)

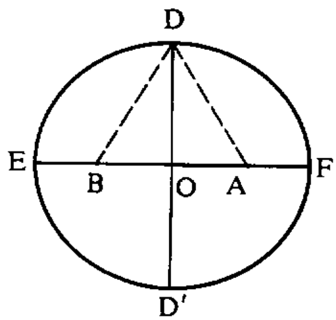
از آنجایی که این عمل مثبت شما (چاپ مرکزیاب دایره در شمارهٔ ۷) و در کنار آن تلاشهای دبیر محترم ریاضی ما، فکر ما را تحت‌تأثیر خود قرار داد، برآن شدیم تا وسیله‌ای دیگر در جهت تکامل آن وسیله بسازیم که کانونهای بیضی را پیدا کند، چنین وسیله‌ای مرکز دایره را هم می‌تواند به‌راحتی بیابد.

ضمناً حائز اهمیت است که ما زمانی طرح این وسیله به‌نظرمان رسید که در سال اوّل دبیرستان تحصیل می‌کردیم و از این‌رو اطلاعات چندانی درباره بیضی نداشتیم و تنها چیزی که از بیضی می‌دانستیم طریقهٔ رسم آن بود. بدین لحاظ سعی کردیم با همان اطلاعات اندک خود و با کمک گرفتن از طریقهٔ رسم بیضی به نتایجی دست یابیم.

برای توضیح طرز کار وسیله ابتدا باید قضیّه‌ای را ثابت کنیم.

فاصلهٔ محل برخورد قطر کوچک بیضی با محیط تا کانون برابر است با نصف اندازهٔ قطر بزرگ بیضی.

برهان: با توجه به طریقهٔ رسم بیضی، می‌دانیم که همیشه مجموع فاصله‌های هر نقطه روی محیط تا دو کانون بیضی مقداری است ثابت که در مورد تمام نقاط بیضی این مقدار وجود دارد. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطه روی محیط مورد نظر ما همان نقطهٔ تلاقی قطر بزرگ و محیط باشد. در این‌صورت



۱) $DA + DB = C$ مقدار ثابت

۲) $EB + EA = C$

۱ و ۲ $\Rightarrow DA + DB = EB + EA$

$DA + DB = EB + EB + BA$ می‌دانیم $\Rightarrow EB = AF \Rightarrow$

$DA + DB = EB + BA + AF \Rightarrow DA + DB = EF$

$=$ قطر بزرگ بیضی (۱)

اگر EF و DD' قطر بزرگ و کوچک بیضی باشند $\Leftarrow$

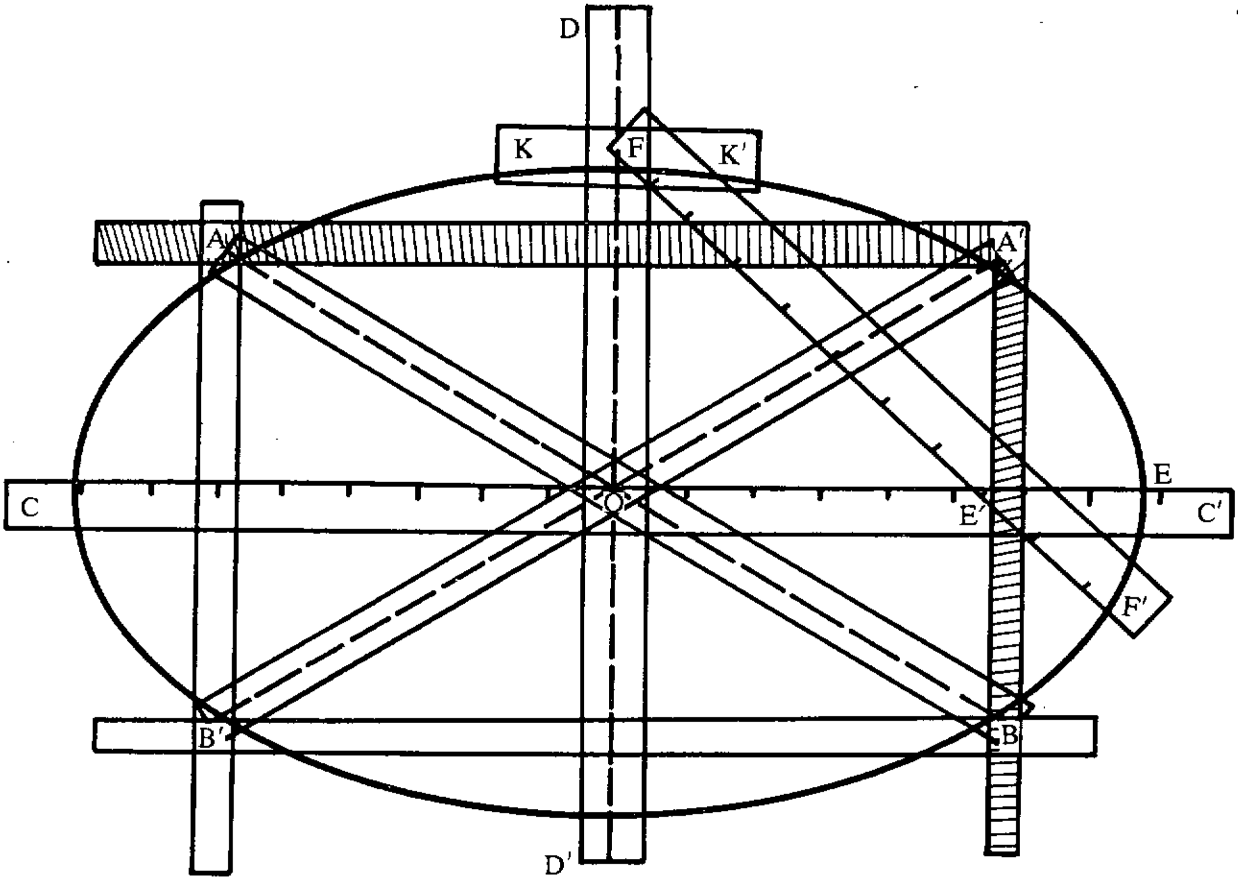
$EF \perp DD'$ زیرا $\overset{\Delta}{BDO} = \overset{\Delta}{DOA}$

مرکز همیشه وسط دو کانون $BO = OA$ و مشترک DO و $O_1 = O_2 = 90^\circ$ وجود دارد.

$\Rightarrow \boxed{DB = DA}$ (۲)

۱ و ۲ $\Rightarrow DA + DA = EF \quad 2DA = EF \quad \boxed{DA = \frac{EF}{2}}$

طرز کار وسیله: در شکل کشیده شده در صفحهٔ بعد خطهای قرمز نشان دهندهٔ بازوهای ثابت و خطهای مشکی نشان دهندهٔ



بازوهای متحرک هستند. بیضی موردنظر نیز با رنگ آبی مشخص شده است.

برای شروع کار باید ابتدا نقطهٔ A را روی نقطه‌ای از محیط بیضی قرار داد سپس بازوی A'B' را آن‌قدر جلو یا عقب می‌بریم تا نقطهٔ A' هم روی محیط قرار گیرد. حال بازوی BB' را بالا و پایین می‌بریم به‌طوری‌که نقاط B و B' هم روی محیط واقع شوند. در این‌صورت در حقیقت مستطیلی درداخل بیضی تشکیل می‌شود.

حال بازوهای AB' و A'B را طوری جابه‌جا می‌کنیم تا قطرهای مستطیل واقع شوند. محل برخورد این اقطار یعنی نقطهٔ O مرکز خواهد بود.

سپس بازوی CC' را آن‌قدر بالا می‌آوریم تا در روی مرکز واقع شود و به‌عبارتی از مرکز بگذرد. همچنین بازوی DD' را هم طوری جابه‌جا می‌کنیم تا از مرکز بگذرد.

به این ترتیب بازوهای DD' و CC' به‌ترتیب قطرهای کوچک و بزرگ بیضی هستند.

محل برخورد قطر بزرگ با بیضی را E نامیده و مشخص می‌کنیم تا مرکز (نقطهٔ O) چند واحد فاصله دارد.

طبق قضیّه‌ای که قبلاً گفته شد چون این مقدار یعنی مقدار OE با فاصلهٔ کانون تا نقطه F برابر است بازوی KK' را طوری جابه‌جا می‌کنیم که نقطه F روی محیط قرار گیرد.

حال به اندازهٔ پاره خط OE روی بازوی FF' جدا کرده و این بازو را طوری در مسیر دایره‌وار حرکت می‌دهیم که قطر بزرگ بیضی را در همان اندازه از قبل مشخص شده قطع کند. بدین ترتیب نقطهٔ E کانون خواهد بود. کانون دیگر نیز با حرکت دادن FF' در طرف دیگر بیضی به‌دست می‌آید.

مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۸)

Duane W. Detemple

غلامرضا یاسی‌پور

همگرایی سریعتر به ثابت اویلر

ثابت اویلر، γ، معمولاً به‌صورت حد رابطهٔ

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} D_n$$

تعریف می‌شود که در آن

$$D_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

آهنگ همگرایی آن بسیار آهسته است، زیرا:

$$\frac{1}{2(n+1)} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}\ , \quad n = 1\ ,\ 2, \dots$$

یانگ «Young» اثبات مقدماتی این نامساوی را در [۲] داده است.

همگرایی مورد بحث را می‌توان با قرار دادن

$$R_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n + \frac{1}{2})$$

به‌جای D_n، به‌مقدار قابل ملاحظه‌ای اصلاح کرد.

واضح‌است که $\lim_{n\to\infty} R_n = \gamma$؛ آنچه که غیرمنتظره است تأثیر عظیمی است که تغییر مختصر فوق بر آهنگ همگرایی دارد.

قضیّه. به ازای جمیع عددهای طبیعی n،

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < R_n - \gamma < \frac{1}{24n^2}$$

اثبات: کرانهای بالا و پایین، هردو، با در نظر گرفتن تابع f تعریف شده بر $x>0$ توسط $f(x) = -(x+1)^{-1} - \log(x+\frac{1}{2}) + \log(x+\frac{3}{2})$ به‌دست می‌آیند.

محاسبه‌هایی کوتاه نشان می‌دهد که

$$R_n - R_{n+1} = f(n)$$

و

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x+1)^{-2}\,(x+\frac{1}{2})^{-1}\,(x+\frac{3}{2})^{-1}$$

برای به‌دست آوردن کران بالا، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$-f'(x) < \frac{1}{4}\,(x+\frac{1}{2})^{-4}$$

بنابراین، از آن‌جا که $f(\infty) = 0$،

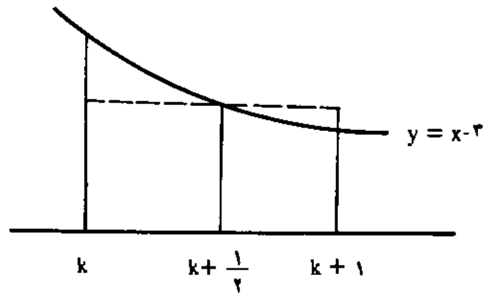
$$f(k) = -\int_k^\infty f'(x)\,dx < \frac{1}{4}\int_k^\infty (x+\frac{1}{2})^{-4}dx$$

$$= \frac{1}{12}\,(k+\frac{1}{2})^{-3}$$

از آن‌جا که $(k+\frac{1}{2})^2 > k\,(k+1)$، نتیجه می‌شود که

$$(k+\frac{1}{2})^{-3} < \frac{1}{2}\,\frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2} = \int_k^{k+1} x^{-3}\,dx$$

در واقع از لحاظ هندسی از شکل زیر آشکار است که $(k+\frac{1}{2})^{-3}$ کوچکتر از سطح زیر $y=x^{-3}$ روی $k \le x \le k+1$ است.



در این‌صورت، روی هم رفته

$$R_n - \gamma = \sum_{k=n}^{\infty} (R_k - R_{k+1}) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$$

$$< \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \left(k+\frac{1}{2}\right)^{-3} < \frac{1}{12} \int_{n}^{\infty} x^{-3} dx = \frac{1}{24 n^2}$$

برای استخراج کران پایین، به x نامساوی زیر نیاز داریم:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = x^2 + 2x + \frac{3}{4} < (x+1)^2$$

که از آن نتیجه می‌گیریم که

$$-f'(x) > \frac{1}{4}(x+1)^{-4}$$

چون مانند قبل عمل کنیم، درمی‌یابیم که

$$f(k) > \frac{1}{4} \int_{k}^{\infty} (x+1)^{-4} dx = \frac{1}{12} (k+1)^{-3}$$

و سپس به‌دست می‌آوریم:

$$R_n - \gamma > \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)^{-3} > \frac{1}{12} \int_{n+1}^{\infty} x^{-3} dx$$

$$= \frac{1}{24(n+1)^2}$$

و به‌این ترتیب اثبات قضیه تکمیل می‌شود.

مفاهیم به کار رفته در اثبات فوق را می‌توان برای به‌دست آوردن برآورد از مرتبهٔ بالاتر زیر پذیرفت.

$$R_n - \gamma - \frac{1}{24\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} = -r_n$$

که در آن:

$$\left(\frac{7}{960}\right) \frac{1}{(n+1)^4} < r_n < \left(\frac{7}{960}\right) \frac{1}{n^4}$$

بسط عمومی به مرتبه‌ای دلخواه را می‌توان برحسب عددهای برنولی یافت. استخراجی راکه تنها به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی نیاز دارد، می‌توان در [۱] یافت.

مرجعها:

1. D. W. Detemple and S. H. Wang, Half integer approximations for the partial of the harmonic series, J. Math Analysis and Applic. 160 (1991), 149 - 156.

2. R. M. Young, Euler's Constant, Math.Gazette 75, No. 472 (1991), 187 - 190

Department of pure and Applied Mathematics
Washington State University
Pullman, Washington 99164 - 3113

ادب ریاضی

ـ پاسکال به فیلسوف مذهبی معروف بود؛ و همین دل مشغولی او به مذهب بود که بعدها همهٔ وقت او را اشغال کرد و وی را با بحثهایی در مورد تصادف و وقایع نامعین در زندگی فرد و اجتماع درگیر ساخت.

تاریخ علم کمبریج ـ حسن افشار

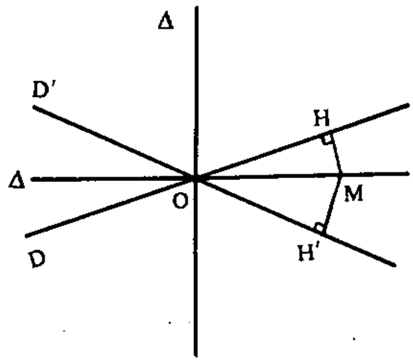
مکان هندسی

• محمد هاشم رستمی

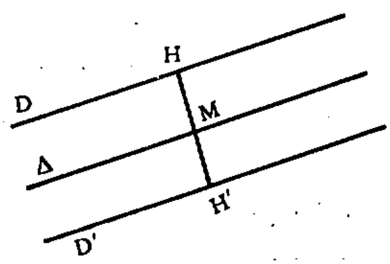
(قسمت دوم)

۴ـ در مسأله، دو خط ثابت D و D´ وجود دارد:

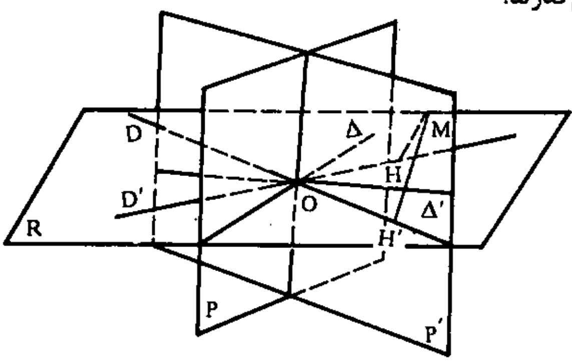
الف ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که فاصلهٔ آن از دو خط ثابت متقاطع D و D′ برابر باشد ($MH = MH'$)، مکان هندسی نقطه M نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D′ است (خطهای Δ و Δ′).



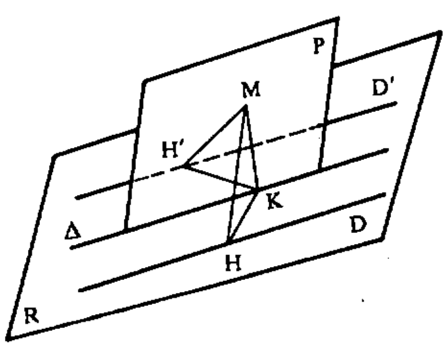
ب ـ اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که فاصله‌اش از دو خط متوازی D و D′ برابر باشد ($MH = MH'$ و $D \parallel D'$)، مکان هندسی نقطه M خط راستی است بین دو خط D و D′ موازی آنها و به یک فاصله از D و D′ (خط Δ).



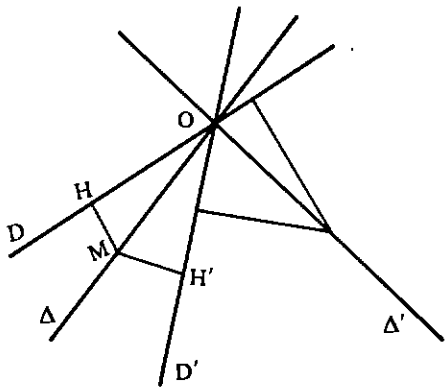
پ ـ اگر نقطهٔ متحرک M در فضا چنان حرکت کند که فاصلهٔ آن از دو خط ثابت متقاطع D و D′ برابر باشد، مکان هندسی نقطهٔ M دو صفحه P و P′ است که بر صفحهٔ حاصل از دو خط D و D′ (صفحهٔ R) عمودند و بر نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D′ می‌گذرند.



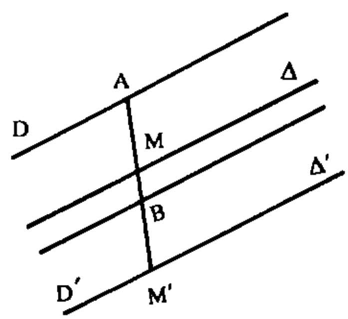
ت ـ اگر نقطهٔ متحرک M در فضا چنان حرکت کند که فاصله‌اش از دو خط متوازی D و D′ برابر باشد، مکان هندسی نقطهٔ M صفحه‌ای است عمود بر صفحهٔ دو خط D و D′ که بر خط متساوی‌الفاصله از این دو خط می‌گذرد.



ث ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که نسبت فاصله‌های آن از دو خط متقاطع D و D' مقدار ثابت K باشد $(\frac{MH}{MH'} = K)$ ، مکان هندسی نقطهٔ M دو خط Δ و Δ' است که بر O ، نقطهٔ تقاطع خطهای D و D' می‌گذرند و $(O - DD'\Delta\Delta')$ یک دستگاه توافقی است.

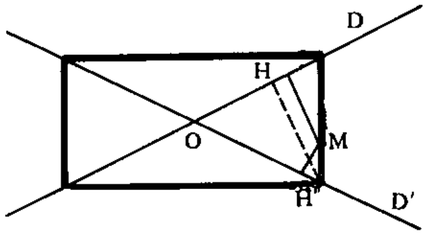


ج ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که نسبت فاصله‌های آن از دو خط متوازی D و D' برابر مقدار ثابت K باشد، مکان هندسی نقطهٔ M دو خط Δ و Δ' موازی خطهای D و D' است به قسمی که $(DD'\Delta\Delta')$ یک دستگاه توافقی است و رأس این دستگاه در فاصلهٔ بی‌نهایت دور واقع است.



چ ـ اگر نقطه متحرک M چنان حرکت کند که مجموع فاصله‌هایش از دو خط ثابت متقاطع D و D' مقدار ثابت l باشد:
$(MH + MH' = l)$،

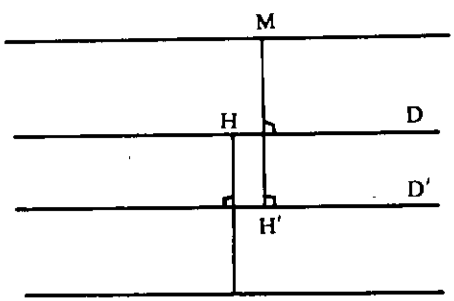
مکان هندسی نقطه M اضلاع مستطیلی است که دو خط ثابت D و D' قطرهای آن می‌باشند و فاصلهٔ هر رأس این مستطیل از قطر مقابلش برابر l است.



ح ـ اگر نقطه متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع فاصله‌هایش از دو خط ثابت متوازی D و D' که فاصله‌شان برابر h است، مقدار ثابت l باشد:

$(D \parallel D'$ و $MH + MH' = l)$،

مکان هندسی نقطهٔ M اگر $l>h$ باشد، دو خط موازی خطهای D و D' و در خارج این دو خط است.

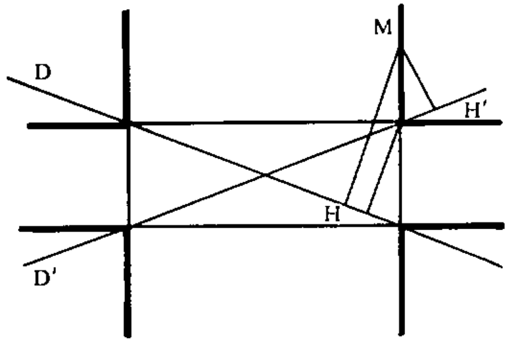


تمرین: اگر فاصلهٔ بین دو خط متوازی D و D' برابر l باشد مکان هندسی فوق چگونه است؟

خ ـ هرگاه نقطهٔ متحرک M چنان‌حرکت‌کند که قدرمطلق تفاضل فاصله‌اش از دو خط ثابت متقاطع D و D' برابر مقدار ثابت l باشد:
$(|MH - MH'| = l)$،

مکان هندسی نقطهٔ M ، هشت نیم خط است که این نیم‌خطها امتداد اضلاع مستطیلی هستند که اقطارش بر دو خط D و D' منطبق است و

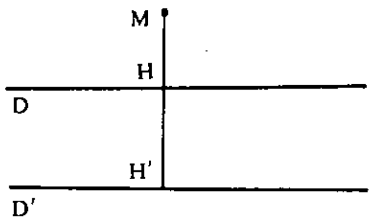
فاصلهٔ هر رأس این مستطیل از قطر مقابلش برابر l می‌باشد.



تمرین: اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که تفاضل فاصله‌اش از دو خط متوازی D و D' برابر مقدار ثابت l باشد:

$(D \parallel D'$ و $|MH - MH'| = l)$

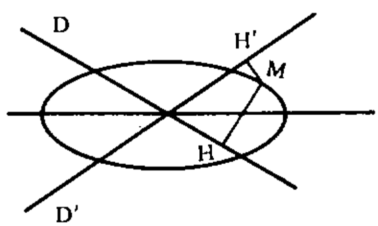
مکان هندسی نقطهٔ M چگونه‌است؟



د ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو خط متقاطع D و D' مقدار ثابت l باشد:

$(MH^2 + MH'^2 = l)$

مکان هندسی نقطهٔ M یک بیضی است که قطر بزرگ آن بر نیمساز زاویهٔ حادهٔ بین دو خط D و D' منطبق است.

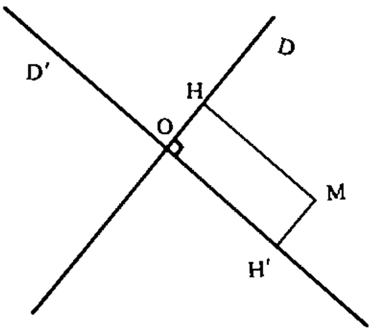


تمرین: اگر خطهای D و D' متوازی باشند مکان فوق چگونه است؟

ذ ـ اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که قدر مطلق تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو خط ثابت متقاطع D و D' برابر مقدار ثابت l باشد:

$(|MH^2 - MH'^2| = l)$

مکان هندسی نقطهٔ M یک هذلولی متساوی‌القطرین است.



تمرین: اگر خطهای D و D' متوازی باشند مکان فوق چگونه است؟

تفریح اندیشه ۳

در هر قسمت علامتهای مناسب + ، − ، × ، : و ( ) را بین ارقام ۳ طوری قرار دهید که یک تساوی به‌دست آید.

۳ ۳ ۳ ۳ = ۳

۳ ۳ ۳ ۳ = ۴

۳ ۳ ۳ ۳ = ۵

۳ ۳ ۳ ۳ = ۶

۳ ۳ ۳ ۳ = ۷

۳ ۳ ۳ ۳ = ۸

۳ ۳ ۳ ۳ = ۹

۳ ۳ ۳ ۳ = ۱۰

ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی

جواب در صفحهٔ ۹۶

جواب نامه‌ها

آقای علی حیدری دانش‌آموز رشته ریاضی (سنندج)

با تشکر از مسأله ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان آن‌را تکمیل‌تر کرده و برای ما ارسال کنید تا در شماره‌های بعدی از آن استفاده شود.

آقای علیرضا اسماعیل‌خو؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر و قدردانی از مطلب ارسالی شما تحت عنوان «حل نوعی معادلهٔ درجهٔ سوم» به عرض می‌رسانیم که حل هندسی و جبری معادلهٔ درجهٔ سوم کامل در حالت عمومی $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را می‌توانید در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، سال ششم ـ شمارهٔ مسلسل ۲۲، صفحهٔ ۴۱ تا ۴۳ آن مشاهده کنید.

آقای یوسف خمسه؛ دانش آموز رشته ریاضی (کرج)

ضمن تشکر از سائل و تستهای ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که امید است از آنان برای شماره‌های آیندهٔ مجله انتخاب کنیم.

آقای عباس‌نیا؛ دانش آموز رشته ریاضی (تایباد)

با تشکر از مسائل ارسالی شما، در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای محمدرضا وزیری؛ دانش آموز رشته ریاضی (شاهین‌شهر)

از نامه ارسالی شما متشکریم. امید است از خاطرهٔ شما در جای مناسب در قسمت «شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» استفاده کنیم.

آقای عباس نیک‌نژاد؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوانهای «معادله خط راست و لگاریتمی کردن عبارات مثلثاتی» و چند مسأله برای حل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مقالات خود را به منظور بسط و تفهیم مطالب کتاب درسی ارائه دهید. در هر صورت از مطلب شما در صورت لزوم و در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

آقای کیانوش یزدی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (لنگرود)

با تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما، در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای امیر فراتی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری ارائه دهید، و همچنین تکراری نیز نباشند. موفقیت و پیروزی هر چه بیشتر شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

آقای افشین زادایمانی؛ دانش آموز (تبریز)

ضمن تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «کامپیوتر را بهتر بشناسیم» به عرض می‌رسانیم که مقالهٔ شما از نظر محتوی دارای کمبودهایی است که از جمله آنان چهارچوب مقاله است که باید مشخص شود و به طور منطقی باید از تاریخچهٔ آن شروع و به شناخت سیر تکمیلی آن بپردازید. امید است با توجه به معیارهای داده شده مقالات بعدی خود را ارائه دهید. در هر صورت از مطالب مقالهٔ شما در صورت لزوم و در جای مناسب استفاده خواهد شد.

آقای امیرخسرو توسلی؛ دانش آموز (شهرستان قاین)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که تساوی $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$ یک معادله است و نه یک اتحاد مثلثاتی و می‌دانیم معادله ممکن است جواب حقیقی داشته باشد و یا فاقد جواب حقیقی باشد. بنابراین معادله فوق فقط به ازای بعضی از مقادیر ممکن است درست باشد.

آقای تورج صارمی‌راد (تهران)

ضمن تشکر از مقاله شما تحت عنوان «یافتن بزرگترین و کوچکترین مقدار در بیسیک» به عرض می‌رسانیم که برنامه‌های ارائه داده شده باید توسط کامپیوتر اجرا و سپس Print گرفته شوند. در این صورت امید است امکان درج آن در جای مناسب به‌وجود آید.

آقای حمیدرضا جمالی؛ دانش‌آموز (رامسر)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید صورت مسائل کوتاه و جواب آنان نیز طولانی نباشد. در هر صورت از مسائل شما در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

خانم متین جعفریان؛ دانش‌آموز (چالوس)

با تشکر از مطلب شما در رابطه با شگفتیهای ریاضی امید است که در جای مناسب از آن استفاده کنیم.

آقای سرو شامعیر؛ دانش‌آموز (تهران)

با تشکر از دو مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما، در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

خانم ندا شهیدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

ضمن تشکر از شما برای ارسال یک مسأله و تست به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل و یا تستهای ارسالی با توجه به مسائل و تستهای مجلات قبلی برهان طرح شوند تا تکراری نباشند و از سطح مطلوبی نیز برخوردار باشند.

آقای مهدی باباپور؛ دانش‌موز رشته ریاضی (کرج)

با تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «روش به دست آوردن مختصات قطبی وسط یک پاره‌خط» امید است امکان درج آن در شماره‌های آیندهٔ مجله به وجود آید.

آقای حسن زارعی، دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

از اشعار سروده شدهٔ شما در رابطه با مفاهیم ریاضی متشکریم.

آقای فایق رشیدزاده؛ دبیر ریاضی (مهاباد)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «قابل محاسبه کردن عبارتهای مثلثاتی به وسیلهٔ لگاریتم و کاربردهای آن» به عرض می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب به وجود آید. همچنین از مسائل حل شدهٔ آن در صورت نیاز استفاده خواهیم کرد.

آقای جعفر بحریان؛ دبیر ریاضی (شیراز)

با تشکر از تستهای ارسالی شما، امید است از آنان در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب استفاده شود.

آقای عنایت شیرازی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (فیروزکوه)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان و در جای مناسب امید است مطالبی در رابطه با شناخت توپولوژی ارائه شود. در رابطه با اشکالی که به مبحث لگاریتم کتاب درسی گرفته بودید؛ باید بگوییم که اگر شرط مثبت بودن اعداد در لگاریتم ذکر نمی‌شد وارد بود.

آقای یوسف یعقوبی؛ دیپلمهٔ ریاضی (تهران)

با تشکر از مسائل ارسالی شما، در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای فریدون قاسمیان؛ دانشجوی رشتهٔ ریاضی (خرم‌آباد)

ضمن تشکر از یادآوری برخی از اشکالات چاپی مجله و ترجمهٔ مطلبی در رابطه با حدّ یک تابع به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای علیرضا بهبودی‌فر؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از مقاله و مسائل حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مطالبی را که ارسال می‌دارید با توجه به مطالب شماره‌های قبلی مجله ارائه دهید تا از تکرار مطلب جلوگیری شود. نظیر مقاله و مسائل شما در برهان ۱ قسمت «بخش‌پذیری» موجود است.

آقای یحیی افشار؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (قم)

با تشکر از نامهٔ شما در رابطه با ارسال برخی از شگفتیهای ریاضی به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای وحید زاهدان؛ دانش آموز رشته ریاضی (تبریز)

ضمن تشکر از ارسال چند برنامهٔ کامپیوتری به زبان بیسیک به عرض می‌رسانیم که ما از برنامه‌های ارائه شده‌ای استفاده می‌کنیم که توسط کامپیوتر اجرا و سپس توسط پرینتر چاپ شده باشند.

آقای امین فیروزفر (مشهد)

ضمن تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «روشی برای حل معالات» به عرض می‌رسانیم که الگوریتمهایی قوی برای حل معادلات موجود است که با تعریف هر یک از آنها برای کامپیوتر می‌توان هر معادله را در کمترین زمان و با سرعت بالا حل کرد.

خانم ناهید صادقی؛ دانش آموز رشته ریاضی (خوزستان)

ضمن تشکر از نامهٔ محبت‌آمیز و مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که با این شوق و ذوقی که شما دارید بهتر است ابتدا به دانشگاه راه پیدا کنید و رشتهٔ ریاضی یا فیزیک را نیز برگزینید، یقیناً در این دو رشته خصوصاً رشته ریاضی موفق خواهید بود پیروز باشید.

آقای حسن فلاحی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (دلیجان)

ضمن تشکر از مطلب ارسالی شما در رابطه با «تثلیث زاویه» به عرض می‌رسانیم که امتناع سه مسألهٔ مهم تاریخی تثلیث زاویه، تربیع دایره و تضعیف مکعب با کمک خط‌کش و پرگار ثابت شده است، بنابراین در این مورد هر روشی ارائه شود تقریبی است.

آقای میثم ارشدی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی

از ارسال حل مسائل المپیاد ریاضی متشکریم. متذکر می‌شویم که مسائل حل شدهٔ ارسالی خود را در سطح دانش‌آموزان دبیرستان ارائه دهید.

آقای مسلم مرادی (تهران)

از تستهای ارسالی شما متشکریم. امید است در شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده کنیم.

آقای هاشم حبیبی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (اقلید)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده می‌کنیم.

آقای مسعود فلاح؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است برای شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده کنیم.

آقای رضا منتظری؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (نجف‌آباد)

از مطلب تاریخی شما تحت عنوان «اواریست گالوا» متشکریم. امید است امکان درج آن برای شماره‌های آیندهٔ مجله به‌وجود آید.

آقای برمک حیدر اسدی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «توابع بازگشتی» به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در جای مناسب به وجود آید.

آقای امید قطره سامانی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

با تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «نکاتی چند دربارهٔ ماتریسها» به اطلاع می‌رسانیم که کاملتر از این مطالب در کتاب درسی ریاضیات جدید سال چهارم ریاضی موجود است.

آقای احسان امیری؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (مشهد)

با تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «برخالها: نمودی از تجلی تخیّل در علم» امید است که امکان درج آن در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب به وجود آید. متذکر می‌شویم که سعی کنید مقالاتی را ارسال کنید که در چهارچوب مطالب و مفاهیم کتابهای درسی باشد.

د و بررسی تستهای ریاضیات جدید مربوط به مرحلهٔ اوّل کنکور سراسری ۷۳

● بهروز نوذری

(دبیر دبیرستانهای تهران)

در این آزمون پرسشهای درس مذکور از ردیف ۱۷۰ تا ۱۸۰ به تعداد ۱۱ تست درنظر گرفته شده بود که سؤالات ۱۷۲ و ۱۷۴ و ۱۷۸ و ۱۸۰ دارای اشکالهایی بوده که در زیر مورد بررسی قرارگرفته است.

تست ۱۷۲: تفاضل تعداد مقسوم علیه‌های دو عدد طبیعی $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ و $\frac{N}{36}$ برابر ۱۴ می‌باشد؛ کوچکترین عدد طبیعی N کدام است؟

۱) ۱۴۴   ۲) ۲۱۶   ۳) ۲۸۸   ۴) ۴۳۲

نکته: هرگاه $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ داریم:

$(\alpha + 1)(\beta + 1)$ = تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد N

$2(\alpha + 1)(\beta + 1)$ = تعداد مقسوم علیه‌های عدد طبیعی N

مثال: $12 = 2^2 \times 3^1$

$6 = (1 + 1)(2 + 1)$ = تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۱۲

عبارتنداز $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$12 = 2(2+1)(1+1)$ = تعدادمقسوم‌علیه‌های‌عددطبیعی ۱۲

عبارتنداز $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

چون صورت تست به‌طور واضح اشاره به تعداد مقسوم علیه‌های دو عدد N و $\frac{N}{36}$ دارد پس طبق مفروضات مسئله داریم:

$$2(\alpha + 1)(\beta + 1) - 2(\alpha - 1)(\beta - 1) = 14$$

$$\Rightarrow 4(\alpha + \beta) = 14$$

که ممکن نیست.

صورت اصلاح شده تست: تفاضل تعداد مقسوم علیه‌های مثبت دو عدد طبیعی $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ و $\frac{N}{36}$ برابر ۱۴ می‌باشد؛ کوچکترین عدد طبیعی N کدام است؟

حل) $2(\alpha + \beta) = 14$

$$\alpha + \beta = 7$$

$$\frac{N}{36} \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^{\alpha-2} \times 3^{\beta-2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq 2 \\ \beta \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{matrix}$$

$$N = 2^5 \times 3^2 = 288$$

گزینه ۳ درست می‌شود.

صورت تست ۱۷۴: اگر $r = 91a + 63b$ و $r = (91, 63)$، $a + b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱   ۴) ۲

نکته: در سؤالاتی به فرم اگر p آنگاه کدام گزینه درست است؟ باید گزینه‌ای انتخاب شود که برای p شرط لازم است.

مثال: اگر $x^2 = 1$ آنگاه ? = x. مسلماً برای این سؤال پاسخ $x = 1$ نمی‌تواند صحیح باشد. چون صورت تست ۱۷۴ باکلمه اگر

شروع شده و مقدماتی مطرح شده‌است بنا به نکته فوق باید گزینه‌ای درست باشد که برای این مقدمات شرط لازم باشد و چنین گزینه‌ای در تست فوق موجود نیست.

صورت اصلاح شده تست: اگر $r = (91, 63)$ آنگاه برای آنکه $r = 91a + 63b$ کافی است که مقدار $a + b$ برابر باشد با... $(a , b \in Z)$

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

حل: $91a + 63b = 7$

$13a + 9b = 1$

$4a = 1 - 9(a + b)$

پس مقدار $a + b$ باید طوری باشد که $1 - 9(a + b)$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد و گزینه ۳ درست است.

صورت تست ۱۷۸: شرط وجود جواب غیرصفر یک دستگاه معادله غیرهمگن و همگن به‌ترتیب آن است که دترمینان ضرایب دستگاه معادلات غیرهمگن ...

۱) مخالف صفر و دستگاه همگن برابر صفر باشد.

۲) و همگن هر دو برابر صفر باشد.

۳) و همگن هر دو مخالف صفر باشد.

۴) برابر صفر و دستگاه همگن مخالف صفر باشد.

نکته: در منطق اصطلاحات شرط کافی؛ شرط لازم؛ شرط لازم و کافی؛ نه شرط لازم و نه شرط کافی؛ وجود دارد و صرفاً اصطلاح شرط را به تنهایی نمی‌توان به‌جای هریک از اصطلاحات فوق به‌کار گرفت.

مثال: مخالف صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه غیرهمگن شرط کافی برای وجود جواب غیر صفر می‌باشد ولی لازم نیست. و مساوی صفر بودن دترمینان ضرایب شرط لازم و کافی برای وجود جواب غیر صفر دستگاه همگن می‌باشد.

صورت اصلاح شده تست: شرط کافی برای وجود جواب غیرصفر دریک دستگاه معادلات غیرهمگن و همگن به‌ترتیب آن است که دترمینان ضرایب دستگاه معادلات غیر همگن ...

۱) مخالف صفر و دستگاه همگن برابر صفر باشد.

۲) و همگن هردو برابر صفر باشد.

۳) و همگن هر دو مخالف صفر باشد.

۴) برابر صفر و دستگاه همگن مخالف صفر باشد.

و در این‌صورت گزینه «۱» صحیح خواهدبود.

صورت تست ۱۸۰: امتداد بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باهم کدام زاویه را می‌سازند؟

۱) 0° ۲) 45° ۳) 90° ۴) 180°

نکته: هرگاه A یک ماتریس متقارن مرتبه ۲ با دو مقدار ویژه متمایز K_1 و K_2 باشد؛ آنگاه هر بردار ویژه نظیر K_1 برهر بردار ویژه نظیر K_2 عمود است. بنابراین امتداد هر بردار ویژه برامتداد هر بردار ویژه دیگر عمود نمی‌باشد و درصورتی‌که دو بردار ویژه مربوط به یک مقدار ویژه را درنظر بگیریم زاویه بین امتدادهای آنها 0° بوده که در گزینه‌ها نیز آمده است.

صورت اصلاح شده تست: امتداد بردارهای ویژه نظیر یک مقدار ویژه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ با امتداد بردارهای ویژه نظیر مقدار ویژه دیگر آن کدام زاویه را می‌سازند؟

۱) 0° ۲) 45° ۳) 90° ۴) 180°

پاسخ «۳» درست خواهد بود.

ادب ریاضی

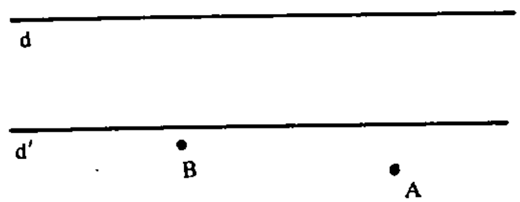
تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که موضوعاتی که محض، در نظر گرفته شده‌اند می‌توانند، در هر لحظه‌ای، غیرمنتظره‌ترین موارد استعمال واقعی را داشته باشند.

هنر ریاضی ورزیدن ـ غلامرضا یاسی‌پور

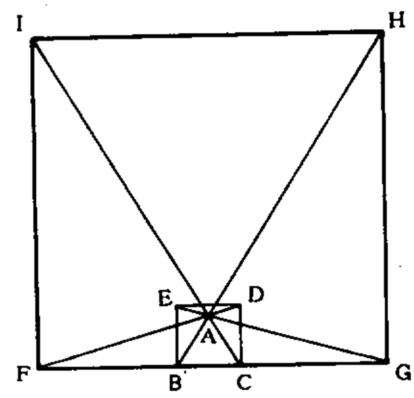
مسائل مسابقه‌ای

● محمد هاشم رستمی

۱ ـ دو خط متوازی d و 'd و دو نقطه A و B مفروضند. از نقطهٔ A خطی رسم کنید که خطهای d و 'd را به‌ترتیب در نقاط C و D قطع کند به قسمی که این دو نقطه از نقطه B به یک فاصله باشند (بحث کنید).

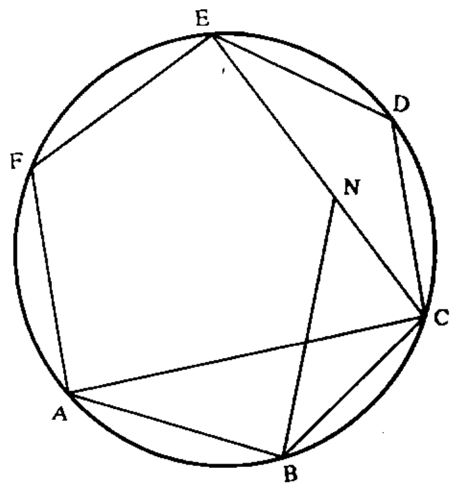


۲ ـ روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و در طرف رأس A مربع BCDE را می‌سازیم. نقاط تقاطع AD و AE با امتداد ضلع BC را به‌ترتیب F و G، و نقاط برخورد AB و AC با عمودهای رسم شده بر خط FG در نقاط G و F را به‌ترتیب H و I می‌نامیم. ثابت کنید که چهارضلعی FGHI مربع و مجانس مربع BCDE است و نسبت مساحت این دو مربع را پیدا کنید درصورتی که BC=a باشد.



مسأله‌ای از المپیادهای ریاضی

اقطار AC و CE از شش ضلعی منتظم ABCDEF به‌ترتیب توسط نقاط داخلی M و N چنان تقسیم شده‌اند که $r=\frac{CN}{CE}=\frac{AM}{AC}$ درصورتی که B ، M و N بر یک استقامت باشند، r را معین کنید.



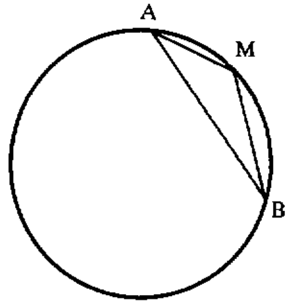
بیست و سومین المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۲

مسائل برای حل

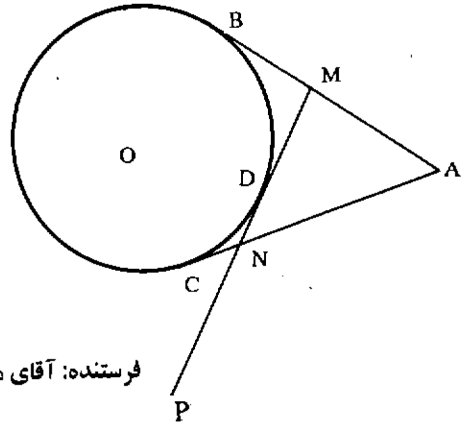
● هندسه: محمدهاشم رستمی
● ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
● جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی ـ مهدی قمصری

مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ روی کمان $\overset{\frown}{AB}$ از دایره‌ای مفروض نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از دو سر وتر AB ماگزیمم مقدار ممکن باشد.



۲ ـ از نقطهٔ ثابت A دو مماس AB و AC را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دلخواه 'P واقع در صفحه این دایره خط دیگری بر دایره مماس رسم می‌کنیم تا خطوط AB و AC را در نقاط M و N قطع کند. ثابت کنید که محیط مثلث AMN مقدار ثابتی است.



فرستنده: آقای محمدرضا ضرابی

۳ ـ بدون استفاده از جدول ثابت کنید گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ همیشه درست است.

۴ ـ هرگاه داشته باشیم $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$، اولاً، معین کنید مجموعهٔ A دارای چند زیر مجموعه است. ثانیاً، مجموعه‌ای چون B تشکیل دهید که زیر مجموعهٔ A بوده و داشته باشیم $\{a\} \in B$ و $\{a\} \subset B$.

۵ ـ اگر برای سه مجموعهٔ A و B و C داشته باشیم $A \cap C = \phi$، ثابت کنید $A - (B - C) = (A - B) - C$.

۶ ـ از مهران امیری، دبیرستان حکمت مشهد دانش آموز سال دوّم.

اگر $A = x + \frac{۱}{x}$، حاصل عبارت $x^۲ + \frac{۱}{x^۲}$ را برحسب A محاسبه کنید.

۷ ـ مقدار تقریبی عبارت زیر را بیابید.

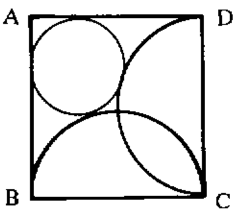
$$\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲} + \sqrt{(۲-\sqrt{۲})^۲} + \sqrt{(-۳)^۲} + \sqrt{۰/۵} + \sqrt{۰/۱}$$

۸ ـ دستگاه مقابل را حل کنید:

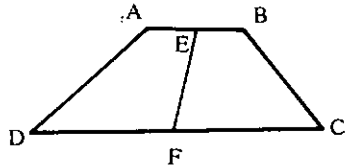
$$\begin{cases} \frac{۱۴}{۲x+y} + \frac{۷}{y+z} = ۳ \\ \frac{۲۱}{y+z} + \frac{۲۰}{۲z+x} = ۵ \\ \frac{۱۰}{x+۲z} + \frac{۷}{۲x+y} = ۲ \end{cases}$$

مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ مربع ABCD مفروض است. دو نیمدایره به اقطار CD و BC در داخل مربع رسم می‌کنیم. شعاع دایره‌ای را که بر اضلاع AB و AD و دو نیمدایره رسم شده مماس است تعیین کنید.



۲ ـ در ذوزنقه ABCD دو زاویهٔ C و D متمم یکدیگرند. ثابت کنید پاره‌خطی که وسطهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند نصف تفاضل دو قاعده است.



۳ ـ ثابت کنید برای هر ۴ مجموعهٔ دلخواه مانند A و B و C و D داریم:

$$(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$$

۴ ـ رابطهٔ R روی IR^2 به‌صورت زیر تعریف می‌شود، اولاً، ثابت کنید R یک رابطهٔ هم ارزی است. ثانیاً، کلاس هم ارزی $[(1\,,\,2)]$ را مشخص کنید

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow (y-t)=3(x-z)$$

۵ ـ عمل * روی مجموعهٔ $IR-\{-1\}$ به‌صورت $a * b = ab + a + b$ تعریف شده اولاً، نشان دهید $IR-\{-1\}$ همراه با عمل * یک گروه آبلی است. ثانیاً، معادلهٔ $(2' * 3) = (4 * x)'$ را در این گروه حل کنید.

۶ ـ (از حسین کُردپور، دبیرستان استقلال بوکان دانش‌آموز سال سوم)

اگر $A\left|\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right.$ رأس زاویه قائمه مثلث ABC باشد، وتر BC روی خط $y = 2$ قرار دارد. نقطه C روی پاره‌خط AO قرار دارد. مطلوب است مختصات دو رأس B و C.

۷ ـ اگر ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$، x' و x'' باشد مطلوب است محاسبهٔ $x'^{18} + x''^{18}$.

۸ ـ حاصل عبارت $\lg_a \lg_a \underbrace{\sqrt[a]{\sqrt[a]{\dots\sqrt[a]{a}}}}_{n\ \text{مرتبه}}$ را بیابید. $\begin{cases}n\in N\\ a>0\end{cases}$

۹ ـ اگر $a\sin^2x - b\cos^2x = a - b$ باشد، ثابت کنید

$$\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}=\frac{1}{a+b}$$

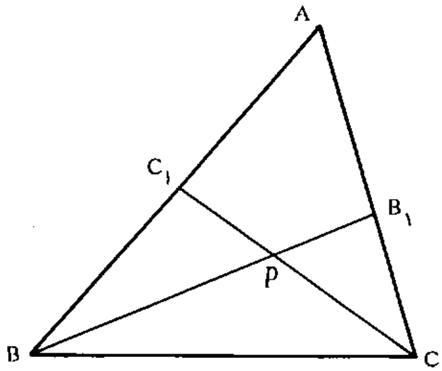
(آقای اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشته تجربی آمل)

۱۰ ـ اگر $4^{\sin^2x} - 4^{\cos^2x} = \sqrt{2}$ باشد، مقدار عبارت $4^{\sin^2x}$ را حساب کنید

(آقای سعید رضایی دانش‌آموز رشته ریاضی زنجان)

مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ ـ در مثلث ABC نقطهٔ P را در درون آن اختیار می‌کنیم. خطوط راست BP و CP اضلاع روبه رو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم که هم مساحتها و هم محیطهای دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند. آنگاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویهٔ A قرار دارد.



آزمون مرحلهٔ اول یازدهمین المپیاد ریاضی ایران ۱۳۷۲/۹/۵

۲ ـ در چهاروجهی ABCD یال BC بر یالهای CD و AB عمود بوده یالهای CD و AB نیز بر هم عمودند و $AB = 4a$ و $BC = CD = 6a$ می‌باشد.

۱) ثابت کنید وجوه این چهاروجهی مثلثهای قائم‌الزاویه می‌باشند.

۲) حجم چهاروجهی را محاسبه کنید.

۳ ـ فرض کنید V فضای برداری توابع از IR به IR باشد، نشان دهید $W = \{f \in V \,/\, f(5) = 0\}$ یعنی مجموعهٔ توابعی از V که مقدار آنها به ازای ۵، صفر است، یک زیرفضای V است.

۴ ـ ۴ خودکار را از میان ۱۵ خودکار که ۶ عدد از آنها بدون هیچ علامتی خراب است، انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که: الف) هیچکدام خراب نباشند ب) اقلاً یکی خراب باشد ج) حداکثر ۳ خودکار خراب باشد.

۵ ـ سکهٔ سالمی را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که در دفعهٔ اول و دوم و سوم «پشت» بیاید و در دفعات بعد «رو» بیاید.

۶ ـ **(از وحید صادقی پورگرچین قلعه، شهرستان ارومیه دانش‌آموز سال سوم)**

مطلوب است رسم نمودار رابطه $\left[\frac{y+۲}{۲}\right]+\left[\frac{-x+۲}{۲}\right]=۰$ وقتی $-۴ \le x < ۲$ باشد.

۷ ـ **(از عارف ادیبی، شهرستان مشهد دانش‌آموز سال سوم)**

ثابت کنید عبارت $A = (۲۲۲)^{۳۳۳} + (۳۳۳)^{۲۲۲}$ بر (۱۳) بخش‌پذیر است.

۸ ـ تابع هموگرافیکی چنان مشخص کنید که خط $x = ۲$ مجانب قائم و خط $y = ۱$ مجانب افقی آن باشد و منحنی تابع از نقطه $A\left|\begin{matrix}۱\\ \frac{۱}{۴}\end{matrix}\right.$ بگذرد.

۹ ـ با فرض $a>b$ عبارت $P = \frac{a+b}{a-b}$ را قابل محاسبه لگاریتمی کنید.

(فرستنده: آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان))

۱۰ ـ نشان دهید:

$$tg۵^\circ\, tg۵۵^\circ\, tg۶۵^\circ\, tg۷۵^\circ = ۱$$

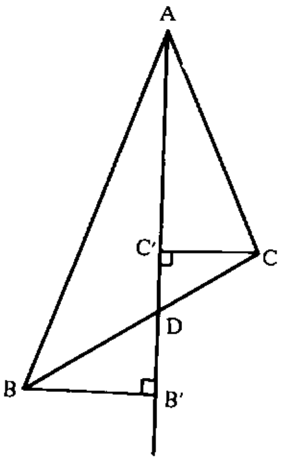
۱۱ ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$\cos^۲ x + \cos^۲\left(\frac{\pi}{۳} - x\right) = \frac{۳}{۲}$$

(فرستندهٔ مسائل ۱۰ و ۱۱: آقای بهزاد کاظمی دیپلمهٔ رشته علوم تجربی (اهواز))

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ نقطهٔ D پای نیمساز درونی زاویهٔ A از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و تصاویر رأسهای B و C روی این نیمساز و امتداد آن را B′ و C′ می‌نامیم. ثابت کنید نقاط A و D و B′ و C′ تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.



۲ ـ دو صفحهٔ $P: x+۲y-z-۱=۰$ و $P': ۲x-y+۳z+۲=۰$ مفروض‌اند.
معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $A(۲, -۱, ۳)$ و فصل مشترک دو صفحهٔ P و P′ می‌گذرد.

۳ ـ دودایره $C: x^۲+y^۲-۲x-۱=۰$ و $C': x^۲+y^۲+۴x-۱=۰$ و بیضی به معادلهٔ $۴x^۲ + y^۲ - ۸x + ۴y + ۴ = ۰$ مفروض‌اند. نقطه‌ای روی این بیضی بیابید که نسبت به دو دایرهٔ فوق قوت برابر داشته باشد.

۴ ـ نشان دهید بحث زیر معتبر است:

$$\big(p\Rightarrow(q\vee r)\big) \wedge \big((q\vee s)\Rightarrow t\big) \wedge \sim t \wedge p \rightarrow r$$

۵ ـ آیا مجموعهٔ $A = \{x, x+۲, x+۲^۲, x+۲^۳, \ldots, x+۲^۶\}$ یک دستهٔ کامل مانده‌ها به پیمانه ۷ است؟ چرا؟

۶ ـ با استفاده از ماتریس تبدیلات قرینهٔ خط $۳x + ۲y = ۶$ را نسبت به خط $y = ۲x$ به‌دست آورید.

۷ ـ بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & x-t & ay+az \\ a & y-t & ax+az \\ a & z-t & ax+ay \end{vmatrix} = ۰$$

۸ ـ مطلوب است محاسبهٔ $n \in N$،

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{۱}{n^۴} + \frac{۲}{n^۴} + \frac{۳}{n^۴} + \dots + \frac{n^۲}{n^۴} \right)$$

۹ ـ ثابت کنید منحنی تابع به معادله $y = \frac{x!}{x^۲+x+۳}$ دارای سه نقطه عطف است.

۱۰ ـ مطلوب است محاسبه انتگرال مقابل $\int \frac{dx}{a^۲\sin^۲x + b^۲\cos^۲x}$

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ در مثلث ABC $(\hat{A} = ۹۰°)$ اگر $۴a = ۵b$ باشد، ثابت کنید که اضلاع مثلث تشکیل تصاعد عددی می‌دهند.

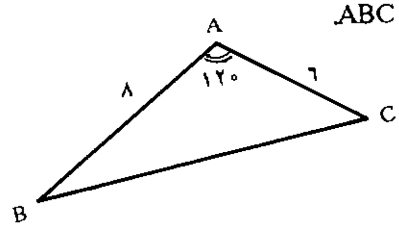
فرستنده: آقای علیرضا فاضلی از کتالم رامسر.

۲ ـ در مثلث ABC اندازهٔ اضلاع AB و AC به‌ترتیب برابر ۸ و ۶ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ A برابر °۱۲۰ است. مطلوب است محاسبهٔ:

۱) اندازهٔ ضلع BC.

۲) اندازه ارتفاع رأس C

۳) مساحت مثلث ABC.



۳ ـ مقدار k را چنان تعیین کنید که بین ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - kx + ۲ = ۰$ رابطهٔ $۲x' - ۲x'' = ۳x'x''$ برقرار باشد.

(فرستنده: آقای حسین پیروتی‌نژاد دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (پیرانشهر))

۴ ـ عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$x^۴ + ۲x^۲ \cos\alpha x + ۱$$

(فرستنده: آقای رضا ابرازی دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران))

۵ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$۴^{x+\sqrt{x^۲-۲}} - ۵ \times ۲^{x-۱+\sqrt{x^۲-۲}} = ۶$$

(فرستنده: خانم لیلا جعفری دانش‌آموز رشته ریاضی (قم))

۶ ـ مقدار عددی عبارت $tg^۲\left(\frac{۱}{۲} Arc\cos\left(\frac{۲}{۳}\right)\right)$ را به‌دست آورید.

(فرستنده: آقای اسماعیل کاظمی مقدّسی دیپلمهٔ فنی (لنگرود))

۷ ـ بررسی کنید که آیا معادلهٔ $\cos^۷x \sin x = ۱$ دارای جواب است؟

(فرستنده: آقای حسین محمودی‌نیا دانش‌آموز رشته تجربی (لنگرود))

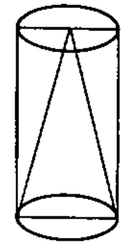
مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ ـ نقاط $A(-۱, ۲)$ و $B(۳, ۴)$ و $C(۱, ۰)$ رئوس مثلث ABC مفروض‌اند. اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث (نقطه برخورد میانه‌های مثلث) را تعیین کنید.

۲ ـ اگر $\overrightarrow{AB} = ۶$ ، $\overrightarrow{AC} = ۸$ ، $B\hat{A}C = ۶۰°$ باشد مطلوب است محاسبهٔ:

$$(۳\overrightarrow{AB}).(-۴\overrightarrow{AC})$$

۳ ـ مخروط دواری به شعاع قاعدهٔ ۴ سانتی‌متر در استوانه دواری محاط است. اگر حجم مخروط برابر 48π سانتی‌متر مکعب باشد ارتفاع استوانه را حساب کنید.



۴ ـ مقدار $\lim\limits_{x\to -y}\left(\frac{\sin x+\sin y}{tgx+tgy}\right)$ را حساب کنید.

(فرستنده: کیانوش یزدی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (لنگرود))

۵ ـ مشتق تابع به ضابطهٔ $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\dots}}}$ را به‌دست آورید.

(اسماعیل کاظمی دیپلمهٔ فنی (لنگرود))

۶ ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[5]{2x^3+2}$ در نقطهٔ تقاطع خط $y+x=-1$ با محور طولها را به‌دست آورید.

۷ ـ معادله زیر را حل کنید:

$$\sec 3\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2$$

(فرستنده: آقای امیرحسین بسطامی دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران))

۸ ـ حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$P=\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$$

(فرستنده: آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان))

۹ ـ اگر $\alpha=\frac{\pi}{9}$ باشد، ثابت کنید:

$$16\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha\cos4\alpha=1$$

(فرستنده: آقای بهزاد کاظمی دیپلمهٔ رشته علوم تجربی (اهواز))

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x^2+4$ را در نقطه عطفش به‌دست آورید.

۲ ـ اگر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y=\frac{nx+m}{x+n}$ محور xها را در $x=-1$ قطع کند و خط $x=-2$ مجانب منحنی باشد، m و n را حساب کنید.

۳ ـ معادلهٔ مکان هندسی مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x\sin^2t-2}{x-\cos^2t}$ را به‌دست آورید.

۴ ـ معادلهٔ بیضی‌ که‌نقاط $F(3,2+\sqrt{15})$ و $F'(3,2-\sqrt{15})$ کانونهای آن و قطر کوچکش نصف قطر بزرگ آن باشد را به‌دست آورید.

۵ ـ تابع اولیهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{3x-1}}$ را به‌دست آورید.

(فرستنده: آقای بهزاد کاظمی دیپلمهٔ رشتهٔ علوم تجربی (اهواز))

۶ ـ سطح محصور بین یک طاق منحنی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos x\left(3tgx-\sqrt{3}\right)$ و محور xها را حساب کنید. $(x\in[0\ ,\ 2\pi])$

۷ ـ درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید:

$$4(\sin^3 70^\circ+\cos^3 40^\circ)=3\sqrt{3}\cos 10^\circ$$

(فرستنده: آقای بهزاد کاظمی دیپلمهٔ رشتهٔ علوم تجربی (اهواز))

۸ ـ معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$(m+1)\sin^2x+m\sin2x+(m+2)\cos^2x=m-2$$

الف) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از m معادله دارای جواب است.

ب) m را چنان تعیین کنید که بین دو ریشهٔ اصلی معادله رابطهٔ $x'+x''=Arctg\,(-8)$ برقرار باشد.

(فرستنده: آقای محمدرضا قنبری‌راد دانش‌آموز رشته‌ریاضی (مشهد))

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۸

آقای عباس نجاتی از دانشگاه تبریز و آقای اصغر موسالو

۱ـ چهار عدد مفروض زیر که به تصاعد حسابی d می‌باشند را در نظر می‌گیریم:

$$a\ ,\ a+d\ ,\ a+۲d\ ,\ a+۳d$$

اینک ثابت می‌کنیم که اگر به حاصلضرب این چهار عدد مفروض $d^۴$ را اضافه کنیم حاصل مربع کامل می‌شود:

$$a(a+d)(a+۲d)(a+۳d)+d^۴=a(a+۳d)(a+d)(a+۲d)+d^۴$$
$$=(a^۲+۳ad)(a^۲+۳ad+۲d^۲)+d^۴$$
$$=(a^۲+۳ad)^۲+۲d^۲(a^۲+۳ad)+d^۴$$
$$=(a^۲+۳ad+d^۲)^۲ \qquad \text{(مربع کامل)}$$

(مسأله برای شش یا هشت عدد مفروض که به تصاعد حسابی d می‌باشند در حالت کلی قابل تعمیم نیست. ولی به حاصلضرب شش یا هشت عدد مفروض که به تصاعد حسابی d باشند می‌توان عبارتی غیر از $d^۴$ افزود که به مربع کامل تبدیل شود.)

۲ـ برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم کانونیک $x^۳+px+q=۰$ (۱) اتحاد مکعب زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(A+B)^۳=A^۳+B^۳+۳AB(A+B)$$

یا

$$(A+B)^۳-۳AB(A+B)-(A^۳+B^۳)=۰ \quad (۲)$$

از مقایسه معادلهٔ (۱) و اتحاد (۲) داریم:

$$\begin{cases} x=A+B \\ p=-۳AB \\ q=-(A^۳+B^۳)\end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A^۳+B^۳=-q \\ AB=-\dfrac{p}{۳}\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A^۳+B^۳=-q \\ A^۳B^۳=-\dfrac{p^۳}{۲۷}\end{array}\right.$$

ازدستگاه اخیر معادلهٔ درجهٔ دوم زیر که ریشه‌هایش $A^۳$ و $B^۳$ است نتیجه می‌شود:

$$y^۲+qy-\left(\frac{p}{۳}\right)^۳=۰$$

$$\Rightarrow y=\frac{-q}{۲}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{۲}\right)^۲+\left(\frac{p}{۳}\right)^۳} \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} A=\sqrt[۳]{-\dfrac{q}{۲}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{۲}\right)^۲+\left(\dfrac{p}{۳}\right)^۳}} \\ B=\sqrt[۳]{-\dfrac{q}{۲}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{۲}\right)^۲+\left(\dfrac{p}{۳}\right)^۳}}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}+\sqrt{\left(\frac{q}{۲}\right)^۲+\left(\frac{p}{۳}\right)^۳}}+\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}-\sqrt{\left(\frac{q}{۲}\right)^۲+\left(\frac{p}{۳}\right)^۳}} \qquad (۳)$$

بدیهی است اگر $\Delta = ۴p^۳\ ۲۷q^۲ \geq ۰$ باشد ریشهٔ معادله درجهٔ سوم کانونیک (۱) از فرمول (۳) به دست می‌آید.

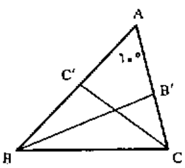
اسامی نفراتی که به یکی یا به هر دو مسألهٔ مسابقه‌ای پاسخ صحیح داده‌اند (بدون بحث روی تعمیم مسألهٔ ۱):

۱ـ آقای عباس نجاتی (۱ و ۲)
۲ـ آقای یوسف پاکدامن (۱ و ۲)
۳ـ آقای اصغر موسالو (۱ و ۲)
۴ـ آقای آرمان ابراهیمی (۱ و ۲)
۵ـ آقای جعفر قزوینی (۱ و ۲)
۶ـ آقای آرش نظری (۱)
۷ـ آقای بیژن صادقی (۱)
۸ـ آقای سلمان جریری (۱)
۹ـ آقای محمدرضا ایروانی (۱)
۱۰ـ آقای افشین دلیلی (۱)
۱۱ـ آقای صادق حسینی (۱)
۱۲ـ آقای علی اشراق (۱)
۱۳ـ خانم سامانه نیکزاد (۱)
۱۴ـ خانم مانا سپهوند (۱)
۱۵ـ آقای جلال حسینی (۱)
۱۶ـ آقای علی مهرعلی (۱)
۱۷ـ آقای علی دستپاک (۱)
۱۸ـ آقای محمد جدیدی (۱)

حل مسائل برهان شماره ۹

حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ـ چون $\hat{A}=۶۰^\circ$ است، پس در مثلث ABC داریم:



$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ \Rightarrow$$
$$\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۶۰^\circ$$

از طرفی زاویه‌های $AC'C$ و $BB'C$ زاویه‌های خارجی مثلثهای BCC' و ABB' می‌باشند پس:

$$A\hat{C'}C=\hat{B}+\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}+۶۰^\circ \quad (۱)$$

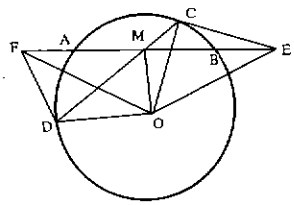
$$B\hat{B'}C=\hat{A}+\frac{\hat{B}}{۲}=۶۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲} \quad (۲)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $A\hat{C'}C=B\hat{B'}C$

۲ـ از نقطهٔ O مرکز دایره به نقاط E و C و M و F و D وصل می‌کنیم. چهارضلعیهای OMCE و OMFD محاطی‌اند زیرا: $O\hat{M}E=O\hat{C}E=۹۰^\circ$ و $O\hat{M}F=O\hat{D}F=۹۰^\circ$ پس:

$$O\hat{D}M=O\hat{F}M \ (۲) \ , \ O\hat{E}M=O\hat{C}M \ (۱)$$

ازطرفی مثلث OCD متساوی الساقین است، چون OC = OD است



پس:

$$O\hat{D}M=O\hat{C}M \ (۳)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه‌می‌شود: $O\hat{E}M=O\hat{F}M$ یعنی مثلث OFE متساوی‌الساقین است و چون OM ارتفاع وارد بر قاعده است، عمودمنصف قاعده نیز می‌باشد. یعنی MF = ME. از طرفی MA = MB پس MF − MA = ME − MB و درنتیجه AF = BE است.

(حل از اشکان شکوری دانش‌آموز از رشت)

۳ـ چون طبق فرض $\left[(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(q\Rightarrow p)\right]\equiv F$ پس می‌بایست $(p\Rightarrow q)$ و $(q\Rightarrow p)$ هم‌ارز نباشند از طرفی چون $(\sim p\wedge r)\equiv T$ پس $\sim p\equiv T$ و $r\equiv T$ لذا باید $p\equiv F$ که بلافاصله نتیجه می‌دهد $(p\Rightarrow q)\equiv T$ (به انتفای مقدم). پس باید $(q\Rightarrow p)\equiv F$ و با توجه به اینکه $p\equiv F$ باید $q\equiv F$ لذا گزینهٔ داده شده یعنی $\underbrace{(q\Rightarrow r)}_{T}\Leftrightarrow\underbrace{(\sim p\Rightarrow\sim r)}_{F}$ گزاره‌ای نادرست است.

۴ـ داریم $A=\{(x+y),(۲x+۱),۲z\}$ و $B=\{۳,(۲y+۴),۶\}$، پس اگر $A=B$ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}x+y=۳\\ ۲x+۱=۶\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۵}{۲},\ y=\frac{۱}{۲}$$
$$۲y+۴=۲z \xrightarrow{y=\frac{۱}{۲}} z=\frac{۵}{۲}$$

$$\begin{cases}x+y=۶\\ ۲x+۱=۳\end{cases}\Rightarrow x=۱,\ y=۵$$
$$۲y+۴=۲z \xrightarrow{y=۵} z=۷$$

در ضمن حالتهای دیگری نیز وجود دارند.

ـ۵

$$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{۷+۴\sqrt{۳}}$$
$$=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{۴+۳+۴\sqrt{۳}}$$
$$=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{(۲+\sqrt{۳})^۲}$$
$$=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{۴-۳}=\sqrt{۱}=۱$$

ـ۶

$$a^۲(x-a)=b^۲(x-b)$$
$$a^۲x-a^۳=b^۲x-b^۳$$
$$(a^۲-b^۲)x=a^۳-b^۳$$
$$(a-b)(a+b)x=(a-b)(a^۲+b^۲+ab)$$

معادله به اتحاد تبدیل شده است و بی‌شمار جواب دارد.

۱) $a=b \Longrightarrow ۰\times x=۰$

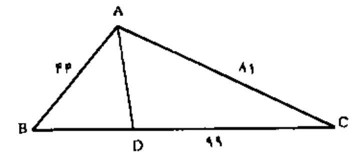
۲) $a+b=۰$ یا $a=-b\neq ۰ \Longrightarrow ۰\times x=-۲b^۳$

تساوی غیرممکن است، معادله جواب ندارد.

۳) $a^۲\neq b^۲ \Longrightarrow x=\dfrac{a^۲+b^۲+ab}{a+b}$ جواب یا ریشه معادله

حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ قطعات DB و DC و اندازهٔ نیمساز AD را محاسبه می‌کنیم.



$DB = \frac{a.c}{b+c} = \frac{۹۹\times۴۰}{۴۰+۸۱} = \frac{۳۶۰}{۱۱}$

$DC = \frac{a.b}{b+c} = \frac{۹۹\times۸۱}{۱۲۱} = \frac{۷۲۹}{۱۱}$

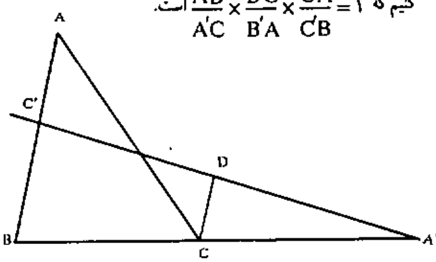
$AB.AC = AD^۲+DB.DC \Rightarrow ۴۰\times۸۱$

$= AD^۲ + \frac{۳۶۰}{۱۱} + \frac{۷۲۹}{۱۱} \Rightarrow$

$AD = \frac{۳۶۰}{۱۱} \Rightarrow AD = DB = \frac{۳۶۰}{۱۱}$

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۱ , \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۲\hat{B}$

۲ ـ خطی که دو یا چند خط را قطع کند مورب نامیده می‌شود به‌خصوص مورب به خطی گفته می‌شود که اضلاع یا امتداد اضلاع مثلثی را قطع کند. هر مورب مانند Δ یا امتداد سه‌ضلع مثلث را قطع می‌کند و یا دو ضلع و امتداد ضلع سوم مثلث را. بنابراین علامت اندازه جبری سه‌کسر $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ ، $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ ، $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ هرسه مثبت است یا دو منفی و یک مثبت می‌باشد لذا علامت حاصل ضرب $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\times\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\times\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ همواره مثبت است. بنابراین کافی است ثابت کنیم که $\frac{A'B}{A'C}\times\frac{B'C}{B'A}\times\frac{C'A}{C'B} = ۱$ است.



برای اثبات از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم تا مورب Δ را در نقطهٔ D قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم:

$\frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{CD}$ (۱) و $\frac{B'C}{B'A} = \frac{CD}{C'A}$ (۲)

$(۱)\times(۲) \Rightarrow \frac{A'B}{A'C}\times\frac{B'C}{B'A} = \frac{C'B}{CD}\times\frac{CD}{C'A} = \frac{C'B}{C'A}$ (۳)

طرفین رابطهٔ (۳) را در $\frac{C'A}{C'B}$ ضرب می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{A'B}{A'C}\times\frac{B'C}{B'A}\times\frac{C'A}{C'B} = ۱ \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\times\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\times\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = ۱}$$

۳ ـ رابطه به شکل $xRy \Leftrightarrow xy \geq ۰$ روی z تعریف شده. خواص این رابطه را بررسی می‌کنیم:

۱) $\forall x \in z \quad x\times x = x^۲ \geq ۰ \Rightarrow xRx \Rightarrow$ خاصیت بازتابی دارد

۲) $\forall x,y \in Z \quad x\times y \geq ۰ \Rightarrow y\times x \geq ۰ \Rightarrow$ خاصیت تقارنی دارد

۳) خاصیت پاد تقارنی ندارد ⇐ ۳ ≠ ۲ ولی ۳R۲ و ۲R۳ می‌دانیم

۴) فرض کنیم $xRy,\ yRz \Rightarrow xy \geq ۰ , yz \geq ۰ \Rightarrow xzy^۲ \geq ۰$

$\xRightarrow{y^۲\geq ۰} xz \geq ۰ \Rightarrow xRz \Rightarrow$ خاصیت ترایایی دارد

۴ ـ تابع داده شده به‌صورت $f: IR^۲ \to IR^۲$

$$f(x,y) = \left(\frac{۲x-۳}{x+۲}, \frac{۳y+۱}{y-۴}\right)$$

تعریف شده است و چون هریک از مؤلفه‌ها برحسب متغیر خودشان توابعی یک به یک هستند لذا تابع در کل یک به یک است. برای بررسی خاصیت پوشایی داریم:

فرض کنیم $(a,b) \in IR^۲ ,\ (a,b) = \left(\frac{۲x-۳}{x+۲}, \frac{۳y+۱}{y-۴}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۲x-۳}{x+۲} = a & (۱) \\ \frac{۳y+۱}{y-۴} = b & (۲) \end{cases}$$

$(۱) \Rightarrow ax+۲a = ۲x-۳ \Rightarrow ax-۲x = -۳-۲a$

$\Rightarrow x = \frac{۲a+۳}{۲-a} \Rightarrow$ به‌ازای a = ۲ ، x ای تعریف نمی‌شود

$(۲) \Rightarrow by-۴b = ۳y+۱ \Rightarrow by-۳y = ۴b+۱$

$\Rightarrow y = \frac{۴b+۱}{b-۳} \Rightarrow$ به‌ازای b = ۳ ، y ای تعریف نمی‌شود

لذا اگر مجموعهٔ دوم را به $IR-\{۲\}\times IR-\{۳\}$ تبدیل کنیم تابع پوشا خواهد شد.

۵ ـ با توجه به تعریف ماتریس داده شده داریم:

$a_{۱۱}=۱+۱=۲ ,\ a_{۱۲}=۱+۲=۳ ,\ a_{۱۳}=۱+۳=۴$

$a_{۲۱}=۲+۱=۳ ,\ a_{۲۲}=۲+۲=۴ ,\ a_{۲۳}=۲+۳=۵$

$a_{۳۱}=۳+۱=۴ ,\ a_{۳۲}=۳+۲=۵ ,\ a_{۳۳}=۳+۳=۶$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

۶ ـ

$a = m$

$b = -۲(m+۱)$

$c = (m-۱)$

$mx^۲ - ۲(m+۱)x + (m-۱) = ۰$

۱) $\Delta' = b'^۲ - ac = (m+۱)^۲ - m(m-۱) = ۰$

$m^۲+۲m+۱-m^۲+m = ۰ \Rightarrow ۳m+۱ = ۰$

$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{۱}{۳}}$

۲) $\frac{c}{a} = \frac{m-۱=۰}{m=۰} \begin{array}{l} \Rightarrow m=۱ \\ \Rightarrow m=۰ \end{array}$

۳) $-\frac{b}{a} = \frac{۲(m+۱)=۰}{m=۰} \begin{array}{l} \Rightarrow m=-۱ \\ \Rightarrow m=۰ \end{array}$

m	$-\infty$ تا -۱	-۱ تا $-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا $+\infty$
Δ	−	−	+	+	+
$\frac{c}{a}$	+	+	+	−	+
$-\frac{b}{a}$	+	−	−	+	+
نتیجه			$x'<x''<۰$	$x'<۰<x''$ $\lvert x''\rvert>\lvert x'\rvert$	$۰<x'<x''$
			۱	۲	۳

۱) $\begin{cases} \Delta = ۰ \Rightarrow x' = x'' = -\frac{b}{۲a} = \frac{۲(m+۱)}{۲m} = \frac{m+۱}{m} = \frac{-\frac{۱}{۳}+۱}{-\frac{۱}{۳}} = -۲ \\ m = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$

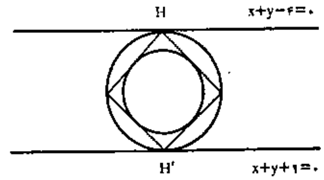
۲) $\left\{ m = ۰ \xRightarrow{\text{در معادله قرار می‌دهیم}} -۲x-۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \right.$

۳) $\begin{cases} \Delta > ۰ \\ \frac{c}{a} = ۰ \\ -\frac{b}{a} > ۰ \end{cases} \Rightarrow x' = ۰ < x''$

۷ ـ

$$HH' = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|-۴-۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = \frac{۶\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$$

طول قطر دایره محیطی = طول قطر مربع = HH'



$$\begin{cases} R=\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ S=\pi R^2=\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{9\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{طول ضلع مربع}=\frac{\text{طول قطر مربع}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3$$

۳ = طول قطر دایره محاطی = طول ضلع مربع

$$\begin{cases} r=\frac{3}{2} \\ S'=\pi r^2=\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9\pi}{4} \end{cases}$$

$$S+S'=\frac{9\pi}{2}+\frac{9\pi}{4}=\frac{27\pi}{4}$$

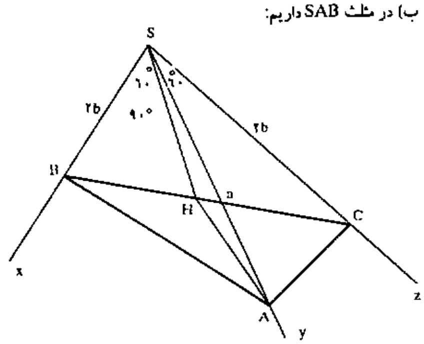
حل مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ ـ (حل از آقای م ـ ا ـ گیتی زاده دبیر ریاضی):

الف) نقطهٔ وسط پاره‌خط BC را H می‌نامیم. دو مثلث SAB و SAC با هم مساویند، پس AB = AC یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین و از آنجا BC بر AH عمود است.

مثلث SBC نیز متساوی‌الساقین است و درنتیجه BC بر SH عمود است. بنابراین، BC بر صفحهٔ مثلث SAH و لذا بر SA عمود می‌شود.

ب) در مثلث SAB داریم:



$$AB^2=a^2+4b^2-4ab\cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$AB=AC=\sqrt{a^2-2ab+4b^2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین SBC:

$$BC=\sqrt{4b^2+4b^2}=2\sqrt{2}\,b$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH:

$$\begin{cases} \frac{BC}{2}=BH=b\sqrt{2} \\ \hat{H}=90^\circ \\ AB=\sqrt{a^2-2ab+4b^2} \end{cases} \Rightarrow AH=\sqrt{a^2-2ab+2b^2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH=\sqrt{2}\,b\sqrt{a^2-2ab+2b^2}$$

ج) چون b ثابت است مساحت مثلث ABC وقتی می‌نیمم می‌شود که $AH=\sqrt{a^2-2ab+2b^2}$ می‌نیمم باشد.

$$AH=\sqrt{(a-b)^2+b^2} \Rightarrow (a-b)^2=0 \Rightarrow \boxed{a=b}$$

د) با فرض a = b داریم:

$$BC=2\sqrt{2}a \text{ ،} SH=a\sqrt{2} \text{ ،} AH=a$$

اولاً) چون HA و HS بر BC عمودند، زاویهٔ $A\hat{H}S=\alpha$ مسطحهٔ فرجهٔ مزبور است. پس،

$$\Delta SAH \Rightarrow SA^2=SH^2+AH^2-2SH.AH\cos\alpha \Rightarrow \alpha=45^\circ$$

ثانیاً) مثلث ASH در رأس A قائم‌الزاویه است. یعنی SA بر AH و BC عمود و در نتیجه بر صفحه مثلث ABC عمود است. اگر قاعدهٔ هرم SABC را مثلث ABC بگیریم، ارتفاع آن SA است.

بنابراین:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}a^2\sqrt{2}\times a \Rightarrow V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

۲ ـ هرگاه در رابطهٔ الف) قرار دهیم $x=y=\bar{O}_V$ خواهیم داشت:

اولاً:

$$T(\bar{O}_V+\bar{O}_V)=T(\bar{O}_V)\oplus T(\bar{O}_V)$$

$$\xrightarrow{\bar{O}_V+\bar{O}_V=\bar{O}_V} T(\bar{O}_V)=T(\bar{O}_V)\oplus T(\bar{O}_V)$$

و چون $T(O_V)$ عضوی از فضای W است بنابراین بنابر قانون حذف در گروه $(W, \oplus)$ ؛ با حذف $T(O_V)$ از طرفین داریم: $T(O_V)=O_W$

ثانیاً: فرض کنیم r_1 و r_2 و ... و r_n اعدادی حقیقی باشند به‌طوری که

$$r_1.T(x_1)\oplus r_2.T(x_2)\oplus \dots \oplus r_n.T(x_n)=O_W$$

حال با توجه به رابطهٔ (ب) و اینکه $O_W=T(O_V)$ خواهیم داشت:

$$T(r_1.x_1)\oplus T(r_2.x_2)\oplus \dots \oplus T(r_n.x_n)=T(O_V)$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به الف}} T(r_1.x_1+r_2.x_2+\dots+r_n.x_n)=T(O_V)$$

$$\xrightarrow{\text{T یک به یک است}} x_1.x_1+x_2.x_2+\dots+r_n.x_n=O_V$$

از طرفی x_1 و x_2 و ... و x_n در فضای برداری V استقلال خطی دارند پس باید: $r_1=r_2=\dots=r_n=0$ ، یعنی $T(x_1)$ و $T(x_2)$ و ... و $T(x_n)$ در فضای W مستقل خطی هستند.

۳ ـ $a'b'c'+a'b'c+a'bc'+ab'c'+a'b+a'c+bc'$

$$=\underbrace{a'b'c'+a'b'c'+a'b'c'}_{a'b'c'}+a'b'c+a'bc'+ab'c'+a'b+a'c+bc'$$

$$=a'b'\underbrace{(c'+c)}_{1}+a'c'\underbrace{(b'+b)}_{1}+b'c'\underbrace{(a'+a)}_{1}+a'b+a'c+bc'$$

$$=a'\underbrace{(b'+b)}_{1}+a'\underbrace{(c'+c)}_{1}+c'\underbrace{(b'+b)}_{1}=a'+a'+c'=a'+c'$$

۴ ـ

(بالای خانهٔ ۱: ۰)

الف) [۱] [۲] [۳] [۴] [۵]

۱۲۰ = ۱×۲×۳×۴×۵ = تعداد اعداد ۵ رقمی مضرب ۵ با رقم یکان صفر

(بالای خانهٔ ۱: ۵)

[۱] [۲] [۳] [۴] [۴]

۹۶ = ۱×۲×۳×۴×۴ = تعداد اعداد ۵ رقمی مضرب ۵ با رقم یکان ۵

۲۱۶ = ۹۶ + ۱۲۰ = تعداد کل

(بالای خانهٔ ۱: ۵ ؛ بالای خانهٔ ۵: ۴)

ب) [۱] [۲] [۳] [۴] [۱]

۲۴ = ۲×۳×۴ = تعداد ۵ رقمی فرد و بزرگتر از ۴۰۰۰۰ با رقم یکان ۵

(بالای خانهٔ ۱: ۱ یا ۳ ؛ بالای خانهٔ ۵: ۴ یا ۵)

[۲] [۲] [۳] [۴] [۲]

۹۶ = ۲×۲×۳×۴×۲ = تعداد ۵ رقمی فرد و بزرگتر از ۴۰۰۰۰ با رقم یکان ۱ یا ۳

۱۲۰ = ۲۴ + ۹۶ = تعداد کل

(۱ یا ۳ یا ۵ ؛ ۲ یا ۴)

ج) [۱] [۲] [۲] [۳] [۲] = ۲۴ = ۱×۲×۲×۳×۲

مکان۱ مکان۲ مکان۳ مکان۴ مکان۵

۵ ـ

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-3x+2)}{(x-1)^2}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\begin{cases} \text{اگر: می‌دانیم } x\to 0 \Rightarrow \sin\alpha\sim\alpha \\ \Rightarrow x\to 1 \Rightarrow x^2-3x+2\to 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(x^2-3x+2)\sim(x^2-3x+2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^3-3x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1} = \boxed{3}$$

توجه: x^3-3x+2 را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شود:

۶ـ
$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

از طرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم: $y\sqrt[3]{x^2}=1$

$$y'\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}y=0 \Rightarrow \frac{3xy'+2y}{3\sqrt[3]{x}}=0$$

از طرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم: $\Rightarrow 3xy'+2y=0$

$$3(1\times y'+y''x)+2y'=0$$

$$3y'+3xy''+2y'=0 \Rightarrow 3xy''+5y'=0$$

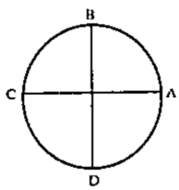
۷ـ
$$\cos 8x(\sin x+\sin 9x)=2 \Rightarrow \sin x+\sin 9x=\frac{2}{\cos 8x}$$

با توجه به اینکه $\left|\frac{2}{\cos 8x}\right| \geq 2$ معادلهٔ فوق درصورتی امکان‌پذیر است که:

$$\begin{cases}\sin x=1\\ \sin 9x=1\\ \cos 8x=1\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}\sin x=-1\\ \sin 9x=-1\\ \cos 8x=-1\end{cases}$$

در حالت اوّل

$$\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ 9x=2k'\pi+\frac{\pi}{2}\\ 8x=2k''\pi\end{cases}$$



انتهای قوس $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ نقطه B و انتهای ۹ برابر آن $9x=18k\pi+\frac{9\pi}{2}$ دوباره نقطه B و انتهای ۸ برابر آن $8x=16k\pi+4\pi$ نقطه A می‌باشد بنابراین صورت کلی جوابها به صورت $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

و در حالت دوم

$$\begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\\ 9x=2k'\pi-\frac{\pi}{2}\\ 8x=2k''\pi+\pi\end{cases}$$

انتهای کمان $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ نقطه D و انتهای ۹ برابر آن همان نقطه D ولی انتهای کمان $8x=16k\pi-4\pi$ نقطه A می‌شود لذا در این حالت مسئله جواب ندارد.

۸ـ
$$(1+tgx)^7=1+7tgx+21tg^2x+35tg^3x+35tg^4x+21tg^5x+7tg^6x+tg^7x$$

دقّت در روش بسط tgnx برحسب tgx بکنید $(n\in N)$

$$tg7x=\frac{7tgx-35tg^3x+21tg^5x-tg^7x}{1-21tg^2x+35tg^4x-7tg^6x}$$

هرگاه بنویسیم $tg7x=0 \Rightarrow x=\frac{k\pi}{7}$
هفت جواب از رشته جواب $x=\frac{k\pi}{7}$ که دارای تانژانتهای متمایز می‌باشند عبارت است از:

$$x=0 \text{ و } \pm\frac{\pi}{7} \text{ و } \pm\frac{2\pi}{7} \text{ و } \pm\frac{3\pi}{7}$$

حالات صورت کسر را صفر قرار می‌دهیم:

$$tg^7x-21tg^5x+35tg^3x-7tgx=0$$

این معادله درجه‌هفتم‌هفت مقدارمتمایزبرای tgx می‌دهد که عبارتند از

$$tg0,\ \pm tg\frac{\pi}{7},\ \pm tg\frac{2\pi}{7},\ \pm tg\frac{3\pi}{7}$$

$$tgx(tg^6x-21tg^4x+35tg^2x-7)=0$$

هرگاه $tgx=0$ را از معادله خارج $z=tg^2x$ اختیار کنیم داریم:

$$\underset{a}{Z^3}-\underset{b}{21Z^2}+\underset{c}{35Z}-\underset{d}{7}=0$$

که $Z_1=tg^2\frac{\pi}{7}$ و $Z_2=tg^2\frac{2\pi}{7}$ و $Z_3=tg^2\frac{3\pi}{7}$ آنگاه

$$\begin{cases}Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2=S^2-2p \text{ که } S=-\frac{b}{a}=21,\ p=\frac{c}{a}=35,\\ Q=-\frac{d}{a}=7\\ Z_1^3+Z_2^3+Z_3^3=S^3-3ps+3Q\end{cases}$$

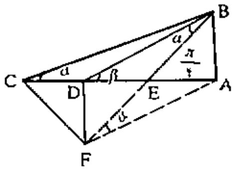
$$tg^4\frac{\pi}{7}+tg^4\frac{2\pi}{7}+tg^4\frac{3\pi}{7}=21^2-70=371$$

$$tg^6\frac{\pi}{7}+tg^6\frac{2\pi}{7}+tg^6\frac{3\pi}{7}=21^3-3\times35\times21+21=7077$$

۸ـ مثلث قائم‌الزاویه ABC را $(A=90°)$ چنان اختیار می‌کنیم که $AC=3AB$ باشد و بوسیلهٔ نقاط D و E، AC را به سه قسمت مساوی $CD=DE=EA=AB$ تقسیم می‌کنیم:

$$tg\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=Arctg\frac{1}{3}$$

$$tg\beta=\frac{AB}{AD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\beta=Arctg\frac{1}{2}$$



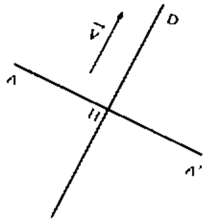
هرگاه از نقطه D عمود $DF=AB$ را بر ضلع AC اخراج کنیم شکل ABDF متوازی الاضلاع می‌باشد و $\hat{A}=90°$ و $C\hat{F}E=90°$

لذا نقاط A و F از دو سر وتر BC زاویه قائمه دیده می‌شود و شکل ABCF چهارضلعی محاطی است در نتیجه $A\hat{F}B=A\hat{C}B=\alpha$

همچنین $D\hat{B}E=\alpha$ و در مثلث DEB داریم $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ و حکم ثابت است.

حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ راه اول: پای عمودی را که از نقطهٔ A بر خط D رسم می‌شود H می‌نامیم و AH را به‌اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط D به‌دست آید. بنابراین اگر مختصات نقطهٔ H را محاسبه کنیم، مختصات نقطهٔ A' را می‌توانیم به‌دست آوریم:



$$D:\ 3x-1=-2y+3=z-1=t\Rightarrow$$

$$H\left|\begin{array}{l}x=\frac{t+1}{3}=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\\ y=\frac{t-3}{-2}=\frac{-1}{2}t+\frac{3}{2}\\ z=t+1\end{array}\right.$$

$$A\left|\begin{array}{l}-1\\ 2\\ 3\end{array}\right. \Rightarrow \vec{AH}\left|\begin{array}{l}\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}t+\frac{4}{3}\\ \frac{-1}{2}t+\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\\ t+1-3=t-2\end{array}\right.$$

بردار هادی خط D $\quad \vec{V}\left|\begin{array}{l}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{array}\right.$ و

$$\vec{AH} \perp D \Rightarrow \vec{AH} \perp \vec{V}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}t+\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right) + 1(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}t + \frac{4}{9} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} + t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4t + 16 + 9t + 9 + 36t - 72 = 0$$

$$49t = 47 \Rightarrow t = \frac{47}{49} \Rightarrow H \left| \begin{array}{l} \frac{32}{49} \\ \frac{50}{49} \\ \frac{96}{49} \end{array} \right.$$

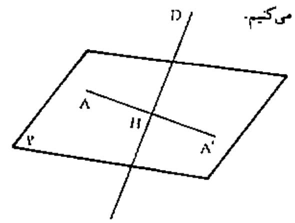
$$x_A + x_{A'} = 2x_H \Rightarrow -1 + x_{A'} = 2\left(\frac{32}{49}\right) \Rightarrow x_{A'} = \frac{113}{49}$$

$$y_A + y_{A'} = 2y_H \Rightarrow 2 + y_{A'} = \frac{100}{49}$$

$$\Rightarrow y_{A'} = \frac{2}{49} \Rightarrow A' \left| \begin{array}{l} \frac{113}{49} \\ \frac{2}{49} \\ \frac{45}{49} \end{array} \right.$$

$$z_A + z_{A'} = 2z_H \Rightarrow 3 + z_{A'} = \frac{192}{49} \Rightarrow z_{A'} = \frac{45}{49}$$

راه دوم: معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطهٔ A بر خط D عمود رسم می‌شود می‌نویسیم و نقطهٔ تقاطع آن با خط D را H می‌نامیم. آنگاه مختصات نقطهٔ 'A را با توجه به این نکته که H وسط پاره‌خط 'AA است محاسبه می‌کنیم.



$$D: 3x - 1 = -2y + 3 = z - 1 \Rightarrow$$

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right) = -2\left(y - \frac{3}{2}\right) = z - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{3}}{2} = \frac{y-\frac{3}{2}}{-3} = \frac{z-1}{6}$$

$A \left| \begin{array}{l} -1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$ و بردار خط D. $\Rightarrow \vec{V}(2, -3, 6)$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$2(x+1) - 3(y-2) + 6(z-3) = 0 \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ P $\quad 2x - 3y + 6z - 10 = 0$

$$\begin{cases} 3x-1=-2y+3=z-1=t \Rightarrow x=\dfrac{t+1}{3} \quad y=\dfrac{t-3}{-2}, \quad z=t+1 \\ 2x-3y+6z-10=0 \end{cases}$$

$$2\left(\frac{t+1}{3}\right) - 3\left(\frac{t-3}{-2}\right) + 6(t+1) - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}t + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}t - \frac{9}{2} + 6t + 6 - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{47}{49}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{32}{49}, \frac{50}{49}, \frac{96}{49}\right) \Rightarrow A'\left(\frac{113}{49}, \frac{2}{49}, \frac{45}{49}\right)$$

۲ ـ دایرهٔ به معادلهٔ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ را درنظر می‌گیریم و شرط عمود بودن این دایره بر دایره‌های به معادلهٔ

$$x^2 + y^2 + (m^2 - 1)x - 2my + (m+1)^2 = 0$$

را می‌نویسیم:

$$aa' + bb' - 2c - 2c' = 0 \Rightarrow$$

$$a(m^2 - 1) + b(-2m) - 2c - 2(m+1)^2 = 0 \Rightarrow$$

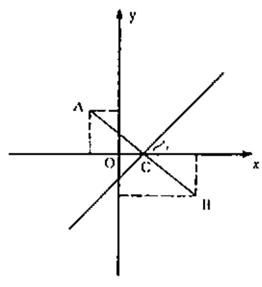
$$(a - 2)m^2 - (2b + 4)m - a - 2c - 2 = 0 \qquad (1)$$

شرط لازم و کافی برای آنکه دایره‌های داده شده، به ازاء همه مقادیر m بر دایرهٔ به معادلهٔ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ عمود باشد، آن است که رابطهٔ (۱) نسبت به m اتحاد باشد یعنی داشته باشیم:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ +2b + 4 = 0 \\ -a - 2c - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, \; b = -2, \; c = 0$$

معادلهٔ دایرهٔ ثابت $\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0}$

۳ ـ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از دو نقطهٔ $A(-1,2)$ و $B(3,-2)$ می‌گذرند عمودمنصف پاره‌خط AB است که چون $c(1,0)$ وسط پاره‌خط AB و $m/AB = -1$ است. پس معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB به‌صورت زیر است:



$$y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

طول مرکز دایرهٔ مورد نظر را α فرض می‌کنیم خواهیم داشت:

$$O'(\alpha, \alpha - 1), A(-1, 2)$$

$$\Rightarrow O'A = R = \sqrt{(\alpha+1)^2 + (\alpha-3)^2} = \sqrt{2\alpha^2 - 4\alpha + 10}$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\alpha+1)^2 = 2\alpha^2 - 4\alpha + 10$$

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\alpha+1)^2 = 2\alpha^2 - 4\alpha + 10 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (-\alpha+1)^2 = 2\alpha^2 - 4\alpha + 10$$

معادلهٔ تلاقی دایره با محور x ها $\quad \Rightarrow x^2 - 2\alpha x + 2\alpha - 9 = 0$

اگر نقاط تلاقی $M \left| \begin{array}{l} x' \\ 0 \end{array} \right.$ و $M' \left| \begin{array}{l} x'' \\ 0 \end{array} \right.$ باشدطول وتر 'MM را محاسبه و می‌نیمم آن را تعیین می‌کنیم.

$$MM' = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{1} = \sqrt{4\alpha^2 - 4(2\alpha - 9)}$$

$$\Rightarrow MM' = \sqrt{4\alpha^2 - 8\alpha + 36} \Rightarrow (MM')' = \frac{8\alpha - 8}{2\sqrt{4\alpha^2 - 8\alpha + 36}} \Rightarrow$$

$$(MM')' = 0 \Rightarrow 8\alpha - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1} \Rightarrow$$

معادلهٔ دایرهٔ مطلوب $\quad (x-1)^2 + y^2 = 8 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0}$

۴ ـ برای نوشتن معادلهٔ هذلولی درحالتی که محورهای تقارن هذلولی موازی یکی از محورهای مختصات است باید:

۱) مشخص سازیم که محور کانونی هذلولی موازی محور x ها است یا موازی محور y ها.

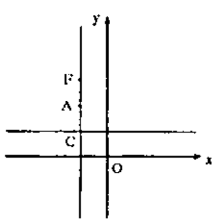
۲) مختصات مرکز هذلولی (α, β) را محاسبه کنیم.

۳) نیمه اقطار هذلولی (a,b) را به‌دست آوریم.

در این مسأله:

۱) $x_A = x_C = x_F = -1$، پس محور کانونی هذلولی موازی محور عرضها است.

۲) مختصات مرکز $C(\alpha = -1, \beta = 1)$ است.



۳) با توجه به نکات فوق می‌توان نوشت:

$$A\left|\begin{array}{l}\alpha=-1\\ \beta+a=2\end{array}\right. \qquad F\left|\begin{array}{l}\alpha=-1\\ \beta+c=3\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 1+a=2 \Rightarrow \boxed{a=1} \quad 1+c=3 \Rightarrow c=2$$

$$c^2=b^2+a^2 \Rightarrow 4=b^2+1 \Rightarrow b^2=3 \quad \boxed{b=\sqrt{3}}$$

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{(y-1)^2}{1}-\frac{(x+1)^2}{3}=1}$$

۵- $p\Rightarrow(q\Leftrightarrow r)\equiv p\Rightarrow\left[(q\Rightarrow r)\wedge(r\Rightarrow q)\right]$

$\equiv\left[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\right]\wedge\left[p\Rightarrow(r\Rightarrow q)\right]$

$\equiv\left[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)\right]\wedge\left[(p\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow q)\right]$

حال اگر فرض کنیم $Q\equiv(p\Rightarrow q)$ و $S\equiv(p\Rightarrow r)$ در این‌صورت رابطهٔ اخیر به شکل $(Q\Rightarrow S)\wedge(S\Rightarrow Q)$ می‌باشد که طبق تعریف ترکیب دو شرطی هم ارز است با $Q\Leftrightarrow S$ یا $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(p\Rightarrow r)$ و حکم ثابت است.

۶- فرض کنیم $C, B\in K$ پس طبق تعریف مجموعهٔ K داریم، $AB=BA$ و $AC=CA$، ابتدا ثابت می‌کنیم K نسبت به تفاضل بسته است؛ برای این کار باید ثابت کنیم؛ $A(B-C)=(B-C)A$

$A(B-C)=AB-AC=BA-CA=(B-C)A$

حال ثابت می‌کنیم K نسبت به ضرب بسته است یعنی باید ثابت کنیم $BC\in K$ و برای این کار باید نشان دهیم $A(BC)=(BC)A$.

$A(BC)=(AB)C=(BA)C=B(AC)=B(CA)=(BC)A$

در ضمن توجه داریم که همواره $AA=AA$ پس $A\in K$ و بنابراین $K\neq\phi$.

۷- ۳ عدد صحیح متوالی را به شکل $a-1$ و a و $a+1$ نمایش می‌دهیم:

$(a-1)^3+a^3+(a+1)^3=3a^3+6a=3a(a^2+2)$

چون $\quad 2\overset{3}{\equiv}-1\Rightarrow a(a^2+2)\overset{3}{\equiv}a(a^2-1)\overset{3}{\equiv}a(a-1)(a+1)$

و چون از هر ۳ عدد صحیح متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است پس:

$a(a-1)(a+1)=3k\Rightarrow a(a^2+2)=3k$

$\Rightarrow 3a(a^2+2)=3\times 3k=9k$

۸-

$n=1\Rightarrow 10^3-1=999=27\times 37\Rightarrow 3^3\mid 10^3-1$

فرض استقراء $\quad n=k\Rightarrow 10^{3^k}-1=q\cdot 3^{k+2}$

حکم استقراء $\quad n=k+1\Rightarrow 10^{3^{k+1}}-1=q'\cdot 3^{k+3}$

با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ داریم:

$$10^{3^{k+1}}-1=10^{3\times 3^k}-1=\left(10^{3^k}\right)^3-1=\left(10^{3^k}-1\right)\left(10^{2\times 3^k}+10^{3^k}+1\right)$$

$$\text{از طرفی}\Rightarrow\begin{cases}10^{3^k}-1=q\cdot 3^{k+2}\\ \underbrace{10^{2\times 3^k}+10^{3k}+1}_{\text{تعداد رقم ۱ در این عبارت ۳ است}}=3m\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(10^{3^k}-1\right)\left(10^{2\times 3^k}+10^{3^k}+1\right)=3^{k+3}\times mq$$

$\Rightarrow 3^{k+3}\mid 10^{3^{k+1}}-1$ و حکم ثابت است.

۹-

$$M\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{t+4}{t(t-2)}\\[2mm] y=\dfrac{t-4}{t(t+2)}\end{array}\right.$$

مجانب قائم: $y\to\infty\Rightarrow\dfrac{t-4}{t(t+2)}\to\infty$

$$\Rightarrow\begin{cases}t\to 0\Rightarrow \lim x=\infty\\ t\to -2\Rightarrow \lim x=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

پس خط $\boxed{x=\frac{1}{4}}$ معادله مجانب قائم است.

مجانب افقی: $x\to\infty\Rightarrow\dfrac{t+4}{t(t-2)}\to\infty$

$$\Rightarrow\begin{cases}t\to 0\Rightarrow \lim y=\infty\\ t\to 2\Rightarrow \lim y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

پس خط $\boxed{y=-\frac{1}{4}}$ معادله مجانب افقی است.

توجه: $t\to 0\Rightarrow\begin{cases}x\to\infty\\ y\to\infty\end{cases}$

فرض می‌کنیم خط $y=mx+h$ معادله مجانب مایل باشد.

مجانب مایل:

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t-4}{t(t+2)}}{\frac{t+4}{t(t-2)}}=\lim_{t\to 0}\frac{(t-4)(t-2)}{(t+2)(t+4)}=1$$

$$h=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{(t-4)}{t(t+2)}-\frac{t+4}{t(t-2)}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-12t}{t(t^2-4)}=\lim_{t\to 0}\frac{-12}{t^2-4}=3$$

معادله مجانب مایل است. $\Rightarrow\boxed{y=x+3}$

۱۰-

$$y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

مجانب قائم: $y\to+\infty\Rightarrow(x-1)^2\to 0\Rightarrow\boxed{x=1}$

$$\text{مجانب مایل}:\begin{cases}x\to\pm\infty\Rightarrow y\to\pm\infty\\ x^3+3x^2+3x+1 \;\big|\; x^2-2x+1\\ 12x-4 \qquad\qquad x+5\end{cases}$$

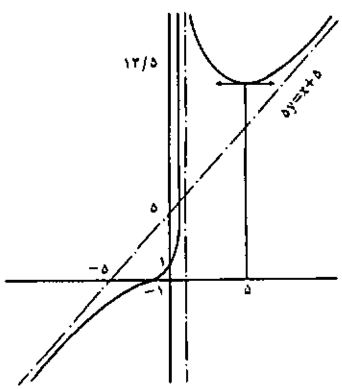
معادله مجانب مایل. $\Rightarrow\boxed{y=x+5}$

$$y'=\frac{3(x+1)^2(x-1)^2-2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^4}$$

$$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}=0\Rightarrow\boxed{x=1}$$

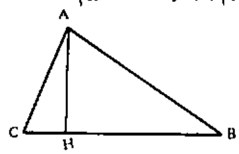
$$\begin{cases}x=-1 & \text{ریشه مضاعف = طول عطف}\\ x=5 & \text{ریشه ساده = طول اکسترمم}\end{cases}$$

x	$-\infty$	مضاعف -1	0	1	5	$+\infty$
y'	+	+	+	−	+	
y	$-\infty$	0	$1\ +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
		0	1		$13/5$	



حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم. بنا به فرض مسئله داریم:



$AH = 2\sqrt{3}$, $S_{ABH} = 3S_{ACH}$

پس:

$\frac{1}{2}BH\times AH = 3\times\frac{1}{2} CH.AH \Rightarrow BH = 3CH$

$AH^2=HB.HC \Rightarrow 12=(3HC)HC=3HC^2 \Rightarrow HC^2=4$

$\Rightarrow HC=2 \Rightarrow HB=6 \Rightarrow a=BC=2+6=8 \Rightarrow$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}\times 8\times 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

۲ـ بنا به فرض مسأله $PT = 8$ و $PA = \frac{3}{4}PT$ است. پس می‌توان نوشت:

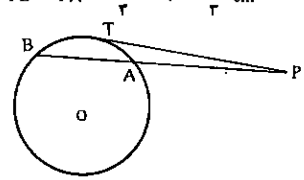
$PA = \frac{3}{4}(8) = 6cm$

از طرفی داریم:

$PT^2 = PA.PB \Rightarrow$

$64 = 6 \times PB \Rightarrow PB = \frac{32}{3} \Rightarrow$

$AB = PB - PA = \frac{32}{3} - 6 = \frac{14}{3}$ cm



۳ـ

$$S=x_1+x_2=\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{\alpha'\beta'}+\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha'\beta'}=\frac{(\alpha'+\beta')(\alpha+\beta)}{\alpha'\beta'}$$

$$=\frac{\left(\frac{-b'}{a'}\right)\left(\frac{-b}{a}\right)}{\frac{c'}{a'}}=\frac{bb'}{ac'}$$

$$P=x_1x_2=\frac{1}{\alpha'^2\beta'^2}\left(\alpha^2\alpha'\beta'+\alpha\beta\beta'^2+\alpha\beta\alpha'^2+\alpha'\beta'\beta^2\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha'^2\beta'^2}\left[\alpha'\beta'(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta(\alpha'^2+\beta'^2)\right]$$

$$=\frac{a'^2}{c'^2}\left[\frac{c'}{a'}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)+\frac{c}{a}\left(\frac{b'^2}{a'^2}-\frac{2c'}{a'}\right)\right]$$

معادلهٔ مطلوب: $\Rightarrow Z^2 - SZ + P = 0$

۴ـ سه عدد مطلوب جملاتی از یک تصاعد هندسی می‌باشند بنابراین به‌صورت a و aq و aq^2 درنظر می‌گیریم و با توجه به شرایط مسئله داریم:

$2(aq + 8) = a + aq^2$

$(aq + 8)^2 = a(aq^2 + 64) \Rightarrow$

$64 + 16aq = 64a \Rightarrow q = \frac{4a-4}{a} \xrightarrow{\text{(جایگزین در معادله اول)}}$

$9a^2 - 40a + 16 = 0 \Rightarrow a = 4$ یا $\frac{4}{9}$

پس مسئله دو سری جواب دارد:

$\Rightarrow 4, 12, 36$ یا $\frac{4}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{100}{9}$

۵ـ $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\log_2^{\sin x}}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow 2-2\log_2^{\sin x}=3\Rightarrow 2\log_2^{\sin x}=-1\Rightarrow \log_2^{\sin x}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x=(2)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x_1 = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ یا $x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} (k\in N)$

۶ـ $tgx = 2\cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2\cos\frac{x}{2}$

$\xrightarrow{\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right)} \sin x = 2\cos x\cos\frac{x}{2}$

$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos x\cos\frac{x}{2} = 0$

$2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos x\right) = 0 \Rightarrow$

$2\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow \cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$

یا $x_1 = 2k\pi+\pi$

$\sin\frac{x}{2}-\cos x=0 \Rightarrow \cos x=\sin\frac{x}{2}$

$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} \\ x=2k\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{3x}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{2}=2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2=\frac{4k\pi}{3}+\frac{\pi}{3} \\ x_3=4k\pi-\pi\end{cases}$

۷ـ فرض می‌کنیم $\sin x+\cos x=A$ باشد پس داریم:

$\sin x\cos x = \frac{A^2-1}{2}$

$m=\frac{2\left[1-(\sin^3x+\cos^3x)\right]}{\sin x+\cos x+2}=$

$\frac{2\left[1-(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)\right]}{\sin x+\cos x+2}$

$=\frac{2\left[1-A\left(1-\frac{A^2-1}{2}\right)\right]}{A+2}=\frac{2\left(1-\frac{3A-A^3}{2}\right)}{A+2}=\frac{2-3A+A^3}{A+2}$

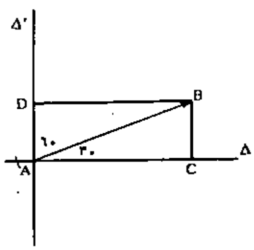
$=\frac{(A-1)^2(A+2)}{A+2}\xrightarrow{(A+2\neq 0)} m=(A-1)^2=(\sin x+\cos x-1)^2$

حل مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ـ بنا به قضیهٔ اندازهٔ جبری تصویر یک بردار بر یک محور می‌توان نوشت:

$AC = \left|\vec{AB}\right|\cos 30 = 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

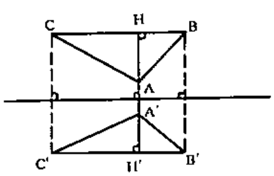
$AD = \left|\vec{AB}\right|\cos 60 = 10\times\frac{1}{2} = 5$



۲ـ قرینهٔ محوری هر مثلث با آن مثلث برابر است یعنی $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ و اجزاء متناظر این دو مثلث نیز با هم مساوی می‌باشند بنابراین:

$BC = B'C' = 6\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 8\sqrt{2} = 48$

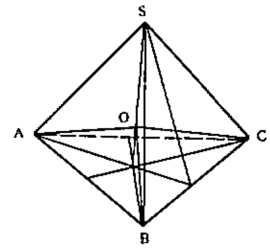


امّا میانهٔ AM مثلث ABC را به دو مثلث معادل ABM و ACM افراز می‌کند، پس:

$S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 24$

۳ ـ مرکز کرهٔ محیطی چهاروجهی منتظم، محل تلاقی صفحه‌های عمود منصف یالهای چهاروجهی است. اگر این نقطه را O و چهاروجهی منتظم را S_{ABC} بنامیم داریم:

$OS = OA = OB = OC$



از چهاروجهی منتظم به یال a اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطی $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ است پس در این مسأله داریم: $a = 4\sqrt{3} \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$

و از آنجا حجم کرهٔ محیطی برابر است با:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 72\pi\sqrt{2}$$

۴ـ

$$(fog)(x) = f\left(g(x)\right) = \frac{g(x)-2}{g(x)+1} =$$

$$-f(x) = -\frac{x-2}{x+1} \Rightarrow \frac{g(x)-2}{g(x)+1} = \frac{-x+2}{x+1} \Rightarrow$$

$$xg(x) - 2x + g(x) - 2 = -xg(x) + 2g(x) - x + 2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x+4}{2x-1} \xrightarrow{(2x-1\neq 0)} D_g = IR - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

۵ ـ داریم: $y' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ و $y'' = -\sin x = \sin(x+\frac{2\pi}{2})$ و ... و درنتیجه داریم:

$$y^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

۶ـ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^{x+1}+3^{x+1}}{5^{x-1}+3^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{x+1}\left(1+(\frac{3}{5})^{x+1}\right)}{5^{x-1}\left(1+(\frac{3}{5})^{x-1}\right)}$$

اگر $x \to +\infty$ حد عبارات $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}$ و $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}$ بـه سمت صفر میل می‌کنند و در نتیجه داریم:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{x+1}}{5^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x \times 5}{5^x \times 5^{-1}} = 25$$

به طریق مشابه داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^{x+1}+3^{x+1}}{5^{x-1}+3^{x-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^{x+1}\left((\frac{5}{3})^{x+1}+1\right)}{3^{x-1}\left((\frac{5}{3})^{x-1}+1\right)}$$

اگر $x \to -\infty$ حد عبارات $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}$ و $\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}$ بـه سمت صفر میل می‌کنند و درنتیجه داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^{x+1}}{3^{x-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^x \times 3}{3^x \times 3^{-1}} = 9$$

۷ـ

$$y = (xx^2x^3 \ldots x^n)^{\frac{1}{2+4+6+\ldots+2n}} \quad (n\in N \text{ و } x\in IR^+)$$

$$y = (x^{1+2+3+\ldots+n})^{\frac{1}{2(1+2+3+\ldots+n)}}$$

(از طرفی می‌دانیم: $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$)

بنابراین داریم:

$$y = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{2\frac{n(n+1)}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}$$

لذا:

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۸ ـ الف)

$$\text{طرف اول} = \cos a\cos 2a - \cos a\sin 2a - \sin a\cos 2a + \sin a\sin 2a + \sin 3a$$
$$= \cos(2a-a) - (\cos a\sin 2a + \sin a\cos 2a) + \sin 3a$$
$$= \cos a - \sin 3a + \sin 3a = \cos a$$

ب)

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}\right)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\beta}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{-\left(\frac{1}{2}-\cos\beta\right)}{\frac{1}{2}+\cos\beta} = \frac{\cos\beta-\frac{1}{2}}{\cos\beta+\frac{1}{2}} = \frac{2\cos\beta-1}{2\cos\beta+1}$$

۹ ـ الف) باتوجه به تساوی $\cot g\alpha - tg\alpha = 2\cot g2\alpha$ داریم:

$$\cot gx = tg20^\circ + 2tg40^\circ + 2(\cot g40^\circ - tg40^\circ)$$
$$= tg20^\circ + 2tg40^\circ + 2\cot g40^\circ - 2tg40^\circ$$
$$= tg20^\circ + 2\cot g40^\circ = tg20^\circ + \cot g20^\circ - tg20^\circ$$
$$= \cot g20^\circ$$
$$\Rightarrow \cot gx = \cot g20^\circ \Rightarrow x = k\pi + 20^\circ$$

ب)

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$$

$$2\sin\frac{x+2x}{2}\cos\frac{x-2x}{2} = 2\cos\frac{x+2x}{2}\cos\frac{x-2x}{2}$$

$$\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$$

$\cos\frac{x}{2} = 0$ یا $\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0$

$$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = 2k\pi + \pi$$

$$\sin\frac{3x}{2} = \cos\frac{3x}{2} \Rightarrow tg\frac{3x}{2} = 1 = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ می‌دانیم که $y'_x = \frac{y'_\alpha}{x'_\alpha}$ و $x'_y = \frac{x'_\alpha}{y'_\alpha}$ پس:

$$y'_x = \frac{y'_\alpha}{x'_\alpha} = \frac{-2\sin 2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{-\sin 2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = -2\sin\alpha$$

$$x'_y = \frac{x'_\alpha}{y'_\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{-2\sin 2\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{1}{y'_x}$$

۲ ـ تابع $y = \frac{ax+3}{x+a+2}$ هموگرافیک است و برای بحث در جهت تغییرات آن مشتق تابع را تعیین علامت کنیم.

$$y' = \frac{a^2+2a-3}{(x+a+2)^2} \quad y' = 0 \Rightarrow a^2+2a-3 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1, a = -3$$

a	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y		صعودی	مقدارثابت $y=-3$	نزولی	مقدارثابت $y=1$	صعودی	

$$y = \frac{ax+3}{x+a+2} \Rightarrow xy + ay + 2y = ax + 3$$
$$\Rightarrow a(y-x) + xy + 2y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ xy + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+2x-3=0 \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow N(1,1) \\ x = -3 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow N'(-3,-3) \end{cases}$$

نقاط ثابت

۳ ـ تمام خطوط قائم بر یک دایره از مرکز آن دایره می‌گذرند پس برای اینکه خط Δ قائم بر دایره باشد باید مختصات مرکز دایره در معادلهٔ خط Δ صدق کند.

$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \Rightarrow$ مرکز دایره $C(2,-1)$

در معادلهٔ ۸

$$C(۲,-۱) \longrightarrow (a+۱)(۲)+(-۱)+۲a=۰ \Rightarrow$$

$$۲a+۲-۱+۲a=۰ \Rightarrow ۴a=-۱ \Rightarrow \boxed{a=-\frac{۱}{۴}}$$

۴ـ $C: x^۲+y^۲-۲y=۰ \Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۱ \Rightarrow c_۱(۰,۱), R=۱$

$$C': x^۲+y^۲-۶x-۲y+۶=۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۴ \Rightarrow c_۲(۳,۱), R'=۲$$

خط المرکزین $d=c_۱c_۲=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۱-۱)^۲}=|۳-۰|=۳$

$$\Rightarrow d=R+R' \Rightarrow ۳=۱+۲ \Rightarrow ۳=۳ \Rightarrow$$

دو دایره مماس برونی هستند

طول مماس مشترک خارجی دو دایره $=TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$

$$=\sqrt{۹-(۱-۲)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۵ـ برای محاسبهٔ $\int \frac{x+۲}{\sqrt{x-۱}}dx$ فرض می‌کنیم $\sqrt{x-۱}=t$ باشد.
حال x و dx را برحسب t محاسبه می‌کنیم و در انتگرال فوق قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{x-۱}=t \Rightarrow x-۱=t^۲ \Rightarrow x=t^۲+۱ \Rightarrow dx=۲tdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+۲}{\sqrt{x-۱}}dx=\int \frac{t^۲+۱+۲}{\not t}\times ۲\not t dt=\int ۲(t^۲+۳)dt$$

$$=۲\left(\frac{t^۳}{۳}+۳t\right)+C \qquad t=\sqrt{x-۱} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x+۲}{\sqrt{x-۱}}dx=\frac{۲}{۳}(x-۱)\sqrt{x-۱}+۶\sqrt{x-۱}+c$$

. برای محاسبه تابع اولیه $\frac{۳x+۵}{(x-۲)^۴}$ فرض می‌کنیم $t=x-۲.$ باشد در این صورت داریم:

$$x=t+۲ \Rightarrow y=\frac{۳x+۵}{(x-۲)^۴}=\frac{۳(t+۲)+۵}{t^۴}=\frac{۳t+۱۱}{t^۴}=\frac{۳t}{t^۴}+\frac{۱۱}{t^۴}$$

$$=\frac{۳}{t^۳}+\frac{۱۱}{t^۴}=۳t^{-۳}+۱۱t^{-۴} \Rightarrow Y=\int (۳t^{-۳}+۱۱t^{-۴})dt=$$

$$\frac{-۳}{۲t^۲}-\frac{۱۱}{۳t^۳}+c$$

$$t=x+۲ \Rightarrow y=\frac{-۳}{۲(x-۲)^۲}-\frac{۱۱}{۳(x-۲)^۳}+c$$

تفریح اندیشه ۴



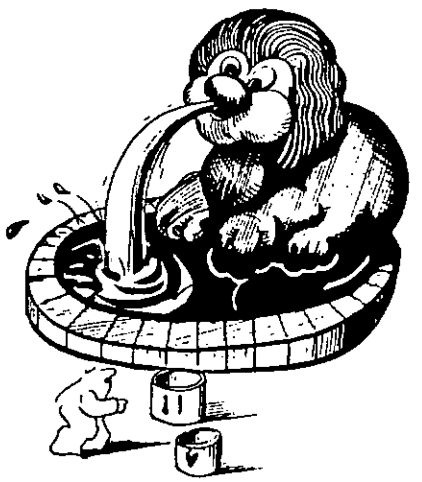
شش کفش از کفشهای فوق به یک گروه منطقی تعلق دارند. یکی بی‌خود داخل شده است. کدام و چرا؟

جواب در صفحهٔ ۹۶

تفریح اندیشه ۵

مهرداد جلوی چشمه آب است. او دو ظرف خالی، با گنجایش ۱۱ لیتر و ۷ لیتر در اختیار دارد.
با انجام چند عمل می‌تواند در یکی از این دو ظرف، ۶ لیتر آب داشته باشد؟

ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور از کتاب بازیهای عددی



جواب در صفحهٔ ۹۶

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱ :

هشت حرف EGIS و LOAM همه متفاوتند؛ بنابراین چهار حرف کلمهٔ مطلوب در میان آنهاست در این صورت در PLUG ، G ، L، و در ANEW ، A و E حروف مطلوبند.

حروف اوّل چهار کلمهٔ داده شده شامل A ، E ، و L است، بنابراین باید G حرف اوّل کلمهٔ مطلوب باشد. سومین حرف کلمات داده شده شامل A و E است، بنابراین L حرف سوم کلمهٔ مطلوب است. اما GELA یک «کلمهٔ متداول انگلیسی» نیست، بنابراین پاسخ GALE* است.

جواب ۲ :

حلّ: هنگام اعلام ساعت ۵، چهار فاصله زمانی بین ضربات وجود دارد. پس هر فاصله زمانی ۱/۵ ثانیه طول می‌کشد (۱/۵ = ۶:۴) و در مورد ساعت ۹ نیز ۸ فاصله زمانی بین ضربه‌ها موجود است پس هر فاصله زمانی بین هر دو ضربه ۱/۵ ثانیه است (۱/۵ = ۸ ÷ ۱۲). برای ساعتهای دیگر هم فاصلهٔ زمانی بین هر دو ضربه متوالی ۱/۵ ثانیه می‌باشد. پس اگر از تعداد ضربه‌های زده شده در هر ساعت یکی کم کنیم و مجموع بقیّه ضربه‌های زده شده در ۲۴ ساعت را حساب کنیم تعداد فاصله‌های زمانی در ۲۴ ساعت به‌دست می‌آید:

۲(۰+۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱)=۱۳۲

تعداد فاصله‌های زمانی ۱۳۲ × ۱/۵ = ۱۹۸ ثانیه
۳ دقیقه و ۱۸ ثانیه

جواب ۳ :

۳ + ۳ + ۳ : ۳ = ۳

((۳ × ۳) + ۳) : ۳ = ۴

۳ + ۳ − (۳ : ۳) = ۵

(۳ + ۳) + (۳ − ۳) = ۶

۳ + ۳ + (۳ : ۳) = ۷

۳ × ۳ − (۳ : ۳) = ۸

۳ × ۳ + (۳ − ۳) = ۹

(۳ × ۳) + (۳ : ۳) = ۱۰

جواب ۴ :

سه کفش پاشنه کوتاه و بند دارند، و سه کفش پاشنه بلند و بدون بندند. هفتمی پاشنه بلند و بنددار است.



جواب ۵ :

جدول زیر نحوهٔ انجام کار را نشان می‌دهد:

ظرف ۷لیتری	۷	۷	۰	۷	۳	۳	۰	۷	۰	۷	٦
ظرف ۱۱لیتری	۱۱	۰	۷	۷	۱۱	۰	۳	۳	۱۰	۱۰	۱۱

In the name of God

Borhān
Vol. 3. No. 3
Serial numbers ; 10
Spring 1994

Borhān is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

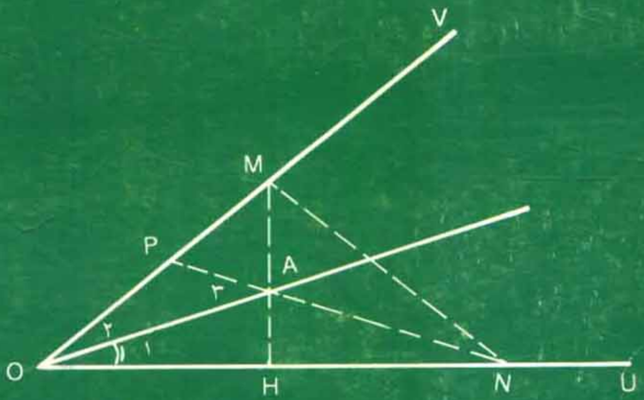
All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 268 , Iranshahr - e - Shomali Ave. Tehran , Iran. Post Code: 15875

Contents:

1. The first word
2. You, too, — Parviz Shahriāri
3. Asymptotes — A. Ghandehāri
4. Instruction of ... — Hamid Rezā Amiri
5. A brief history ...
6. Fundamental concepts ... — Parviz Shahriāri
7. Is there an algebraic function which is periodic? — Ahmad Sharafeddin
8. Pythagoras and intelligence testing of childs. — Hassan Nassirniā
9. The apparatus of focus finding of ellips — Maryam Rafati and Elade Tajic
10. Orthic triangile — Sasān Esmaeily Shāhroodi
11. Critic of new mathematics tests. — Behrooz Nozari
12. Solving of a fundamental ...
13. Propositional functions and quantifiers. — Gholam Reza Yassipour
14. Descrete mathematics
15. Short arthicles of ...
16. Some reports of 25th Annual Iranian Mathematics Conferece
17. Using computer in solving ... — H. E. Gholzom
18. Locus — M. H. Rostami
19. Answers to letters
20. Solutions of contest problems
21. Problems
23. Solutions and hints of problems — Amiri, Ghandehāri, Rostami, Hashemi

تقسیم زاویه به سه بخش برابر

از ابوالحسن شمسی هروی (سدهٔ چهارم هجری قمری)



تقسیم یک زاویهٔ غیرمشخص به سه بخش برابر، یکی از سه مسأله مشهوری است که، به کمک خط کش و پرگار، قابل حل نیست. با وجود این، راه حلهای تقریبی بسیاری (بویژه از ریاضی‌دانان مسلمان ایرانی) برای آن وجود دارد. یکی از این راه حلها که متعلق به ابوالحسن شمسی هروی است و ابوالحسن علی فرزند احمد معروف به «نسوی» آنرا درکتاب خود آورده‌است، در شکل دیده می‌شود:

ازنقطهٔ دلخواه M واقع برضلع OV، عمود MH را برضلع OU (از زاویهٔ UOV) وارد و HN را برابر OH جدا می‌کنیم. اکنون لبهٔ خط کش را روی نقطهٔ N قرار می‌دهیم و با دوران لبهٔ خط کش دور نقطهٔ N، نقطهٔ P را روی ضلع OV طوری پیدا می‌کنیم که طول پاره‌خط راست OP با طول پاره‌خط راست PA برابر باشد (نقطهٔ A، روی عمود MH است). اگر نیم خط راست OA را رسم کنیم، زاویه ۱ برابر یک سوم زاویهٔ UOV خواهد بود، زیرا زاویهٔ ۲ با زاویهٔ ۳ برابر، و زاویهٔ ۳ اندازه‌ای دو برابر زاویهٔ ۱ دارد.

در این رسم، تنها از خط کش و پرگار استفاده می‌شود. چرا این راه حل تقریبی است؟ آیا این راه‌حل‌را می‌توان، یک ساختمان‌هندسی، به‌کمک خط کش و پرگار دانست؟